

Tom II



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



e-Fizyka - Multimediale środowisko nauczania fizyki dla szkół ponadgimnazjalnych
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (POKL).
Priorytet III Działanie 3.3.

Rozdział

1

Kinematyka punktu materialnego

Podrozdziały:

- [1.1 Podstawowe pojęcia opisujące ruch](#)
- [1.2 Droga i prędkość](#)
- [1.3 Ruch jednostajny prostoliniowy](#)
- [1.4 Ruch jednostajnie przyspieszony](#)
- [1.5 Przyspieszenie ziemskie, swobodne spadanie ciał](#)
- [Doświadczenie „Galileusz”](#)
- [1.7 Ocena niepewności pomiarowych](#)
- [1.8 Ruch jednostajnie opóźniony](#)
- [1.9 Rzut pionowy w górę](#)
- [1.10 Operacje na wektorach](#)
- [1.1 Wektor prędkości](#)
- [1.12 Wektor przyspieszenia](#)
- [1.13 Doświadczenie „Akceleracja”](#)
- [1.14 Rzut poziomy](#)
- [1.15 Ruch jednostajny po okręgu](#)

Rysunek 1.1: Wirtualny nauczyciel

Kinematyka jest to nauka o ruchu ciała (lub ciał). Z ruchem mamy do czynienia na co dzień. Można powiedzieć, że wszystko, co żyje, porusza się. Człowiek stworzył specjalne urządzenia do poruszania się – samochody, samoloty, rakiety i wiele innych pojazdów. Do opisu ruchomych ciał trzeba się posłużyć takimi pojęciami, jak: położenie, czas, droga, prędkość i przyspieszenie. W tym rozdziale poznasz i nauczysz się obliczać wspomniane wyżej wielkości opisujące ruch. Nauczysz się też ściśle przewidywać, w jakim miejscu w danej chwili znajdzie się pojazd, gdzie i kiedy pojazdy się spotkają. Poznasz opis nie tylko ruchu po linii prostej, ale i ruchów krzywoliniowych, które wykonuje np. piłka w locie, samochód na łuku autostrady czy satelita na orbicie.

Nauka o ruchu – *kinematyka* – bada związki między położeniem, prędkością i przyspieszeniem, nie wnikając, skąd się biorą przyspieszenia czy siły. Badaniem sił zajmuje się *dynamika*, która zostanie omówiona w następnym rozdziale.



Rysunek 1.2: Z ruchem mamy do czynienia codziennie

1.1 Podstawowe pojęcia opisujące ruch

Względność ruchu

Co to jest ruch? Jeżeli mówimy, że pewne ciało jest w ruchu, rozumiemy przez to, że ciało to zmienia swoje położenie względem jakiegoś innego ciała. Wynika stąd, że ruch jakiegokolwiek ciała jest zawsze określony względem innego ciała. Na tym polega właśnie względność ruchu, jak również względność spoczynku. Jeżeli ktoś powie, że Ziemia porusza się z prędkością 30 km/s, to takie zdanie jest niepełne. Nabiera ono pełnego sensu, jeżeli sformułujemy je w następujący sposób: Ziemia porusza się z prędkością 30 km/s względem środka Słońca. Dlatego zawsze musimy obrać układ odniesienia, zwykle układ współrzędnych, względem którego będziemy opisywać ruch ciał.

Dla pełnego, ilościowego (a więc matematycznego) opisu ruchu, z układem odniesienia wiążemy układ współrzędnych. Najlepiej znanym Ci układem współrzędnych jest tzw. układ kartezjański, w jego dwuwymiarowej wersji. Na układ ten składają się dwie osie liczbowe oznaczane jako Ox i Oy . Przecinają się one w umownym punkcie $(0;0)$, w którym wyobrażamy sobie obecność ciała, z którym związaliśmy układ odniesienia.

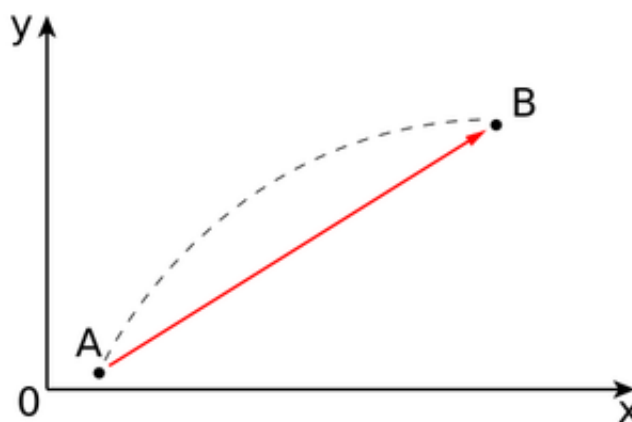
Punkt materialny

Dowolne ciało, którego rozmiary możemy zaniedbać, nazywamy *punktem materialnym*. Jest to bardzo wygodne pojęcie, ponieważ zamiast opisywać ruch wszystkich części ciała, często wystarczy określić ruch punktu mającego masę tego ciała. Na przykład, dla wyznaczenia czasu przejazdu pociągu z Warszawy do Poznania wcale nie trzeba badać ruchu wszystkich części pociągu. Zamiast opisywać ruch jakiejś planety jako całości, często wystarczy określić ruch jej środka.

Zastępowanie ciała punktem materialnym jest przybliżeniem często stosowanym w fizyce. Pamiętać jednak należy, że każde przybliżenie niesie ze sobą określone ograniczenia. Przykładowo, pojęcie gęstości punktu materialnego nie istnieje. Nie można także mówić o obrocie punktu materialnego.

Wektory i skalary. Przemieszczenie, położenie i droga

Punkt materialny w trakcie ruchu zakreśla pewną linię (która może być prostą lub krzywą). Linię tę nazywamy *tor*em ruchu punktu materialnego. Długość toru to przebyta droga. W wielu przypadkach do opisu ruchu wystarczy znajomość położenia oddzielnych punktów na torze. Jeżeli punkt materialny znajduje się w punkcie A , a później w punkcie B , to mówimy, że *przemieszczeniem* (lub *przesunięciem*) punktu materialnego jest wektor \vec{AB} (patrz [Rysunek 1.3: Wektor przemieszczenia](#) na stronie 6).



Rysunek 1.3: Wektor przemieszczenia

Jak widzimy, definicja wektora przemieszczenia nie mówi nam nic o torze, po którym punkt materialny przeszedł z A do B . Nie interesuje nas to, czy tor był prosty, czy krzywy. Po prostu przemieszczenie to zmiana położenia ciała.

Wektory

Rysunek 1.4: Animacja

W celu określenia przemieszczenia musimy podać trzy informacje:

1. wartość przemieszczenia; należy zatem podać długość odcinka AB ;
2. kierunek przemieszczenia; w przypadku ruchu na płaszczyźnie (w dwóch wymiarach) należy podać kąt, jaki tworzy odcinek AB z jedną z osi x lub y na płaszczyźnie;
3. zwrot przemieszczenia; zwrot oznaczamy strzałką (w tym przypadku od A do B).

⚠ **Ważne:** *Wektor* - wielkość fizyczna, do określenia której konieczne są trzy informacje: *kierunek*, *zwrot* i *wartość*.

Natomiast wielkości, dla określenia których wystarczy podać tylko wartość liczbową (z jednostką), nazywają się *skalarami*. Na przykład, pole powierzchni jest skalar, ponieważ dla jego wyznaczenia wystarczy podać tylko liczbę pewnych jednostek, podobnie temperatura (5°C). Oto inne przykłady wielkości skalarnych: czas, masa ciała, objętość, gęstość.

Więcej wiadomości na temat wektorów znajdziesz w rozdziale [1.10 Operacje na wektorach](#) na stronie 43.

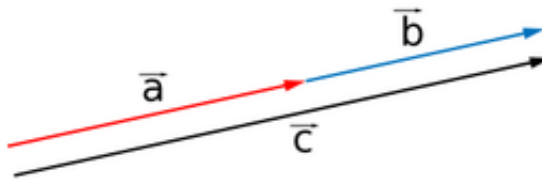
⚠ **Ważne:** *Skalar* – wielkość fizyczna, do określenia której wystarczy podać tylko jej wartość oraz jednostkę.

Dodawanie wektorów o wspólnym kierunku i zwrocie

Jeżeli ciało przemieszcza się wzdłuż prostej, najpierw o wektor \vec{a} , następnie o wektor \vec{b} , to przemieszczenie wypadkowe określone jest przez wektor \vec{c} , który jest równy sumie wektorów \vec{a} i \vec{b} . Zobacz [Rysunek 1.5: Suma wektorów](#) na stronie 7.

$$(\text{wzór 1}) \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

Suma dwóch wektorów $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$



Rysunek 1.5: Suma wektorów

Tak dodają się nie tylko przemieszczenia, ale również dowolne wektory tej samej wielkości fizycznej mające wspólny kierunek i zwrot. Np. wektory prędkości, w przypadku statku na rzece. Jeżeli śruba nadaje statkowi prędkość \vec{v}_1 , a prędkość prądu rzeki wynosi \vec{v}_2 , to prędkości się sumują – statek płynie z prędkością $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ względem brzegu rzeki.

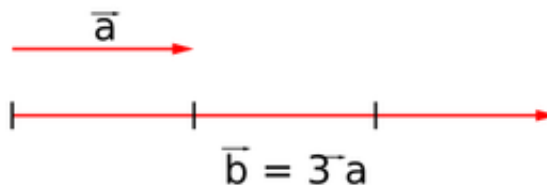
Mnożenie i dzielenie wektora przez skalar

Iloczynem wektora przez skalar jest nowy wektor, który ma niezmienny kierunek, ale jego wartość jest tyle razy większa, ile wynosi wartość bezwzględna skalar. Na przykład, iloczynem skalar k przez wektor \vec{a} jest wektor

$$(\text{wzór 2}) \vec{b} = k\vec{a}$$

o wartości $b = |k| \cdot a$, mający kierunek wektora \vec{a} . W przypadku gdy $k > 0$, również zwrot wektora \vec{b} jest taki sam jak wektora \vec{a} .

Przykład mnożenia wektora przez skalar $k = 3$

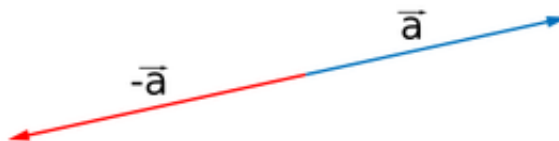


Rysunek 1.6: Mnożenie wektora przez skalar

Łatwo teraz możemy odpowiedzieć na pytanie, jaki jest wynik dzielenia wektora przez skalar. Ponieważ dzielenie przez jakąś liczbę jest równoważne mnożeniu przez odwrotność tej liczby, więc wynikiem dzielenia wektora \vec{a} przez skalar z ($z \neq 0$) jest nowy wektor: $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{z}$ który ma niezmienny kierunek, ale jego wartość jest podzielona przez $|z|$.

Zmiana zwrotu wektora na przeciwny

Jeżeli przed symbolem wektora postawimy znak minus, będzie to oznaczać, że wektor ma przeciwny zwrot. Na przykład $-\vec{a}$ oznacza wektor, który różni się od wektora \vec{a} tym, że ma przeciwny zwrot, podczas gdy kierunek i długość wektora są takie same, jak wektora \vec{a} (*Rysunek 1.7: Zmiana znaku wektora* na stronie 9). Zatem zmiana znaku wektora na przeciwny oznacza jedynie zmianę jego zwrotu.



Rysunek 1.7: Zmiana znaku wektora

Pytania i problemy

1. W jakim celu w mechanice posługujemy się pojęciem punktu materialnego? Scharakteryzuj punkt materialny. Uzasadnij dlaczego stosowanie tego pojęcia wyklucza: a) operowanie pojęciem gęstości, b) opisywanie obrotów ciał.
2. Co to znaczy, że ruch jest względny?
3. Czym różnią się skalary od wektorów? Podaj definicję tych wielkości. Podaj kilka przykładów wielkości wektorowych i skalarnych.
4. Podaj, jakie trzy wielkości charakteryzują wektor.
5. Podaj definicję przemieszczenia (lub przesunięcia) punktu materialnego. Do jakiego typu zaklasyfikowałbyś tę wielkość (skalar czy wektor)?
6. Podaj 3 przykłady dodawania wektorów o wspólnym kierunku.
7. Podaj przykład mnożenia wektora przez skalar.
8. Czy zmiana zwrotu wektora na przeciwny ma jakiś związek z mnożeniem wektora przez skalar? Podaj przykład.
9. Co otrzymamy, gdy podzielimy wektor przez skalar? Podaj przykład dla wybranej wartości wielkości skalarnej, wraz z rysunkiem.

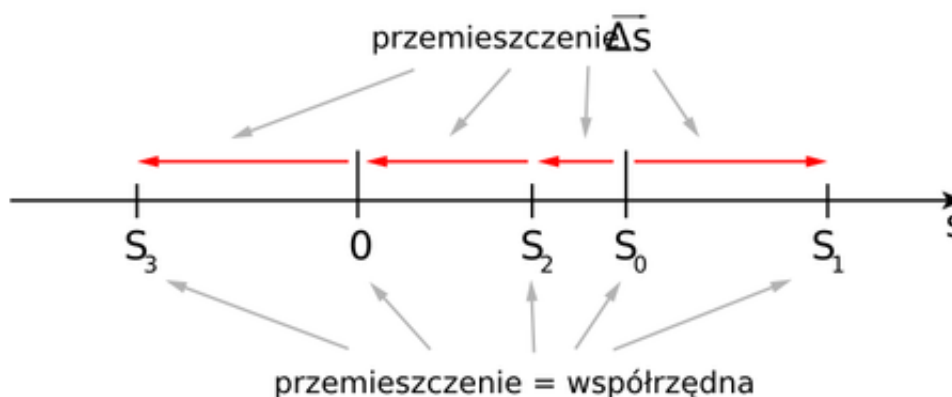
1.2 Droga i prędkość

Dla opisu ruchu prostoliniowego określimy następujące pojęcia: *położenie*, *przemieszczenie* (*przesunięcie*) i *droga*. Załóżmy, że obserwujemy ruch samochodu na prostej szosie. Niech na szosie znajduje się punkt centralny O , względem którego mierzymy *położenie* samochodu (*Rysunek 1.8: Ilustracja pojęć położenie i przemieszczenie* na stronie 10). Chwilowe położenie samochodu na szosie określamy, podając odległość od punktu O . Położenie (czyli współrzędną) poprzedzimy znakiem „+”, gdy samochód znajdzie się „na prawo” od niego, a gdy „na lewo” – znakiem „-”. Przyjmijmy, że w chwili początkowej t_0 samochód ma położenie s_0 , w chwili t_1 – położenie s_1 .

$$(\text{ wzór 3 }) \Delta s = s_1 - s_0$$

Uwaga: Δs nie jest iloczynem Δ i s . Jest to jeden symbol oznaczający zmianę wartości wielkości s , która jest równa wartości końcowej tej wielkości minus jej wartość początkowa.

