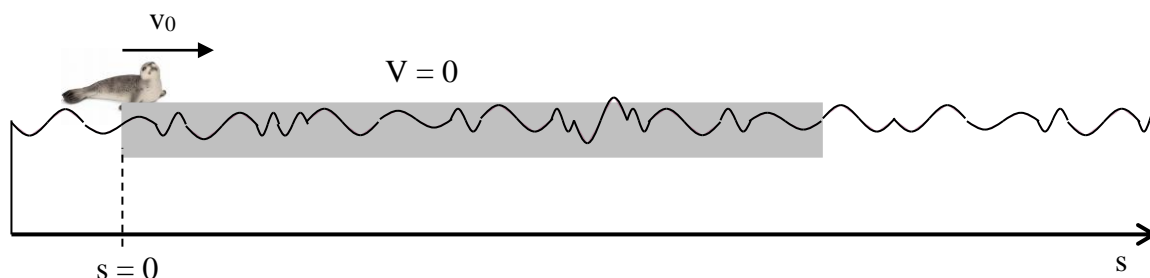


Problem komputerowy Nr 2.3.06  
 „Zderzenie niesprężyste - przekaz pędu i energii kinetycznej”

**Wstęp: Naukowy spór o zasady zachowania**

Uczniowie na lekcji fizyki rozwiązywali nieco zmienioną wersję zadania 6. z §2.2.6 e-podręcznika: „Foka o masie  $m = 100 \text{ kg}$  płynie z prędkością  $v_0 = 8 \text{ m/s}$  i wślizguje się na fragment lodowej kry, początkowo nieruchomy względem wody (rys. 1.). Oblicz końcową prędkość, jaką uzyskuje kra (wraz z foką) przy założeniu, że można pominąć siłę oporu wody. Masa kry  $M = 8000 \text{ kg}$ .”.



Rys. 1. Foka wślizguje się na krę z prędkością  $v_0$ . Początkowa prędkość kry  $V = 0$ .

Okazało się, że jedni uczniowie stosowali przy rozwiązywaniu zadania zasadę zachowania pędu (w postaci skalarnej, co jest tu dopuszczalne):

$$m \cdot v_0 + M \cdot 0 = (m + M) \cdot V \Rightarrow V = v_0 \cdot \frac{m}{m + M} \quad (1)$$

Daje to wartość końcowej prędkości kry  $V \approx 0,0988 \text{ m/s}$ .

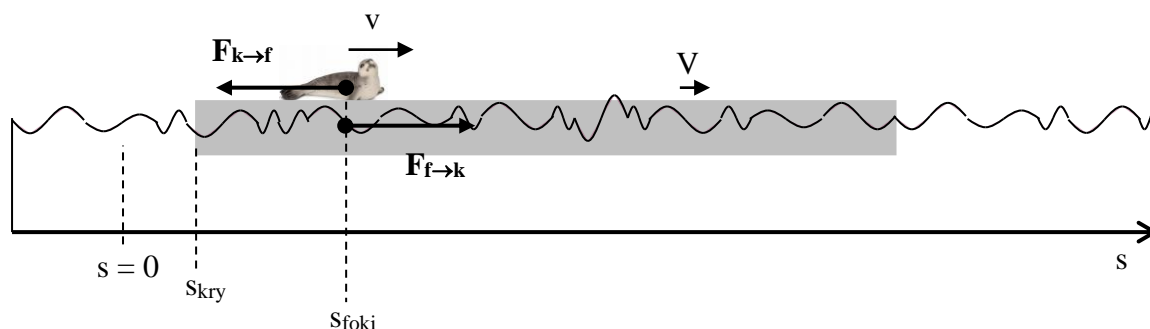
Inni uczniowie z kolei stosowali zasadę zachowania energii kinetycznej:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 = \frac{1}{2} (m + M) \cdot V^2 \Rightarrow V = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{m + M}} \quad (2)$$

To zaś daje wartość prędkości kry  $V \approx 0,889 \text{ m/s}$ .

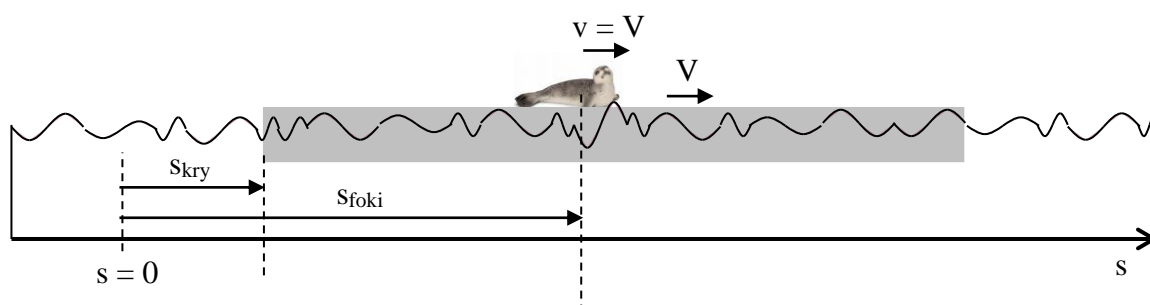
Są to dwa istotnie różne wyniki, pomiędzy którymi należy rozstrzygnąć. Oto krótki przegląd argumentacji zwolenników obu metod, którą przedstawili podczas dyskusji na lekcji.

1. Uczniowie powoływali się na fakt, że foka i kra stanowią - w warunkach zadania - układ zamknięty (izolowany), co upoważnia do stosowania wybranej zasady zachowania.
2. Niektórzy powoływali się też na III zasadę dynamiki Newtona: foka ślizgając się po krze jest poddana sile tarcia, która spowalnia jej ruch; jednocześnie foka działa na krę taką samą siłą tarcia (lecz przeciwnie zwróconą) i wprawia krę w ruch przyspieszony. (rys. 2.)



Rys. 2. Prędkość foki  $v$  maleje pod wpływem siły  $F_{k \rightarrow f}$ , z jaką kra działa na fokę. Analogicznie, prędkość kry  $V$  rośnie pod wpływem siły  $F_{f \rightarrow k}$ . Jednak prędkość  $v$  jest ciągle większa niż  $V$ , więc w każdym odstępie czasu  $\Delta t$  droga przebywana przez fokę (względem wody) jest dłuższa od drogi przebywanej przez krę.

3. Wnioski wyciągane przez zwolenników poszczególnych równań były jednak nieco różne:
  - a. stosujący równanie (1) twierdzili, że skoro foka i kra oddziałują wzajemnie siłami o jednakowej wartości (oraz przeciwnie skierowanymi), to powinny przekazywać sobie jednakowe co do wartości i przeciwnie skierowane pędy;
  - b. korzystający z równania (2) uważali zaś, że oddziaływanie jednakowymi co do wartości siłami pociąga za sobą jednakowe co do wartości zmiany energii kinetycznych oddziałujących obiektów: ile energii kinetycznej utraci foka, tyle uzyska kra.
4. Wszyscy byli zgodni co do tego, że siła tarcia, o której mowa, to siła tarcia dynamicznego, której działanie ustaje, gdy prędkości foki i kry osiągną jednakowe wartości. Od tego momentu układ „foka + kra” porusza się jako całość ruchem jednostajnym, a wspólna końcowa prędkość  $V = v$  jest właśnie szukaną w zadaniu prędkością (rys. 3.).



Rys. 3. Prędkość foki  $v$  i prędkość kry  $V$  uzyskały jednakowe wartości, więc działanie siły tarcia dynamicznego ustało. Całkowita droga przebyta przez fokę jest dłuższa od drogi przebytej przez krę.

Po wysłuchaniu dyskusji, nauczycielka stwierdziła, że rację mają zwolennicy równania (1). Przypomniała, że zasada zachowania pędu obowiązuje w każdym oddziaływaniu w obrębie zamkniętego układu, zaś zasada zachowania energii mechanicznej tylko wtedy, gdy pomiędzy składnikami układu działają wyłącznie siły zachowawcze (§2.3.2 oraz §2.3.4 e-podręcznika). W przypadku ślizgu foki po krze występuje siła tarcia dynamicznego, które nie jest zachowawcze. Wyklucza to stosowanie zasady zachowania energii mechanicznej do tego zderzenia.

Warunki, w których obowiązywałaby zasada zachowania energii kinetycznej byłyby jeszcze bardziej specyficzne: przy zachowanej energii mechanicznej musiałoby dojść do odtworzenia pierwotnego stanu energii potencjalnej układu. Przykładem takiego procesu jest zderzenie sprężyste, w którym początkowa energia kinetyczna ciał zamienia się w energię potencjalną (np. związaną z ich odkształceniem). W drugiej części zderzenia zgromadzona energia potencjalna zostaje w całości przekształcona z powrotem w energię kinetyczną, a zderzające się ciała przyjmują swoje pierwotne kształty.

Nauczycielka podkreśliła jednak, że argumenty przedstawione przez zwolenników równania (2) są na tyle interesujące i sugestywne, że warto poświęcić trochę wysiłku na szczegółowe objaśnienie, dlaczego są błędne. Zaproponowała więc stworzenie, za pomocą arkusza kalkulacyjnego, matematycznego modelu ślizgu foki po krze. Pokazywałby on, jak stopniowo zmieniają się prędkości, pędy i energie kinetyczne foki oraz kry. Model ten powinien wyjaśnić, dlaczego w takim zderzeniu zachowany jest całkowity pęd układu, zaś jego energia kinetyczna ulega częściowemu rozproszeniu. Podstawową cechą modelu będzie ujawnienie w nim roli siły tarcia w przebiegu zderzenia foki z krą.

Uczniowie przystali na tę propozycję. Ze względu na stopień skomplikowania problemu postanowiono jednak podzielić rozumowanie i realizację informatyczną na trzy części. W pierwszej przedstawiony będzie związek siły z przyspieszeniem i prędkością, w drugiej związek siły z pędem i jego przekazem, zaś w trzeciej związek siły z pracą i z przekazem energii kinetycznej oraz jej rozpraszaniem.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



*Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego*

## Część 1. Przyspieszenie i prędkość foki oraz kry.

Postanowiono przyjąć jako wyjściowe parametry do opracowywanego modelu dane liczbowe z rozwiązywanego zadania. Dane te uzupełniono założoną wartością współczynnika tarcia dynamicznego foki o krę:  $\mu = 0,2$ . Spore rozbieżności poglądów na temat wartości  $\mu$  pozostawiono bez rozstrzygnięcia - spodziewano się, że uzyskane wyniki nie powinny istotnie zależeć od tej wartości.

Istotą modelu będzie przedstawienie stanu ruchu foki oraz kry w poszczególnych chwilach. Począwszy od chwili początkowej  $t_0 = 0$ , w ramach modelu obliczane będą parametry ruchu (w tym prędkości, pędy i energie kinetyczne) foki i kry. Takie obliczenia przeprowadzane będą kolejno dla chwil  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ , itd.

W modelu postanowiono wykorzystać matematyczny opis ruchu jednostajnie zmiennego - siła tarcia pomiędzy foką a krą jest stała w czasie i powoduje ona jednostajnie opóźniony ruch foki i jednostajnie przyspieszony ruch kry. (rys. 2.). Oba te ruchy kończą się jednocześnie (i przechodzą w ruch jednostajny) w chwili, gdy prędkości foki i kry się wyrównają (rys. 3.).

