Problem komputerowy Nr 1.3.6
„Funkcja wykładnicza cz. II”

I. Z pracowni fizycznej (i nie tylko)

1. W pierwszej części naszych rozważań o funkcji wykładniczej poznaliśmy procesy, w których określona wielkość zmieniała się w tempie proporcjonalnym do tej wielkości. Na przykładzie „finansowych przygód” rodzeństwa, Zuzanny i Janusza, stwierdziliśmy, że gdy zmiana majątku M każdego z nich zachodzi zgodnie z równaniem:

$$\Delta M = \pm\lambda \cdot M \cdot \Delta t \qquad (1)$$

to następuje bądź nieograniczony, wykładniczy wzrost majątku M (przypadek ze znakiem „+”) bądź wykładniczy zanik, aż do zera, majątku (przypadek ze znakiem „-”). Są to dwa skrajnie różne efekty: Zuzka staje się coraz bogatsza (w tzw. postępie geometrycznym) a Janusz pozbywa się majątku, który nieuchronnie dąży do zera.

Spróbujemy teraz zastanowić się, jak można byłoby ustabilizować majątki Zuzki i Janusza. Pomysł jest niemal oczywisty: skoro Zuzka **dostaje** co tydzień określony procent λ swego majątku M_Z, to obarczmy ją **wydatkami**. Janusz, z kolei, oprócz **wydawania** co tydzień określonego procentu λ swego majątku M_J, powinien mieć zapewnione jakieś **przychody**. Przyjmiemy dla uproszczenia (ale zgodnie z wieloma „prawdziwymi” zjawiskami), że cotygodniowe wydatki **W** Zuzanny oraz cotygodniowe przychody **P** Janusza są stałe, niezależne od aktualnych majątków M_Z i M_J.

2. W finansach (dokładniej w ubezpieczeniach) sytuacja Zuzi jest najprostszym przykładem bycia rentierem. Lokuje ona w banku „początkowy” majątek M_0, bank zapewnia jej okresowe (w naszym przykładzie - cotygodniowe) oprocentowanie λ. Po otrzymaniu tego oprocentowania, Zuzka co tydzień podejmuje z konta stałą kwotę W, która stanowi jej rentę. Tak więc cotygodniowa zmiana majątku Zuzi ΔM_Z składa się z dwóch części:

$$\Delta M_Z = (+\lambda \cdot M_Z - W) \cdot \Delta t \qquad (2)$$

Podobnie, choć nieco inaczej przedstawia się sytuacja Janusza, która wprawdzie nie ma określonej nazwy w świecie finansów, ale może być dobrym modelem postępowania dla „odpowiedzialnej głowy rodziny”. Janusz bowiem, niezależnie od początkowego majątku M_0, ma stałe (w naszym przykładzie cotygodniowe) przychody P, zaś co tydzień wydaje taki sam ułamek λ posiadanego majątku M_J. Tak więc cotygodniowa zmiana majątku Janusza ΔM_J także składa się z dwóch części:

$$\Delta M_J = (P - \lambda \cdot M_J) \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Opisy te nie pozwalają jednoznacznie ustalić, czy majątki M_Z i M_J każdego z rodzeństwa będą rosły czy malały w miarę upływu czasu. Widać natomiast, że oba te procesy nie są jednostajne, gdyż cotygodniowe zmiany ΔM_Z i ΔM_J nie są stałe - zależą one nie tylko od stałych wartości λ oraz W bądź P, ale też od zmieniających się wartości M_Z i M_J. By zbadać, jak zachowuje się w czasie majątek każdego z rodzeństwa, zastosujemy podobną procedurę jak w pierwszej części rozważań o funkcji wykładniczej: będziemy obliczać, tydzień po tygodniu, zmiany majątku ΔM i dodawać do majątku z poprzedniego tygodnia. Procedura ta wykorzysta wzór (2) dla Zuzanny oraz wzór (3) dla Janusza.

Nim przejdziesz do zaprogramowania arkusza kalkulacyjnego, spróbuj rozstrzygnąć na drodze rozumowania (może namówisz koleżanki i kolegów na „drobną burzę mózgów”?), która z procedur (2) czy (3) pozwoli zrealizować cel, jakim jest ustabilizowanie majątku M_Z i M_J.

II. W pracowni informatycznej

cz. 1. - Dylemat rentierki Zuzanny.

1.1. Zaprogramuj arkusz kalkulacyjny w taki sposób, by uzyskać czterokolumnową tabelę obrazującą zmianę majątku Zuzi oraz wykres jej majątku w funkcji czasu. Tabela winna zawierać kolumny:

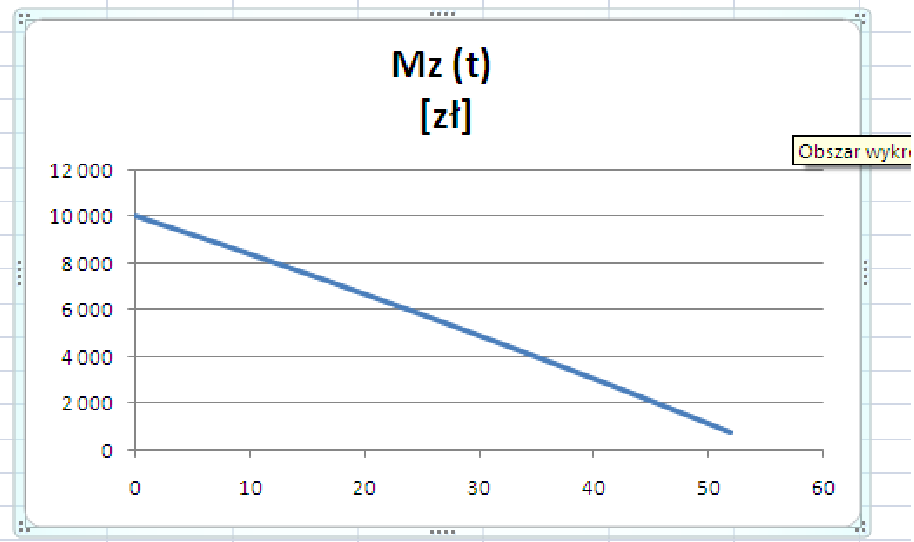
- „biegnącego” czasu (liczonego w tygodniach),
- „bieżącego” majątku $M_Z(t)$, obliczonego zgodnie z procedurą wynikającą ze wzoru (2),
- cotygodniowych zmian majątku ΔM_Z (jest to kolumna pomocnicza);
- kolumnę majątku M(t) obliczonego zgodnie ze wzorem (4), którą dodasz wykonując polecenie nr 1.7.

1.2. Zapewnij użytkownikowi możliwość wprowadzania własnych wartości czterech parametrów zagadnienia (Δt, λ, M_0, W); jako wartości domyślne przyjmij: Δt = 1 tydzień, λ = 0,004/tydzień (0,4%/tydzień), M_0 = 10.000 zł, W = 200 zł/tydzień.