Samochód wyruszył z położenia s_0 i dojechał do położenie s_1 . W położeniu s_1 samochód zmienił zwrot jazdy na przeciwny i po pewnym czasie znalazł się w położeniu s_0 , potem w s_2 , następnie w punkcie 0 i w końcu w



s_3

Rysunek 1.8: Ilustracja pojęć położenie i przemieszczenie

Kinematyka – parametry ruchu

Rysunek 1.9: Animacja

Zapytajmy teraz, jaką *drogę* przebył samochód. Oczywiście, *wartością drogi* przebytej przez samochód **jest suma wszystkich kolejnych małych wartości przemieszczeń**, przy czym, dla obliczenia drogi sumujemy bezwzględne wartości przemieszczeń, niezależnie od tego, w którą stronę są zwrócone. Zatem, położenie (współrzędna) może być dodatnie lub ujemne, ale droga jest zawsze dodatnia.

W przypadku ruchu przedstawionego na [Rysunek 1.8: Ilustracja pojęć położenie i przemieszczenie](#) na stronie 10 droga równa jest sumie długości wszystkich odcinków między kolejnymi położeniami samochodu, przy czym odcinek (s_0s_1) policzony będzie dwukrotnie – samochód jechał tym odcinkiem tam i z powrotem.

Pojęcia: *położenie*, *przemieszczenie* i *droga* możemy stosować do opisu ruchu dowolnego ciała, które uznajemy za punkt materialny.

Prędkość średnia

Powiedzmy, że punkt materialny przebył drogę Δ w czasie Δt . *Prędkość średnią* punktu materialnego w danym przedziale czasu definiujemy jako stosunek drogi s do czasu t , w jakim ta droga została przebyta:

$$(\text{wzór 4}) v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Jednostką prędkości jest 1 metr na sekundę (1m/s).

Prędkość chwilowa

Na pewno nieraz obserwowaliście prędkościomierz samochodu. Patrząc na prędkościomierz, zauważamy, że wskazówka często zmienia swoje położenie, co oznacza, że pojazd zmienia prędkość. Wskazówka pokazuje nam aktualną wartość prędkości – aktualną, to znaczy chwilową, czyli prędkość w danej chwili.

Zatem, *prędkość chwilowa* jest to prędkość mierzona w bardzo krótkim przedziale czasu, w danej „chwili”. Na ogół wskazania prędkościomierza nie zgadzają się z wartością prędkości obliczoną ze wzoru (*wzór 4* na stronie 10), chyba że użyjemy przemieszczeń Δs przebytych w bardzo małych przedziałach czasu. $\Delta s = s_2 - s_1$ wystąpiło w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$. Zatem w tym przedziale czasu wartość prędkości średniej jest równa:

$$(\text{wzór 5}) \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Im mniejszy będzie odcinek czasu Δt , tym mniej prędkość średnia będzie się różnić od prędkości chwilowej.

Przykład 1

Rowerzysta jadący ze stałą prędkością $v = 15 \text{ km/h}$ wyprzedza ruszający z przystanku tramwaj. Tramwaj dogania rowerzystę, przegania go i zatrzymuje się na kolejnym przystanku. Odległość między przystankami wynosi $\Delta s = 1 \text{ km}$. Oblicz, ile czasu na pokonanie tej drogi zużył rowerzysta, a ile tramwaj, jeżeli docierają do przystanku jednocześnie.

Odpowiedź: Czas potrzebny na przebycie drogi s przez rowerzystę i tramwaj jest taki sam i wynosi:

$$(\text{wzór 6}) \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1}{15} \text{ h} = 4 \text{ min}$$

Zatem tramwaj jechał ze *średnią prędkością* taką samą jak rowerzysta, równą 15 km/h , mimo że faktycznie ich prędkości chwilowe były różne.

Pytania i problemy

1. Wymień wielkości fizyczne opisujące ruch.
2. Samochód wyjechał z Grójca o godzinie 10^{00} . W ciągu 6 min przejechał 6 km i znalazł się w miejscowości Zaborów, po kolejnych 6 min i 40 s znalazł się w Białobrzegach odległych od Grójca o 16 km (*Rysunek 1.10: Ilustracja do zadania* na stronie 12). W Białobrzegach samochód zawrócił i jadąc po tej samej szosie (E77), znalazł się w Grójcu po kolejnych 12 min. Zaznacz na swoim rysunku na wspólnej osi s położenia miejscowości: Grójec, Zaborów i Białobrzegi.

Rozmieszczenie miejscowości wzdłuż



szosy

Rysunek 1.10: Ilustracja do zadania

Przyjmując położenie Grójca jako zerowe, podaj wartości:

- a. położenia samochodu w miejscowościach: Grójec, Zaborów i Białobrzegi;
 - b. przemieszczenia samochodu: Grójec – Zaborów, Zaborów – Białobrzegi, Grójec – Białobrzegi, Białobrzegi – Zaborów;
 - c. drogi, jaką przejechał z Grójca do Białobrzegów;
 - d. drogi, jaką przejechał na całej trasie przejazdu.
3. Zakładając warunki podane w punkcie 2, przyjmij teraz, że Zaborów ma położenie zerowe. Podaj wartości:
- a. położenia samochodu w miejscowościach: Zaborów, Białobrzegi i Grójec;
 - b. przemieszczenia samochodu: Zaborów – Białobrzegi, Białobrzegi – Zaborów, Zaborów – Grójec, Białobrzegi – Grójec;
 - c. drogi, jaką przejechał z Zaborowa do Grójca (przez Białobrzegi).
4. Podaj definicję prędkości średniej i chwilowej.
5. Przyjmując wartości podane w p. 2, oblicz prędkość średnią samochodu (podaj ją w km/h i w m/s) na trasie:
- Grójec – Zaborów,
 - Zaborów – Białobrzegi,
 - Grójec – Białobrzegi,
 - Białobrzegi – Zaborów.

1.3 Ruch jednostajny prostoliniowy

Ruchem jednostajnym prostoliniowym nazywamy taki ruch ciała, w którym wartość prędkości nie zmienia się podczas trwania ruchu, czyli

$$(\text{ wzór 7 }) v = \text{const}$$

Zatem w ruchu jednostajnym, na każdym odcinku drogi prędkość chwilowa jest jednakowa i jest równa prędkości średniej, v_{sr} . Stosując wzór *wzór 4* na stronie 10 otrzymamy $v = \frac{s-s_0}{t-t_0}$. Na ogół przyjmujemy, że $t_0 = 0$; pozwala nam to zapisać $s - s_0 = vt$, a stąd

$$(\text{wzór 8}) \quad s = s_0 + vt$$

Jest to równanie ważne dla ruchu jednostajnego, gdyż pozwala wyznaczyć położenie w chwili t , jeżeli położenie początkowe w chwili $t_0 = 0$ wynosiło s_0 .

Kinematyka - ruch jednostajny

Rysunek 1.11: Animacja

Zależność położenia s od czasu jest funkcją liniową, której wykres przedstawiono na *Rysunek 1.12: Droga i czas w ruchu jednostajnym* na stronie 13. Jak wiemy z matematyki, funkcja liniowa jest wyrażona za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 9}) \quad y = ax + b$$

Nasz wzór (*wzór 8* na stronie 13) ma podobną postać. Widać to wyraźnie, jeżeli napiszemy go następująco:

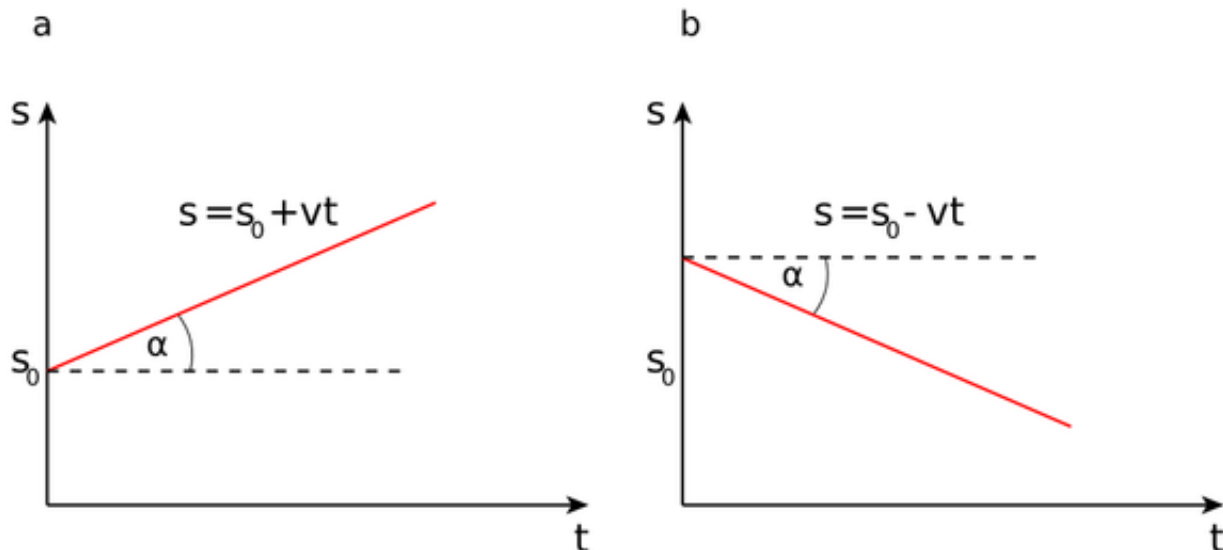
$$(\text{wzór 10}) \quad s = vt + s_0$$

(odpowiednikiem zmiennej y jest położenie s , a odpowiednikiem zmiennej x jest czas t ; podobnie odpowiednikiem współczynnika kierunkowego a jest stała prędkość v , zaś odpowiednikiem wyrazu wolnego b jest początkowe położenie s_0).

Wiemy, że ta funkcja na wykresie przedstawiona jest jako linia prosta nachylona do osi czasu pod kątem tym większym, im większa jest wartość prędkości ciała v , gdyż współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy v . Rysunek *Rysunek 1.12: Droga i czas w ruchu jednostajnym* na stronie 13b przedstawia tę zależność dla przypadku, gdy prędkość jest zwrócona w stronę malejących wartości s (przed v należy wtedy wstawić znak minus, gdyż v oznacza tutaj wartość wektora prędkości) – wtedy prosta na wykresie jest nachylona „w dół”.

Wykres zależności położenia s od czasu w ruchu jednostajnym. a) W ruchu „do przodu”, czyli kiedy prędkość jest zwrócona w stronę rosnących wartości s - wtedy wykres przedstawia funkcję rosnącą. b) W ruchu „do

tyłu”, czyli kiedy prędkość jest zwrócona w stronę malejących wartości s - wtedy wykres przedstawia funkcję



malejącą

Rysunek 1.12: Droga i czas w ruchu jednostajnym

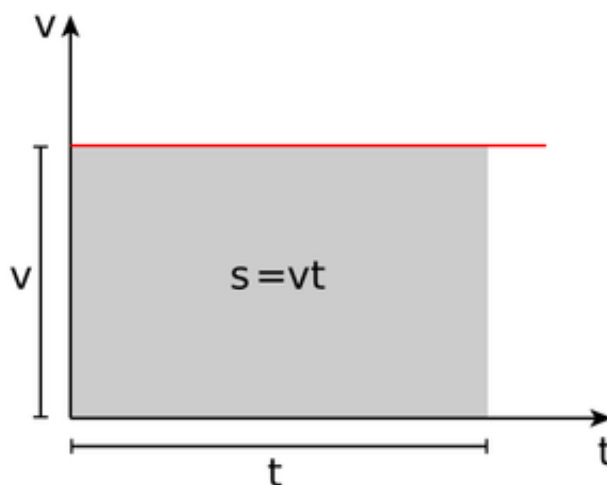
Przykład 2

Przypuśćmy, że samochód w chwili $t_0 = 0$ znajdował się na 920 kilometrze autostrady ($s_0 = 920$ km). Przez pół godziny ($t = 0,5$ h) jechał ze stałą prędkością 120 km/h ($v = 120$ km/h). W tym czasie przebył drogę $\Delta s = 120 \text{ km/h} \cdot 0,5 \text{ h} = 60$ km. Znalazł się w położeniu $s = 920 \text{ km} + 60 \text{ km} = 980$ km, czyli na 980 kilometrze autostrady.

Jeśli samochód jechałby w stronę przeciwną, to również w pół godziny przebyłby drogę równą 60 km, ale znalazłby się w położeniu $s = 920 \text{ km} - 60 \text{ km} = 860$ km (na 860 kilometrze autostrady).

Wartość prędkości w ruchu jednostajnym jest stała, zatem zależność (wzór 7 na stronie 12) na wykresie zależności prędkości od czasu jest linią prostą równoległą do osi czasu, jak na [Rysunek 1.13: Graficzna interpretacja drogi](#) na stronie 15.

Pole powierzchni pod wykresem zależności prędkości od czasu jest miarą drogi przebytej przez



ciało

Rysunek 1.13: Graficzna interpretacja drogi

Pole powierzchni prostokąta zakreślonego na tym rysunku wynosi $v \Delta t$ (iloczyn podstawy i wysokości). Zatem, zgodnie ze wzorem (wzór 8 na stronie 13), oznacza ono drogę Δs . Mamy więc

$$(\text{wzór 11}) \quad \Delta s = v \Delta t$$

Sformułujmy wniosek: **pole powierzchni pod wykresem zależności prędkości od czasu jest liczbowo równe drodze przebytej przez ciało**. Wniosek ten celowo sformułowaliśmy ogólnie, gdyż jest on słuszny dla dowolnego ruchu, nie tylko dla ruchu jednostajnego. Skorzystamy z niego, gdy będziemy wyprowadzać wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

Przykład 3

Samochód przejeżdża na autostradzie prostoliniowy odcinek $s = 5 \text{ km}$ ze stałą prędkością $v_1 = 100 \text{ km/h}$, następnie na skutek ograniczenia prędkości jazdy dalsze 5 km przejeżdża ze stałą prędkością $v_2 = 60 \text{ km/h}$. Ile wynosi średnia prędkość samochodu?

