Problem komputerowy Nr 1.3.4
„Funkcja wykładnicza”

Z pracowni fizycznej (i nie tylko)

1. Wspólną cechą procesów przebiegających jednostajnie jest zmiana określonej wielkości fizycznej o tę samą wartość w jednakowych odstępach czasu. Związane z tym jest istnienie wielkości fizycznej „pochodnej”, stałej w czasie, opisującej tempo zmian owej zasadniczej wielkości. Zależność tej wielkości od czasu jest w takiej sytuacji opisywana funkcją liniową.

   Przedstawmy to na najlepiej znanym przykładzie, jakim jest ruch jednostajny. Położenie x (wielkość fizyczna „zasadnicza”) zmienia się w takim ruchu zawsze o tyle samo w jednakowych odstępach czasu. Wielkością „pochodną”, związaną z położeniem, jest wtedy stała prędkość v. Zależność położenia od czasu jest funkcją liniową o postaci:

   $$x(t) = v \cdot t + x_0 \qquad (x_0 \text{ oznacza tu początkowe położenie ciała})$$

   To samo możemy zapisać, używając pojęcia zmiany położenia Δx:

   $$\Delta x = v \cdot \Delta t \qquad (1)$$

2. W wielu procesach (nie tylko z zakresu zainteresowania fizyki, chemii czy biologii, lecz także nauk społecznych i ekonomicznych) zmiana określonej wielkości zależy od aktualnej wartości tej wielkości. Najprostszym przykładem takiej sytuacji jest proporcjonalna zależność od tej wielkości. Oznacza to, że istnieje stały współczynnik proporcjonalności λ, opisujący związek pomiędzy wartością wielkości a jej zmianą w czasie.

   Przedstawimy taką sytuację na przykładzie zaczerpniętym ze świata finansów. Wyobraźmy sobie rodzeństwo, Zuzannę i Janusza, z których każde dostało na urodziny niemałą kwotę pieniędzy M_0. Zuzia, zapobiegliwa, przekazała swoje pieniądze rodzicom w zamian za obietnicę cotygodniowego **dopłacania jej** sumy, będącej pewnym ułamkiem λ posiadanej już kwoty. Janusz, odwrotnie, postanowił wydawać swoje pieniądze zgodnie z zasadą, że co tydzień **wydaje** taki sam ułamek λ posiadanej jeszcze kwoty. Opis ten wskazuje, że majątek Zuzi M_Z będzie rósł w miarę upływu czasu, zaś majątek Janusza M_J będzie malał. Widać też, że oba te procesy nie są jednostajne, gdyż cotygodniowe zmiany ΔM_Z i ΔM_J nie są stałe - zależą one od zmieniających się wartości M_Z i M_J.

   Wspólny opis matematyczny obu tych procesów wynika z definicji ułamka λ:

   $$\lambda = \frac{\frac{\Delta M}{\Delta t}}{M}, \qquad \text{gdzie } \Delta t \text{ oznacza upływ kolejnego tygodnia.}$$

   Można to także zapisać jako „wzór na zmianę ΔM”:

   $$\Delta M = \lambda \cdot M \cdot \Delta t \qquad (2)$$

   Zwróćmy uwagę, że ułamek λ nie jest liczbą, lecz wielkością mianowaną: $[\lambda] = 1/\text{tydzień}$. Ogólniej, jednostka λ to odwrotność jakiejś jednostki czasu; w naszym przykładzie Δt została wybrana jako jeden tydzień.

Czym więc różnią się sytuacje Zuzanny i Janusza w świetle wzoru (2)? Różnica sprowadza się do **znaku** współczynnika λ: w przypadku Zuzi $\lambda > 0$, zaś w przypadku jej brata $\lambda < 0$. Różnica ta jest na tyle istotna, że na ogół podajemy λ jako wielkość dodatnią, uzupełniając wzór (2) odpowiednim znakiem („+” dla przypadków takich jak Zuzi, „-” dla sytuacji takich, jak u Janusza):

$$\Delta M = \pm\lambda\cdot M\cdot\Delta t \qquad (3)$$

Wzór (3) jest podstawą procedury do obliczania kolejnych wartości funkcji M_Z czy M_J w kolejnych tygodniach.

3. Funkcja wykładnicza. W matematyce równanie (2 lub 3) może być zastosowane do zdefiniowania tzw. funkcji wykładniczej. Jeśli funkcja f(x) ma własność taką, że jednakowym zmianom Δx jej argumentu x, odpowiadają zmiany Δf wartości funkcji proporcjonalne do wartości f(x), to taka funkcja jest tym bardziej zbliżona do funkcji wykładniczej, im zmiany Δx są mniejsze:

jeśli dla dowolnego x i dowolnie małego Δx

$$\Delta f = \pm\lambda\cdot f(x)\cdot\Delta x \qquad \text{lub} \qquad f(x + \Delta x) - f(x) = \pm\lambda\cdot f(x)\cdot\Delta x$$

to

$$f(x) = F_0\cdot e^{\pm\lambda\cdot x} \qquad (4).$$

We wzorze tym F_0 oznacza wartość funkcji f dla x = 0 (wielkość ta jest zwana często wartością początkową funkcji), zaś niewymierna liczba e = 2,7182818459... jest „naturalną” podstawą tej funkcji wykładniczej. Znak przy stałym, dodatnim współczynniku λ określa, czy funkcja wykładnicza jest rosnąca (znak „+”), czy malejąca (znak „-”). W kalkulatorach i aplikacjach komputerowych funkcja wykładnicza (ang.: **exp**onential function) o podstawie e bywa oznaczana symbolem EXP(x).

W przedstawionej wyżej historyjce majątek Zuzi M_Z rośnie wykładniczo (w pewnym przybliżeniu) w czasie (można użyć określenia „rośnie w postępie geometrycznym”), zaś majątek Janusza M_J maleje wykładniczo (także w przybliżeniu) w czasie (można też powiedzieć „podlega wykładniczemu zanikowi”).

W pracowni informatycznej

1. - Wykładniczy wzrost majątku Zuzi.

1. Zaprojektuj arkusz kalkulacyjny w taki sposób, by uzyskać czterokolumnową tabelę obrazującą wzrost majątku Zuzi. Tabela winna zawierać kolumny:

- „biegnącego” czasu (liczonego w tygodniach),
- majątku $M_Z(t)$, obliczonego zgodnie z procedurą wynikającą ze wzoru (3) $\Delta M = \pm\lambda\cdot M\cdot\Delta t$,
- cotygodniowych zmian majątku ΔM (jest to kolumna pomocnicza);
- kolumnę majątku M(t) obliczonego zgodnie ze wzorem (4) $f(x) = F_0\cdot e^{\pm\lambda\cdot x}$.