	A	B	C	D	E	F	G
1				t [tydz]	Mz (t) [zł]	ΔM [zł]	[Mo-W/λ]*exp(λ*t) + W/λ [zł]
2	Δt [tydz]			0	10 000	-160	10 000
3	1			1	9 840	-161	9 840
4				2	9 679	-161	9 679
5				3	9 518	-162	9 517
6	λ [1/tydz]			4	9 356	-163	9 355
7	0,004	4		5	9 194	-163	9 192
8				6	9 030	-164	9 028
9				7	8 866	-165	8 864
10	Mo [zł]			8	8 702	-165	8 699
11	10000			9	8 537	-166	8 534
12				10	8 371	-167	8 368
13				11	8 204	-167	8 201
14	W [zł/tydz]			12	8 037	-168	8 033
15	200			13	7 869	-169	7 865
16				14	7 701	-169	7 696
17				15	7 532	-170	7 527
18				16	7 362	-171	7 356
19				17	7 191	-171	7 185

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



1.3. (*) W porozumieniu z nauczycielem matematyki lub podstaw przedsiębiorczości przekonaj się, że zaproponowane jako domyślne oprocentowanie lokaty (0,4%/tydzień) jest równoważne oprocentowaniu w skali rocznej w wysokości ok. 23,1%. Jest to bardzo wysoka wartość, charakterystyczna dla rozchwianej gospodarki, będącej na pograniczu tzw. hiperinflacji.

1.4. Przekonaj się, że zmiana wartości oprocentowania λ może spowodować, że majątek Zuzi będzie malał, rósł bądź pozostanie stały. Jednak nie osiągnie on żadnego stanu stabilnego - poza przypadkiem, gdy będzie stały. Jeśli M_Z maleje, to zbliża się do zera nie asymptotycznie, lecz coraz szybciej (przyjmij interpretację, w myśl której gdy M_Z osiąga wartość ujemną, to „rentierskie" życie Zuzi się kończy). Jeśli zaś M_Z rośnie, to też coraz szybciej i wzrasta w sposób zbliżony do wykładniczego.

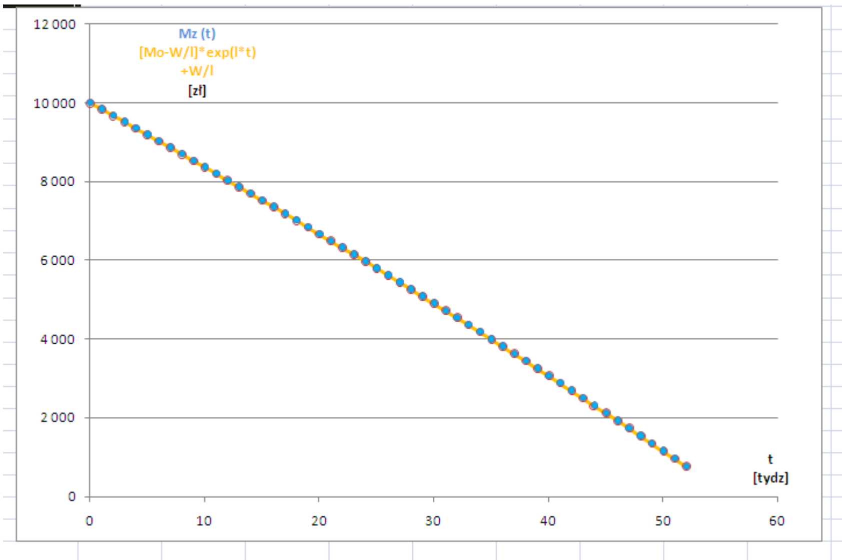
1.5. Przekonaj się, że zmiana wartości pozostałych dwóch parametrów (M_0 i W) powoduje te same efekty, co zauważone w punkcie 4. Wyprowadź warunek, jaki muszą spełniać parametry λ, M_0 i W by majątek M_Z był stały w czasie.

1.6. Sformułuj „dylemat rentiera", uzupełniając następujące zdanie: Jeśli rentier ma określony majątek początkowy M_0 i może liczyć na określone jego oprocentowanie λ, to istnieje ...., równa ...., która zapewnia, że jego majątek pozostanie stały w czasie. Jeśli zależy mu na wypłacie W większej niż ...., to musi liczyć się z tym, że .... W porozumieniu z nauczycielem podstaw przedsiębiorczości zapoznaj się z podstawowymi mechanizmami, stosowanymi przez towarzystwa ubezpieczeniowe oferujące produkty rentierskie (np. renty dożywotnie), których celem jest uniknięcie owego dylematu, wynikającego z niestabilności majątku rentiera, który (poza specyficznym przypadkiem) albo maleje do zera albo się nieograniczenie rozrasta.

1.7. Wypełnij czwartą kolumnę tabeli - M(t) - wartościami funkcji

$$M(t) = (M_0 - W/\lambda)\cdot e^{\lambda t} + W/\lambda. \qquad (4)$$

Funkcja ta opisuje „dokładny" przebieg majątku Zuzi. Przedstaw na wspólnym wykresie obie zależności: M_Z i M w funkcji czasu i porównaj te zależności.

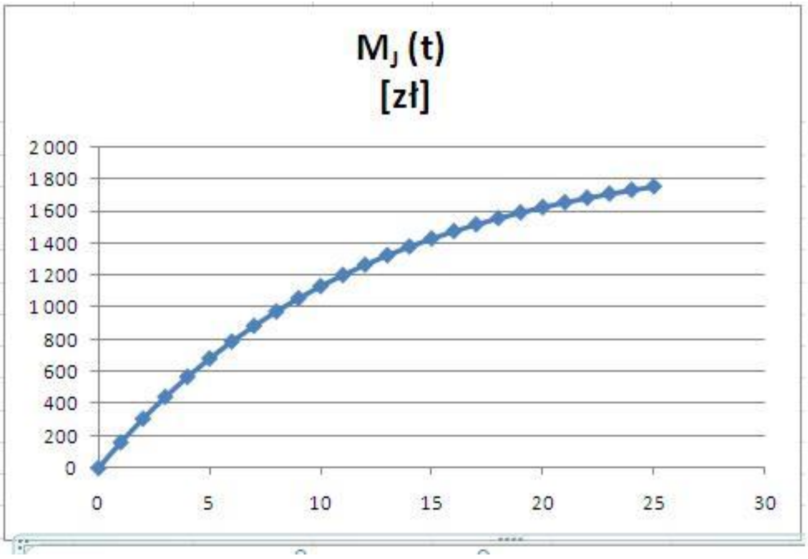


cz. 2. - Stabilne finanse Janusza.

2.1. Skopiuj arkusz z części 1., zapisz jako nowy arkusz i wprowadź w nim niezbędne modyfikacje, by przedstawiał on majątek Janusza, zgodnie z procedurą wynikającą ze wzoru (3). Zrezygnuj z wielkości W (cotygodniowa wypłata renty) na rzecz P - cotygodniowe przychody. Przyjmij domyślne wartości: P = 500 zł/tydzień, M_0 = 100 zł oraz λ = 40%/tydzień. Kolumnę majątku M(t) pozostaw na razie pustą.