Odpowiedź: Do obliczenia średniej prędkości zastosujemy wzór (wzór 4 na stronie 10). Do wzoru musimy podstawić całą przebytą drogę (w tym wypadku równą przemieszczeniu samochodu) $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 5 \text{ km} + 5 \text{ km} = 10 \text{ km}$ oraz łączny czas trwania ruchu na obydwu odcinkach drogi $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$. Czas Δt_1 przebycia pierwszego odcinka drogi wynosi

$$(\text{wzór 12}) \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{5 \text{ km}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{20} \text{ h}$$

Czas Δt_2 przebycia drugiego odcinka drogi wynosi

$$(\text{wzór 13}) \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta s_2}{v_2} = \frac{5 \text{ km}}{60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{12} \text{ h}$$

Podstawmy teraz otrzymane wartości do wzoru (*wzór 4* na stronie 10). Otrzymamy

$$(\text{wzór 14}) v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{10\text{km}}{\frac{1}{20}\text{h} + \frac{1}{12}\text{h}} = 75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Zwróć uwagę, że uzyskana średnia prędkość samochodu nie jest równa średniej arytmetycznej prędkości v_1 i v_2 .

Pytania i problemy

1. Scharakteryzuj ruch jednostajny prostoliniowy.
2. Znając definicję prędkości średniej i chwilowej, odpowiedz na pytanie: Jaki jest związek między tymi wielkościami w ruchu jednostajnym prostoliniowym?
3. Dla sytuacji opisanej w *Przykład 1* na stronie 11 wykonaj wykres zależności prędkości rowerzysty od czasu i wykres zależności położenia rowerzysty od czasu.
4. Dla sytuacji opisanej w *Przykład 3* na stronie 15 wykonaj wykres zależności prędkości samochodu od czasu i wykres zależności położenia samochodu od czasu.
5. Samochód przejeżdża na autostradzie prostoliniowy odcinek ze stałą prędkością $v_1 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ w ciągu czasu $\Delta t_1 = 10\text{min}$, następnie na skutek ograniczenia prędkości jazdy, przez kolejne 10 min jedzie ze stałą prędkością $v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wykaż, że średnia prędkość samochodu w ciągu tych 20 min ma wartość $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

1.4 Ruch jednostajnie przyspieszony

Przyspieszenie

Podobnie jak prędkość, tak i przyspieszenie jest nam dobrze znane z doświadczeń codziennych. Na przykład, możemy wywołać przyspieszenie roweru, naciskając mocniej pedały. Im mocniej naciśniemy pedały, tym większe wywołamy przyspieszenie. Oczywiście, w czasie przyspieszania prędkość się zmienia. Naciskając hamulec, również wywołujemy zmianę prędkości, tylko że w tym przypadku prędkość maleje – występuje zmniejszenie wartości prędkości. Takie przyspieszenie, które powoduje malenie prędkości, nazywa się *opóźnieniem*.

Zawsze wtedy, gdy prędkość się zmienia, musi występować przyspieszenie. Im większa jest zmiana prędkości w określonym przedziale czasowym, tym większa jest wartość przyspieszenia.

To ostatnie stwierdzenie pozwala nam na ilościowe zdefiniowanie przyspieszenia. Jeżeli w pewnym momencie prędkość chwilowa punktu materialnego wynosiła v_0 , a po upływie czasu Δt wyniosła v , to przyrost wartości prędkości $\Delta v = v - v_0$ dokonał się w czasie Δt . Zatem średnio na jednostkę czasu przyrost prędkości wyniósł

$$(\text{wzór 15}) a_{\text{sr}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Wzór ten definiuje wartość *przyspieszenia średniego* w przedziale czasu Δt .

Jednostką przyspieszenia jest metr na sekundę do kwadratu ($1\text{m}/\text{s}^2$). Jednostka ta wynika ze wzoru (*wzór 15* na stronie 16), gdyż przyrost prędkości Δv wyraża się w metrach na sekundę, a czas Δt w sekundach.

Jeżeli przyspieszenie zmienia się w czasie, to dla każdego Δt można obliczyć wielkość zwaną *przyspieszeniem chwilowym*. Przyspieszenie średnie mierzone w bardzo małym przedziale czasu Δt będzie zbliżone do prawdziwej wartości przyspieszenia chwilowego.

Kinematyka - ruch jednostajnie przyspieszony

Rysunek 1.14: Animacja

Równania prędkości i położenia w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Jeżeli ciało porusza się z przyspieszeniem o stałej wartości

$$(\text{wzór 16}) \quad a = \text{const}$$

a wartość prędkości w tym ruchu rośnie w miarę upływu czasu, to ruch taki nazywamy ruchem jednostajnie przyspieszonym. W tym przypadku przyspieszenie chwilowe jest zawsze równe przyspieszeniu średniemu. Zatem ze wzoru (wzór 16 na stronie 17) mamy

$$(\text{wzór 17}) \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \left(\text{wektorowo} \quad \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)$$

Uwaga do wzoru (wzór 17 na stronie 17): W ruchu prostoliniowym wzory wektorowe można pominąć. Odgrywają one jednak ważną rolę w przypadku ruchu krzywoliniowego.

We wzorze (wzór 17 na stronie 17) przyrost prędkości $\Delta v = v - v_0$ następuje w czasie $\Delta t = t - t_0$. Jeżeli dla wygody za chwilę początkową przyjmiemy 0 (tj. $t_0 = 0$), to przyrost czasu Δt będzie identyczny z t , a wtedy wzór (wzór 17 na stronie 17) przyjmie postać

$$(\text{wzór 18}) \quad a = \frac{v - v_0}{t} \quad \left(\text{wektorowo} \quad \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t} \right)$$

Stąd po prostym przekształceniu otrzymamy wzór

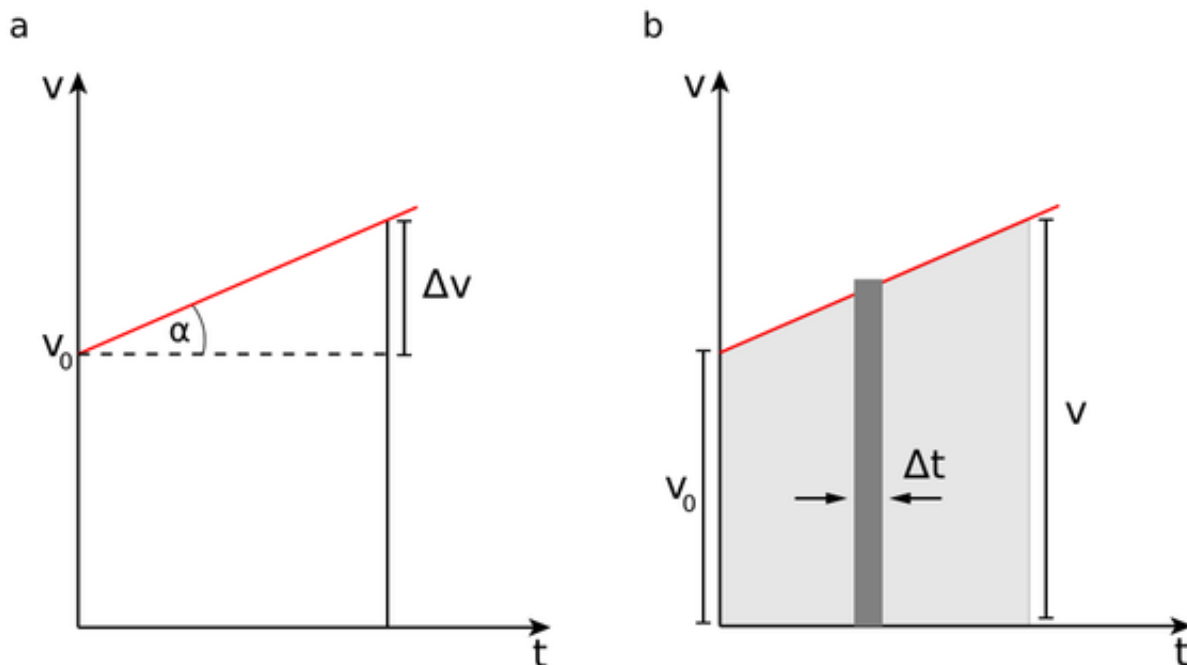
$$(\text{wzór 19}) \quad v = v_0 + at \quad \left(\text{wektorowo} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \right)$$

Jest to zależność wartości prędkości ciała od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Jej interpretacja jest niezwykle prosta i jasna: prędkość, jaką uzyska ciało po czasie t , jest równa prędkości początkowej powiększonej o przyrost prędkości, jaki nastąpił w czasie trwania ruchu (a oznacza przyrost prędkości w ciągu 1 s, zaś at – w ciągu czasu t).

Zależność prędkości od czasu we wzorze (wzór 19 na stronie 17) ma charakter liniowy, zatem na wykresie (*Rysunek 1.15: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym* na stronie 18) jest prostą o nachyleniu do osi czasu tym większym, im większe jest przyspieszenie. Wzór (wzór 19 na stronie 17) wskazuje na to, że współczynnik kierunkowy prostej będącej wykresem prędkości ma wartość równą a .

Zastanówmy się, czy z wykresu zależności prędkości od czasu można odczytać, jaką drogę przebywa ciało w czasie t . Przypomnijmy sobie, że w przypadku ruchu jednostajnego, gdy prędkość była stała, droga była wyrażona przez pole powierzchni pod wykresem zależności prędkości od czasu (*Rysunek 1.13: Graficzna interpretacja drogi* na stronie 15). Sformułowaliśmy wtedy wniosek ogólny, dotyczący dowolnego ruchu. Obecnie wykażemy, że wniosek ten jest słuszny w przypadku ruchu jednostajnie przyspieszonego. Pole powierzchni pod wykresem prędkości podzielimy na wąskie paski o szerokości Δt (jeden z tych pasków jest widoczny na *Rysunek 1.15: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym* na stronie 18).

a) przyrost prędkości jest proporcjonalny do czasu trwania ruchu, b) pole powierzchni pod wykresem prędkości można złożyć z małych pasków o szerokości



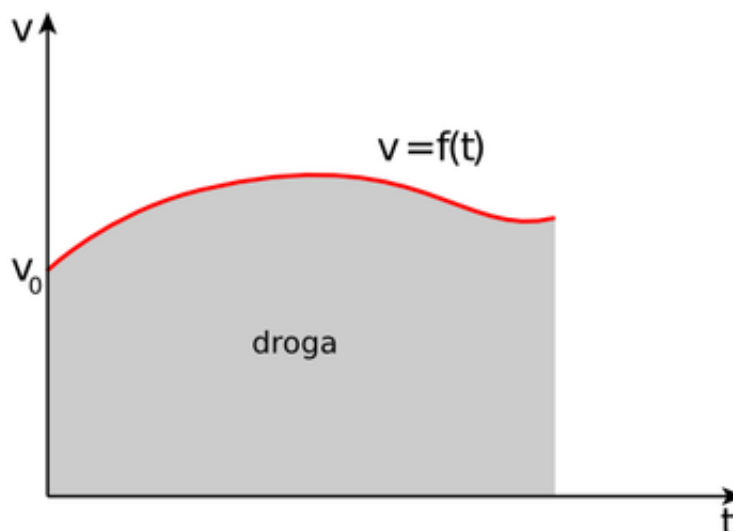
Δt

Rysunek 1.15: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Jeżeli przedział czasu Δt uczynimy dostatecznie małym, to zmiana prędkości w tym przedziale będzie odpowiednio mała. Oznacza to, że prędkość będzie można traktować w odpowiednim przybliżeniu jako stałą. Wobec tego pole powierzchni tego wąskiego paska będzie oznaczać drogę przebytą przez ciało w czasie Δt .

Suma tych wszystkich pól, wzięta po wszystkich przedziałach Δt w czasie t , jest całkowitą drogą przebytą przez ciało w czasie t . Rozumowanie powyższe jest również prawdziwe w ogólnym przypadku, nawet gdy mamy do czynienia z ruchem o zmiennym przyspieszeniu. Zatem pole powierzchni pod wykresem prędkości o zmiennym przyspieszeniu, jak na [Rysunek 1.16: Wykres prędkości o zmiennym przyspieszeniu](#) na stronie 19, jest równe drodze przebytej przez ciało w czasie t .