2. Zapewnij użytkownikowi możliwość wprowadzania własnych wartości trzech parametrów zagadnienia (Δt, λ, M_0); jako wartości domyślne przyjmij te, które podano w tekście.

3. Przedstaw wyniki obliczeń na wspólnym wykresie M_Z i M w funkcji czasu.

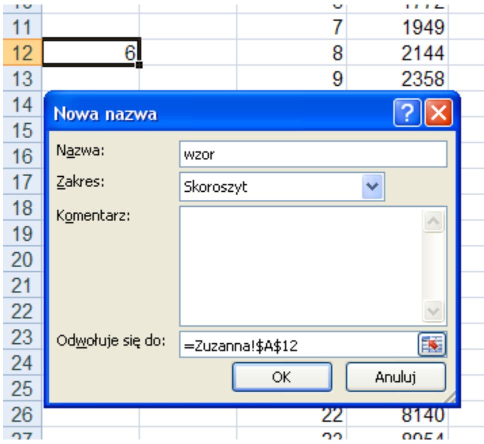
2. - Wykładniczy zanik majątku Janusza.

Skopiuj arkusz z części 1., zapisz jako nowy arkusz i wprowadź w nim niezbędne modyfikacje, by przedstawiał on wykładniczy zanik majątku Janusza.

Rozwiązania

Zaprojektuj arkusz kalkulacyjny, wpisując wartości stałe, nazwy komórek i nagłówki kolumn zgodnie z podaną treścią.

W tym przykładzie wprowadzimy nazwy komórek, odwołujemy się wtedy nie do komórki P48 ale np. komórki zysk – tak nazwanej komórki P48.



Jeżeli chcemy np. utworzyć nazwę komórki A12, to zaznaczamy komórkę i z menu podręcznego wybieramy Nazwij zakres, pojawi się okienko dialogowe , w którym wpisujemy planowaną nazwę komórki – tu wzor, wybieramy OK. i zawartość komórki możemy wykorzystywać wpisując do formuł wzor a nie A12.

Po wprowadzeniu nazw: kwota początkowa M=A5, % przyrost gotówki w tygodniu dM=A7, a przyrost tygodni dt=A9, wprowadzamy wartości początkowe w komórek C5, D5, E5 oraz F5. Kolejny krok to wypełnienie komórek w wierszu 5. Jak we wzorcu poniżej.

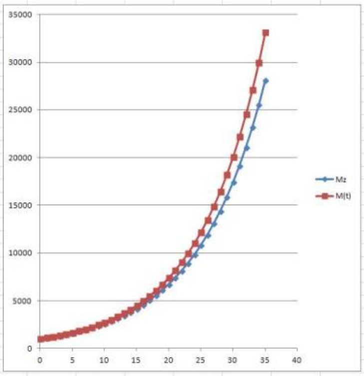
	A	B	C	D	E	F
1		Majątek Zosi				
2			kolejne tygodnie	majątek Zosi	przyrost	funkcja
3			dt	M_z	dM	M(t)
4	kwota początkowa		0	1000	100	1000
5	1000		C4+dt	M+E4	D5*dM*dt	M*EXP(dM*C5)

Pamiętając, że formuły wpisujemy ze znakiem =.

Następnie kopiujemy do odpowiednich komórek i tak przygotowaną tabelę wykorzystujemy do narysowania wykresu zależności przyrostu majątku Zosi w czasie.

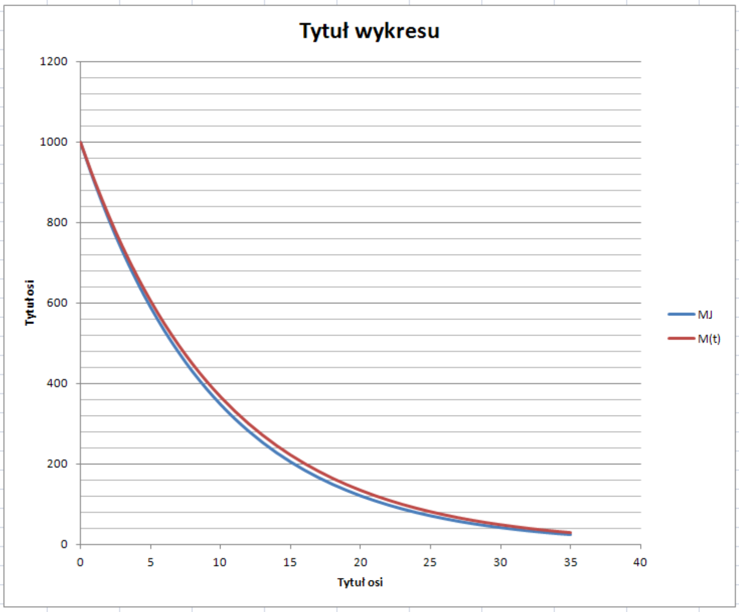
Zaznaczamy dane w kolumnie dt i M_z oraz M(t) i wstawiamy wykres Punktowy. Mamy dwa wykresy funkcji majątek Zosi liczony zgodnie z procedura(3) i majątek Zosi liczony zgodnie ze wzorem (4)

	kolejne tygodnie dt	majątek Zosi M_z	przyrost dM	funkcja M(t)
Majątek Zosi				
kwota początkowa	0	1000	100	1000
1000	1	1100	110	1105
% przyrost w tyg.	2	1210	121	1221
10%	3	1331	133	1350
tygodnie	4	1464	146	1492
1	5	1611	161	1649
	6	1772	177	1822
	7	1949	195	2014
	8	2144	214	2226
	9	2358	236	2460
	10	2594	259	2718
	11	2853	285	3004
	12	3138	314	3320
	13	3452	345	3669
	14	3797	380	4055
	15	4177	418	4482
	16	4595	459	4953
	17	5054	505	5474
	18	5560	556	6050
	19	6116	612	6686
	20	6727	673	7389
	21	7400	740	8166
	22	8140	814	9025
	23	8954	895	9974
	24	9850	985	11023
	25	10835	1083	12182
	26	11918	1192	13464
	27	13110	1311	14880
	28	14421	1442	16445
	29	15863	1586	18174
	30	17449	1745	20086
	31	19194	1919	22198
	32	21114	2111	24533
	33	23225	2323	27113
	34	25548	2555	29964
	35	28102	2810	33115