	A	B	C	D	E	F
1				t [tydz]	M_J (t) [zł]	ΔM [zł]
2	Δt [tydz]			0	0	160
3	1			1	160	147
4				2	307	135
5				3	443	125
6	λ [1/tydz]			4	567	115
7	0,08	8		5	682	105
8				6	787	97
9				7	884	89
10	Mo [zł]			8	974	82
11	0			9	1 056	76
12				10	1 131	70
13				11	1 201	64
14	P [zł/tydz]			12	1 265	59
15	160			13	1 323	54
16				14	1 378	50
17				15	1 427	46

2.2. Zwróć uwagę, że w odróżnieniu od majątku Zuzanny, wartość majątku Janusza stabilizuje się - dąży asymptotycznie do pewnej stałej wartości końcowej, którą będziemy oznaczać M_k. Z wygenerowanej tabeli oraz wykresu można odczytać, że dla zaproponowanych wartości domyślnych M_k = 1250 zł.



2.3. Zbadaj wpływ parametru M_0 na przebieg zależności $M_J(t)$. Przekonaj się, że zależność ta może być malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że niezależnie od M_0, majątek Janusza stabilizuje się - dąży asymptotycznie do tej samej wartości M_k.

2.4. Zbadaj wpływ parametru P na przebieg zależności $M_J(t)$. Przekonaj się, że zmiany P także mogą spowodować, iż zależność ta będzie malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że majątek Janusza stabilizuje się, choć wartość M_k, do której asymptotycznie dąży ten majątek, zależy od P. Zwróć też uwagę, że czas, po którym zależność $M_J(t)$ staje się praktycznie stała, w niewielkim tylko stopniu zmienia się wraz ze zmianami P.

2.5. Zbadaj wpływ parametru λ na przebieg zależności $M_J(t)$. Przekonaj się, że zmiany λ powodują (podobnie jak dwa poprzednie parametry), iż zależność ta będzie malejąca, rosnąca bądź stała. Przekonaj się także, że wartość M_k, do której asymptotycznie dąży majątek Janusza zależy od λ. Wyprowadź związek pomiędzy M_k, P oraz λ. Zwróć też uwagę, że czas, po którym zależność $M_J(t)$ staje się praktycznie stała, istotnie zmienia się wraz ze zmianami λ.

2.6. (*) Przypomnij sobie pojęcie czasu połowicznego zaniku (problem informatyczny o funkcji wykładniczej oraz paragraf 3.4 w pierwszym tomie podręcznika). W arkuszu ustaw następujące wartości parametrów: $M_0 = 0$; $\lambda = 0{,}08$/tydzień i P = 160 zł/tydzień. Wypełnij czwartą kolumnę tabeli - M(t) - wartościami funkcji opisującej „dokładny” przebieg majątku Janusza:

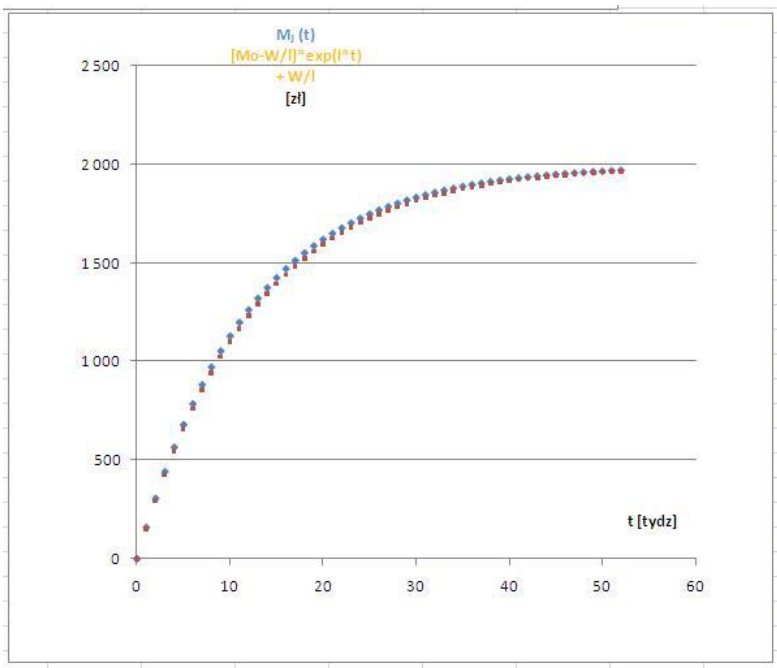
$$M(t) = (M_0 - P/\lambda)\cdot e^{-\lambda t} + P/\lambda. \qquad (5)$$

Wykaż, analizując tabelę wartości i wykres, że funkcja ta ma „czas połowicznego narastania” $T_{1/2}$. Rozumiemy przez to czas, po którym różnica pomiędzy bieżącą wartością funkcji $M_J(t)$ a jej wartością końcową M_k zmaleje dwukrotnie:

$$M_k - M(t + T_{1/2}) = ½[M_k - M(t)]. \qquad (6)$$

Wskazówka: przy zaproponowanych wartościach parametrów $T_{1/2} \approx 8{,}66$ tygodnia.

	A	B	C	D	E	F	G
1				t [tydz]	M_J (t) [zł]	ΔM [zł]	[Mo-W/λ]*exp(λ*t) + W/λ [zł]
2	Δt [tydz]			0	0	160	0
3	1			1	160	147	154
4				2	307	135	296
5				3	443	125	427
6	λ [1/tydz]			4	567	115	548
7	0,08	8		5	682	105	659
8				6	787	97	762
9				7	884	89	858
10	Mo [zł]			8	974	82	945
11	0			9	1 056	76	1 026
12				10	1 131	70	1 101
13				11	1 201	64	1 170
14	P [zł/tydz]			12	1 265	59	1 234
15	160			13	1 323	54	1 293
16				14	1 378	50	1 347
17				15	1 427	46	1 398



III. Do pracowni fizycznej

1. Zapoznaj się z fragmentem paragrafu 1.3.6 e-podręcznika, w którym opisany jest problem utrzymywania się stałego stężenia izotopu węgla ^{14}C w atmosferze. Rozstrzygnij, czy problem ten jest podobny do zagadnienia Zuzanny (i opisywany jest równaniem typu (2)) czy do zagadnienia Janusza (i opisywany jest równaniem typu (3)). Pokaż analogię pomiędzy tym problemem a wybranym przez Ciebie zagadnieniem.

2. (*) Zapoznaj się z pojęciem „sprzężenie zwrotne” (wyszukaj je w encyklopedii lub internecie). Zastanów się nad różnicą pomiędzy „sprzężeniem zwrotnym ujemnym” a „sprzężeniem zwrotnym dodatnim”. Rozstrzygnij, które z tych pojęć pasuje do zagadnienia Zuzanny a które do zagadnienia Janusza.