Pole powierzchni pod wykresem zależności prędkości od czasu jest liczbowo równe drodze przebytej przez ciało w czasie t (w tym przypadku występuje przyspieszenie



zmiennie)

Rysunek 1.16: Wykres prędkości o zmiennym przyspieszeniu

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego, pole powierzchni na [Rysunek 1.15: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym](#) na stronie 18 jest polem trapezu o podstawach v_0 i v oraz o wysokości równej t , czyli

$$(\text{wzór 20}) s = \frac{v + v_0}{2} t$$

Wynik ([wzór 20](#) na stronie 19) da się uzasadnić również w inny sposób. Możemy wykorzystać wzór na prędkość średnią ([wzór 4](#) na stronie 10). Wzór ten jest słuszny dla dowolnego ruchu, więc musi być również słuszny dla ruchu jednostajnie przyspieszonego. Przyjmując, że położenie początkowe $s_0 = 0$, otrzymamy, że droga s po czasie t jest równa

$$(\text{wzór 21}) s = v_{\text{sr}} t$$

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego prędkość rośnie liniowo, od wartości v_0 do wartości v więc średnia prędkość jest równa średniej arytmetycznej (tutaj średnia arytmetyczna odpowiada prędkości średniej zdefiniowanej za pomocą wzoru ([wzór 4](#) na stronie 10), gdyż prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym rośnie liniowo w czasie; w jednakowych przedziałach czasu przyrosty prędkości są jednakowe) i wynosi

$$(\text{wzór 22}) v_{\text{sr}} = \frac{v + v_0}{2}$$

Podstawiając ten wynik do wzoru $s = v_{\text{sr}} t$, otrzymujemy: $s = \frac{v + v_0}{2} t$. Jest to wzór identyczny ze wzorem ([wzór 20](#) na stronie 19)! Podstawiając we wzorze ([wzór 20](#) na stronie 19) w miejsce v wyrażenie: $v = v_0 + at$, otrzymamy

$$(\text{wzór 23}) s = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} t = \frac{v_0}{2} t + \frac{v_0}{2} t + \frac{at^2}{2}$$

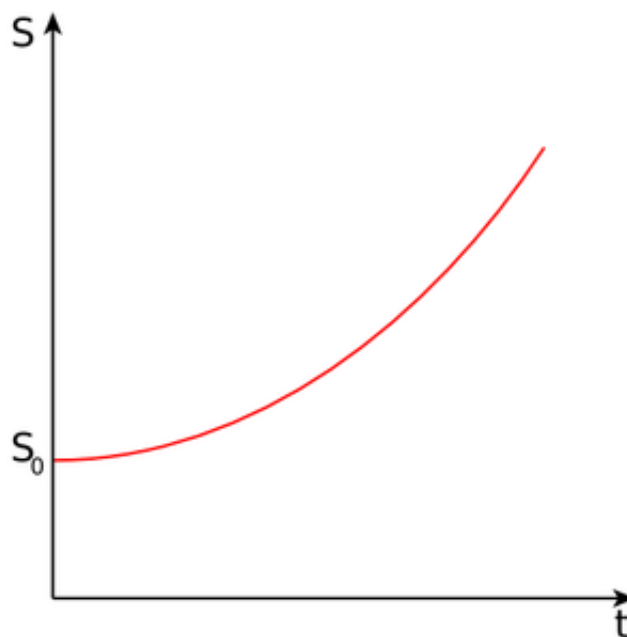
Ostatecznie otrzymujemy wzór

$$(\text{wzór 24}) s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Jeżeli dodamy położenie początkowe s_0 (w chwili $t = 0$), otrzymamy pełną zależność położenia ciała od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$(\text{wzór 25}) s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Zależność ta jest kwadratową funkcją czasu, zatem na wykresie zależności położenia ciała od czasu opisuje ją parabolą (*Rysunek 1.17: Wykres zależności położenia od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym* na stronie 20).



Rysunek 1.17: Wykres zależności położenia od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym

Ⓡ Zamapiętać:

Prędkość i położenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym

Równanie prędkości v w zależności od czasu t :

$$(\text{wzór 26}) v = v_0 + at$$

gdzie v_0 – prędkość początkowa.

Równanie położenia s w zależności od czasu t :

$$(\text{wzór 27}) s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

gdzie: s_0 – położenie początkowe, v_0 – prędkość początkowa.

Przykład 4

Przyjmijmy, że podczas wystrzału pocisk w lufie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i osiąga u wylotu lufy prędkość $v = 800 \text{ m/s}$. Ile wynosi przyspieszenie pocisku w lufie karabinu i jak długo trwa lot pocisku w lufie podczas wystrzału? Lufa ma długość $l = 60 \text{ cm}$.

Odpowiedź: Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego mamy dwa zasadnicze równania: równanie dla prędkości (*wzór 19* na stronie 17) i równanie dla drogi (*wzór 25* na stronie 20). Układ dwóch równań pozwoli nam na obliczenie dwóch niewiadomych — czasu t lotu pocisku w lufie oraz przyspieszenia pocisku a . Ponieważ $v_0 = 0$, więc

$$(\text{wzór 28}) v = at$$

Droga pocisku s jest równa długości lufy l , zatem

$$(\text{wzór 29}) l = \frac{at^2}{2}$$

Z pierwszego równania można wyznaczyć $t = \frac{v}{a}$

Zatem z drugiego równania otrzymujemy

$$(\text{wzór 30}) l = \frac{v^2}{2a}$$

Skąd

$$(\text{wzór 31}) a = \frac{v^2}{2l} = \frac{(800 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2 \cdot 0,6 \text{ m}} = 533333,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jest to olbrzymie przyspieszenie, ponad 54 000 razy większe od przyspieszenia ziemskiego g . Czas przelotu pocisku w lufie wynosi

$$(\text{wzór 32}) t = \frac{v}{a} = \frac{2l}{v} = \frac{2 \cdot 0,6 \text{ m}}{800 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1,5 \text{ ms}$$

Widzimy, że jest on bardzo mały, gdyż jest równy 1,5 milisekundy.

Pytania i problemy

1. Podaj definicję przyspieszenia średniego i chwilowego.
2. Przyspieszenie pewnego ciała jest stałe i ma wartość 2 m/s^2 . Oblicz wartość prędkości tego ciała po czasie 1 s, po czasie 2 s i po czasie t , przyjmując, że prędkość początkowa tego ciała ma wartość zero.
3. Przedstaw na wykresach zależność prędkości od czasu i zależność położenia od czasu w trakcie ruchu pocisku w lufie i poza nią (nie uwzględniając siły oporu powietrza i siły grawitacji), przyjmując dane z *przykładu*.

1.5 Przyspieszenie ziemskie, swobodne spadanie ciał

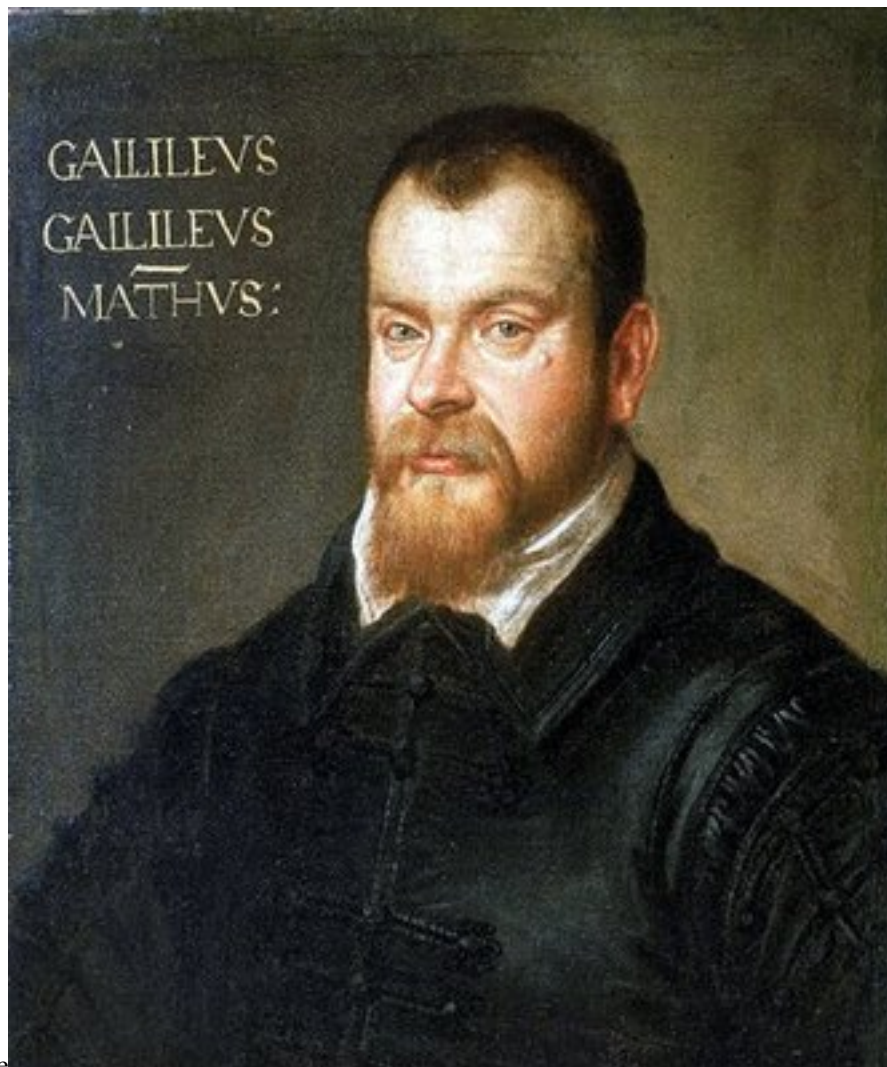
Badaniem swobodnie spadających ciał już w starożytności zajmował się Arystoteles. Nie opisał jednak tego zjawiska prawidłowo, ponieważ w tym przypadku oparł się przede wszystkim na spekulacjach myślowych, mimo że generalnie uznawał rolę doświadczenia. Taki sposób podejścia, często stosowany w starożytności, w wielu przypadkach prowadził do błędnych wyników.

Galileusz natomiast uznawał, że doświadczenie rozstrzyga o prawidłowości rozważań teoretycznych. Dlatego osiągnął wiele sukcesów w swoich badaniach. Tego typu podejście stało się podstawową metodą badań nowożytnej fizyki. Arystoteles nie zdawał sobie sprawy z roli, jaką dla swobodnie spadających ciał odgrywa opór powietrza. Nie uwzględniano go aż do XVII wieku, kiedy to Galileusz przeprowadził wiele doświadczeń ze swobodnie spadającymi ciałami i zrozumiał, że w tym ruchu opór powietrza ma duże znaczenie (*Rysunek 1.19: Kulki spadające z jednakowym przyspieszeniem* na stronie 24). Wpływ oporu powietrza jest duży dla ciał lekkich i dużych, dlatego swoje

doświadczenia wykonywał z ciałami ciężkimi i małymi. Stwierdził (w granicach niepewności pomiarowej), że droga spadającego ciała jest wprost proporcjonalna do kwadratu czasu. Wobec tego ruch ciała spadającego w sytuacji, gdy możemy pominąć opór powietrza, jest ruchem jednostajnie przyspieszonym. Proporcjonalność drogi do kwadratu czasu łatwo można zauważyć, gdy we wzorze (wzór 24 na stronie 20) podstawimy $v_0 = 0$ (co oznacza, że spадanie jest swobodne — bez nadawania prędkości początkowej). Wtedy

$$(\text{wzór 33}) s = \frac{at^2}{2}$$

a) Galileo Galilei, czyli Galileusz (1564–1642). Wielki uczoney-odkrywca. Położył fundamenty pod nowoczesną metodologię badawczą fizyki; b) Krzywa Wieża w Pizie, z której Galileusz zrzucił różne ciała dla udowodnienia, że

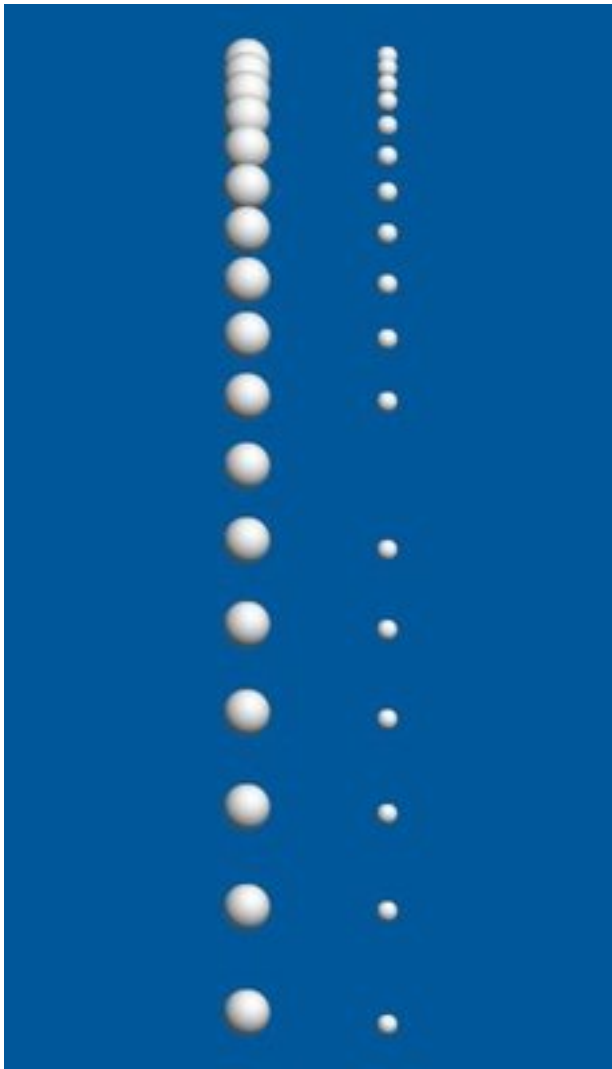


spadają one w jednakowym czasie

Rysunek 1.18: Galileusz i Krzywa Wieża



Galileusz pierwszy stwierdził, że przyspieszenie ciał spadających w pobliżu powierzchni Ziemi nie zależy od ich masy (jeżeli pominie się opory powietrza – *Rysunek 1.19: Kulki spadające z jednakowym przyspieszeniem* na stronie 24).



Rysunek sporządzony na podstawie współczesnego zdjęcia stroboskopowego spadającej kulki wykonanego z otwartą migawką. Światło błyska w stałych odstępach czasu, co 1/30 sekundy. Obok kulki o dużej masie spada kulka o masie małej. Widać, że kulki spadają jednocześnie, a więc kulki spadają z jednakowym przyspieszeniem, niezależnie od wartości ich masy

Rysunek 1.19: Kulki spadające z jednakowym przyspieszeniem

Ⓜ Zamapiętać:

Przyspieszenie ziemskie

Wszystkie ciała w próżni, w pobliżu powierzchni Ziemi, spadają z jednakowym przyspieszeniem g , zwanym przyspieszeniem ziemskim

$$(\text{wzór 34}) \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Jest to bardzo ważny i ciekawy fakt doświadczalny!

Należy zaznaczyć, że wartość $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ jest średnią, przybliżoną z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku, która może nieco się różnić w zależności od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza.

Na przykład, dla Warszawy $g = 9,81230 \text{ m/s}^2$, a dla Nowego Jorku $g = 9,82067 \text{ m/s}^2$.

Spadające ciało przebywa w pionie drogę równą wysokości, z której spada. Wysokość oznacza się symbolem h , więc dla swobodnego spadania, gdzie przyspieszenie wynosi g , wzór (wzór 33 na stronie 22) przybierze postać

$$(\text{wzór 35}) h = \frac{gt^2}{2}$$

Przykład 5

Zobaczmy, jak za pomocą stopera można zmierzyć głębokość studni. Do studni upuszczono kamień i usłyszano uderzenie o dno po czasie $t = 1,6\text{ s}$. Znając przyspieszenie ziemskie $g = 9,81\text{ m/s}^2$ oraz szybkość głosu w powietrzu $v = 340\text{ m/s}$, oblicz głębokość studni.