Druga część zadania podobna, należy więc skopiować arkusz do nowego arkusza i wprowadzić niezbędne modyfikacje w komórce F5, przyrost ma być ujemny czyli wprowadzamy =M*EXP(-dM*C5). Natomiast komórka D5 =M-E4. Po przygotowaniu tabeli danych wykonujemy wykres.

kolejne tygodnie dt	majątek Janusza M_J	przyrost dM	funkcja M(t)
0	1000	100	1000
1	=M-E4	90	905
2	810	81	819
3	729	73	741
4	656	66	670
5	590	59	607
6	531	53	549
7	478	48	497
8	430	43	449
9	387	39	407
10	349	35	368
11	314	31	333
12	282	28	301
13	254	25	273
14	229	23	247
15	206	21	223
16	185	19	202
17	167	17	183
18	150	15	165
19	135	14	150
20	122	12	135
21	109	11	122
22	98	10	111
23	89	9	100
24	80	8	91
25	72	7	82
26	65	6	74
27	58	6	67
28	52	5	61
29	47	5	55
30	42	4	50
31	38	4	45
32	34	3	41
33	31	3	37
34	28	3	33
35	25	3	30



3. Zwróć uwagę, w obu arkuszach, że majątek M_Z czy M_J obliczony zgodnie z procedurą (3) nieco różni się od majątku M(t) obliczonego na bazie funkcji wykładniczej. Wykorzystaj przygotowane arkusze do zilustrowania następującej tezy: Różnica pomiędzy wartościami uzyskanymi za pomocą procedury (3) a wartościami funkcji wykładniczej o tej samej wartości λ jest tym mniejsza, im odcinek czasu Δt wykorzystany w procedurze (3) jest mniejszy.
4. Wykorzystaj arkusz Zuzanny dla zilustrowania następującej tezy: Dla trzech chwil t_1, $t_2 > t_1$ i $t_3 > t_2$ takich, że $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$, $f(t_3)/f(t_2) = f(t_2)/f(t_1)$, gdy funkcja f(t) jest funkcją wykładniczą. Inaczej mówiąc: jednakowym zmianom wartości argumentu funkcji

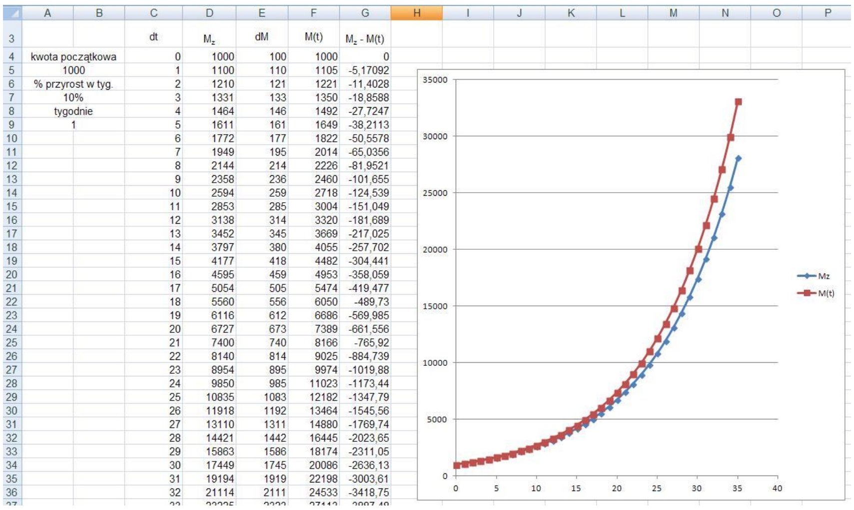
wykładniczej odpowiadają tyle samo krotne zmiany wartości tej funkcji. Zbadaj słuszność tej tezy dla kilku trójek t_1, t_2 i t_3.

5. Procedura (3) w wersji Zuzanny jest podstawą do naliczania tzw. procentu składanego, obowiązującego przy typowych lokatach bankowych. W wersji tu opisanej odpowiadałoby to lokacie z cotygodniową kapitalizacją odsetek (uwaga: użyta tu stopa procentowa, czyli tzw. oprocentowanie, λ = 0,1/tydzień, byłaby dla lokaty bankowej szokująco wysoka). W porozumieniu z nauczycielem matematyki lub podstaw przedsiębiorczości zmodyfikuj arkusz Zuzanny tak, by rozwiązać następujące zadanie: Założono dwie lokaty bankowe; pierwszą z roczną kapitalizacją odsetek i z oprocentowaniem λ_r = 6%/rok oraz drugą z miesięczną kapitalizacją odsetek i oprocentowaniem 0,5%/miesiąc. Zbadaj, który z tych wariantów jest korzystniejszy dla oszczędzającego.
6. W porozumieniu z nauczycielem matematyki wykorzystaj oba arkusze dla zilustrowania następującej tezy: Kolejne wartości M_Z tworzą ciąg geometryczny rosnący, zaś kolejne wartości M_J tworzą ciąg geometryczny malejący. Wyraź ilorazy każdego z tych ciągów za pomocą wielkości λ.

Rozwiązania

Zadanie 3.

W rozwiązaniu tego zadania wykorzystujemy przygotowany arkusz kalkulacyjny, w którym obliczaliśmy zysk Zuzanny i „stratę” Janusza. Uzupełniamy istniejący arkusz o dane w kolumnie G a także wprowadzimy zmianę parametru dt (liczba tygodni – odcinek czasu) za pomocą suwaka.