3. (*) W porozumieniu z nauczycielem fizyki wyszukaj inne zjawiska, w których występuje stały w czasie „czynnik napędowy”, któremu towarzyszy „czynnik hamujący” proporcjonalny do wielkości charakteryzującej zjawisko (przykłady: prędkość ciała w ośrodku lepkim, poruszającego się pod wpływem stałej siły „napędowej” i siły hamującej proporcjonalnej do prędkości; gromadzenie ładunku na okładkach kondensatora ładowanego stałym napięciem w obwodzie z opornikiem, temperatura ciała podgrzewanego stałym w czasie strumieniem ciepła i stygnącego w tempie proporcjonalnym do różnicy pomiędzy jego temperaturą a temperaturą otoczenia). Dla wybranego zagadnienia przygotuj arkusz opisujący takie zjawisko, analogiczny do arkusza Janusza. Uzupełnij przygotowany arkusz o kolumnę i wykres, obrazujące zmiany w czasie innej wielkości charakterystycznej dla wybranego zagadnienia (np. w zagadnieniu z ruchem ciała w ośrodku lepkim zbadaj przebytą drogę; w zagadnieniu z kondensatorem zbadaj natężenie prądu ładowania w obwodzie; w zagadnieniu z podgrzewanym ciałem zbadaj moc, z jaką ciało pozbywa się energii na rzecz otoczenia).

4. (*) Jeśli w klasie przerabiane już było zjawisko samoindukcji (rozdział 4. trzeciego tomu e-podręcznika) to rozwiąż zadanie 2. (polecenia a-c) z §3.4.4. Następnie wykorzystaj arkusz kalkulacyjny do rozwiązania dalszego ciągu tego zadania:

   d) Przyjmij, że zależność natężenia prądu od czasu w obwodzie ma postać, której wykres został przedstawiony (orientacyjnie) na rys. x.2b:

$$I(t) = I_{\max} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

   gdzie $I_{max} = U/R$ a $\tau = L/R$ ma interpretację charakterystycznego czasu narastania natężenia prądu. Uważa się, konwencjonalnie, że po upływie czasu $t = 3\cdot\tau$, natężenie prądu praktycznie przestaje narastać. Zwróć uwagę, że w poleceniach ‘a’ i ‘b’ przyjęto, że natężenie prądu przestało narastać po upływie 0,12 s, czyli po czasie $t = 3{,}84\cdot\tau$.

   - W arkuszu kalkulacyjnym sporządź tabelę wartości funkcji $I(t)$ dla $t \in \langle 0; n\cdot\tau \rangle$, gdzie n jest parametrem zadawanym przez użytkownika (domyślnie n = 3,84). Tabela winna zawierać N wartości funkcji (N jest zadawane przez użytkownika; domyślnie N = 100). Przygotuj arkusz tak, by użytkownik mógł wprowadzać dowolne wartości zmiennych U, R oraz L, zawsze podawane w jednostkach SI. Oceń liczbowo, na ile dokładne jest przyjęcie, w poleceniach ‘a’ i ‘b’, że po upływie czasu $t = 3{,}84\cdot\tau$, natężenie prądu praktycznie przestaje narastać.
   - W tym samym arkuszu przygotuj wykres $I(t)$. Oceń graficznie, na ile dokładne jest przyjęcie, w poleceniach ‘a’ i ‘b’, że po upływie czasu $t = 3{,}84\cdot\tau$, natężenie prądu praktycznie przestaje narastać.

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- Uzupełnij tabelę o niezbędne rubryki (wiersze lub kolumny), które pozwolą na obliczanie wartości funkcji $|\varepsilon_{ind}(t)|$ wraz z wykresem tej funkcji.
- Oblicz średnią wartość $|\varepsilon_{ind}(t)|$ dla n = 3,84 i porównaj wynik z wynikami otrzymanymi w poleceniach ‘a’ i ‘b’. Który z trzech wyników jest najlepszym przybliżeniem średniej wartości SEM indukcji? Uzasadnij swoje przekonanie.

e) Przyjmij, że zależność wartości ε_{ind} od czasu w obwodzie ma postać funkcji wykładniczej:

$$|\varepsilon_{ind}(t)| = \frac{L \cdot I_{\max}}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

- W arkuszu kalkulacyjnym sporządź tabelę wartości funkcji $|\varepsilon_{ind}(t)|$ dla t ∈ < 0; n·τ>, gdzie n jest parametrem zadawanym przez użytkownika (domyślnie n = 3,84). Tabela winna zawierać N wartości funkcji (N jest zadawane przez użytkownika; domyślnie N = 100). Przygotuj arkusz tak, by użytkownik mógł wprowadzać dowolne wartości zmiennych *U*, *R* oraz *L*, zawsze podawane w jednostkach SI.
- Oblicz, na podstawie tabeli, średnią wartość $|\varepsilon_{ind}(t)|$ dla n = 3,84; zastosuj przy tym procedurę, w której obliczysz pole powierzchni pod wykresem $|\varepsilon_{ind}(t)|$ i pole to podzielisz przez długość przedziału czasu:

  wartość średnia funkcji w zadanym przedziale =

  (pole powierzchni pod wykresem funkcji w tym przedziale) / (długość przedziału)

- Porównaj wynik z wynikami otrzymanymi w poleceniach ‘a’, ‘b’ i ‘d’. Który z czterech wyników jest najlepszym przybliżeniem średniej wartości SEM indukcji? Uzasadnij swoje przekonanie.

f) Zastosowanie rachunku całkowego pozwala wyprowadzić następujący, dokładny wzór na średnią wartość $|\varepsilon_{ind}(t)|$:

$$|\varepsilon_{ind}(t)|_{śr} = \frac{U}{n} \cdot (1 - e^{-n})$$

Porównaj ten wynik z wynikami uzyskanymi w poleceniach ‘a’, ‘b’, ‘d’ i ‘e’.