Odpowiedź: Czas t składa się z dwóch przedziałów: t_1 – czasu spadania kamienia, oraz t_2 – czasu lotu dźwięku w górę:

$$(\text{wzór 36}) t = t_1 + t_2$$

Czas t_1 obliczymy z równania (wzór 35 na stronie 25)

$$(\text{wzór 37}) t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Czas t_2 znajdziemy z równania (wzór 11 na stronie 15) drogi dźwięku w ruchu jednostajnym:

$$(\text{wzór 38}) t_2 = \frac{h}{v}$$

Dodając te dwa równania stronami, otrzymamy

$$(\text{wzór 39}) t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} = t$$

Jest to równanie z szukaną przez nas niewiadomą h , które po prostych przekształceniach przyjmie postać:

$$(\text{wzór 40}) gh^2 - 2v(v + at)h + gv^2t^2 = 0$$

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Ma ono dwa pierwiastki:

$$(\text{wzór 41}) h_1 = vt + \frac{v^2}{g} - \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2vgt}$$

$$(\text{wzór 42}) h_2 = vt + \frac{v^2}{g} + \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2vgt}$$

Musimy obecnie wybrać jedno z tych rozwiązań, jako odpowiadające rzeczywistości. Zauważmy, że wyraz vt oznacza drogę przelotu dźwięku w całym czasie t (będącym łącznym czasem, obejmującym czas spadania kamienia i czas powrotu dźwięku). Droga ta jest bez wątpienia dużo większa od rzeczywistej głębokości studni. Rozwiązanie drugie nie odpowiada więc rzeczywistości, gdyż daje wartość h jeszcze większą, zatem rozwiązanie pierwsze daje prawdziwą głębokość studni

$$(\text{wzór 43})$$

$$h_1 = vt + \frac{v^2}{g} - \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2vgt} = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,6\text{ s} + \frac{(340 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} - \frac{340 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \sqrt{(340 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,6\text{ s}} = 12\text{ m}$$

Głębokość studni wynosi 12 m.

Zwróć uwagę na to, że głębokość studni można oszacować na podstawie rozumowania uproszczonego. Zauważmy, że prędkość dźwięku jest dużo większa niż średnia prędkość spadającego kamienia. To oznacza, że t_2 – czas lotu dźwięku w górę jest dużo mniejszy niż czas t_1

– spadania kamienia $t_2 \ll t_1$. Zatem pomijając t_2 w równaniu $t = t_1 + t_2$ można szybko oszacować głębokość studni z uproszczonego równania

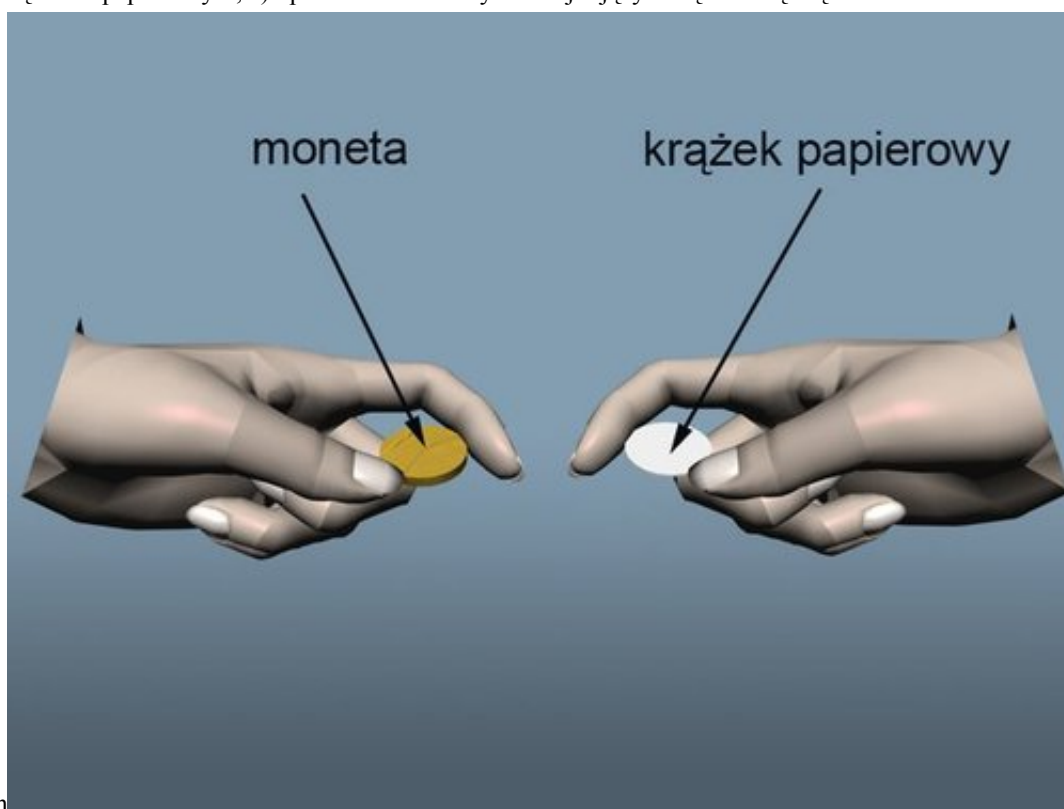
$$(\text{wzór 44}) t \approx t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{stad} \quad h = \frac{gt^2}{2} = 12,56\text{m}$$

Jak widać, tak oszacowana głębokość studni mało różni się od wartości dokładniejszej: $h = 12\text{m}$.

Umiejętność oszacowania wielkości jest ważna, bo pozwala sprawdzić, czy otrzymany wynik obliczeń jest sensowny; często też wartość przybliżona jest wystarczająca dla celów praktycznych.

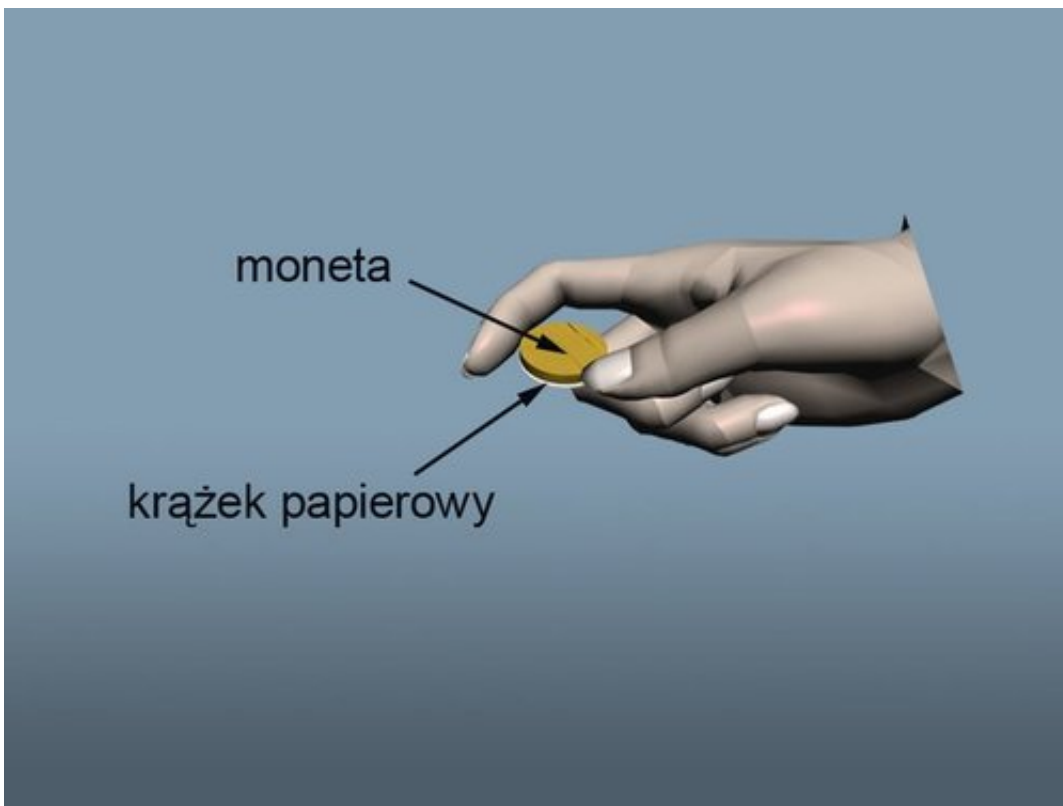
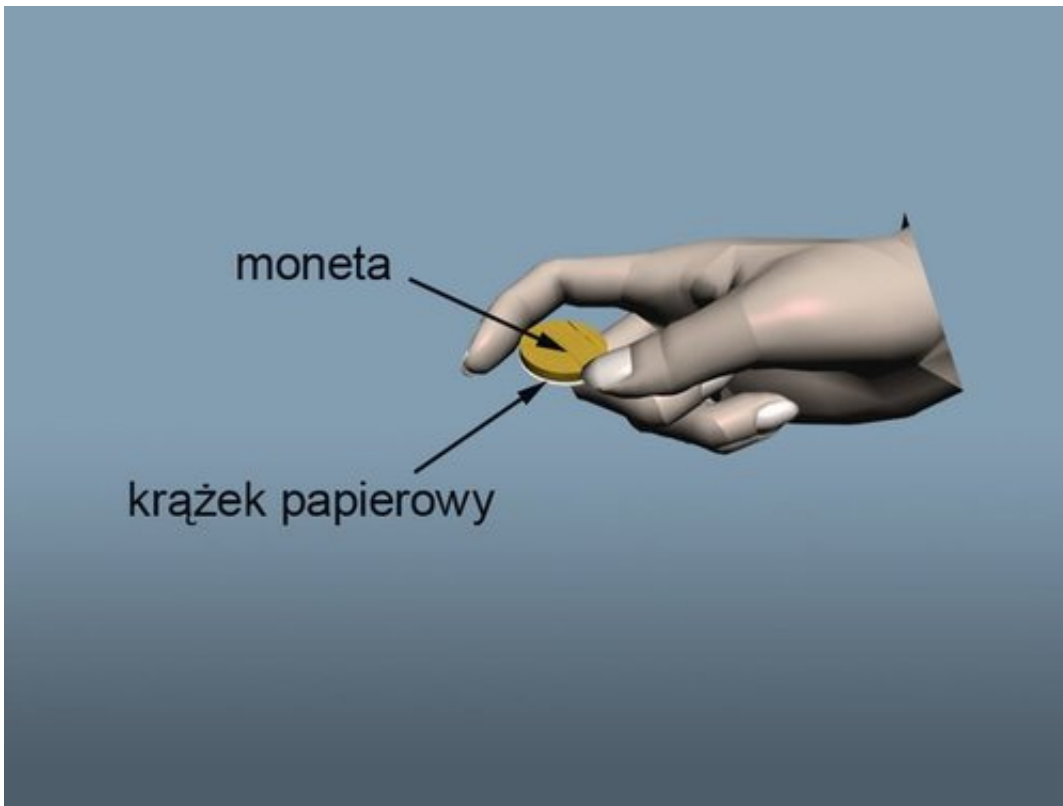
Pytania i problemy

1. W jaki sposób można stwierdzić, że przyspieszenie spadających ciał nie zależy od ich masy?
2. Kiedy można pominąć opór powietrza przy swobodnym spadaniu ciał? Rozważ trzy możliwe czynniki: masę spadającego ciała, jego kształt oraz wysokość z jakiej ciało upuszczamy.
3. Z kawałka grubego papieru wytnij krążek o średnicy nieco mniejszej od średnicy monety. Upuść jednocześnie monetę i krążek z tej samej wysokości (*Rysunek 1.20: Ilustracja do pytania 3* na stronie 26). Powtórz to doświadczenie z krążkiem papieru umieszczonym pod i nad monetą. Postaraj się, aby moneta i krążek spadały „płasko” bez obrotów. Opisz wnioski z tych doświadczeń.
 - a) Upuszczanie równoczesne monety i papierowego krążka,
 - b) upuszczanie monety ze znajdującym się pod nią krążkiem papierowym,
 - c) upuszczanie monety ze znajdującym się nad nią krążkiem



papierowym

Rysunek 1.20: Ilustracja do pytania 3





Obserwuj moment upadania tych przedmiotów na podłogę. We wnioskach z doświadczeń powołaj się na Galileusza i uwzględnij opór powietrza. Zauważ, że w przypadkach b) i c) efektywny opór ruchu działający na krążek papierowy jest taki sam jak opór działający na monetę.

4. W jaki sposób Galileusz stwierdził, że wszystkie ciała w próżni, w pobliżu Ziemi spadają z jednakowym przyspieszeniem ziemskim g ?
5. Z wysokości początkowej H_0 nad ziemią spada swobodnie ciężarek. Napisz równanie położenia ciężarka h w zależności od czasu t w przypadku, gdy:
 - a. oś położenia – wysokości h jest skierowana w dół, a punkt zerowy znajduje się w miejscu startu ciężarka;
 - b. oś położenia – wysokości h jest skierowana w górę, a punkt zerowy znajduje się na ziemi.

Doświadczenie „Galileusz”

Powtórzmy słynne doświadczenie, które wykonywał Galileusz ze swobodnie spadającymi ciałami. Doświadczenie to możesz wykonać też wirtualnie za pomocą [animacji](#).

Przygotujmy kilka ciężarków o różnych masach, które będziemy puszczać z wysokości h , kilka stoperów do pomiaru czasu spadania ciężarków (mogą to być stopery w telefonach komórkowych) oraz taśmę mierniczą do pomiaru wysokości h . Doświadczenie wykonujemy w następujący sposób:

Najpierw mierzymy wysokość h , z której będziemy spuszczać ciężarki (może to być wysokość drugiego lub trzeciego piętra budynku). Pamiętajmy także o zabezpieczeniu przewidywanego miejsca upadku ciężarków czymś miękkim, by nie zniszczyć podłoża. Następnie na dany sygnał (np. przez nauczyciela) jeden uczeń puszcza ciężarek, a inni mierzą czas spadania stoperami. Te same czynności powtarzamy z innymi ciężarkami.

Po zakończeniu pomiarów wykonamy jeszcze jedno doświadczenie: Wszystkie ciężarki (o różnych masach) puścimy jednocześnie i zwrócimy uwagę na to, czy ciężarki upadły na ziemię w tej samej chwili.