W poszczególnych odstępach czasu  $\Delta t$  zapisać więc można:

$$\Delta v = a_f \cdot \Delta t \quad \text{i} \quad \Delta V = a_k \cdot \Delta t, \quad (3a; 3b)$$

gdzie przyspieszenie foki:

$$a_f = -F/m = -\mu \cdot g, \quad (4)$$

zaś przyspieszenie kry:

$$a_k = +F/M = +\mu \cdot g \cdot (m/M). \quad (5)$$

Symbolem  $F$  oznaczono tu wartość siły tarcia:

$$F = \mu \cdot mg \quad (6)$$

Na koniec ustalono, że jako odstęp czasu  $\Delta t$  przyjęta zostanie jedna dziesiąta pewnego czasu charakterystycznego, możliwego do wskazania w tym problemie. Czas  $t_{\text{char}}$  to taki, po którym foka zatrzymałaby się względem wody pod wpływem siły tarcia  $F$ ; wyraża się on wzorem:

$$t_{\text{char}} = -\frac{v_0}{a_f} = \frac{m \cdot v_0}{F} \quad (7)$$

Ponieważ model „kończy pracę” w chwili, gdy foka zatrzymuje się względem kry, to wszystkie czasy w nim występujące będą na pewno mniejsze od  $t_{\text{char}}$ .

Model będzie miał postać tabeli, w której w funkcji czasu  $t$  przedstawione zostaną chwilowe wartości prędkości foki  $v$  oraz kry  $V$ . Na bazie tabeli zostaną sporządzone odpowiednie wykresy. Parametry modelu zostaną przedstawione w oddzielnych komórkach arkusza, by umożliwić śledzenie wpływu zmian ich wartości na przewidywania modelu.

## W pracowni informatycznej - arkusz „Prędkość”.

- W pierwszej kolumnie arkusza „Prędkość” umieść wartości parametrów zagadnienia. Wszystkie wartości wstawiaj w jednostkach SI, wpiszuj te jednostki przy oznaczeniu wielkości.
  - Dla foki: masa  $m = 100$  kg i początkowa prędkość  $v_0 = 8$  m/s.
  - Dla kry: masa  $M = 8000$  kg i początkowa prędkość  $V_0 = 0$  m/s.
  - Dla siły: współczynnik tarcia  $\mu = 0,2$  i wartość siły zgodnie ze wzorem (6); przyjmij, dla uproszczenia,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.
  - Dla czasu:  $t_{\text{char}}$  zgodnie ze wzorem (7) i wartość  $\Delta t = 0,1 \cdot t_{\text{char}}$ . Zapoznaj się (na tym etapie pobieżnie) z problematyką przedstawioną w punkcie 6b i pozostaw miejsce dla ewentualnych kolejnych wartości  $\Delta t'$ ,  $\Delta t''$ , itd.

	A	B	C
1			
2			
3		m [kg]	
4		100	
5		v <sub>0</sub> [m/s]	
6		8	
7			
8		M [kg]	
9		8000	
10		V <sub>0</sub> [m/s]	
11		0	
12			
13		μ [.]	
14		0,2	
15		F <sub>t</sub> [N]	
16		200	
17			
18		t <sub>char</sub> [s]	
19		4	
20		Δt [s]	
21		0,4	
22		0,04	
23		0,004	
24		0,0004	
25			

- Przygotuj tabelę:

	A	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1										
2			foka				kry			
3		t	v	a	Δv	V	a	ΔV		
4		[s]	[m/s]	[m/s <sup>2</sup> ]	[m/s]	[m/s]	[m/s <sup>2</sup> ]	[m/s]		

W kolumnie t[s] umieść bieżący czas. Rozpocznij od czasu  $t = 0$ , który umieścisz w umownym „wierszu zerowym” (komórka D5).

W każdym następnym wierszu umieść wartość większą o  $\Delta t$  od poprzedniej.

$$D6: =D5+\$B\$21$$

Przygotuj w ten sposób kilka wierszy - nie więcej, niż 10, by czas w kolumnie ‘t’ nie przekroczył wartości  $t_{\text{char}}$ .

- Kolejne trzy kolumny zawierać będą informacje o ruchu foki.
  - W pierwszej z nich umieszczone zostaną malejące wartości  $v$  - prędkości foki. W „zerowym wierszu” wprowadź wartość  $v_0$  z pierwszej kolumny.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$$F5: =\$B\$6$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

Kolejne wiersze zostaną wypełnione formułą:

$$F6: =F5+H5$$

- b) Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $a_f$  - przyspieszenia foki obliczonego zgodnie ze wzorem (4).

$$G5: =-\$B\$16/\$B\$4$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych.

*Uwaga: zamiast tej kolumny można umieścić przyspieszenie foki w jednej komórce w obszarze przeznaczonym na parametry foki (punkt 1a.) i odwoływać się do tej komórki.*

- c) W trzeciej kolumnie umieścisz  $\Delta v$  - jednakowe, ujemne przyrosty prędkości foki, zgodnie ze wzorem (3a).

$$H5: =G5*\$B\$21$$

Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Przyrosty te posłużą do obliczenia prędkości w kolumnie ‘v’ w kolejnych wierszach.

- d) Przygotuj zgodnie z tym przepisem kilka wierszy - nie więcej, niż liczba przygotowanych wierszy kolumny ‘t’.

4. Na podobnych zasadach jak wyżej, trzy kolumny zawierać będą informacje o ruchu kry.

- a. W pierwszej z nich umieszczone zostaną rosnące wartości  $V$  - prędkości kry. W „zerowym wierszu” wprowadź wartość  $V_0$  z pierwszej kolumny; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$J5: =\$B\$11$$

Kolejne wiersze zostaną wypełnione formułą:

$$J6: =J5+L5$$

- b. Druga z nich zawierać będzie jednakowe, dodatnie wartości  $a_k$  - przyspieszenia kry obliczonego zgodnie ze wzorem (5).

$$K5: =+\$B\$16/\$B\$9$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych.

*Uwaga: zamiast tej kolumny można umieścić przyspieszenie kry w jednej komórce w obszarze przeznaczonym na parametry kry (punkt 1b.) i odwoływać się do tej komórki.*

- c. W trzeciej kolumnie umieścisz  $\Delta V$  - jednakowe, dodatnie przyrosty prędkości kry, zgodnie ze wzorem (3b).

$$L5: =K5*\$B\$21$$

Formuła z „wiersza zerowego” zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Przyrosty te posłużą do obliczenia prędkości w kolumnie ‘V’ w kolejnych wierszach.

- d. Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle samo wierszy, ile w punkcie 3.

5. Sformatuj poszczególne kolumny tabeli w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.

6. Przeciągnij formuły wierszami aż do uzyskania wiersza, w którym prędkość foki osiągnie wartość mniejszą od prędkości kry. Ten „wiersz nadmiarowy” jest ewidentnie niezgodny z



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



prawami fizyki - nie mieści się on w dziedzinie modelu. Wiersz poprzedzający „wiersz nadmiarowy” będziemy nazywać „wierszem końcowym” modelu.

- Sprawdź, czy prędkość foki w „wierszu końcowym” jest równa prędkości kry w tym wierszu z dokładnością taką, która Cię zadowala. Jeśli tak, to przejdź do punktu 7. Jeśli zaś nie, to wykonaj poniższe polecenia, których celem jest zwiększenie dokładności modelu, czyli zmniejszenie różnicy pomiędzy prędkością foki a prędkością kry w „wierszu końcowym”.
- Przygotuj komórkę dla nowego odstępu czasowego  $\Delta t'$ , który będzie stanowił jedną dziesiątą dotychczasowego odstępu  $\Delta t$ .

	A	B	C
17			
18		tchar [s]	
19		4	
20		$\Delta t$ [s]	
21		0,4	
22		0,04	
23		0,004	
24		0,0004	
25			

$$\Delta t'[\text{s}] \text{ B22: } B21/10$$

$$\Delta t'[\text{s}] \text{ B23: } B22/10$$

$$\Delta t'[\text{s}] \text{ B24: } B23/10$$

W „wierszu końcowym” zmodyfikuj komórki, w których obliczane są  $\Delta v$  i  $\Delta V$  w taki sposób, by zawierały one odstęp  $\Delta t'$  zamiast dotychczas używanego odstępu  $\Delta t$ .

- W „wierszu nadmiarowym” zmodyfikuj komórkę, w której obliczany jest nowy czas t w taki sposób, by zawierała ona odstęp  $\Delta t'$  zamiast dotychczasowego odstępu  $\Delta t$ .
  - Przeciągnij z „wiersza końcowego” do „wiersza nadmiarowego” formuły z kolumn ‘ $\Delta v$ ’ i ‘ $\Delta V$ ’. W ten sposób „wiersz nadmiarowy” staje się „wierszem pierwszym” obszaru tabeli o dokładności obliczeń zwiększonej o jeden rząd wielkości.
  - Dopasuj liczbę wyświetlanych cyfr znaczących do nowej dokładności. Przeciągnij formuły z „wiersza pierwszego” aż do uzyskania wiersza, w którym prędkość foki ponownie osiągnie wartość mniejszą od prędkości kry. Rozważ oznaczenie nowego obszaru tabeli innym kolorem tła niż obszaru poprzedniego. Dalej postępuj zgodnie z zapisem punktu 6.
8. Sporządź wykres, na którym przedstawisz zależność obu prędkości - v i V - od czasu.