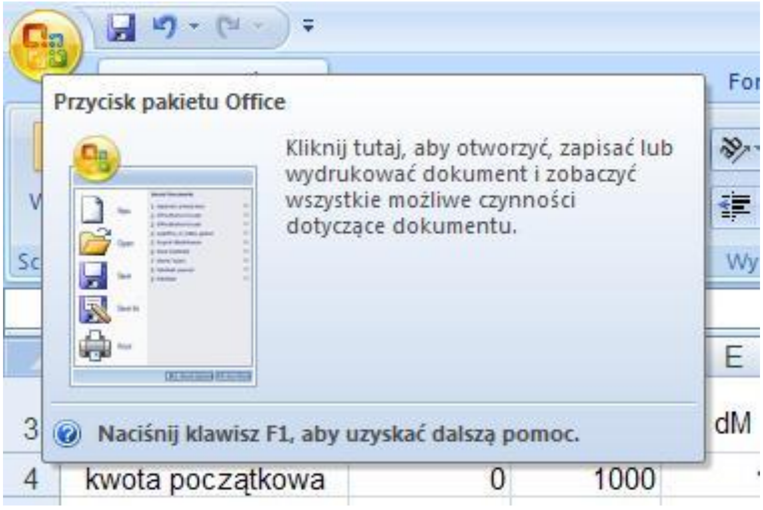


	A	B	C	D	E	F	G
3			dt	M_z	dM	M(t)	M_z - M(t)
4	kwota początkowa		0	1000	100	1000	0
5	1000		1	1100	110	1105	-5,17092
6	% przyrost w tyg.		2	1210	121	1221	-11,4028
7	10%		3	1331	133	1350	-18,8588
8	tygodnie		4	1464	146	1492	-27,7247
9	1		5	1611	161	1649	-38,2113
10			6	1772	177	1822	-50,5578
11			7	1949	195	2014	-65,0356
12			8	2144	214	2226	-81,9521
13			9	2358	236	2460	-101,655
14			10	2594	259	2718	-124,539
15			11	2853	285	3004	-151,049
16			12	3138	314	3320	-181,689
17			13	3452	345	3669	-217,025
18			14	3797	380	4055	-257,702
19			15	4177	418	4482	-304,441
20			16	4595	459	4953	-358,059
21			17	5054	505	5474	-419,477
22			18	5560	556	6050	-489,73
23			19	6116	612	6686	-569,985
24			20	6727	673	7389	-661,556
25			21	7400	740	8166	-765,92
26			22	8140	814	9025	-884,739
27			23	8954	895	9974	-1019,88
28			24	9850	985	11023	-1173,44
29			25	10835	1083	12182	-1347,79
30			26	11918	1192	13464	-1545,56
31			27	13110	1311	14880	-1769,74
32			28	14421	1442	16445	-2023,65
33			29	15863	1586	18174	-2311,05
34			30	17449	1745	20086	-2636,13
35			31	19194	1919	22198	-3003,61
36			32	21114	2111	24533	-3418,75

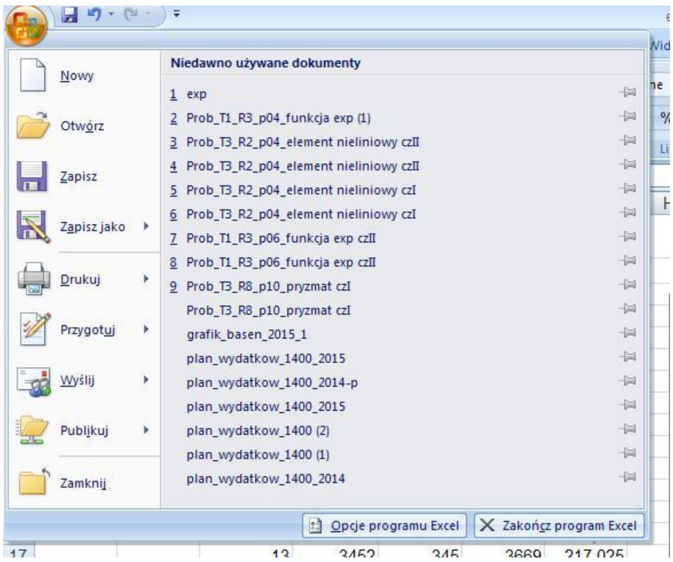
W komórce G3 wpisujemy M_Z – M(t) i w tej kolumnie będziemy obliczać różnicę pomiędzy wartościami uzyskanymi za pomocą procedury (3) a wartościami funkcji wykładniczej o tej samej wartości λ. W komórce G4 wpiszemy formułę =D4-F4 i kopiujemy do końca tabeli danych.

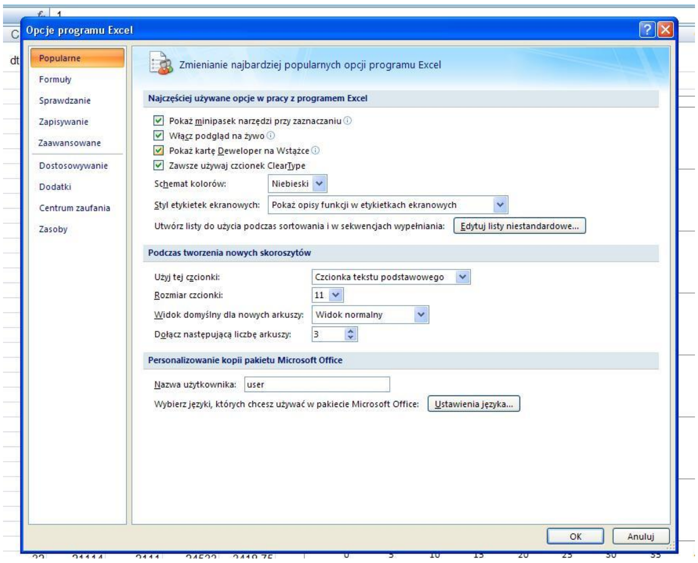
Każda zmiana odcinka czasu, u nas wartości komórki A9, nazwanej dt będzie powodowała zmiany wykresu i pokazywała zmiany interesującej nas różnicy. Aby zmiany prezentowały się płynnie zastosujemy w arkuszu suwak. Możliwość wstawienia suwaka daje nam znajdująca się na wstążce opcja Deweloper. Zdarza się, że jest ona niewidoczna na wstążce, wtedy należy wykonać następujące kroki.