Wyniki pomiarów zapisujemy w tabelce przygotowanej według wzoru przedstawionego na [Rysunek 1.21: Tabela pomiarów](#) na stronie 29. Jeżeli czas spadania ciężarków jest mierzony przez więcej niż troje uczniów, to odpowiednio zwiększamy liczbę kolumn w tabeli.

Lp.	Masa ciężarka m (g)	Czas spadania ciężarka			Czas średni t (s)	Niepewność pomiarowa t (s)	Przyspieszenie ciężarka g(m/s ²)	Niepewność pomiarowa g (m/s ²)
		t ₁ (s)	t ₂ (s)	t ₃ (s)				

Rysunek 1.21: Tabelka pomiarów

Dla każdego ciężarka obliczamy czas średni spadania oraz przyspieszenie ziemskie g , korzystając ze wzoru (wzór 35 na stronie 25), z którego otrzymujemy

$$(\text{wzór 45}) \quad g = \frac{2h}{t^2}$$

Oceniamy niepewności pomiarów zgodnie z opisem w [1.7 Ocena niepewności pomiarowych](#) na stronie 30.

Najpierw oceniamy niepewność pomiaru czasu średniego t jako sumę wartości najmniejszej działki stopera (np. 0,1 s) i czasu reakcji przy włączaniu i wyłączaniu stopera (np. 0,1 s + 0,1 s, więc w sumie $\Delta t = 0,3$ s).

Musimy przy tej okazji krytycznie spojrzeć na uzyskane pojedyncze wyniki czasu spadania i rozstrzygnąć, czy któryś z nich nie jest obciążony błędem grubym, czy nie jest efektem pomyłki. Sprawdzamy zatem, czy każdy pojedynczy pomiar odstaje od średniej w swojej serii nie bardziej, niż o Δt . Jeżeli wychycimy wynik, który nie mieści się w przedziale $t_{sr} \pm \Delta t$, to powinniśmy rozważyć jego wyeliminowanie z serii i ponowne obliczenie wartości t_{sr} .

Odpowiadamy na pytanie, czy czasy spadania ciężarków o różnych masach są jednakowe w granicach niepewności pomiarowej. Jaki wypływa stąd wniosek?

Oceńmy teraz niepewność pomiarową wysokości Δh . Musimy uwzględnić możliwość, że ciężarki spuszczałyśmy z nieco różniących się wysokości (przyjmujemy, że niepewność stąd wynikająca nie przekracza 2 cm). Ponadto podłoże, na które spadały ciężarki, nie jest idealnie poziomą płaszczyzną (np. różnice wysokości mogły wynosić 3 cm). Dokładność przyłożenia taśmy mierniczej oraz ograniczona dokładność taśmy (wartość najmniejszej działki taśmy mierniczej) powiększa nam niepewność pomiarową (np. o dodatkowe: 1 cm + 1 cm = 2 cm). Przyjmujemy, że wszystkie te czynniki, sumując się, dają łączną wartość niepewności pomiaru wysokości h (w naszym przykładzie $\Delta h = 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$).

Obliczamy niepewność pomiaru przyspieszenia ziemskiego g , korzystając z reguły podanej w [1.7 Ocena niepewności pomiarowych](#) na stronie 30. W naszym przypadku niepewność względną wyniku pomiaru obliczamy według wzoru

$$(\text{wzór 46}) \quad \varepsilon = \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta t}{t}$$

Sprawdzamy, czy otrzymane wartości g dla różnych mas ciężarków różnią się między sobą w granicach obliczonej niepewności pomiarowej. Obliczamy wartość średnią g_{sr} .

Oblicz różnicę między g_{sr} a znaną wartością $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (tablicową). Jaki wynika stąd wniosek?

Jako podsumowanie doświadczenia piszemy zasadniczy wniosek końcowy: co było celem doświadczenia i czy wyniki pomiarów są zgodne z naszymi oczekiwaniami zawartymi w sformułowaniu celu doświadczenia.

Sprawozdanie z doświadczenia „Galileusz”

1. Uruchom animację kliknięciem myszy.
Stoper uruchamia się sam w momencie, gdy chłopiec upuszcza piłkę.
2. Obserwuj ruch spadającej piłki i zatrzymaj animację w momencie, gdy piłka upada na ziemię.
3. Zanotuj odczyt stopera (z unieruchomionej animacji) i wpisz do tabelki pomiarów w sprawozdaniu.

Przyjmij, że wysokość $H = 8\text{ m}$. Następnie, powtórz czynności 1-3. Moment zastopowania animacji zależy od czynników przypadkowych (twój refleks). Dlatego, tak jak w „realu” za każdym razem uzyskasz nieco inny odczyt na stoperze - to pozwoli Ci właściwie ocenić niepewności pomiarowe doświadczenia. Niepewność ΔH oceń tak, jak w doświadczeniu realnym.

1.7 Ocena niepewności pomiarowych

Każdy wynik pomiaru x daje tylko wartość przybliżoną rzeczywistej wartości x_0 . Spowodowane jest to tym, że:

1. przedmiot, który mierzymy, jest niedoskonały, np. przy pomiarze długości stwierdzamy, że przedmiot nie jest idealnie równy; z kolei gdy mierzymy odstęp czasu to synchronizacja rozpoczęcia pomiaru z początkiem zjawiska nie jest idealna (podobnie jest z synchronizacją zakończenia pomiaru z końcem zjawiska);
2. pomiar zawsze odbywa się z ograniczoną dokładnością wynikającą zarówno z czynności pomiarowych, jak i z wykonania samego przyrządu pomiarowego, np. przy pomiarze długości występuje: niedokładne przyłożenie linijki, nieprecyzyjne wykonanie podziałki, określona grubość kreski podziałki itd.

Mimo że prawdziwa wartość wielkości mierzonej nie jest znana, możemy określić przedział wartości, w którym się ona mieści. Połowę szerokości tego przedziału nazywamy *niepewnością pomiarową* Δx . Przyjmujemy, że wartość rzeczywista mieści się z dużym prawdopodobieństwem w przedziale między: $(x - \Delta x)$ a $(x + \Delta x)$, gdzie x jest wartością zmierzoną. Na przykład, mierząc długość pręta, otrzymaliśmy wartość $x = 36,4\text{ cm}$ i niepewność pomiarową $\Delta x = 0,3\text{ cm}$. Przyjmujemy więc, że długość zmierzonego pręta wynosi $l = (36,4 \pm 0,3)\text{ cm}$.

⚠ **Ważne:** *Niepewność pomiarowa* jest miarą precyzji pomiaru; podaje ona dopuszczalne odchylenie wyniku pomiaru od prawdziwej wartości wielkości mierzonej.

Niepewności pomiarowe można zmniejszyć, stosując dokładniejszy przyrząd lub dokładniejszą metodę pomiaru. Jednakże nie jesteśmy w stanie ich całkowicie wyeliminować. Poza niepewnościami pomiarowymi występują *błędy pomiarowe*, których można uniknąć. Błędy pomiarowe powstają często na skutek przeoczenia lub pominięcia ważnego czynnika wpływającego na pomiar, np. przy pomiarze długości pręta nie zauważamy jego wygięcia.

Dla zmniejszenia niepewności pomiarowej wykonujemy pomiar wielokrotnie, wtedy często poszczególne wyniki pomiaru nieco różnią się od siebie, gdyż każdy pomiar obarczony jest przypadkową niepewnością pomiarową. Obliczając średnią arytmetyczną z tych pomiarów, otrzymujemy wartość najbardziej zbliżoną do wartości rzeczywistej. Czasami zdarza się, że jeden wynik pomiaru różni się znacznie od pozostałych. Wtedy odrzucamy go i nie uwzględniamy przy obliczaniu wartości średniej, gdyż mamy prawo sądzić, z dużym prawdopodobieństwem, że powstał na skutek błędu pomiaru. Mówimy, że ten wynik pomiaru jest obarczony *błędem grubym*.

Przy ocenie niepewności pomiarowych pojedynczego pomiaru bierzemy pod uwagę wszystkie czynniki, które wpływają na jego dokładność. Suma wszystkich przyczynków daje łączną niepewność pomiarową. Sposób oceniania niepewności pomiarowych zależy od konkretnej sytuacji. Zapoznamy się z nim przy okazji wykonywania opisanych doświadczeń.

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć niepewność pomiarową w przypadku, gdy wynikiem pomiaru jest wielkość złożona, dana za pomocą wzoru matematycznego, którego elementami są wielkości obarczone niepewnością pomiaru. Rozważymy sytuację, w której bezpośrednio zmierzaliśmy dwie niezależne wielkości: x oraz y ; oszacowaliśmy także ich niepewności pomiarowe Δx i Δy . Wielkość złożoną (z wielkości elementarnych x oraz y) oznaczymy symbolem z .

Ⓡ Zamąpiętać:

Jeżeli wielkość złożona z jest przedstawiona za pomocą sumy lub różnicy wielkości mierzonych bezpośrednio, to niepewność Δz wyniku pomiaru jest równa sumie niepewności pomiarów Δx i Δy .

$$(\text{wzór 47}) \text{ gdy } z = x + y \text{ lub } z = x - y \text{ to } \Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Ⓡ Zamąpiętać:

Jeżeli wielkość złożona z jest przedstawiona za pomocą iloczynu lub ilorazu, to względna niepewność $\frac{\Delta z}{z}$ wyniku pomiaru jest równa sumie względnych niepewności pomiarowych Δx i Δy (względna niepewnością pomiarową nazywamy iloraz niepewności pomiarowej i wartości wielkości mierzonej).

$$\text{(wzór 48) } \text{ gdy } z = x \cdot y \text{ lub } z = \frac{x}{y} \text{ to } \frac{\Delta z}{z} = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

Zastosowaliśmy tu znaki bezwzględnej wartości, ponieważ przyjmujemy, dla oceny maksymalnej niepewności pomiaru, przypadek najbardziej niekorzystny, gdy niepewności pomiaru sumują się z tym samym znakiem.



Wskazówka:

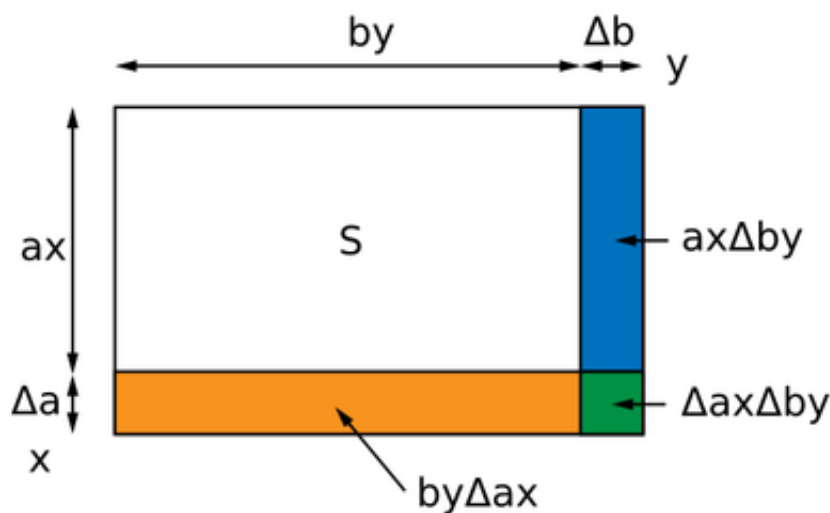
Łatwo możemy zrozumieć, dlaczego w przypadku iloczynu dwóch mierzonych wielkości x i y sumujemy niepewności względne $\frac{\Delta x}{x}$ i $\frac{\Delta y}{y}$. Niepewność iloczynu wynosi $\Delta(xy) = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - xy$. Po wymnożeniu wyrażen w nawiasach otrzymamy

$$\text{(wzór 49) } \Delta(xy) = x \Delta y + y \Delta x + \Delta x \Delta y$$

Iloczyn dwóch małych wielkości $\Delta x \Delta y$ jest bardzo mały w porównaniu z pozostałymi wyrazami i można go zaniedbać. Stąd otrzymujemy regułę dodawania względnych niepewności pomiarowych:

$$\text{(wzór 50) } \frac{\Delta(xy)}{xy} = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$$

Wynik ten można zilustrować graficznie. Niech prostokąt ma boki o długościach a i b . Jego pole powierzchni ma wartość $S = a \cdot b$. Jeśli zwiększymy bok „ a ” o Δa i jednocześnie zwiększymy bok „ b ” o Δb , to pole powierzchni zwiększy się o ΔS .



Rysunek 1.22: Graficzna ilustracja mnożenia niepewności pomiarowych

Ze wzoru [wzór 49](#) na stronie 31 otrzymujemy

$$\text{(wzór 51) } \Delta S = |b \cdot \Delta a| + |a \cdot \Delta b| + |\Delta a \cdot \Delta b|$$

Na tę zmianę składają się trzy przyczynki, pokazane na rysunku. Te przyczynki odpowiadają trzem składnikom sumy we wzorze (*wzór 51* na stronie 31). Widać także, że przyczynkę $\Delta a \cdot \Delta b$ może być pominięty wobec pozostałych dwóch. Jeśli teraz wzór (*wzór 51* na stronie 31), z pominiętym składnikiem $\Delta a \cdot \Delta b$, podzielimy obustronnie przez $S = a \cdot b$, to otrzymamy:

$$(\text{wzór 52}) \quad \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Na zakończenie podamy jeszcze zasady zaokrąglania wyników i niepewności pomiarowych.

W przypadku gdy wartość niepewności pomiarowej ma pierwszą cyfrę znaczącą mniejszą od 3, podajemy ją z dokładnością do dwóch miejsc znaczących, w pozostałych przypadkach zaokrąglamy ją do jednej *cyfry znaczącej*.

! **Ważne:** *Cyfry znaczące* to wszystkie cyfry liczby dziesiętnej z wyjątkiem zer z lewej strony tej liczby.

Taki sposób zaokrąglania wynika z faktu, że zwykle nie jesteśmy w stanie wyznaczyć niepewności pomiarowej z dokładnością lepszą niż 20% jej wartości. Oto przykłady właściwych zaokrągleń:

$$0,00134 \approx 0,0013 = 1,3 \cdot 10^{-3}$$

$$0,0103 \approx 0,010 = 1,0 \cdot 10^{-2}$$

$$0,0302 \approx 0,03 = 3 \cdot 10^{-2}$$

$$6270 \approx 6 \cdot 10^3$$

Uwaga: Wynik pomiaru zaokrąglamy zawsze do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego zaokrągliśmy niepewność pomiarową.