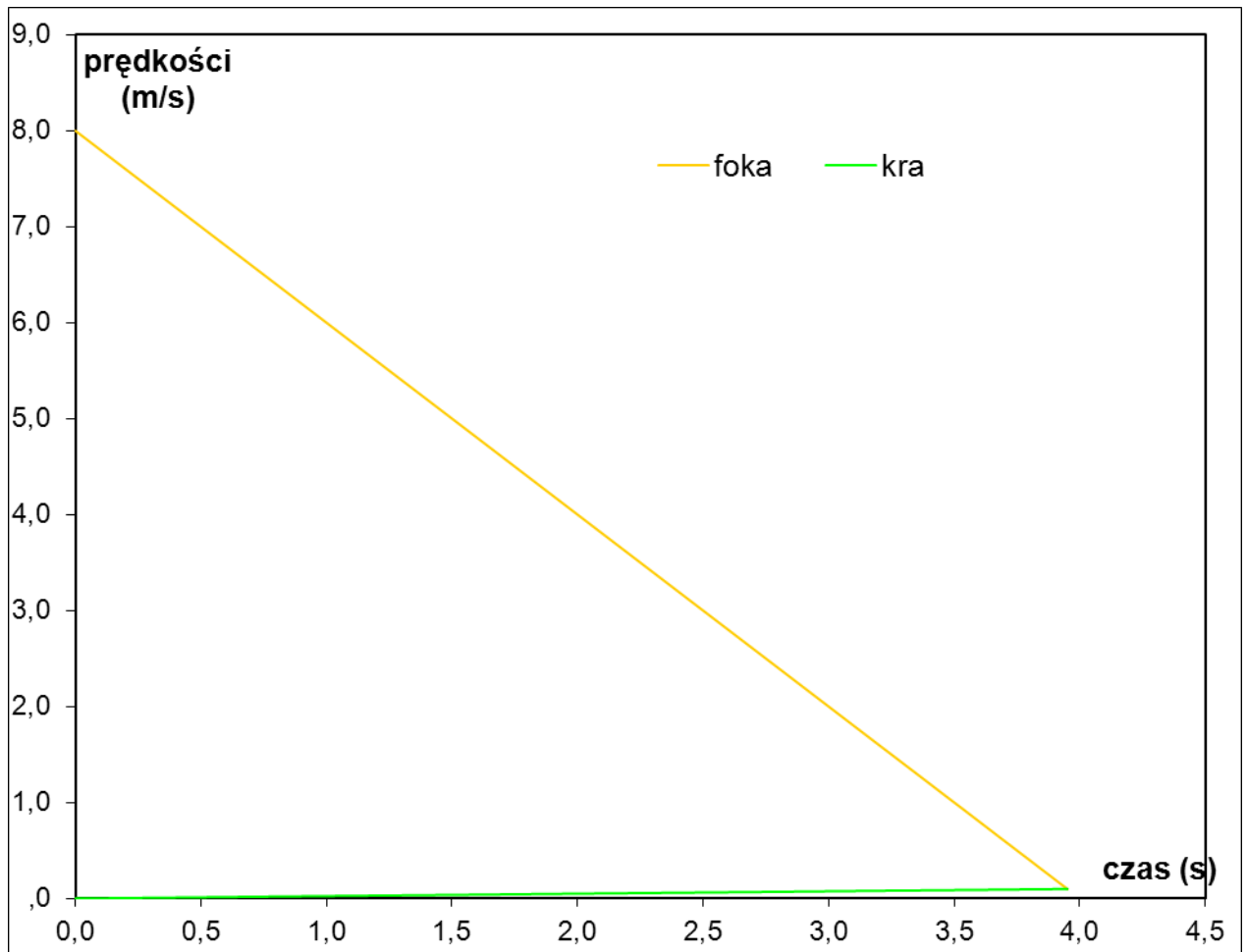


KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



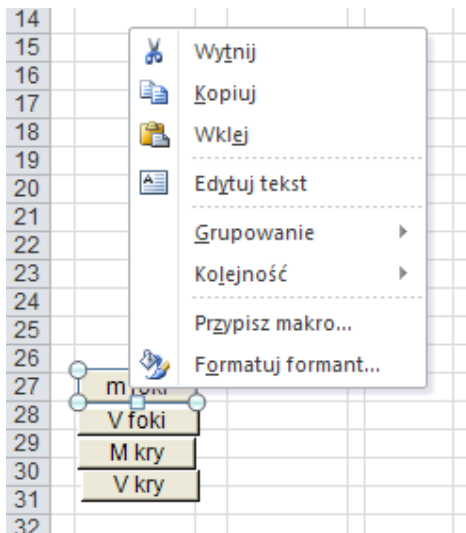


9. Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przygotuj 4 przyciski (Karta Developer/Wstaw formanty)

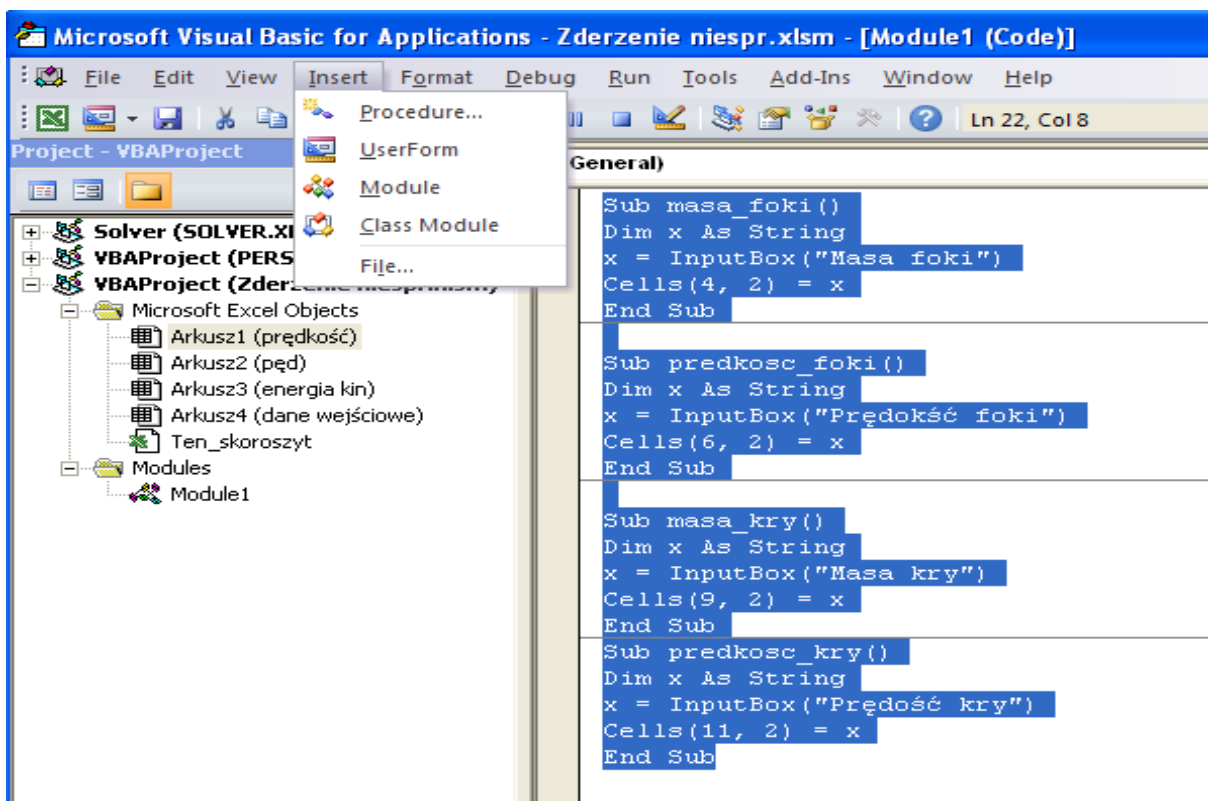
	A	B	C
26			
27		m foki	
28		V foki	
29		M kry	
30		V kry	
31			
32			

Etykiety na przyciskach zmień wybierając z menu kontekstowego „Edytuj tekst”

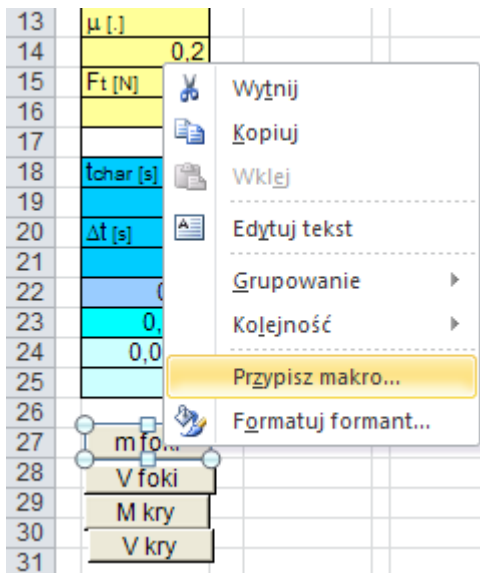




Otwórz Visual Basic, dodaj do bieżącego arkusza nowy moduł i wpisz w nim procedury.



Przyciskiem przypisz odpowiednie makra wybierając z menu kontekstowego „Przypisz makro”.



Zatwierdź ustawienia klikając w dowolnej komórce arkusza.

Kliknięcie odpowiedniego przycisku uruchamia funkcję która pozwala wprowadzać dane z klawiatury. Danymi mogą być tylko liczby. Inne dane będą powodować błędne wyniki.

Opracowała: Teresa Wojciechowska

## Do pracowni fizycznej.

- Zmieniaj kolejno wartości czterech parametrów modelu: **mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości**. W każdym przypadku porównaj uzyskaną w modelu **prędkość końcową, wspólną dla foki i kry**, z wartościami obliczonymi z zastosowania wzorów (1) i (2).

### Komentarz fizyczny

Stosując model teoretyczny uczniowie obliczyli ze wzorów (1) i (2) prędkości kry wraz z foką. przypomnijmy wartości:

Z zastosowaniem zasady zachowania pędu

$$v \approx 0,0988 \frac{m}{s}$$

Z zastosowaniem zasady zachowania energii kinetycznej:

$$v \approx 0,889 \frac{m}{s}$$

Teraz popatrzmy jaki jest wynik tej prędkości uzyskany w naszej symulacji:

t [s]	foka			kry		
	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	Δv [m/s]	V [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	ΔV [m/s]
3,9492	0,1016	-2,0	-0,0008	0,09873	0,025	0,00001
3,9496	0,1008	-2,0	-0,0008	0,09874	0,025	0,00001
3,9500	0,1000	-2,0	-0,0008	0,09875	0,025	0,00001
3,95040	0,0992	-2,0	-0,0008	0,09876	0,025	0,00001
3,95080	0,0984	-2,0	-0,0008	0,09877	0,025	0,000010

Jak widać prędkość kry wraz z foką jest zbliżona do wartości obliczonej z zasady zachowania pędu.

Sprawdźmy, czy uzyskamy podobny rezultat (zgodny z rozwiązaniem z zastosowaniem zasady zachowania pędu) gdy zmienimy parametry. W poniższej tabeli zapisano zmianę masy foki przy stałej prędkości, a następnie zmieniono prędkość na 10 m/s, a masę zmieniano podobnie jak poprzednio. Obliczona prędkość końcową kry z foką wykorzystując; zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii kinetycznej. Jak widać prędkości znacznie się różnią.