Klikamy myszką w lewym górnym rogu na **Przycisk pakietu Office**

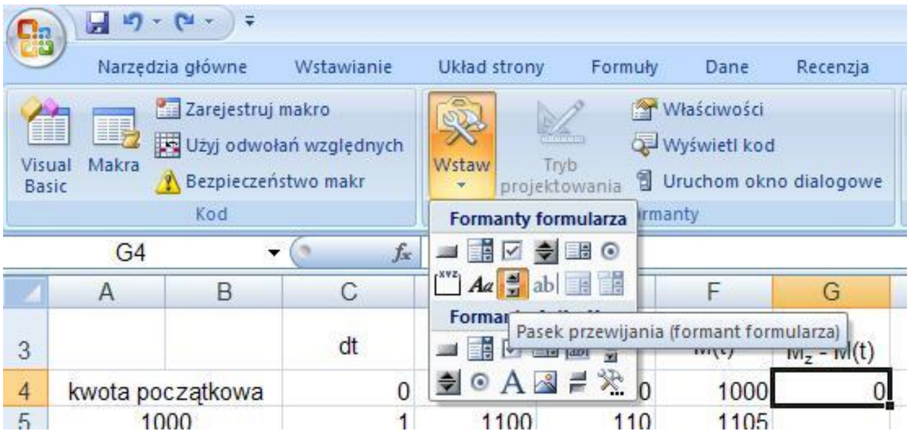


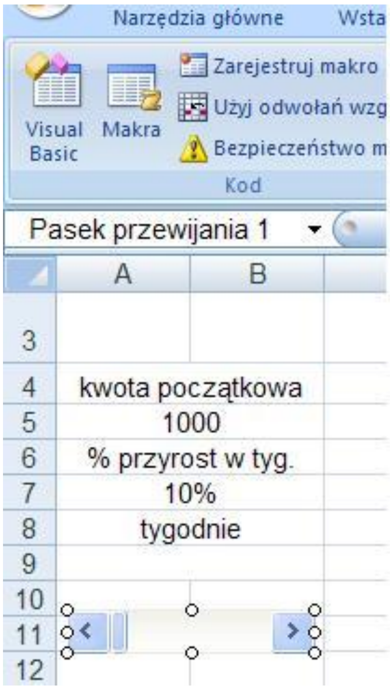
Wybieramy **Opcje programu Excel** i zaznaczamy **Pokaż kartę Deweloper na wstążce,** następnie **OK**

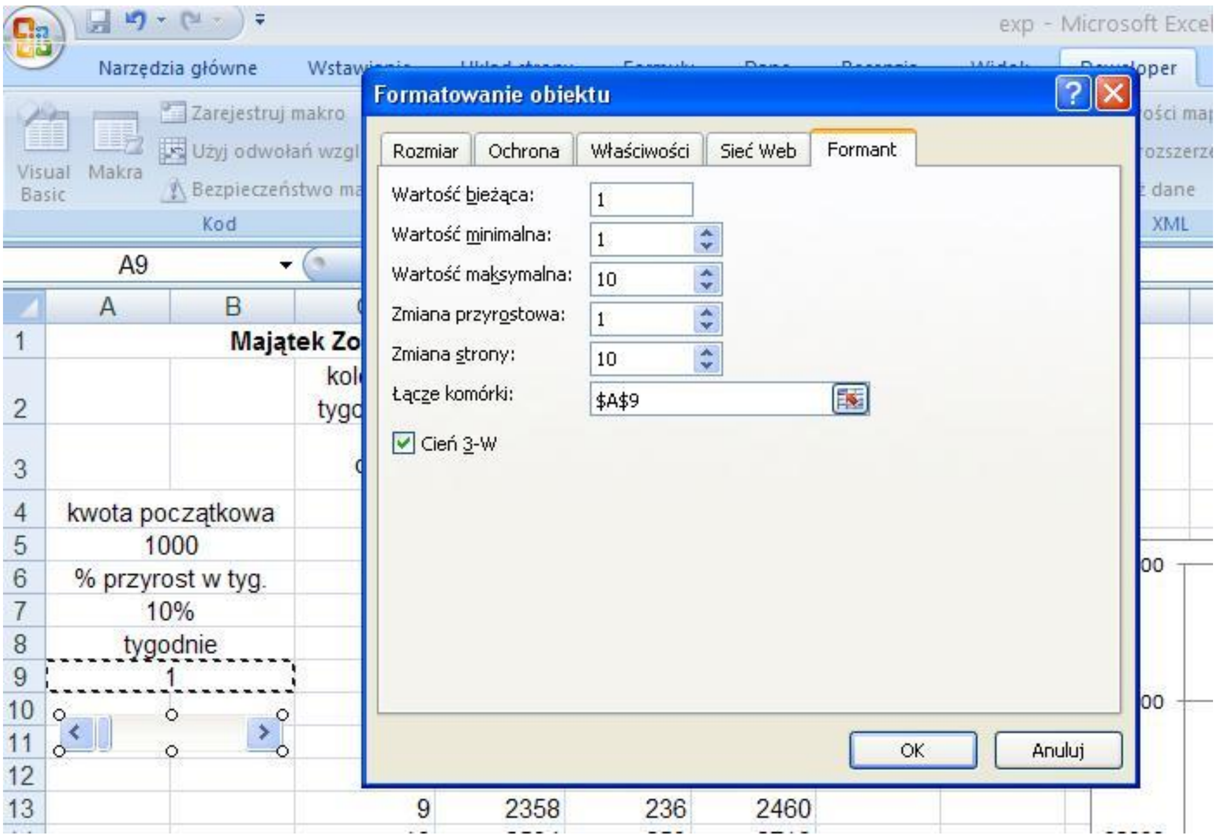




Na wstążce programu Excel pojawi się opcja **Deweloper,** możemy wstawić do zmiany parametru suwak.
W tym celu wybieramy ze wstążki Deweloper, następnie **Wstaw** -> **Formanty formularza** ->**Pasek przewijania** i wybieramy miejsce gdzie chcemy umieścić suwak. W naszym przykładzie suwak umieszczony jest na komórkach A11-B11.
Po ustawieniu suwaka, wybieramy ze wstążki **Właściwości** i ustawiamy parametry suwaka we właściwościach uzupełniając **Formant** danymi: wartość bieżąca, minimalna, maksymalna, zmiana przyrostowa i łącze komórki. (u nas komórka o nazwie dt). Zatwierdzamy przyciskiem OK.







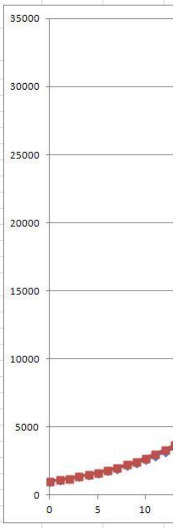
Po zatwierdzeniu zmian możemy zmieniać dane przyrostu czasu suwakiem. Przesuwaj suwakiem i patrz jak zmieniają się interesujące nas różnice w kolumnie G oraz wartości M_Z i M(t) a także wykresy tych zależności. Czy potwierdzają one tezę przedstawioną w zadaniu? W arkuszu Janusz wypełnij kolumnę G jak u Zuzanny, zmiany wprowadzane w wartościach dt widoczne są również na wykresie zależności M_J i M(t).