Oto przykłady wyników pomiaru prawidłowo zaokrąglonych:

$$l = (1,4841 \pm 0,0013) \text{ m}$$

$$m = (320 \pm 40) \text{ g}$$

$$t = (86,3 \pm 0,6) \cdot 10^6 \text{ s}$$

W przypadku gdy celem pomiaru jest zbadanie zależności między wielkościami, wynik przedstawiamy na wykresie. Przeprowadzamy wtedy „graficzną” ocenę i dyskusję niepewności pomiaru. Takie postępowanie omówimy przy okazji *1.13 Doświadczenie „Akceleracja”* na stronie 61.

! **Wskazówka:**

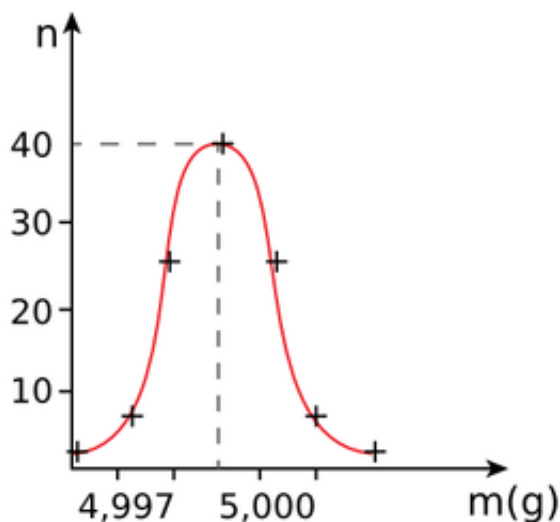
Gdy wykonujemy pomiar wielokrotnie, a niepewnością pomiarową rządzi przypadek, to okazuje się, że wyniki pomiarów układają się w pewien prawidłowy sposób. Na przykład, w celu wyznaczenia masy złotego pierścionka ważono go wielokrotnie na wadze, której skala pozwalała na odczyt wartości z dokładnością do 1 mg (0,001 g). Uzyskane wyniki przedstawia tabela *Rysunek 1.23: Tabela pomiarów masy pierścionka* na stronie 32.

Masa m (g)	4,996	4,997	4,998	4,999	5,000	5,001	5,002
Liczba przypadków n	1	6	26	40	25	5	1

Rysunek 1.23: Tabela pomiarów masy pierścionka

Liczba przypadków n , w których uzyskano konkretną wartość masy przedstawiona jest na wykresie – histogramie (*Rysunek 1.24: Liczebność występowania wyników pomiarowych przy wielokrotnych pomiarach* na stronie 33). Widzimy, że wyniki układają się na charakterystycznej krzywej mającej kształt dzwonu, nazywanej *krzywą Gaussa*. Krzywa ta wyraża ogólną prawidłowość statystyczną – w naszym przykładzie fakt intuicyjnie zrozumiały, że najczęściej występują wyniki pomiaru zbliżone do wartości rzeczywistej, a coraz rzadziej otrzymuje się wynik pomiaru z coraz to większym odchyleniem od wartości rzeczywistej.

Za najbardziej zbliżoną do wartości rzeczywistej uznajemy średnią arytmetyczną wyników, która w tym przypadku praktycznie pokrywa się z wynikiem najczęściej występującym (maksimum krzywej).



Doświadczenie on-line: [Rozkład Gaussa](#)

Rysunek 1.24: Liczebność występowania wyników pomiarowych przy wielokrotnych pomiarach.

Przypomnij sobie zasady porównywania wyników z tomu I.

Pytania i problemy

1. Czy dowolny pomiar wielkości fizycznej może być dokonany z bezwzględną dokładnością, z niepewnością pomiarową równą zero? Odpowiedź uzasadnij.
2. Podaj przyczyny, dla których każdy pomiar jest obarczony niepewnością pomiarową.
3. Podaj przyczyny, dla których pomiar może być obarczony błędem pomiarowym.
4. Co to jest niepewność pomiarowa? Podaj definicję niepewności pomiarowej.
5. Podaj, jakim wzorem zapiszemy niepewność pomiaru złożonego, w przypadku gdy jest on wyrażony w postaci sumy pomiarów bezpośrednich.
6. Podaj, jakim wzorem zapiszemy niepewność pomiaru złożonego, w przypadku gdy jest on wyrażony w postaci różnicy pomiarów bezpośrednich.
7. Co to jest niepewność względna pomiaru?
8. Podaj, jakim wzorem zapiszemy niepewność pomiaru złożonego, w przypadku gdy jest on wyrażony w postaci iloczynu pomiarów bezpośrednich?
9. Powiedzmy, że mierząc długość tyczki, otrzymałeś wartość $l = 1,456\text{m}$, a niepewność pomiarowa oceniłeś na $l = 0,5\text{cm}$. Zapisz wynik pomiaru długości tyczki (stosując właściwe zaokrąglenia).

1.8 Ruch jednostajnie opóźniony

Jeżeli przyspieszenie \vec{a} jest zwrócone w stronę przeciwną do prędkości \vec{v} ruchu ciała, to prędkość będzie coraz mniejsza i będziemy mieli do czynienia z ruchem opóźnionym. Przyspieszenie zwrócone przeciwnie do prędkości ciała nazywa się *opóźnieniem*. Jeżeli opóźnienie jest stałe, to ruch nazywamy *jednostajnie opóźnionym*.

Wzory na prędkość (*wzór 19* na stronie 17) i położenie (*wzór 25* na stronie 20) w ruchu jednostajnie przyspieszonym przechodzą we wzory dla ruchu jednostajnie opóźnionego, gdy zmienimy znak przy a na ujemny. Wtedy wzór na prędkość przyjmie postać:

$$(\text{wzór 53}) v = v_0 - at$$

Trzymając się ściśle wzoru (*wzór 15* na stronie 16) - definicji przyspieszenia - w postaci:

$$(\text{wzór 54}) a = \frac{v - v_0}{t}$$

trzeba przyjąć, że przyspieszenie jest ujemne w ruchu opóźnionym (gdy prędkość ciała jest dodatnia i zmniejsza się, bo wtedy $v_0 > v$). Jednakże mówienie o „przyspieszeniu” w ruchu opóźnionym jest niezręczne, dlatego stosuje się termin „opóźnienie” zamiast „wartość bezwzględna ujemnego przyspieszenia”.

Wyobraźmy sobie, na przykład, hamujący samochód. Jego prędkość zmniejsza się od v_0 w chwili $t = 0$ do v mniejszego od v_0 . Zmiana prędkości $\Delta v = v - v_0$ jest ujemna, a więc i przyspieszenie $a = \Delta v / \Delta t$ też jest ujemne. Zatem *opóźnienie* jako wartość bezwzględna przyspieszenia ujemnego, jest równe **ubytkowi** prędkości w jednostce czasu $a = (v_0 - v) / \Delta t$.

Wzory na prędkość i położenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym przechodzą we wzory dla ruchu jednostajnie opóźnionego, gdy zmienimy znak przy a na ujemny. Wtedy wzór na prędkość przyjmie postać:

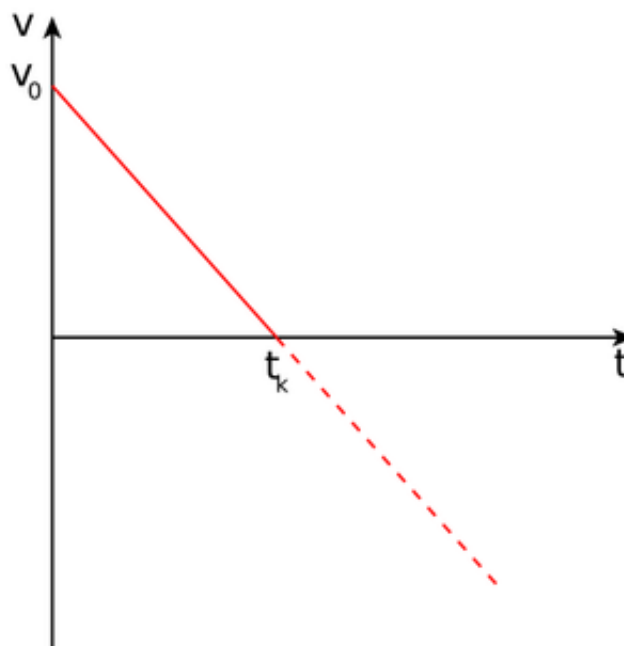
$$(\text{wzór 55}) v = v_0 - at$$

Prędkość po czasie t jest równa prędkości początkowej v_0 pomniejszonej o zmianę prędkości at , jaka się dokonała w czasie t . Wzór (*wzór 55* na stronie 34) przedstawia zależność liniową malejącej prędkości od czasu t . Na wykresie jest to linia prosta opadająca ku dołowi (*Rysunek 1.25: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym* na stronie 35). Punkt przecięcia tej prostej z osią czasu wyznacza chwilę t_k , w której prędkość zmaleje do zera; t_k można otrzymać z równania (*wzór 55* na stronie 34), podstawiając $v = 0$. Otrzymamy $0 = v_0 - at$, skąd

$$(\text{wzór 56}) t_k = \frac{v_0}{a}$$

W przypadku gdy opóźnienie ciała wywołane jest przez opory ruchu, np. przez tarcie albo hamowanie samochodu, to wtedy t_k jest czasem trwania ruchu jednostajnie opóźnionego – ciało kończy swój ruch.

W przypadku gdy przyspieszenie zwrócone przeciwnie do prędkości nie przestaje działać nadal występuje po osiągnięciu zerowej prędkości, ciało kontynuuje swój ruch. Zmienia się jednak zwrot jego prędkości. Z taką sytuacją mamy do czynienia np. w przypadku rzutu pionowego do góry (który zostanie omówiony w dalszej części tego rozdziału). W takiej sytuacji następuje zmiana zwrotu prędkości w najwyższym punkcie toru. Na wykresie zależności prędkości od czasu (*Rysunek 1.25: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym* na stronie 35) dalsze trwanie ruchu obrazuje odcinek linii pod osią czasu.



Równanie ([wzór 55](#) na stronie 34) obejmuje zarówno ruch „do przodu”, czyli o zwrocie prędkości zgodnym ze zwrotem osi współrzędnej położenia ciała, jak i ze zwrotem przeciwnym (kiedy ciało się cofa); wtedy na wykresie v ma formalnie znak minus, co nie oznacza, oczywiście, że wartość wektora prędkości jest ujemna!

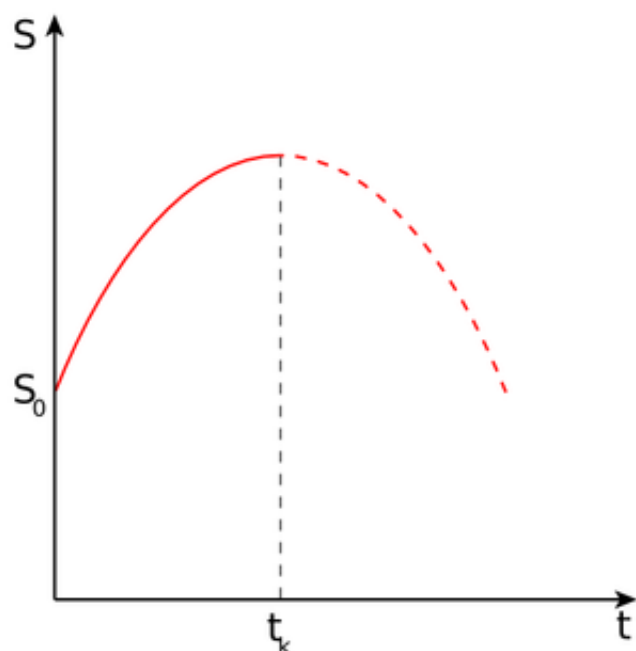
Rysunek 1.25: Wykres zależności prędkości od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym

A oto równanie zależności położenia ciała od czasu w ruchu prostoliniowym jednostajnie opóźnionym:

$$(\text{wzór 57}) \quad s = s_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Wykresem zależności położenia ciała od czasu w ruchu jednostajnie opóźnionym, zgodnie ze wzorem ([wzór 57](#) na stronie 35), jest parabola o gałęziach opadających ku dołowi ([Rysunek 1.26: Wykres zależności położenia \$s\$ od czasu \$t\$ w ruchu jednostajnie opóźnionym](#) na stronie 36). Z wykresu możemy odczytać, że wartość współrzędnej położenia ciała s początkowo narasta, ale coraz wolniej, aż do wartości maksymalnej.

Maksimum występuje dla czasu t_k . Dalsza część krzywej oznaczona jest linią przerywaną, dla której wartość współrzędnej położenia ciała maleje. Oznacza to, że w tym czasie ciało się cofa.



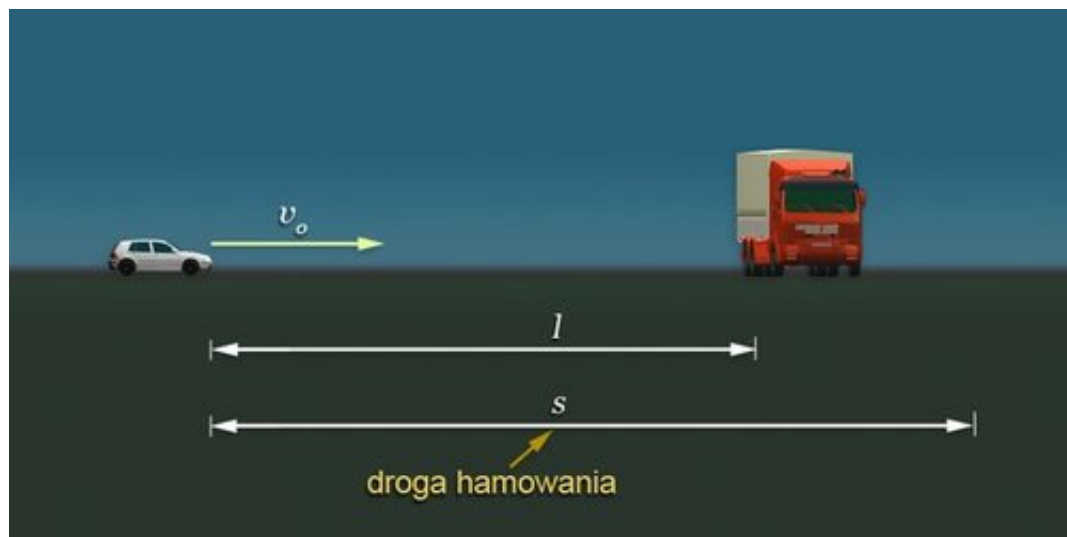
Rysunek 1.26: Wykres zależności położenia s od czasu t w ruchu jednostajnie opóźnionym

Kinematyka - ruch jednostajnie opóźniony

Rysunek 1.27: Animacja

Przykład 6

Samochód jedzie z prędkością $v_0 = 100 \text{ km/h}$. Nagle kierowca zauważa przeszkodę w odległości $l = 50 \text{ m}$. Czy ma on możliwość uniknięcia zderzenia z przeszkodą, jeżeli największe dostępne opóźnienie podczas hamowania wynosi $a = 4,9 \text{ m/s}^2$?