Zasada zach. pędu				Zasada zach. energii	
v, m/s	Vk, m/s	m, kg	M, kg	Vk, m/s	
8	0,098765432	100	8000	0,888888889	
8	0,088998764	90	8000	0,843795065	
8	0,079207921	80	8000	0,796029752	
10	0,12345679	100	8000	1,111111111	
10	0,111248455	90	8000	1,054743831	
10	0,099009901	80	8000	0,99503719	



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Teraz sprawdźmy jaką prędkość uzyska kra z foką gdy zastosujemy przygotowaną symulację w arkuszu kalkulacyjnym.

		foka			kra		
m [kg]	t [s]	v [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta v$ [m/s]	V [m/s]	a [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta V$ [m/s]
100	0,0	10,0	-2,0	-1,0	0,00	0,025	0,01
Vo [m/s]	0,5	9,0	-2,0	-1,0	0,01	0,025	0,01
10	1,0	8,0	-2,0	-1,0	0,03	0,025	0,01
M [kg]	1,5	7,0	-2,0	-1,0	0,04	0,025	0,01
8000	2,0	6,0	-2,0	-1,0	0,05	0,025	0,01
Vo [m/s]	2,5	5,0	-2,0	-1,0	0,06	0,025	0,01
0	3,0	4,0	-2,0	-1,0	0,08	0,025	0,01
	3,5	3,0	-2,0	-1,0	0,09	0,025	0,01
$\mu$ [.]	4,0	2,0	-2,0	-1,0	0,10	0,025	0,01
0,2	4,5	1,0	-2,0	-0,10	0,11	0,025	0,001
Ft [N]	4,55	0,90	-2,0	-0,10	0,114	0,025	0,001
200	4,60	0,80	-2,0	-0,10	0,115	0,025	0,001
	4,65	0,70	-2,0	-0,10	0,116	0,025	0,001
tchar [s]	4,70	0,60	-2,0	-0,10	0,118	0,025	0,001
5	4,75	0,50	-2,0	-0,10	0,119	0,025	0,001
$\Delta t$ [s]	4,80	0,40	-2,0	-0,10	0,120	0,025	0,001
0,5	4,85	0,30	-2,0	-0,10	0,121	0,025	0,001
0,05	4,90	0,20	-2,0	-0,010	0,1225	0,025	0,0001
0,005	4,905	0,190	-2,0	-0,010	0,1226	0,025	0,0001
0,0005	4,910	0,180	-2,0	-0,010	0,1228	0,025	0,0001
	4,915	0,170	-2,0	-0,010	0,1229	0,025	0,0001
	4,920	0,160	-2,0	-0,010	0,1230	0,025	0,0001
m fokki	4,925	0,150	-2,0	-0,010	0,1231	0,025	0,0001
V fokki	4,930	0,140	-2,0	-0,010	0,1233	0,025	0,0001
M kry	4,935	0,130	-2,0	-0,0010	0,1234	0,025	0,00001
V kry	4,9355	0,1290	-2,0	-0,0010	0,12339	0,025	0,00001
	4,9360	0,1280	-2,0	-0,0010	0,12340	0,025	0,00001
	4,9365	0,1270	-2,0	-0,0010	0,12341	0,025	0,00001
	4,9370	0,1260	-2,0	-0,0010	0,12343	0,025	0,00001
	4,9375	0,1250	-2,0	-0,0010	0,12344	0,025	0,00001
	4,93800	0,1240	-2,0	-0,0010	0,12345	0,025	0,00001
	4,93850	0,1230	-2,0	-0,0010	0,12346	0,025	0,000013

Widzimy zgodność uzyskanego wyniku z wynikiem jaki uzyskano wykorzystując zasadę zachowania pędu. Moglibyśmy zmieniać kolejne parametry, rezultat byłby podobny.

Sformułuj wniosek wynikający z tych prób poprzez uzupełnienie zdania:

„Wyniki uzyskane za pomocą matematycznego modelu wślizgu fokki na krę [dowodzą poprawności / świadczą o poprawności / nie mają związku z rozstrzygnięciem poprawności] metody stosowanej przez zwolenników [równania (1) / równania (2) / nie da się rozstrzygnąć], gdyż uzyskana w modelu ....”.

2. Zmieniaj wartość współczynnika tarcia pomiędzy foką a krę. Opisz wpływ zmian tego parametru na uzyskiwaną końcową prędkość oraz na przebieg zależności  $v(t)$  oraz  $V(t)$ .

Zwróćmy uwagę, że zmiana tego parametru nie pływa na prędkość końcową kry z foką. Zwróć uwagę, że we wzorach (1) i (2) nie ma współczynnika tarcia.

Czy zatem współczynnik tarcia nie ma żadnego znaczenia? Aby odpowiedzieć na to pytanie zwróć uwagę na czas przy różnych wartościach współczynnika tarcia.

Zachęcamy do przeprowadzenia symulacji bardzo ekstremalnych np. jaki byłby wynik gdyby masy foki i kry były porównywalne, albo gdyby nie było tarcia. warto trochę się "pobawić" tą symulacją.

## Część 2. Przekaz pędu pomiędzy foką a krą.

### Z pracowni fizycznej.

W §2.2.5 e-podręcznika opisano pojęcie popędu siły  $F$ . W jednowymiarowym zagadnieniu, jakim jest wślizg foki na krę, możemy zapisać wyrażenie na popęd  $I$  siły  $F$  w postaci skalarnej:

$$I = F \cdot \Delta t \quad (8)$$

Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona zmiana pędu  $\Delta p$  ciała jest równa popędowi siły wypadkowej  $F$  działającej na to ciało:

$$\Delta p = I = F \cdot \Delta t \quad (9)$$

W części drugiej matematycznego modelu ślizgu foki po krze przedstawione zostaną zmiany pędu foki oraz kry w związku z działającą siłą i upływającym czasem.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## W pracowni informatycznej - arkusz „Pęd”.

- Skopiuj do pierwszej kolumny nowego arkusza „Pęd” wartości parametrów zagadnienia z arkusza „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”:
  - za pierwszym razem wybierz „Wklej łącze” - dzięki temu wszystkie wartości z arkusza „Prędkości” zostaną przeniesione do arkusza „Pędy” w taki sposób, że modyfikacja parametru zagadnienia w obrębie pierwszego z nich zostanie automatycznie przeniesiona do drugiego;
  - za drugim razem wybierz „Formaty” - dzięki temu zachowasz w arkuszu „Pęd” wszystkie formaty, jakie zostały użyte w arkuszu „Prędkości”.
- Skopiuj do kolejnej kolumny nowego arkusza „Pęd” wartości czasów z kolumny ‘t’ arkusza „Prędkości”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, by uzyskać te same efekty, co w przypadku kolumny parametrów zagadnienia.
- Kolejne dwie kolumny zawierać będą informacje o pędzie foki i jego zmianach.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1									
2		foka			kra				
3		p	$\Delta I = -F \cdot \Delta t = \Delta p$		p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$			całk
4		[kgm/s]	[kgm/s]		[kgm/s]	[kgm/s]			[kgm/s]

- W „zerowym wierszu” pierwszej z nich wprowadź iloczyn  $m \cdot v_0$  - masy foki i początkowej jej prędkości.

$$F5: =\$B\$4*\$B\$6$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

- Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $\Delta I$  - popędu siły tarcia F działającej na fokę - obliczonego zgodnie ze wzorem (8).

$$G5: =-\$B\$16*\$B\$21$$

- Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (9) obliczony popęd  $\Delta I$  jest równy zmianie pędu  $\Delta p$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

- W kolumnie ‘p’, w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość pędu p będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta p$ , obliczonego w poprzednim wierszu.

$$F6: =F5+G5$$

Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

- Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ‘ $\Delta I$ ’ odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$  i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

- Na podobnych zasadach jak wyżej, kolejne dwie kolumny zawierać będą informacje o pędzie kry i jego zmianach.

	A	I	J
1			
2		kra	
3		p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$
4		[kgm/s]	[kgm/s]



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



- a. W „zerowym wierszu” pierwszej z nich wprowadź iloczyn  $M \cdot V_0$  - masy kry i początkowej jej prędkości.

$$I5: =B9*B11$$

Formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

- b. Druga z nich zawierać będzie jednakowe, ujemne wartości  $\Delta I$  - popędu siły tarcia  $F$  działającej na krę - obliczonego zgodnie ze wzorem (8).

$$J5: =+B16*B21$$

Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (9) obliczony popęd  $\Delta I$  jest równy zmianie pędu  $\Delta p$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

- c. W kolumnie ‘p’, w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość pędu  $p$  będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta p$ , obliczonego w poprzednim wierszu.

$$I6: =I5+J5$$

Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

- d. Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ‘ $\Delta I$ ’ odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$  i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.

5. W ostatnim wierszu kolumn ‘ $\Delta I$ ’ foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych popędów siły, obliczonych w modelu. Opisz te dwie komórki za pomocą komentarza.

6. W ostatniej kolumnie, całkowitego pędu układu, wstaw sumę pędów foki i kry z każdego wiersza.

	AH	I	J	K	L	M
1						
2		kra				
3		p	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$		pcałk	
4		[kgm/s]	[kgm/s]		[kgm/s]	

$$L5: =F5+I5$$

7. Sformatuj poszczególne kolumny tabeli (ew. pojedyncze komórki lub ich grupy) w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.

8. Sporządź wykres, na którym przedstawisz zależność obu pędów - foki i kry - od czasu. Uzupełnij wykres o linię przedstawiającą pęd całkowity.

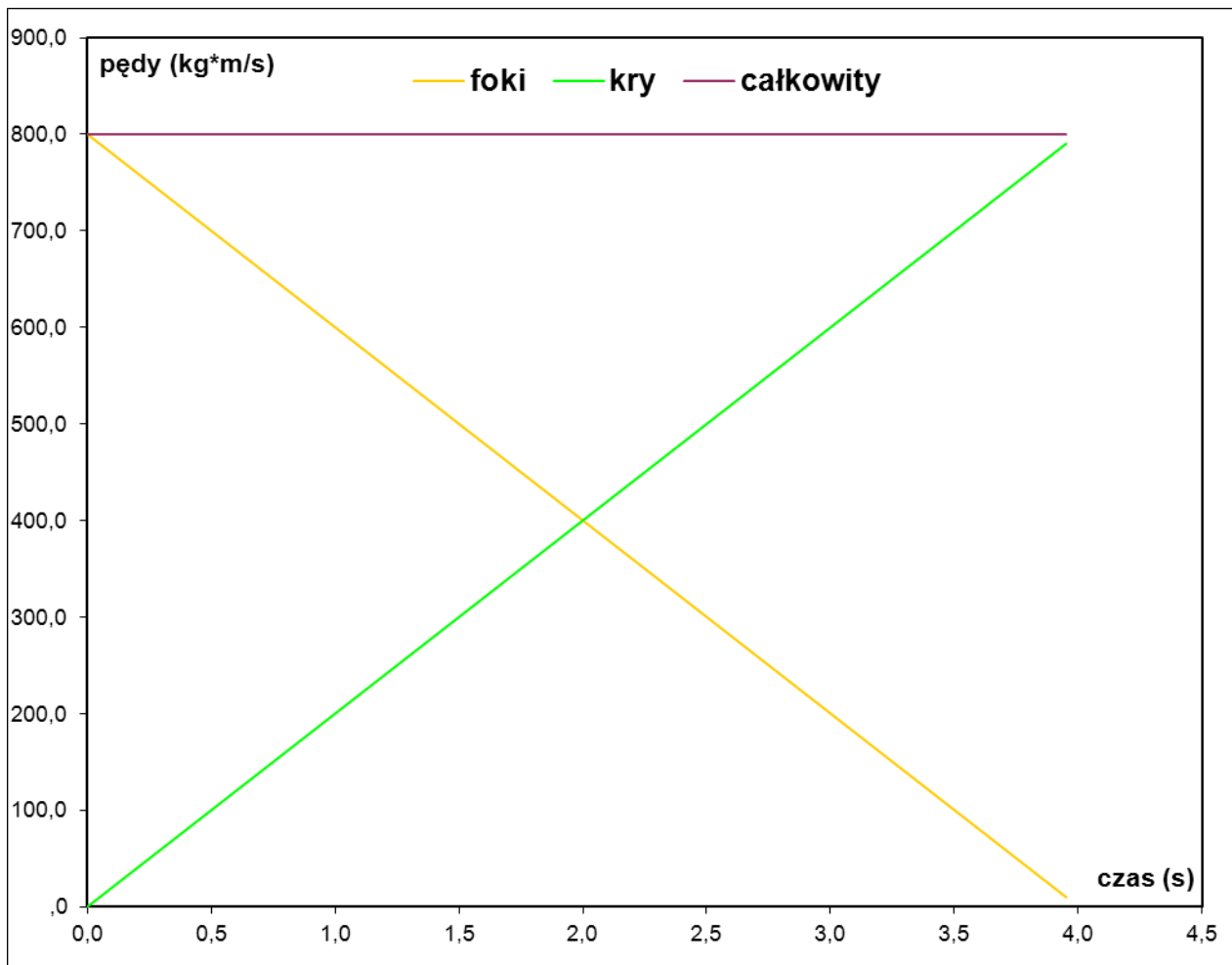


KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

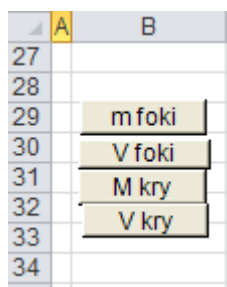


UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY





9. Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przekopij 4 przyciski z ćwiczenia poprzedniego.