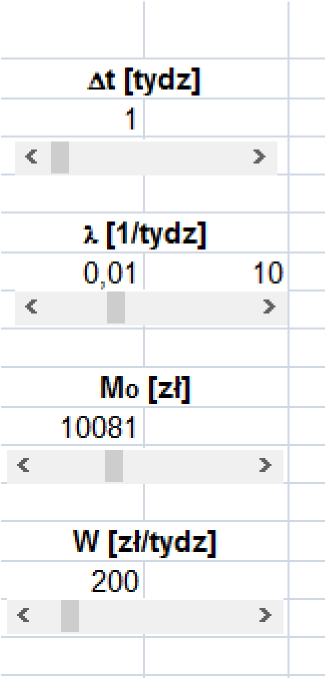
Komentarze, wskazówki, rozwiązania

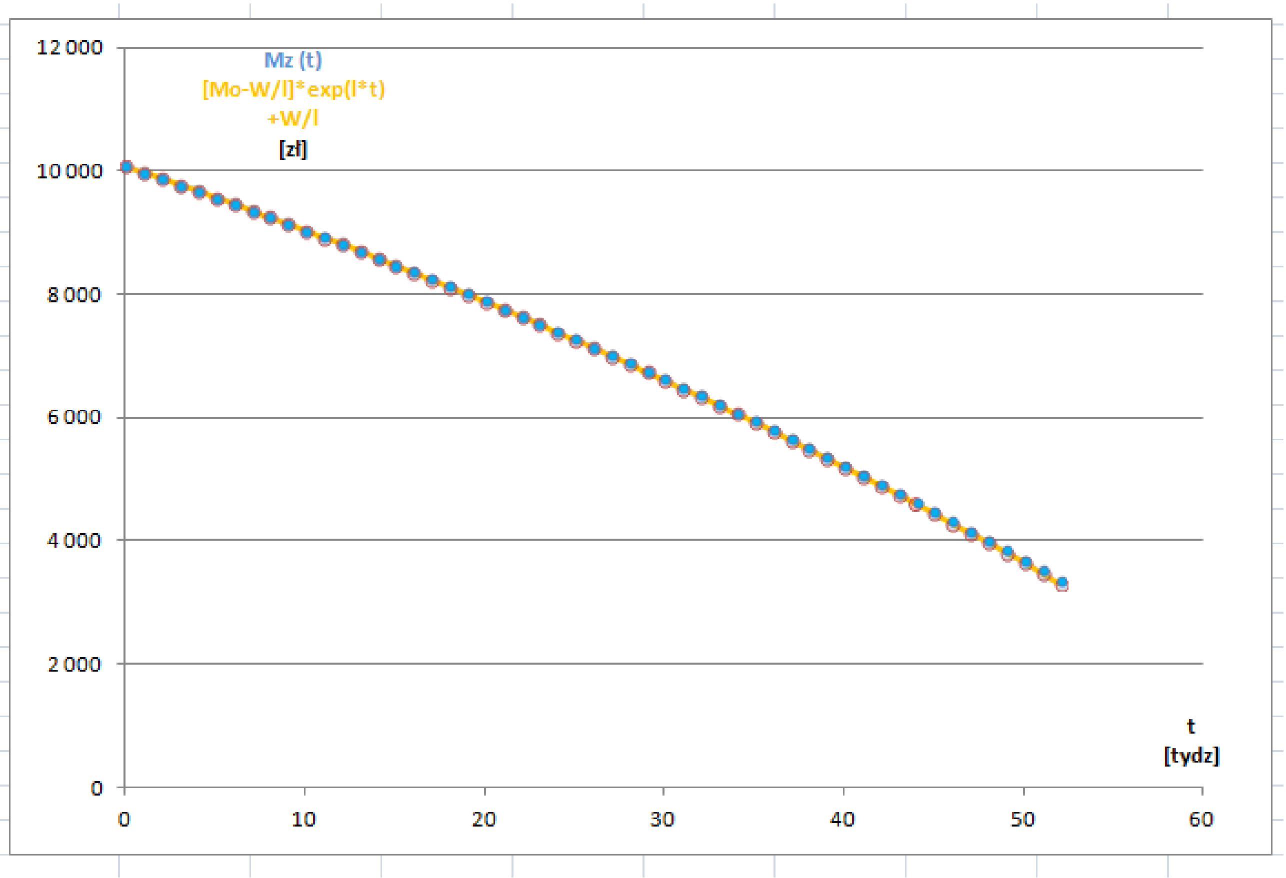
1. Sprawy majątkowe Zuzanny i Janusza są pozornie odlegle od rzeczywistości zjawisk fizycznych. Ale tylko pozornie, w e - podręczniku omówiono problem stałego stężenia izotopu węgla ^{14}C. Skoro ten izotop cały czas się rozpada, to musi być istnieć czynnik, który powoduje ciągłe dostarczanie tego izotopu do atmosfery. Tym czynnikiem jest promieniowanie kosmiczne, a ściśle promieniowanie słoneczne, niosące strumień wysokoenergetycznych neutronów. Co ciekawe, zwiększanie ilości izotopów węgla ^{14}C powoduje zwiększenie szybkości ich ubywania. Wskutek tych procesów zawartość izotopu węgla ^{14}C w atmosferze jest stała w skali kilku tysięcy lat.

Przyjrzyjmy się teraz finansom Zuzanny i Janusza.

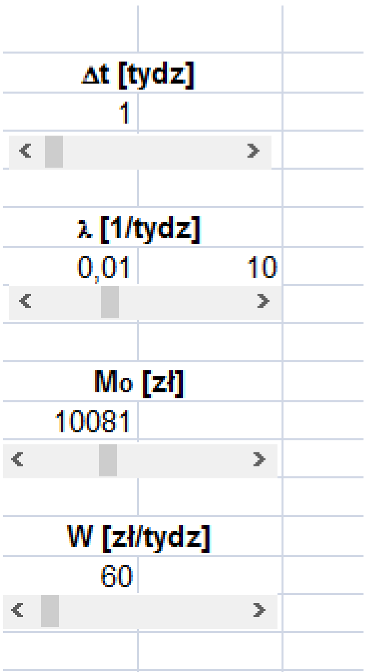
2. **Na początek finanse Zuzanny**.

Gdy oprocentowanie majątku Zuzanny jest takie, że odsetki są mniejsze od tygodniowych wydatków to jej majątek bardzo szybko będzie maleć.