Zadanie 4

Chcąc zbadać słuszność tezy przedstawionej w zadaniu 2 należy w kolumnie H wpisać iloraz wartości funkcji $M(t_4)/M(t_3)$ dla chwil t_4 i t_3 a wpisaną formułę =F4/F3 kopiować w kilku miejscach kolumny jak pokazano niżej.

H6

A–B	C	D	E	F	G	H
Majątek Zosi						
	kolejne tygodnie	majątek Zosi	przyrost	funkcja	zad. 1	zad. 2
	dt	M_z	dM	M(t)	M_z - M(t)	
kwota początkowa	0	1000	100	1000	0	
1000	1	1100	110	1105	-5,17092	
% przyrost w tyg.	2	1210	121	1221	-11,4028	
10%	3	1331	133	1350	-18,8588	1,105171
tygodnie	4	1464	146	1492	-27,7247	1,105171
1	5	1611	161	1649	-38,2113	1,105171
	6	1772	177	1822	-50,5578	1,105171
	7	1949	195	2014	-65,0356	1,105171
	8	2144	214	2226	-81,9521	
	9	2358	236	2460	-101,655	
	10	2594	259	2718	-124,539	
	11	2853	285	3004	-151,049	1,105171
	12	3138	314	3320	-181,689	1,105171
	13	3452	345	3669	-217,025	**F17/F16**
	14	3797	380	4055	-257,702	1,105171
	15	4177	418	4482	-304,441	1,105171
	16	4595	459	4953	-358,059	
	17	5054	505	5474	-419,477	
	18	5560	556	6050	-489,73	
	19	6116	612	6686	-569,985	
	20	6727	673	7389	-661,556	
	21	7400	740	8166	-765,92	
	22	8140	814	9025	-884,739	
	23	8954	895	9974	-1019,88	
	24	9850	985	11023	-1173,44	
	25	10835	1083	12182	-1347,79	
	26	11918	1192	13464	-1545,56	
	27	13110	1311	14880	-1769,74	
	28	14421	1442	16445	-2023,65	



Zadanie 5

G14 =G13+H13

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				**Zadanie 3**				
2			lata	lokata z odsetkami po roku	odsetki	miesiące	lokata z odsetkami co miesiąc	odsetki
3			dt	M_r	dM_r	dt	M_m	dM_m
4	kwota początkowa		0	1000,00	60,00	0	1000,00	5,00
5	1000		1	1060,00	63,60	1	1005,00	5,03
6	% roczny	%miesięczne	**2**	**1123,60**	**67,42**	2	1010,03	5,05
7	6%	0,5%	3	1191,02	71,46	3	1015,08	5,08
8	kapitalizacja po 12 miesiącach		4	1262,48	75,75	4	1020,15	5,10
9	1		5	**D8+E8**	**D9*A$7*A$9**	5	1025,25	5,13
10	kapitalizacja co miesiąc		**lokata roczna 6% z kapitalizacją**			6	1030,38	5,15
11	1		**odsetek co miesiąc**			7	1035,53	5,18
12			0	1000	5,00	8	1040,71	5,20
13			1	1005,000	5,03	9	1045,91	5,23
14			2	1010	5,05	10	1051,14	5,26
15			3	1015	5,08	11	1056,40	5,28
16			4	1020	5,10	12	1061,68	5,31
17			5	1025	5,13	13	1066,99	5,33
18			6	1030	5,15	14	1072,32	5,36
19			7	1036	5,18	15	1077,68	5,39
20			8	1041	5,20	16	1083,07	5,42
21			9	1046	5,23	17	1088,49	5,44
22			10	1051	5,26	18	1093,93	5,47
23			11	1056	5,28	19	1099,40	5,50
24			12	1062	5,31	20	1104,90	5,52
25			13	1067	5,33	21	1110,42	5,55
26			14	1072	5,36	22	1115,97	5,58
27			15	1078	5,39	23	1121,55	5,61
28			16	1083	5,42	**24**	**1127,16**	**5,64**
29			17	1088	5,44	25	1132,80	5,66
30			18	1094	5,47	26	1138,46	5,69
31			19	1099	5,50	27	1144,15	5,72
32			20	1105	5,52	28	1149,87	5,75
33			21	1110	5,55	29	1155,62	5,78
34			22	1116	5,58	30	1161,40	5,81
35			23	1122	5,61	31	1167,21	5,84
36			**24**	**1127**	**5,64**	32	1173,04	5,87

Kopiujemy do kolejnego arkusza arkusz Zuzanny i modyfikujemy do potrzeb zadania, zmieniając nazwy kolumn oraz wprowadzając formuły jak obok. W komórce D4 formułę =A5, w E4 formułę =D4*A$7*A$9 i kopiujemy w kolumnie.

Podobnie postępujemy obliczając odsetki oraz kapitał obliczane i doliczane co miesiąc.

Sprawdzając lokatę roczną w kapitalizacji miesięcznej piszemy taką samą formułę jak w komórce E4 ale dzielimy przez 12, bo dopisujemy co miesiąc 6%/12.