Wszystkie podłączone do przycisków procedury będą zmieniały odpowiednie parametry.

Opracowała: Teresa Wojciechowska



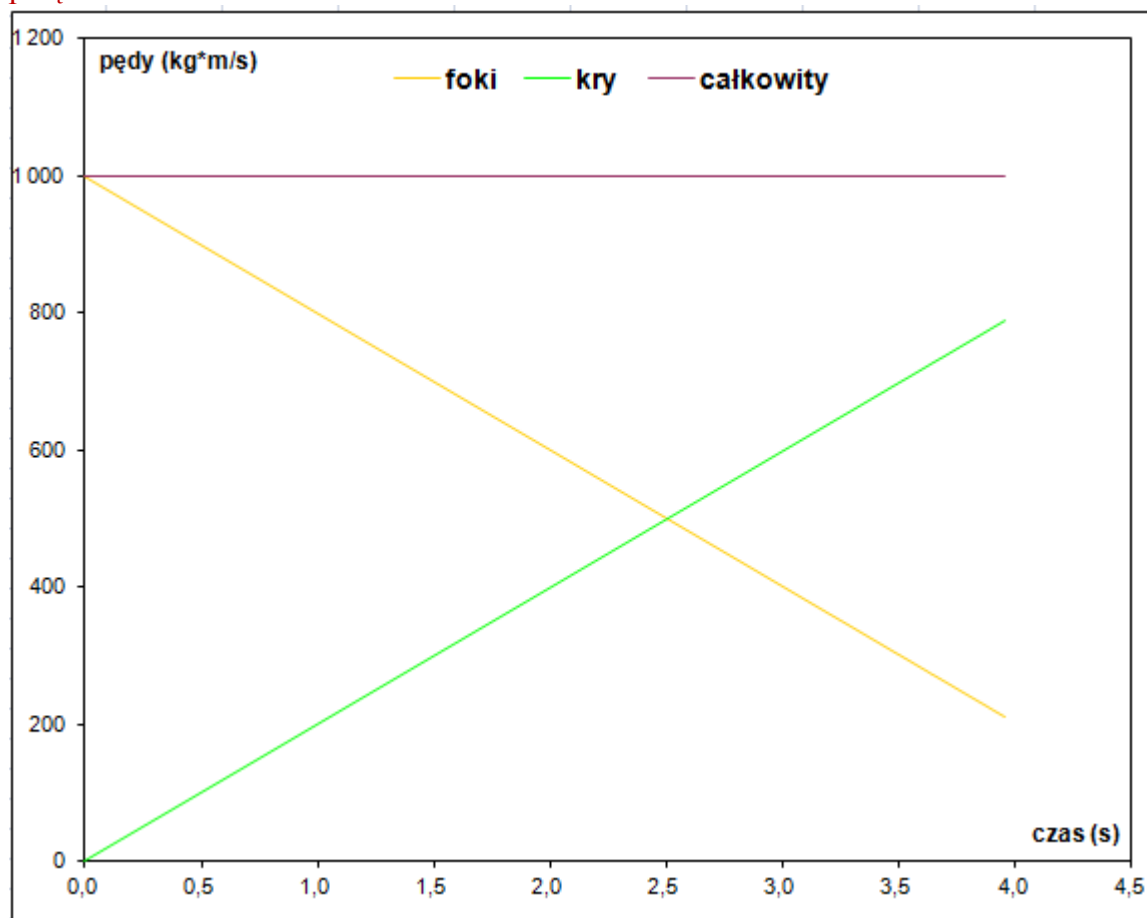
## Do pracowni fizycznej.

1. Zawartość kolumny „całkowity pęd układu” nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku pęd podlega zasadzie zachowania. Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.

Warto pozmieniać parametry układu, aby zobaczyć jaki wpływ te zmiany mają na poszczególne ciała układu "foka - kra". Zwróćmy uwagę, że pęd foki maleje, a pęd kry rośnie. W ostatniej kolumnie mamy pęd całkowity układu, ten pęd nie ulega zmianie. Warto się o tym przekonać dokonując samodzielnie zmian parametrów i to w bardzo różny sposób.

m [kg]	t [s]	foka		kra		pcałk [kgm/s]
		p [kgm/s]	$\Delta l = -F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	p [kgm/s]	$\Delta l = +F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	
100	0,0	1 000	-80	0	80	1 000
vo [m/s]	0,4	920	-80	80	80	1 000
10	0,8	840	-80	160	80	1 000
M [kg]	1,2	760	-80	240	80	1 000
8000	1,6	680	-80	320	80	1 000
Vo [m/s]	2,0	600	-80	400	80	1 000
0	2,4	520	-80	480	80	1 000
	2,8	440	-80	560	80	1 000

Te zmiany pięknie widać na wykresie zależności  $p(t)$ . Pęd foki (linia żółta) maleje, pęd kry (linia zielona) rośnie. Pęd całkowity, to linia pozioma, jest taki sam, przed połączeniem ciał i już po połączeniu.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



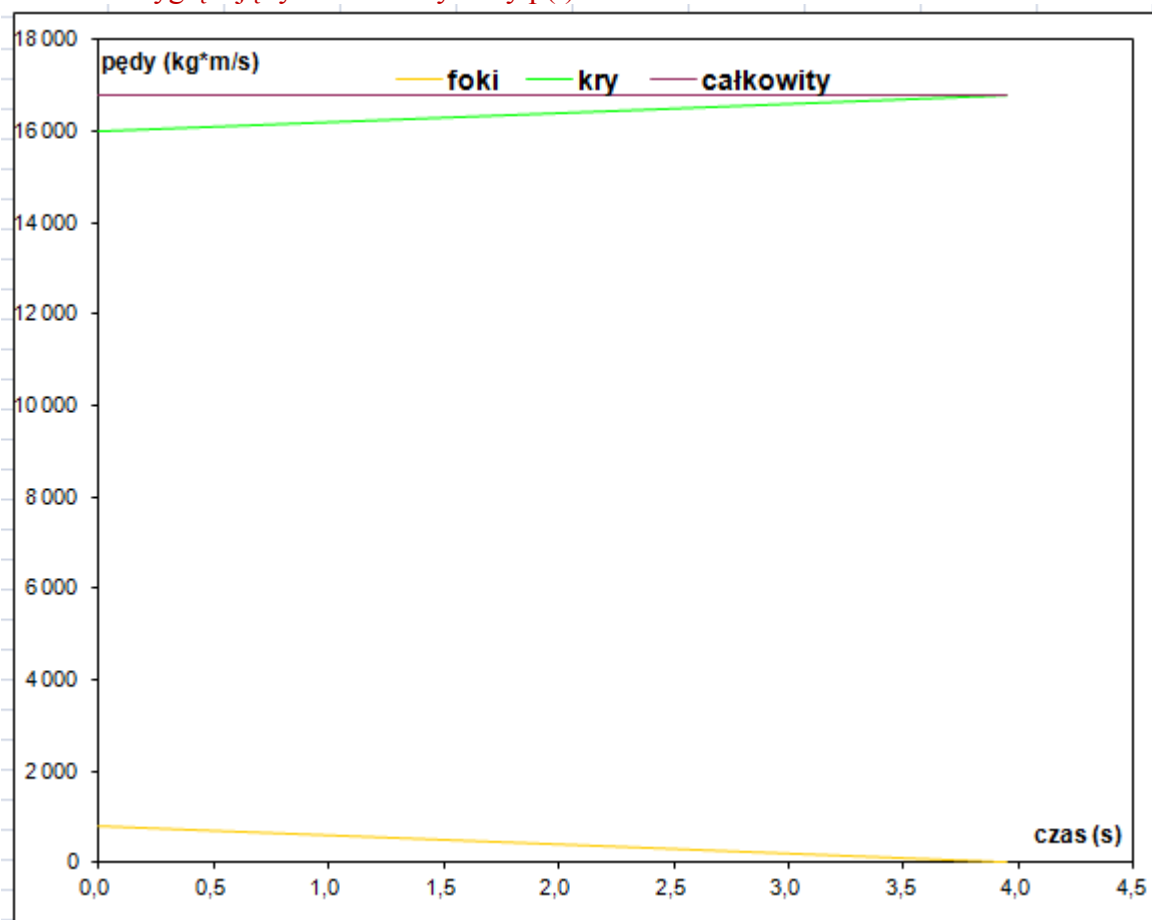
UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



W zadaniu rozważamy przypadek, gdy kra spoczywa, ale przecież tak nie musi być. Przyjmijmy, że kra porusza się. I tym razem całkowity pęd nie ulega zmianie.

		foka		kra		
m [kg]	t	p	$\Delta l = -F \cdot \Delta t = \Delta p$	p	$\Delta l = +F \cdot \Delta t = \Delta p$	pcałk
	[s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]	[kgm/s]
100	0,0	800	-80	16 000	80	16 800
vo [m/s]	0,4	720	-80	16 080	80	16 800
8	0,8	640	-80	16 160	80	16 800
M [kg]	1,2	560	-80	16 240	80	16 800
8000	1,6	480	-80	16 320	80	16 800
Vo [m/s]	2,0	400	-80	16 400	80	16 800
2	2,4	320	-80	16 480	80	16 800
	2,8	240	-80	16 560	80	16 800

Ciekawie wyglądają tym razem wykresy p(t).



- Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. Opisz znaczenie faktu, że jedna zawiera wielkość przeciwną do drugiej, dla rozstrzygnięcia naukowego sporu pomiędzy zwolennikami równania (1) a zwolennikami równania (2).