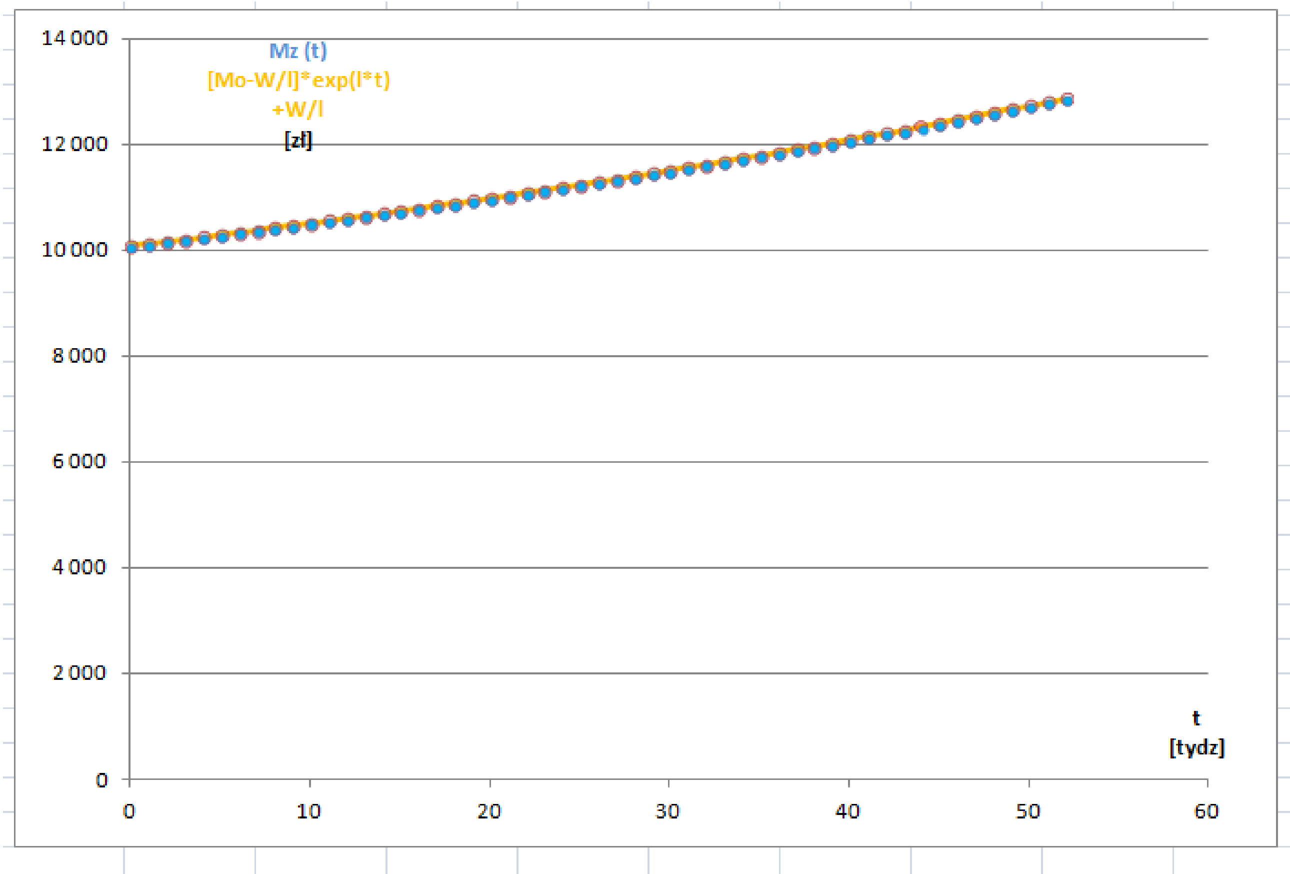




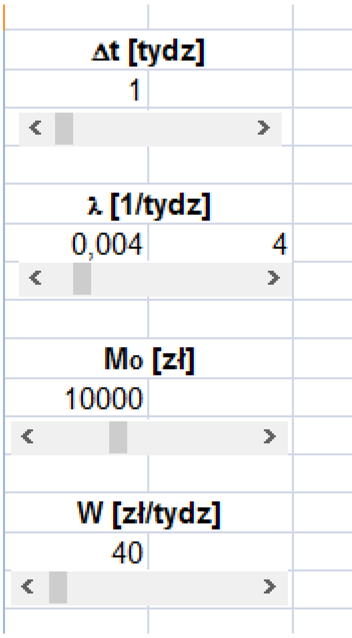
Ale Zuzanna może okazać się rozsądną osobą i jej tygodniowe wydatki będą mniejsze od przyrostu odsetek na koncie. W takim przypadku jej majątek będzie wzrastał.



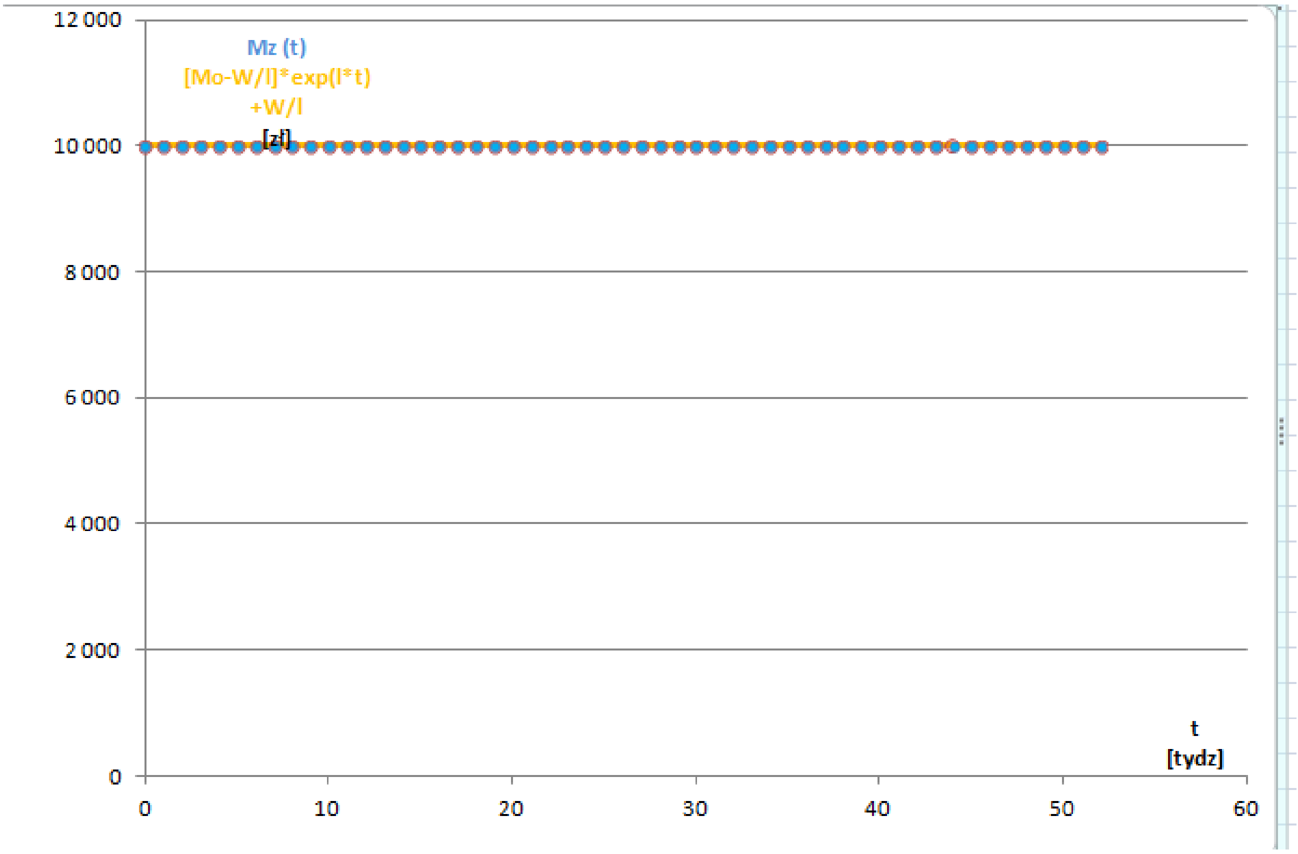
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Nietrudno zauważyć, że gdy Zuzanna będzie wydawać tyle, ile w ciągu tygodnia będą wynosiły odsetki, to jej majątek nie będzie ulegał zmianie.