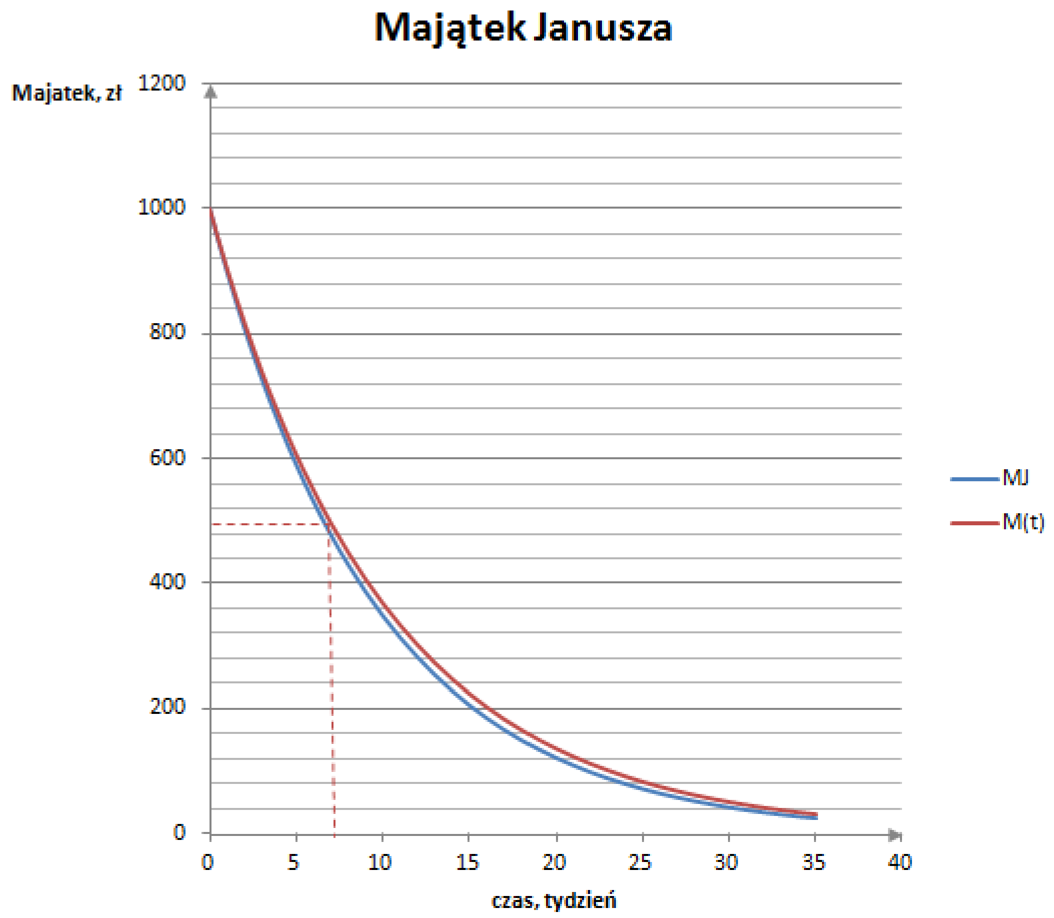
Widać, że lokaty mają roczne oprocentowanie jednakowe. Jednak dopisywanie odsetek co miesiąc powoduje, że jest to wariant korzystniejszy.

Do pracowni fizycznej

Zapoznaj się z treścią paragrafu 1.3.4 e-podręcznika; dotyczy on zagadnień związanych z prawem zaniku promieniotwórczego. Wykonując poniższe polecenia zwróć uwagę na analogię pomiędzy tym prawem a zanikiem majątku Janusza.

1. Wykorzystaj arkusz Janusza dla zilustrowania następującej tezy: Dla wykładniczego zaniku istnieje stały czas $T_{1/2}$ (zwany czasem połowicznego zaniku) taki, że dla dwóch chwil t_1 i $t_2 = t_1 + T_{1/2}$ stosunek $f(t_2)/f(t_1) = 1/2$. Zbadaj słuszność tej tezy dla kilku par t_1 i t_2.

Czas połowicznego zaniku możemy odczytać z wykresu:



Połowa majątku Janusza to 500 zł. Czas po którym majątek ulegnie zmniejszeniu do połowy, czas połowicznego zaniku majątku, wynosi około 7 dni.

Spróbujmy tę wartość odczytać z tabeli:

kolejne tygodnie dt	majątek Janusza M_J	przyrost dM	funkcja M(t)	M_J - M(t)
0	1000	100	1000	0
1	900	90	905	-4,837418
2	810	81	819	-8,730753
3	729	73	741	-11,81822
4	656	66	670	-14,22005
5	590	59	607	-16,04066
6	531	53	549	-17,37064
7	478	48	497	-18,2884
8	430	43	449	-18,86175
9	387	39	407	-19,14917

Widać, że ten czas wynosi około 6,5 tygodnia. Alena wykresie pokazano dwie liniie. Dla linii czerwonej, czyli tej do której zastosowano wzór funkcji wykładniczej czas połowicznego zaniku wynosi niemal 7 tygodnia. Natomiast dla linii niebieskiej która odzwierciedla ubytek majatku Janusza w naszym przypadku, ten czass jest nieco krótszy, wynosi około 6,5 tygodnia.

Będziemy badać przebieg procesu opisany funkcją wykładniczą (czerwoną).

t1 = 2 tydzień , M = 819

T1/2 =7 tygodni, M = 407

$$t_1 = 2 \text{ tydzień}$$

$$T_{1/2} = 7 \text{ tygodni}$$

$$M(2) = 819$$

$$M(7+2) = M(9) = 407$$

$$\frac{M(9)}{M(2)} = \frac{407}{819} \approx \frac{1}{2}$$

Zachęcamy do sprawdzenie tej zależności dla innych czasów.

2.(*) Wykorzystaj arkusz Janusza dla zilustrowania następującej tezy: Dla wykładniczego zaniku istnieje stały czas Tu taki, że dla dwóch chwil t1 i t2 = t1 + Tu stosunek f(t2)/f(t1) = u, gdzie u∈(0; 1). Zbadaj słuszność tej tezy dla kilku par t1 i t2.

Zadanie podobne do poprzedniego. Ale tym razem, ustalmy nasz czas stały:

t = 3 tygodnie

M(2) = 819

M(5) = 607

$$\frac{M(5)}{M(2)} = \frac{607}{819} \approx 0{,}74$$

M(4) = 670

M(7) = 497

$$\frac{M(7)}{M(4)} = \frac{497}{670} \approx 0{,}74$$

3. Wykorzystaj arkusz Janusza dla rozwiązania następującego zadania: Janusz dostał na urodziny kwotę 100 zł. Postanowił na swoje bieżące potrzeby wydawać co tydzień 5% posiadanej jeszcze kwoty. Po pewnym czasie Janusz stwierdził, że pozostało mu już tylko 10 zł. Jak dawno temu Janusz miał urodziny? Określ dokładność uzyskanego wyniku.

Zapiszmy dane początkowe w arkuszu:

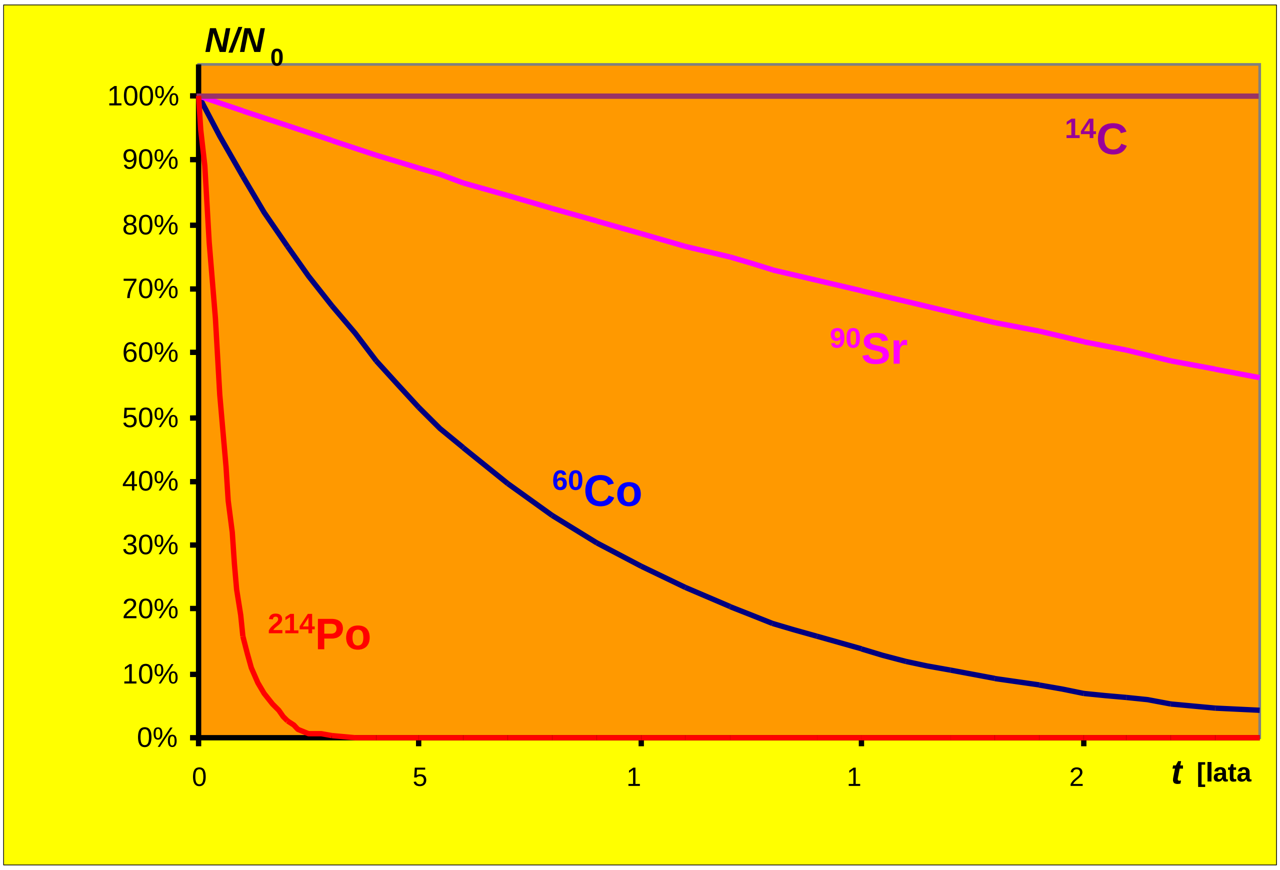
3	
4	kwota początkowa
5	100
6	% przyrost w tyg.
7	5%
8	tygodnie
9	1
10	
11	
12	
13	

Tabela z majątkiem Janusza wygląda tak:

kolejne tygodnie	majątek Janusza	przyrost	funkcja	
dt	M_J	dM	M(t)	M_J - M(t)
0	100	5	100	0
1	95	4,75	95	-0,122942
2	90,25	4,5125	90	-0,233742
3	85,7375	4	86	-0,333298
4	81	4	82	-0,42245
5	77	4	78	-0,501985
6	74	4	74	-0,572633
7	70	3	70	-0,635079
8	66	3	67	-0,689961
34	17	1	18	-0,785891
35	17	1	17	-0,769056
40	16	1	14	2,244393
45	15	1	11	4,449103
50	14	1	8	6,031074

Po około 45 tygodniach jego majątek spadnie do około 10 zł.

4. Jeden z wykresów w §1.3.4 pokazuje krzywe zaniku czterech różnych izotopów, różniących się czasem połowicznego zaniku (czas ten jest podany w tabeli 1.).



W tekście stwierdzono, że choć wykresy te nie pokrywają się, to powinny mieć jednakowy „kształt”. Nie jest to na pierwszy rzut oka oczywiste. Przygotuj arkusz kalkulacyjny, by zawierał tabelę, na podstawie której wygenerowano powyższy wykres. Zaproponuj taką organizację wspólnego wykresu, by zilustrować tezę, iż krzywe zaniku mają jednakowy kształt.

Dlaczego te wykresy mają pozornie różny kształt? Aby odpowiedzieć na to pytania spójrz do tabeli, gdzie podano czasy połowicznego zaniku tych izotopów.

Izotop	$T_{½}$, rozpad	Warto wiedzieć
^{14}C	5730 lat; β^-	produkowany w górnych warstwach atmosfery ziemskiej, stosowany do datowania radiowęglowego w skali archeologicznej
^{238}U	4,5 miliarda lat; α	wykryto na jego przykładzie zjawisko promieniotwórczości naturalnej; stosowany do datowania w skali geologicznej
^{214}Po	139 dni; α	najtrwalszy izotop polonu, odkryty przez Marię Skłodowską-Curie (wraz z radem ^{226}Ra) jako jeden z produktów przemiany ^{238}U
^{235}U	700 milionów lat; α	jest używany jako paliwo w reaktorach jądrowych i bombie atomowej
^{3}H	12,3 lat; β^-	stosowany do znakowania związków chemicznych i jako paliwo w reaktorze termojądrowym i bombie wodorowej
^{60}Co	5,3 lat; β^-, 2γ	stosowany w radioterapii, przy sterylizacji żywności, do radiografii strukturalnej
^{90}Sr	28,8 lat; β^-	produkt rozszczepiania ^{235}U w bombie atomowej, niebezpieczny ze względu na możliwość gromadzenia się w tkance kostnej

Czy teraz potrafisz dać odpowiedź ?

5. (*) W porozumieniu z nauczycielem fizyki wyszukaj zagadnienia, w których występuje wykładniczy zanik określonej wielkości fizycznej (przykłady: zanik prędkości ciała w ośrodku lepkim pod wpływem hamującej siły proporcjonalnej do prędkości; zanik ładunku na okładkach kondensatora rozładowywanego przez opornik). Dla wybranego zagadnienia przygotuj arkusz opisujący taki zanik, analogiczny do arkusza Janusza. Uzupełnij przygotowany arkusz o kolumnę i wykres, obrazujące zmiany w czasie innej wielkości charakterystycznej dla wybranego zagadnienia (np. w zagadnieniu z hamowaniem ciała w ośrodku lepkim zbadaj przebytą drogę; w zagadnieniu z kondensatorem zbadaj natężenie prądu w obwodzie).