Popatrzmy na wartości zawarte w tych komórkach:

t [s]	foka		kra		pcatk [kgm/s]
	p [kgm/s]	$\Delta I = -F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	p [kgm/s]	$\Delta I = +F \cdot \Delta t = \Delta p$ [kgm/s]	
0,0	800	-80	0	80	800
0,4	720	-80	80	80	800
0,8	640	-80	160	80	800
1,2	560	-80	240	80	800
1,6	480	-80	320	80	800
2,0	400	-80	400	80	800
2,4	320	-80	480	80	800
2,8	240	-80	560	80	800
3,2	160	-80	640	80	800
3,6	80	-8	720	8	800
3,64	72	-8	728	8	800,0
3,68	64	-8	736	8	800,0
3,72	56	-8	744	8	800,0
3,76	48	-8	752	8	800,0
3,80	40	-8	760	8	800,0
3,84	32	-8	768	8	800,0
3,88	24	-8	776	8	800,0
3,92	16	-0,8	784	0,8	800,0
3,924	15,2	-0,8	784,8	0,8	800,00
3,928	14,4	-0,8	785,6	0,8	800,00
3,932	13,6	-0,8	786,4	0,8	800,00
3,936	12,8	-0,8	787,2	0,8	800,00
3,940	12,0	-0,8	788,0	0,8	800,00
3,944	11,2	-0,8	788,8	0,8	800,00
3,948	10,4	-0,08	789,6	0,08	800,00
3,9484	10,32	-0,08	789,68	0,08	800,000
3,9488	10,24	-0,08	789,76	0,08	800,000
3,9492	10,16	-0,08	789,84	0,08	800,000
3,9496	10,08	-0,08	789,92	0,08	800,000
3,9500	10,00	-0,08	790,00	0,08	800,000
3,9504	9,92	-0,08	790,08	0,08	800,000
3,9508	9,84	-790,16	790,16	790,16	800,000

Widzimy, że całkowity popęd siły działający na fokę wynosi - 790 Ns, a na krę +790 Ns. Popędy mają jednakowe wartości bezwzględne. Gdyby te wartości były inne oznaczałoby to, że na układ "foka - kra" działają siły zewnętrzne.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



### Część 3. Przekaz energii kinetycznej pomiędzy foką a krą.

#### Z pracowni fizycznej.

W §2.3.1 e-podręcznika opisano pojęcie pracy siły  $F$ . W jednowymiarowym zagadnieniu, jakim jest wślizg foki na krę, możemy zapisać wyrażenie na pracę  $\Delta W$  siły  $F$  w postaci wzoru:

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\alpha) \quad (10)$$

Symbolem  $\Delta s$  oznaczono tu fragment drogi przebywanej przez ciało, podczas działania na nie siły  $F$ . Kąt  $\alpha$  w jednowymiarowym zagadnieniu może przyjmować jedną z dwóch wartości:

- $\alpha = 0$  (wtedy  $\cos\alpha = 1$ ) gdy siła  $F$  działa zgodnie ze zwrotem prędkości ciała;
- $\alpha = 180^\circ$  ( $\alpha = \pi$ , wtedy  $\cos\alpha = -1$ ) gdy siła  $F$  działa przeciwnie do zwrotu prędkości ciała.

Siła  $F_{f \rightarrow k}$ , z jaką foka działa na krę odpowiada przypadkowi 'a' - ma ona zwrot zgodny z prędkością  $V$  i przyspiesza krę: prędkość  $V$  rośnie pod jej wpływem. Odwrotnie jest z siłą  $F_{k \rightarrow f}$ , z jaką kra działa na fokę: ma ona zwrot przeciwny do prędkości  $v$ , co odpowiada przypadkowi 'b'. Dlatego też ruch foki jest ruchem opóźnionym a jej prędkość  $v$  maleje.

Zgodnie z definicją energii kinetycznej (§2.3.3 e-podręcznika) praca siły wypadkowej  $F$  działającej na ciało jest równa zmianie jego energii kinetycznej:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W = F \cdot \Delta s \cdot \cos(\alpha) \quad (11)$$

Fragmenty drogi  $\Delta s$  przebywane w poszczególnych odcinkach czasu  $\Delta t$  związane są z przyspieszeniem 'a' (foki lub kry) oraz z prędkością ( $v$  lub  $V$ ) na początku każdego odcinka  $\Delta t$ . Do obliczenia  $\Delta s$  w przypadku ruchu jednostajnie zmiennego (taki model ruchu przyjęto przy obliczaniu prędkości  $v$  oraz  $V$ ) służy wyrażenie znane z §2.1.4 e-podręcznika:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a_f \cdot \Delta t^2 + v \cdot \Delta t \quad (\text{dla foki}) \quad \text{ i } \quad \Delta s = \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot \Delta t^2 + V \cdot \Delta t \quad (\text{dla kry}) \quad (12a; 12b)$$

Przyspieszenia  $a_f$  i  $a_k$  w tych wzorach obliczane są zgodnie ze wzorami (4) i (5).

W trzeciej części matematycznego modelu ślizgu foki po krze przedstawione zostaną zmiany energii kinetycznej foki oraz kry w związku z działającą pomiędzy nimi siłą i przebywaną drogą.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## W pracowni informatycznej - arkusz „Energia kinetyczna”.

1. Skopiuj do pierwszej kolumny nowego arkusza „Energia kinetyczna” wartości parametrów zagadnienia z arkusza „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak w punkcie 1. drugiej części ćwiczenia.
2. Skopiuj do kolejnej kolumny nowego arkusza „Energia kinetyczna” wartości czasów z kolumny ‘t’ arkusza „Prędkość”. Wykorzystaj, podobnie jak powyżej, dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		m [kg]		t	
4		100		[s]	
5		v <sub>0</sub> [m/s]			
6		8			
7					
8		M [kg]			
9		8000			
10		V <sub>0</sub> [m/s]			
11		0			
12					
13		μ [.]			
14		0,2			
15		F <sub>t</sub> [N]			
16		200			
17					
18		t <sub>char</sub> [s]			
19		4			
20		Δt [s]			
21		0,4			
22		0,04			
23		0,004			
24		0,0004			
25					
26					
27		m foki			
28		V foki			
29		M kry			
30		V kry			
31					
32					
33					

3. Kolejnych pięć kolumn zawierać będą informacje o energii kinetycznej foki i jej zmianach. Dwie pierwsze zawierać będą niezbędne informacje do obliczenia cząstkowych dróg Δs foki w poszczególnych odcinkach czasowych Δt; trzecia będzie zawierała cząstkowe drogi Δs. W czwartej kolumnie umieszczone zostaną wartości energii kinetycznych foki, zaś w piątej cząstkowe prace ΔW siły tarcia F<sub>k→f</sub> działającej na fokę ze strony kry.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



	A	E	F	G	H	I	J
1							
2			foka				
3			v	a	$\Delta s$	$E_{kin}$	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_{kin}$
4			[m/s]	[m/s <sup>2</sup> ]	[m]	[J]	[J]

- W pierwszej z tych pięciu kolumn, 'v', umieść skopiowane wartości prędkości foki, obliczone w arkuszu „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak wyżej.
- Do drugiej z nich skopiuj przyspieszenia foki 'a', obliczone w arkuszu „Prędkość”. Tu także wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak wyżej.
- W trzeciej umieść formułę pozwalającą obliczyć cząstkowe drogi  $\Delta s$  przebywane przez fokę w zadanym odcinku  $\Delta t$ , z przyspieszeniem z kolumny 'a' i z początkową prędkością z kolumny 'v', zgodną ze wzorem (12a).

$$H5: =0,5*G5*\$B\$21^2+F5*\$B\$21$$

- Kolejna, czwarta kolumna ' $E_{kin}$ ' zawiera wartości energii kinetycznej foki. W „zerowym wierszu” wprowadź iloczyn  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_0)^2$  - połowy masy foki i kwadratu początkowej jej prędkości; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$I5: =\$B\$4*\$B\$6^2/2$$

- Ostatnia kolumna zawierać będzie ujemne wartości  $\Delta W$  - pracy siły tarcia F działającej na fokę - obliczonej zgodnie ze wzorem (10), z uwzględnieniem znaku 'minus'. Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (11) obliczona elementarna praca  $\Delta W$  jest równa zmianie energii kinetycznej  $\Delta E_{kin}$  foki w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

$$J5: =-\$B\$16*H5$$

- W kolumnie ' $E_{kin}$ ', w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość energii kinetycznej będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta E_{kin}$ , obliczonego w wierszu poprzednim. Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

$$I6: =I5+J5$$

- Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ' $\Delta s$ ' odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$ ' i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.
4. W analogiczny sposób przygotuj pięć kolumn z informacjami o energii kinetycznej kry i jej zmianach. Dwie pierwsze zawierać będą niezbędne informacje do obliczenia cząstkowych dróg



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$\Delta s$  kry w poszczególnych odcinkach czasowych  $\Delta t$ ; trzecia będzie zawierała obliczone drogi cząstkowe. W czwartej kolumnie umieszczone zostaną wartości energii kinetycznych kry, zaś w piątej cząstkowe prace  $\Delta W$  siły tarcia  $F_{f \rightarrow k}$  działającej na krę ze strony foki.

	A	E	K	L	M	N	O	P	Q
2		kra							
3		V	a	$\Delta s$	$E_{kin}$	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_{kin}$			
4		[m/s]	[m/s <sup>2</sup> ]	[m]	[J]	[J]			

- W pierwszej z tych pięciu kolumn, 'V', umieść skopiowane wartości prędkości kry, obliczone w arkuszu „Prędkość”. Wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”, podobnie jak opisano kilkakrotnie wyżej.
- Do drugiej z nich skopiuj przyspieszenia kry 'a', obliczone w arkuszu „Prędkość”. Tu także wykorzystaj dwukrotnie opcję „Wklej specjalnie”.
- W trzeciej umieść formułę pozwalającą obliczyć cząstkowe drogi  $\Delta s$  przebywane przez krę w zadanym odcinku  $\Delta t$ , z przyspieszeniem z kolumny 'a' i z początkową prędkością z kolumny 'V', zgodną ze wzorem (12b).

$$N5: =0,5*M5*\$B\$21^2+L5*\$B\$21$$

- Kolejna, czwarta kolumna ' $E_{kin}$ ' zawiera wartości energii kinetycznej kry. W „zerowym wierszu” wprowadź iloczyn  $\frac{1}{2} \cdot M \cdot (V_0)^2$  - połowy masy kry i kwadratu początkowej jej prędkości; formuła ta nie zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego.

$$O5: =\$B\$9*\$B\$11^2/2$$

- Ostatnia kolumna zawierać będzie dodatnie wartości  $\Delta W$  - pracy siły tarcia  $F$  działającej na krę - obliczonej zgodnie ze wzorem (10), z uwzględnieniem znaku 'plus'. Formuła z „wiersza zerowego” tej kolumny zostanie przeciągnięta do wiersza pierwszego i następnych. Zgodnie ze wzorem (11) obliczona elementarna praca  $\Delta W$  jest równa zmianie energii kinetycznej  $\Delta E_{kin}$  kry w bieżącym odcinku czasowym  $\Delta t$ .

$$R5: =+\$B\$16*N5$$

- W kolumnie ' $E_{kin}$ ', w wierszu pierwszym, wpisz formułę, która zapewni, iż bieżąca wartość energii kinetycznej będzie sumą wartości z poprzedniego wiersza i przyrostu  $\Delta E_{kin}$ , obliczonego w wierszu poprzednim. Ta formuła może zostać przeciągnięta do kolejnych wierszy.

$$O6: =O5+P5$$

- Przygotuj zgodnie z tym przepisem tyle wierszy, ile jest wierszy czasu. W wierszach, w których w arkuszu „Prędkości” następowało zmniejszenie wartości  $\Delta t$  (by zapewnić żadaną dokładność osiągnięcia jednakowych prędkości przez fokę i krę), wstaw w kolumnie ' $\Delta s$ ' odpowiednio zmniejszone wartości  $\Delta t$ ' i dalej, ewentualnie jeszcze mniejsze.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