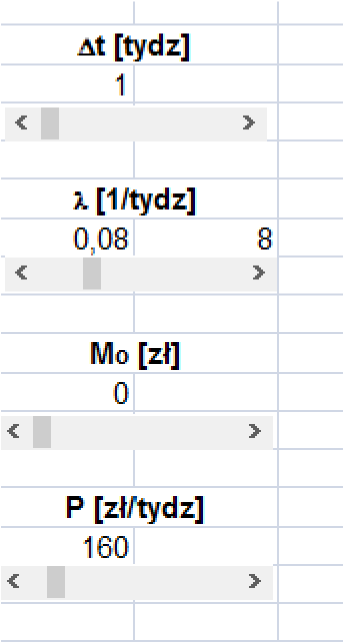
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

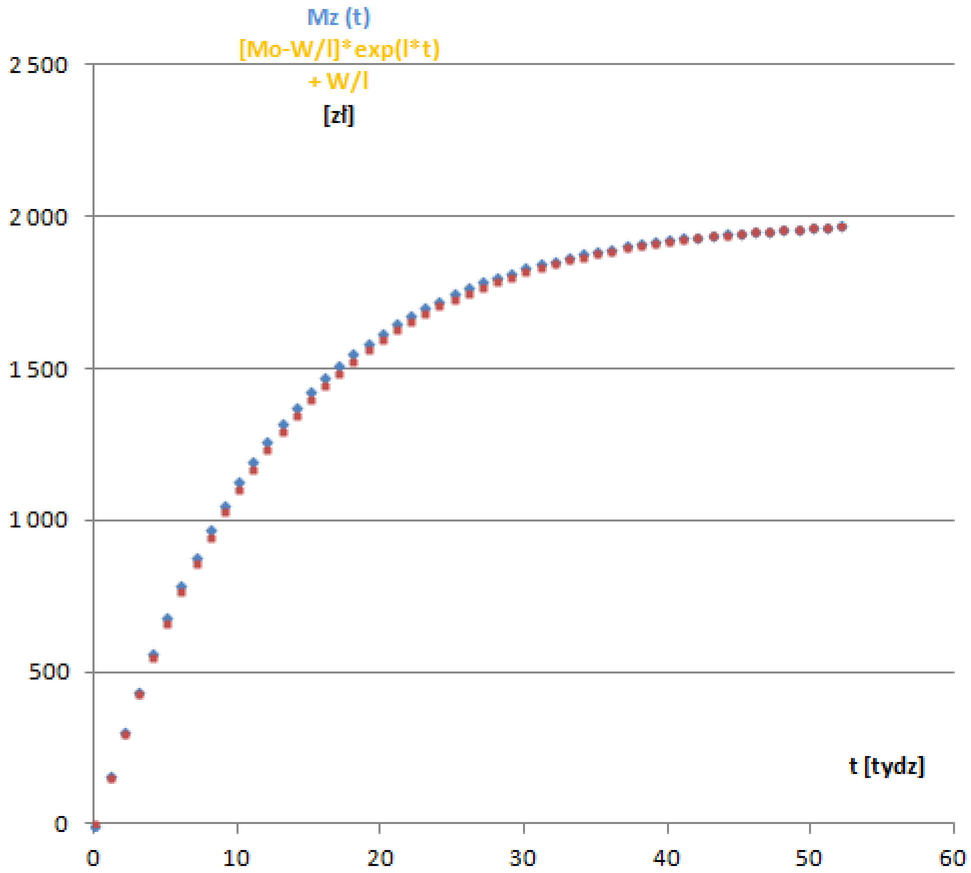


3. A teraz Janusz.

Nieco inna sytuacja jest z majątkiem Janusza. Obserwujemy u niego wzrost majątku, ale niejednostajny, gdyż każdego tygodnia wydaje pewien jego procent. Jednak po pewnym czasie obserwujemy wyraźną stabilizację. Majątek Janusza osiąga pewną wartość i pomimo stałych dochodów nie ulega zmianie, gdyż stabilizują się także wydatki.

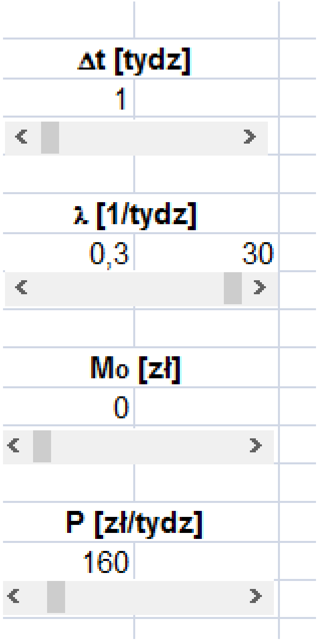
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

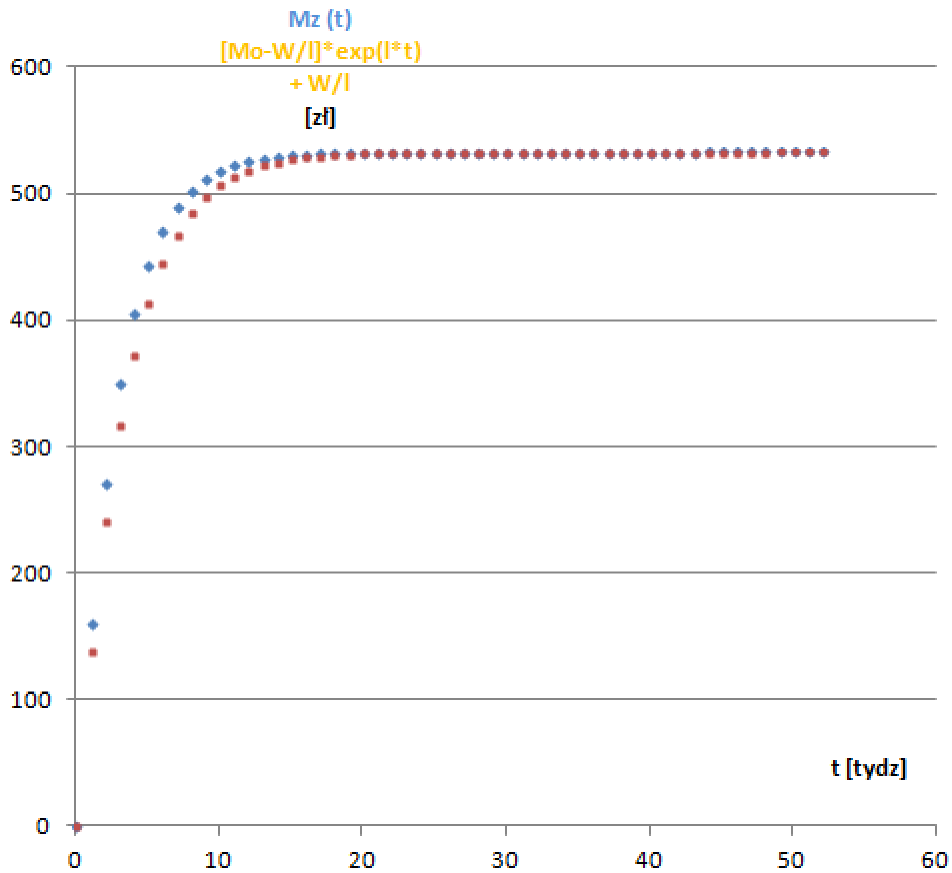




W tym przypadku ten ustabilizowany stan przypada na kwotę 2000 zł.