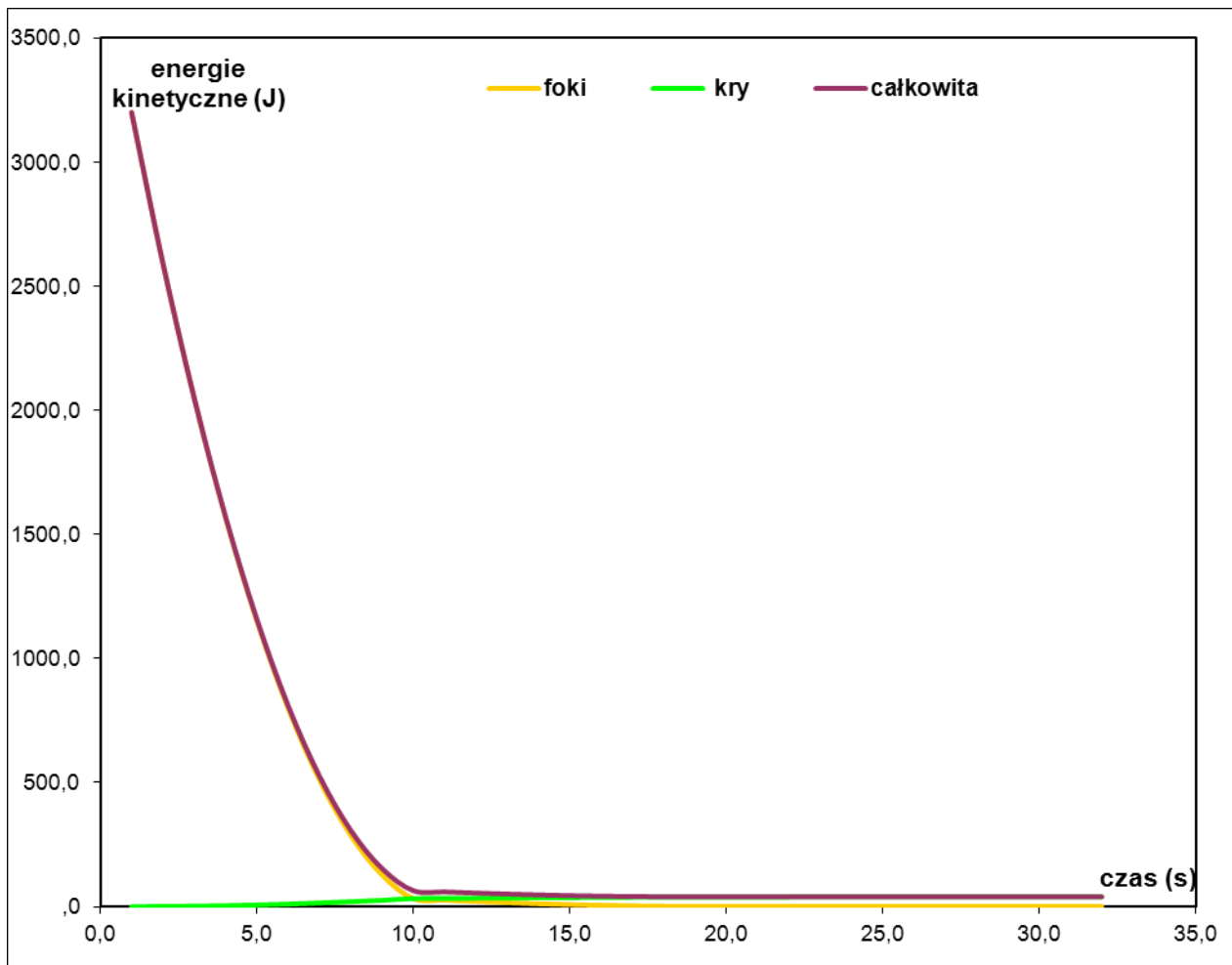
- W ostatnim wierszu kolumn 'Δs' foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych dróg, obliczonych w modelu. Uzyskasz w ten sposób całkowitą drogę przebytą - odpowiednio - przez fokę  $s_f$  i krę  $s_k$ , do chwili wyrównania ich prędkości. Podobnie, w ostatnim wierszu kolumn 'ΔW' foki i kry wstaw formułę, która zapewni zsumowanie wszystkich cząstkowych prac siły, obliczonych w modelu. W ten sposób uzyskasz całkowitą pracę wykonaną - odpowiednio - przez siłę działającą na fokę  $W_{\rightarrow f}$  i siłę działającą na krę  $W_{\rightarrow k}$ , do chwili wyrównania ich prędkości. Opisz każdą z tych czterech komórek za pomocą komentarza.
- W ostatniej kolumnie, całkowitej energii kinetycznej układu, wstaw sumę energii kinetycznej foki i kry z każdego wiersza.

	A	E	K	R	S
1					
2					
3				Ecałk	
4				[J]	

$$R5: \quad =I5+O5$$

- Sformatuj poszczególne kolumny tabeli (ew. pojedyncze komórki lub ich grupy) w taki sposób, by wyświetlane w nich liczby zawierały tyle cyfr znaczących, ile jest niezbędne do śledzenia zmian poszczególnych wielkości w miarę upływu czasu.
- Sporządź wykres, na którym przedstawiś zależność obu energii kinetycznych - foki i kry - od czasu. Uzupełnij wykres o linię przedstawiającą całkowitą energię kinetyczną.





Zwróć uwagę, że w przypadku gdy stosunek  $m$  do  $M$  jest dużo mniejszy od jedności, to przebieg zależności  $E_{kin}$  foki od czasu jest słabo czytelny; podobnie jest przy końcu wykresu, gdzie wszystkie trzy linie zlewają się nieco ze sobą. Rozważ więc utworzenie kopii sporządzonego wykresu i takie dobranie skali na nowym wykresie, by wyeliminować te niedogodności.

9. Zmiana wartości czterech parametrów modelu: mas foki i kry oraz ich początkowych prędkości. W tym celu przekopij 4 przyciski z ćwiczenia poprzedniego.

A	B
27	
28	
29	m foki
30	V foki
31	M kry
32	V kry
33	
34	

Wszystkie podłączone do przycisków procedury będą zmieniały odpowiednie parametry.

## Do pracowni fizycznej.

1. Zawartość kolumny „całkowita energia kinetyczna” (punkt 6. arkusza „Energia kinetyczna”) nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku energia kinetyczna nie podlega zachowaniu.
  - a) Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.
  - b) Wskaż właściwe uzupełnienie zdania: „Im stosunek  $m/M$  jest większy, tym stosunek końcowej energii kinetycznej układu do jego początkowej energii kinetycznej jest [większy i zbliża się do jedności / większy i rośnie nieograniczenie / mniejszy i zbliża się do zera / mniejszy i zbliża się do jedności / nie da się jednoznacznie określić tej zależności / stosunek  $m/M$  w ogóle nie wpływa na stosunek energii kinetycznych].”
2. Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. W tym celu wskaż właściwe uzupełnienia poniższych zdań i ewentualnie uzupełnij brakujące elementy.
  - a) Całkowita droga przebyta przez fokę  $s_f$  jest zawsze [mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić] od całkowitej drogi przebytej przez krę  $s_k$ .
  - b) Powyższa relacja wynika z faktu, że [masa foki jest ..... masy kry / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest ..... wartości  $F_{f \rightarrow k}$ ]. *Wskaż właściwy(e) czynnik(i) i uzasadnij pokrótce jego (ich) wpływ na relację pomiędzy  $s_f$  i  $s_k$ .*
  - c) Bezwzględna wartość całkowitej pracy  $W_{\rightarrow f}$  jest zawsze [mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić] od całkowitej pracy  $W_{\rightarrow k}$ .
  - d) Powyższa relacja wynika bezpośrednio z faktu, że [masa foki jest ..... masy kry /  $s_f$  i  $s_k$  spełniają relację wskazaną w punkcie ‘a’ / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest ..... wartości  $F_{f \rightarrow k}$ ]. *Wskaż właściwy(e) czynnik(i) i uzasadnij pokrótce jego (ich) wpływ na relację pomiędzy  $W_{\rightarrow f}$  i  $W_{\rightarrow k}$ .*
  - e) Uzupełnij poniższe zdanie tak, by stanowiło ono ostateczny wniosek płynący z użycia utworzonego matematycznego modelu:

Układ „foka + kra” należy traktować jako układ [izolowany / nieizolowany]. Wybór ten [wynika z faktu / jest niezależny od faktu / pociąga za sobą fakt], że energia kinetyczna układu w opisywanym procesie [po prostu znika / jest wyprowadzana poza układ w formie energii {kinetycznej / potencjalnej / wewnętrznej} / pozostaje w układzie, ale zmienia formę na {potencjalną / wewnętrzną}].

## Rozwiązania, wskazówki, komentarze

1. Zawartość kolumny „całkowita energia kinetyczna” (punkt 6. arkusza „Energia kinetyczna”) nie pozostawia wątpliwości, że w badanym zjawisku energia kinetyczna nie podlega zachowaniu.

Poniższa tabela pokazuje, że po każdym kroku czasowym całkowita energia kinetyczna układu jest mniejsza niż w kroku poprzednim. Tak więc malenie energii kinetycznej nie jest zjawiskiem „nagłym”, lecz postępuje w trakcie całego procesu ślizgu foki po krze.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$E_{całk}$ [J]
3 200
2 592
2 050
1 572
1 158
810
526,4
307,6
153,6
64,4
59,044
54,336
50,276
46,864
44,100
41,984
40,516
39,696
39,64964
39,60976
39,57636
39,54944
39,52900
39,51504
39,50756
39,5071684
39,5068416
39,5065796
39,5063824
39,5062500

- a) Zbadaj, czy tak jest dla różnych wartości parametrów układu - mas oraz początkowych prędkości foki i kry.

Warto poćwiczyć i pozmieniać parametry układu, aby sprawdzić jak działa symulacja. Łatwo się przekonasz, że każdy zestaw początkowych parametrów układu kończy się maleniem całkowitej energii kinetycznej, choć w różnym tempie, zależnym przede wszystkim od mas foki (m) oraz kry (M).

- b) Wskaż właściwe uzupełnienie zdania: „Im stosunek m/M jest większy, tym stosunek końcowej energii kinetycznej układu do jego początkowej energii kinetycznej jest [większy i zbliża się do jedności] / ~~większy i rośnie nieograniczenie~~ / ~~mniejszy i zbliża się do zera~~ / ~~mniejszy i zbliża się do jedności~~ / ~~nie da się jednoznacznie określić tej zależności~~ / ~~stosunek m/M w ogóle nie wpływa na stosunek energii kinetycznych~~].”

Na energię kinetyczną wpływ mają masa i prędkość ciała. Na energię układu "foka - kra" wpływają: masy tych ciał i prędkość początkowa foki (zgodnie z warunkami zadania, kra na początku spoczywa.). Zatem początkowa energia kinetyczna układu to energia kinetyczna foki:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$$

Natomiast energia końcowa to łączna energia kinetyczna foki i kry, które poruszają się ze wspólną prędkością V:



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$$E_k = \frac{(m + M)V^2}{2}$$

Wyznaczmy stosunek tych energii:

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{\frac{(m + M)V^2}{2}}{\frac{mv_0^2}{2}} = \frac{(m + M)}{m} \cdot \left(\frac{V}{v_0}\right)^2$$

Można odnieść mylne wrażenie, że im większa masa kry tym większa końcowa energia kinetyczna układu. Ale masa M wpływa także na końcową prędkość V, zgodnie ze wzorem (1):

$$V = v_0 \cdot \frac{m}{m + M} \Rightarrow \frac{V}{v_0} = \frac{m}{m + M}$$

Tak więc ostatecznie:

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{m}{m + M}$$

Masa kry M znajduje się w mianowniku otrzymanego wyrażenia. Widać więc, że w miarę wzrostu tej masy (w porównaniu do masy foki m) stosunek końcowej energii kinetycznej do początkowej maleje. Z kolei w miarę malenia M wobec m (czyli wzrostu m wobec M), stosunek energii rośnie.