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

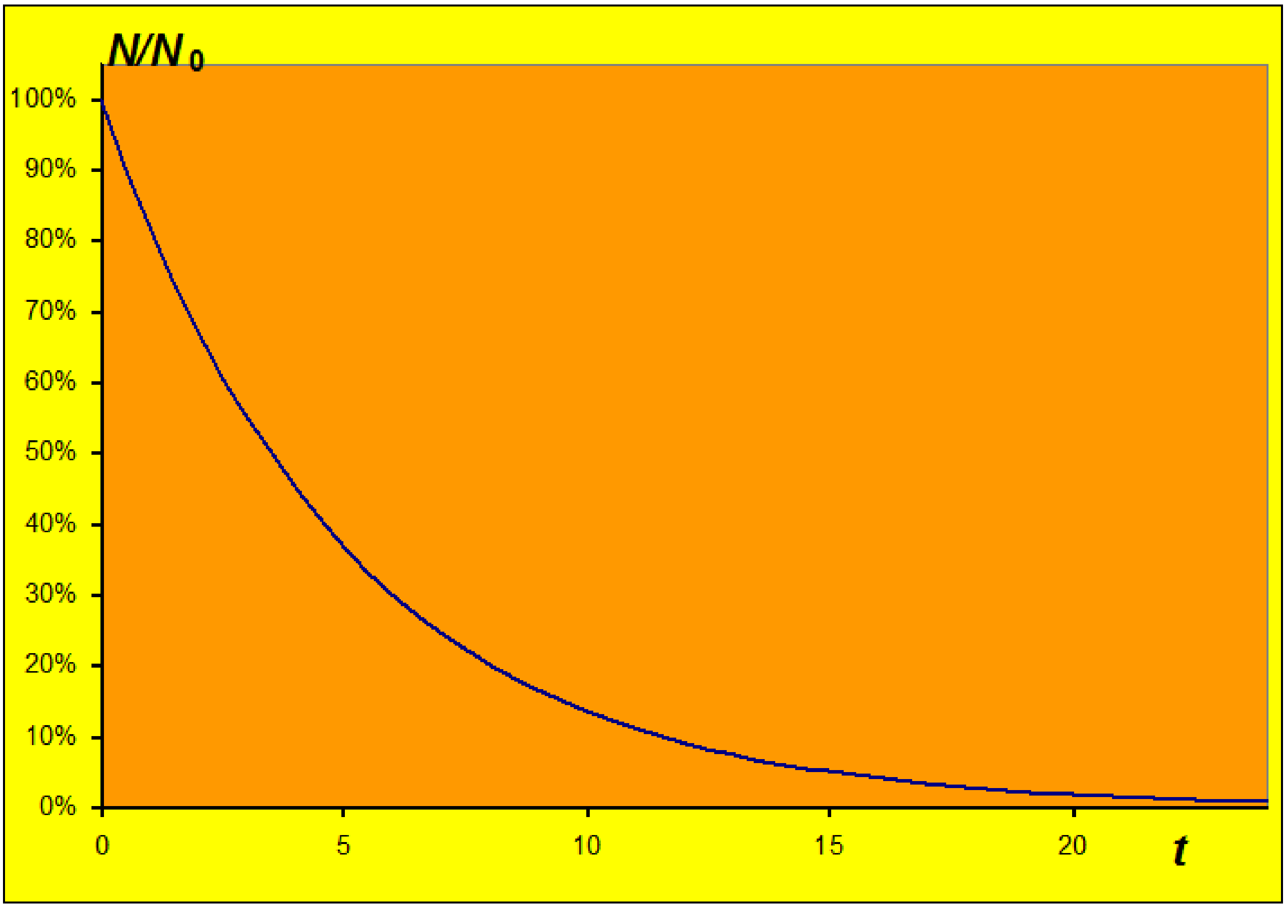




A w tym przypadku jest to kwota nieco ponad 500 zł. Jest ona mniejsza od poprzedniej, gdyż przy takich samych przychodach zwiększyły się wydatki Janusza, ale i tym razem obserwujemy ustabilizowanie się majątku na pewnym poziomie.

4. Zwróćmy uwagę na wykładniczy charakter stabilizacji majątku Janusza.

Pamiętamy podobna krzywą w części I e-podręcznika. Tam jednak obrazowała ona wykładniczy spadek liczby jąder izotopów promieniotwórczych.



Tutaj natomiast obserwujemy wykładnicze narastanie gotówki :).

W przykładzie z fizyki jądrowej wprowadziliśmy czas połowicznego rozpadu. Tutaj analogiczną wielkość nazwiemy czasem połowicznego wzrostu, albo przyrostu czy narastania.

Przypomnijmy zatem, że czas połowicznego rozpadu określa czas po którym rozpadowi ulegnie połowa jąder izotopu. W naszym przypadku czas połowicznego narastania, to będzie czas po którym różnica miedzy majątkiem końcowym a majątkiem bieżącym zmaleje dwukrotnie.

W naszej tabeli majątek końcowy M_k = 1996 zł. Majątek bieżący np. w trzecim tygodniu wynosił 427 zł. Różnica zatem wnosi 1569 zł. Różnica zmniejszona dwukrotnie czyli 784,5 zł będzie w tygodniu jedenastym, czyli czas połowicznego narastania wynosi około 8 tygodni.

t [tydz]	Mz (t) [zł]	ΔM [zł]	[Mo-W/λ]*exp(λ*t) + W/λ [zł]
0	0	160	0
1	160	147	154
2	307	135	296
3	443	125	427
4	567	115	548
5	682	105	659
6	787	97	762
7	884	89	858
8	974	82	945
9	1 056	76	1 026
10	1 131	70	1 101
11	1 201	64	1 170
12	1 265	59	1 234
13	1 323	54	1 293

t [tydz]	Mz (t) [zł]	ΔM [zł]	W/λ]*exp(λ*t) + W/λ [zł]
0	0	160	0
1	160	147	154
2	307	135	296
3	443	125	427
4	567	115	548
5	682	105	659
6	787	97	762
7	884	89	858
8	974	82	945
9	1 056	76	1 026
10	1 131	70	1 101
11	1 201	64	1 170
12	1 265	59	1 234
13	1 323	54	1 293
14	1 378	50	1 347
15	1 427	46	1 398
16	1 473	42	1 444
17	1 515	39	1 487
18	1 554	36	1 526
19	1 590	33	1 563
20	1 623	30	1 596
21	1 653	28	1 627

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. tydzień,   1969 - 427 = 1542

11. tydzień. 1969 - 1170 = 799

19. tydzień, 1969 - 1563 = 406

Widzimy, że czas narastania wynosi około 8 tygodni po których różnica między bieżącym stanem majątku, a stanem końcowym zmniejsza się około dwa razy.

Na poniższym rysunku różnice te oznaczono symbolami r_3, r_{11} i r_{19}.