W „abstrakcyjnej” sytuacji, w której to masa foki m byłaby dużo większa w porównaniu z M, ułamek po prawej stronie wyrażenia zbliżałby się do jedności, pozostając jednak od jedności mniejszy (jego licznik jest na pewno mniejszy od mianownika). Oznaczałoby to, że wartość końcowej energii zbliżałaby się do wartości początkowej.

Powyższe tezy możesz zilustrować poprzez utworzenie w arkuszu kolumny  $E_k/E_0$ .

2. Zinterpretuj wartości uzyskane w komórkach utworzonych w punkcie 5. W tym celu wskaż właściwe uzupełnienia poniższych zdań i ewentualnie uzupełnij brakujące elementy.

- a) Całkowita droga przebyta przez fokę  $s_f$  jest zawsze [~~mniejsza / równa /~~ większa / ~~nie da się jednoznacznie określić~~] od całkowitej drogi przebytej przez krę  $s_k$ .

Aby na to pytanie odpowiedzieć, wystarczy spojrzeć na kolumny „ $\Delta s$ ” tabeli. Relację  $s_f > s_k$  uzyskamy niezależnie od wartości początkowych parametrów - zbadaj ten fakt.

Podobnie, argumentem za tą relacją jest rysunek 3. Pokazuje on, że foka ślizga się po rozpędzającej się krze; foka musi więc przebyć dłuższą drogę względem wody niż sama kra - licząc do chwili wyrównania obu prędkości.

- b) Powyższa relacja wynika z faktu, że [~~masa foki jest~~ ..... ~~masa kry / początkowa prędkość foki jest~~ większa od początkowej prędkości kry / ~~wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest~~ ..... ~~przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest~~ ..... ~~wartości  $F_{f \rightarrow k}$~~ ].

Ogólny dowód tej relacji można przedstawić następująco:

$$v_0 > V_0 \Rightarrow$$

[Początkowa prędkość foki musi być większa od początkowej prędkości kry - inaczej kra uciekłaby przed foką.]

$$\frac{1}{2} \cdot (v_0 + V) > \frac{1}{2} \cdot (V_0 + V) \Rightarrow$$



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



[Do obu stron nierówności dodajemy końcową prędkość foki i kry, po czym obie strony nierówności mnożymy przez 1/2.]

$$v_{sr} > v_{se} \Rightarrow$$

[Średnia prędkość foki jest większa od średniej prędkości kry.]

$$v_{sr} \cdot \Delta t > v_{se} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

[Czas ruchu foki jest taki sam jak czas ruchu kry - licząc od początku ślizgu do chwili wyrównania prędkości.]

$$S_f > S_k \quad \blacksquare$$

[Wniosek: droga przebyta przez fokę jest zawsze dłuższa od drogi przebytej przez krę.]

	foka			kra				
]	$\Delta s$ [m]	$E_{kin}$ [J]	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]	$v$ [m/s]	$a$ [m/s <sup>2</sup> ]	$\Delta s$ [m]	$E_{kin}$ [J]	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]
0	3,04	3 200	-608	0,00	0,025	0,002	0,0	0,4
0	2,72	2 592	-544	0,01	0,025	0,006	0,4	1,2
0	2,40	2 048	-480	0,02	0,025	0,010	1,6	2,0
0	2,08	1 568	-416	0,03	0,025	0,014	3,6	2,8
0	1,76	1 152	-352	0,04	0,025	0,018	6,4	3,6
0	1,44	800	-288	0,05	0,025	0,022	10,0	4,4
0	1,12	512	-224	0,06	0,025	0,026	14,4	5,2
0	0,80	288	-160	0,07	0,025	0,030	19,6	6,0
0	0,48	128	-96	0,08	0,025	0,034	25,6	6,8
0	0,0304	32	-6,08	0,09	0,025	0,003620	32,4	0,724
0	0,0272	25,92	-5,44	0,091	0,025	0,003660	33,124	0,732
0	0,0240	20,48	-4,80	0,092	0,025	0,003700	33,856	0,740
0	0,0208	15,68	-4,16	0,093	0,025	0,003740	34,596	0,748
0	0,0176	11,52	-3,52	0,094	0,025	0,003780	35,344	0,756
0	0,0144	8,00	-2,88	0,095	0,025	0,003820	36,100	0,764
0	0,0112	5,12	-2,24	0,096	0,025	0,003860	36,864	0,772
0	0,0080	2,88	-1,60	0,097	0,025	0,003900	37,636	0,780
0	0,000624	1,28	-0,1248	0,0980	0,025	0,0003922	38,416	0,07844
0	0,000592	1,1552	-0,1184	0,0981	0,025	0,0003926	38,49444	0,07852
0	0,000560	1,0368	-0,1120	0,0982	0,025	0,0003930	38,57296	0,07860
0	0,000528	0,9248	-0,1056	0,0983	0,025	0,0003934	38,65156	0,07868
0	0,000496	0,8192	-0,0992	0,0984	0,025	0,0003938	38,73024	0,07876
0	0,000464	0,7200	-0,0928	0,0985	0,025	0,0003942	38,80900	0,07884
0	0,000432	0,6272	-0,0864	0,0986	0,025	0,0003946	38,88784	0,07892
0	0,00004144	0,5408	-0,008288	0,0987	0,025	0,000039482	38,96676	0,0078964
0	0,00004112	0,532512	-0,008224	0,09871	0,025	0,000039486	38,9746564	0,0078972
0	0,00004080	0,524288	-0,008160	0,09872	0,025	0,000039490	38,9825536	0,0078980
0	0,00004048	0,516128	-0,008096	0,09873	0,025	0,000039494	38,9904516	0,0078988
0	0,00004016	0,508032	-0,008032	0,09874	0,025	0,000039498	38,9983504	0,0078996
0	0,00003984	0,500000	-0,007968	0,09875	0,025	0,000039502	39,0062500	0,0079004
0	0,00003952	0,492032	-0,007904	0,09876	0,025	0,000039506	39,0141504	0,0079012
0	15,99757936	0,484128	-3199,515872	0,09877	0,025	0,195110258	39,0220516	39,0220516

- c) Bezwzględna wartość całkowitej pracy  $W_{\rightarrow f}$  jest zawsze [~~mniejsza / równa / większa / nie da się jednoznacznie określić~~] od całkowitej pracy  $W_{\rightarrow k}$ .

Aby na to pytanie odpowiedzieć wystarczy spojrzeć na kolumny „ $\Delta W$ ” tabeli.

- d) Powyższa relacja wynika bezpośrednio z faktu, że [~~masa foki jest ..... masy kry /  $S_f$  i  $S_k$  spełniają relację wskazaną w punkcie ‘a’ / początkowa prędkość foki jest ..... początkowej prędkości kry / wartość bezwzględna przyspieszenia foki jest ..... przyspieszenia kry / wartość siły  $F_{k \rightarrow f}$  jest równa wartości  $F_{f \rightarrow k}$~~ ].

Wartość bezwzględna obu prac wyraża się wzorem:



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$$|W| = F \cdot s$$

Siły działające na fokę i na krę mają jednakowe wartości, tak więc relacja  $s_f > s_k$  jest uzasadnieniem dla związku  $W_{\rightarrow f} > W_{\rightarrow k}$ .

foka	kra
$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]	$\Delta W = -F \cdot \Delta s = \Delta E_k$ [J]
-608	0,4
-544	1,2
-480	2,0
-416	2,8
-352	3,6
-288	4,4
-224	5,2
-160	6,0
-96	6,8
-6,08	0,724
-5,44	0,732
-4,80	0,740
-4,16	0,748
-3,52	0,756
-2,88	0,764
-2,24	0,772
-1,60	0,780
-0,1248	0,07844
-0,1184	0,07852
-0,1120	0,07860
-0,1056	0,07868
-0,0992	0,07876
-0,0928	0,07884
-0,0864	0,07892
-0,008288	0,0078964
-0,008224	0,0078972
-0,008160	0,0078980
-0,008096	0,0078988
-0,008032	0,0078996
-0,007968	0,0079004
-0,007904	0,0079012
<b>-3199,515872</b>	<b>39,0220516</b>

e) Uzupełnij zdanie tak, by stanowiło ono ostateczny wniosek płynący z użycia utworzonego matematycznego modelu:

Układ „foka + kra” należy traktować jako układ [izolowany / ~~nieizolowany~~]. ...

Warto przypomnieć sobie, jaki układ nazywamy izolowanym, a jaki nieizolowanym. Rozpatrywany przez nas układ jest izolowany, gdyż pominęliśmy wpływ **sił zewnętrznych** na fokę i krę. Takimi siłami są grawitacja (zakładamy, że jest ona zrównoważona przez siłę wyporu wody) oraz siła oporu wody (tę pomijamy na mocy jawnego założenia).

... Wybór ten [~~wynika z faktu~~ / jest niezależny od faktu / ~~pociąga za sobą fakt~~], że energia kinetyczna układu...

W układzie izolowanym obowiązują zasady zachowania; w naszym przykładzie istotne są zasady zachowania pędu i energii (**całkowitej**). W tej części zdania rozpatrujemy związek izolowanego charakteru układu z nieobowiązaniem zasady zachowania energii kinetycznej, czyli tylko jednej formy energii. Takiego związku najzwyczajniej w świecie nie ma, gdyż energia może zmieniać formę zarówno w układzie izolowanym jak i nieizolowanym.

... energia kinetyczna układu w opisywanym procesie [~~po prostu znika / jest wyprowadzana poza układ w formie energii {kinetycznej / potencjalnej / wewnętrznej}~~] / pozostaje w układzie, ale zmienia formę na {potencjalną/ wewnętrzną}].

Pamiętajmy, że energia jest zawsze zachowana. Jeśli więc w układzie izolowanym "gdzieś znika" jakaś energia, to musi się "gdzieś indziej" w tym układzie pojawić energia w innej formie.

W warunkach zadania, skoro postanowiliśmy pominąć opór, jaki stawia woda ruchowi kry, nie ma oddziaływania, które by wyprowadzało przekształconą energię kinetyczną poza układ.

Zamiana formy energii odbywa się wyłącznie poprzez pracę siły tarcia dynamicznego, jedynej siły wewnątrzukładowej zdolnej do wykonywania pracy (siła nacisku foki na krę jest prostopadła do przemieszczenia, nie wykonuje więc pracy; podobnie jest z siłą reakcji kry na fokę). Tarcie dynamiczne jest oddziaływaniem niezachowawczym, które przekształca energię mechaniczną w energię wewnętrzną. Ta ostatnia pozostaje w układzie, czego skutkiem jest podgrzanie brzucha foki i powierzchni kry.



KAPITAŁ LUDZKI  
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