Rysunek 1.28: Samochód hamujący przed przeszkodą

Odpowiedź: Zakładamy, że podczas hamowania ruch samochodu jest jednostajnie opóźniony, obliczymy drogę, jaką przebyłby samochód, gdyby nie napotkał przeszkody. Przyjmijmy, że $s_0 = 0$, zatem wzór (wzór 57 na stronie 35) przyjmie postać

$$(\text{wzór 58}) s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Podstawiając do niego czas hamowania wyrażony wzorem (wzór 56 na stronie 34): $t = t_k = \frac{v_0}{a}$, otrzymamy

$$(\text{wzór 59}) s = v_0 \left(\frac{v_0}{a} \right) - \frac{a}{2} \left(\frac{v_0}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}$$

Prędkość początkowa samochodu wyrażona w metrach na sekundę wynosi

$$(\text{wzór 60}) v_0 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100\,000\text{m}}{3600\text{s}} = 27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zatem

$$(\text{wzór 61}) s = \frac{\left(27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 78,7\text{m}$$

Widzimy, że droga hamowania s jest znacznie większa od odległości $l = 50\text{m}$ od przeszkody! Kierowca nie jest w stanie uniknąć zderzenia.

Obliczmy jeszcze prędkość v , z jaką samochód uderzy w przeszkodę. Znamy drogę l oraz prędkość początkową v_0 , ale nie znamy czasu t dotarcia samochodu do przeszkody. Zgodnie z równaniem (wzór 53 na stronie 34) czas ten jest równy

$$(\text{wzór 62}) t = \frac{v_0 - v}{a}$$

Tak wyrażony czas podstawiamy do wzoru (wzór 39 na stronie 25):

$$(\text{wzór 63}) l = v_0 t - \frac{at^2}{2} = v_0 \frac{v_0 - v}{a} - \frac{a}{2} \cdot \frac{(v_0 - v)^2}{a^2}$$

Stąd

$$(\text{wzór 64}) l = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}$$

Rozwiązując to równanie względem v , otrzymamy szukaną prędkość zderzenia samochodu z przeszkodą

$$(\text{wzór 65}) v = \sqrt{v_0^2 - 2al} = \sqrt{\left(27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - 2 \cdot 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50\text{m}} = 16,78 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

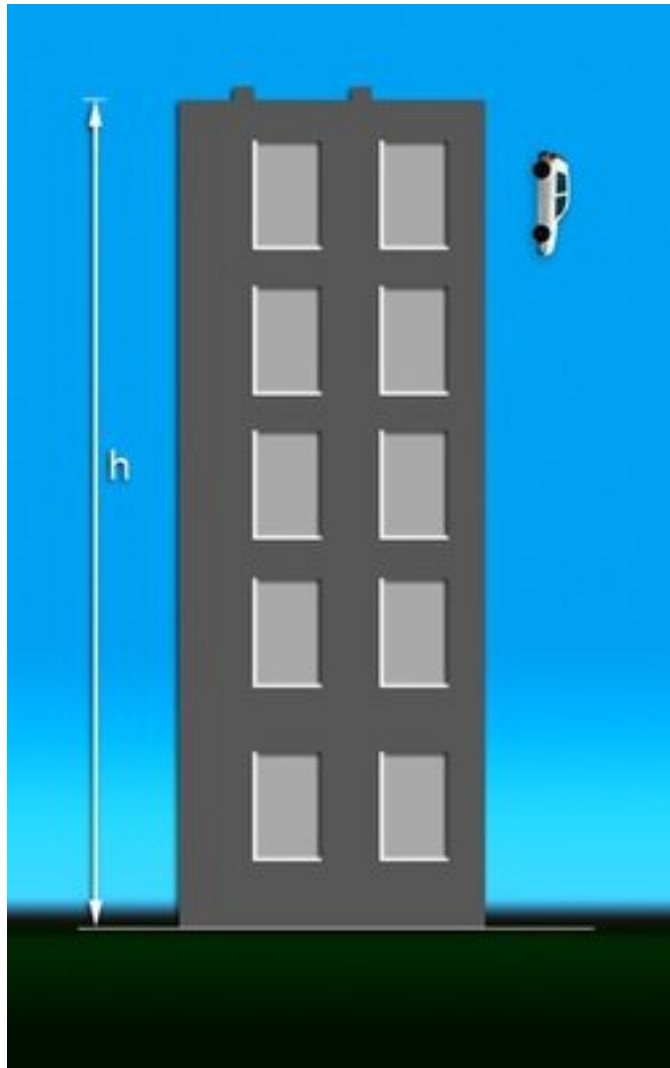
Samochód uderzy więc w przeszkodę z prędkością o wartości 60,4 km/h.

Przykład 7

Wyobraź sobie, że samochód spada z pewnej wysokości h i uzyskuje prędkość taką, jak obliczona w [Przykład 6](#) na stronie 36 (60,4 km/h). Oblicz tę wysokość.

Odpowiedź: Samochód w swoim hipotetycznym upadku porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, z początkową prędkością $v_0 = 0$, z przyspieszeniem ziemskim g , przebywając w czasie t drogę równą h . Wykorzystajmy więc wzór $h = \frac{gt^2}{2}$ oraz wzór $v = gt$ w następujący sposób:

$$(\text{wzór 66}) \quad h = \frac{gt^2}{2} = \frac{g^2 t^2}{2g} = \frac{(gt)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$



Efekt zderzenia z przeszkodą samochodu jadącego z prędkością 60 km/h odpowiada upadkowi samochodu z dachu budynku czteropiętrowego

Rysunek 1.29: Spadający samochód

Zatem

$$(\text{wzór 67}) \quad h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(16,78 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = 14,35 \text{ m}$$

Jest to (w dobrym przybliżeniu) wysokość budynku czteropiętrowego. Innymi słowy, samochód zderzy się z przeszkodą z prędkością, jaką uzyskałby przy upadku z dachu czteropiętrowego budynku (*Rysunek 1.29: Spadający samochód* na stronie 38).

Pytania i problemy

1. Czym różni się ruch jednostajnie przyspieszony od ruchu jednostajnie opóźnionego?
2. Co to jest opóźnienie? Dlaczego stosujemy pojęcie „opóźnienie” a nie „ujemne przyspieszenie”?
3. Czy wzory na położenie i prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym różnią się od ich odpowiedników w ruchu jednostajnie opóźnionym?
4. Wykonaj wykres zależności położenia s od czasu t w ruchach jednostajnie zmiennych wg przykładów: *Przykład 6* na stronie 36 i *Przykład 7* na stronie 37.
5. Wykonaj wykres zależności prędkości od czasu w ruchach jednostajnie zmiennych wg przykładów: *Przykład 6* na stronie 36 i *Przykład 7* na stronie 37.

1.9 Rzut pionowy w górę

Jeżeli ciało nadamy prędkość początkową \vec{v}_0 w kierunku pionowym w górę, to w całym czasie ruchu ciało ma stałe przyspieszenie ziemskie \vec{g} zwrócone pionowo w dół, a więc w stronę przeciwną do prędkości początkowej \vec{v}_0 . Zatem ciało, wznosząc się, wytraca stałe prędkość, aż do chwilowego zatrzymania się – wtedy prędkość chwilowa $v = 0$. W tym momencie ciało osiąga maksymalną wysokość H (*Rysunek 1.30: Rzut pionowy w górę* na stronie 40). Ta pierwsza faza ruchu w górę jest ruchem jednostajnie opóźnionym ze stałym opóźnieniem równym g , oczywiście pod warunkiem, że pominiemy w tym zagadnieniu opór powietrza. W drugiej fazie ruchu ciało swobodnie spada.

Obliczmy maksymalną wysokość H , na którą wzniesie się ciało (nie uwzględniamy tu, zgodnie z założeniem, oporu powietrza). Wykorzystamy wzór na położenie ciała w ruchu jednostajnie opóźnionym (*wzór 57* na stronie 35). Położenie s w naszym zagadnieniu jest tożsame z wysokością h , przyjmijmy $s_0 = h_0 = 0$ oraz $a = g$. Mamy zatem

$$(\text{wzór 68}) s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Jest to równanie wysokości na jakiej znajduje się ciało w każdej chwili, podczas rzutu pionowego w górę.

Maksymalną wysokość H na jaką wzniesie się ciało otrzymamy, gdy do tego wzoru podstawimy czas wznoszenia t_w .

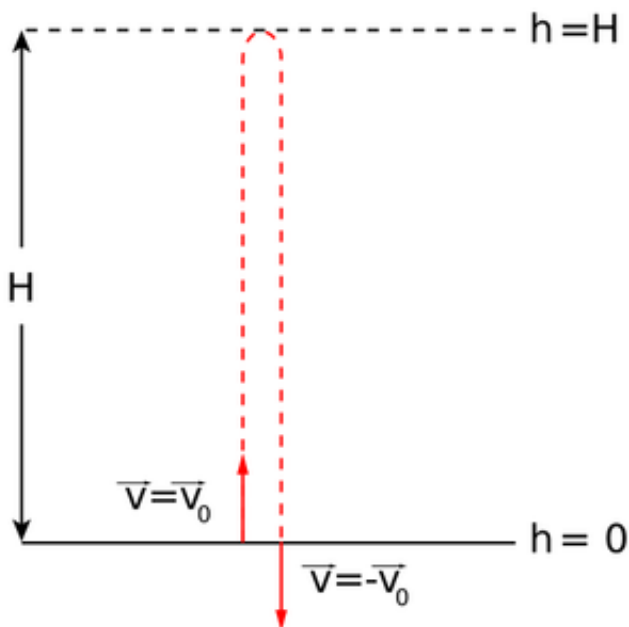
Zgodnie ze wzorem (*wzór 56* na stronie 34) dla $a = g$ mamy $t_w = t_k = \frac{v_0}{g}$. Zatem

$$(\text{wzór 69}) H = v_0 t_w - \frac{gt_w^2}{2} = v_0 \left(\frac{v_0}{g} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2$$

Stąd

$$(\text{wzór 70}) H = \frac{v_0^2}{2g}$$

Maksymalna wysokość wynosi



H

Rysunek 1.30: Rzut pionowy w górę

Zależność położenia (czyli wysokości) ciała rzuconego pionowo w górę od czasu, zgodnie ze wzorem (wzór 68 na stronie 39), pokazana jest na [Rysunek 1.31: Wykres zależności wysokości wzniesienia się ciała od czasu w rzucie pionowym w górę](#) na stronie 41. Wykres przedstawia parabolę, której maksimum odpowiada największej wysokości H po upływie czasu t_w . Parabola dotyka osi czasu w dwóch punktach A i B . Punkt A odpowiada chwili wyrzucenia ciała $t = 0$. Punkt B odpowiada czasowi $t = t_c$, gdy ciało ponownie zetknie się z ziemią – wysokość ciała zmaleje do zera. Zatem czas t_c oznacza całkowity czas trwania rzutu (zarówno wznoszenia, jak i opadania). Czas t_c łatwo wyznaczmy, jeżeli we wzorze (wzór 68 na stronie 39) przyjmiemy, że $h = 0$:

$$(\text{wzór 71}) \quad 0 = v_0 t_c - \frac{g t_c^2}{2}$$

Jest to równanie kwadratowe, gdzie niewiadomą jest czas t . Ma ono dwa pierwiastki. Jeden to $t_{c1} = 0$, co odpowiada wysokości zero w chwili startu. Drugi pierwiastek otrzymamy po prostym przekształceniu naszego równania:

$$t_{c2} = \frac{2v_0}{g}.$$

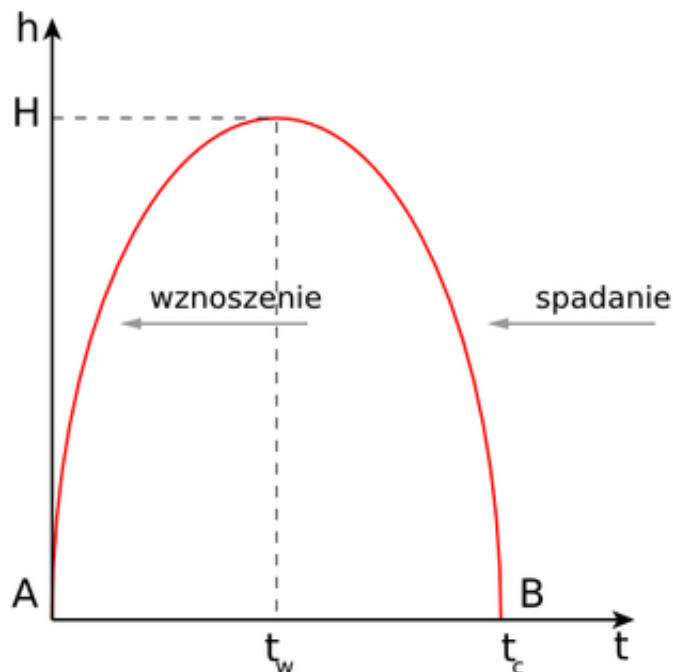
Szukany przez nas czas odpowiada rozwiązaniu t_{c2} , zatem

$$(\text{wzór 72}) \quad t_c = \frac{2v_0}{g}$$

Jest to wzór na czas trwania całego rzutu pionowego w górę. Jeżeli przez t_1 oznaczymy czas wznoszenia ciała, a przez t_2 czas spadania ciała, to $t_c = t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g}$. Czas wznoszenia zgodnie ze wzorem (wzór 56 na stronie 34) wynosi jednak $t_1 = t_w = \frac{v_0}{g}$. Widzimy więc, że w rzucie pionowym w górę czas wznoszenia jest równy czasowi spadania ciała: $t_1 = t_2$.

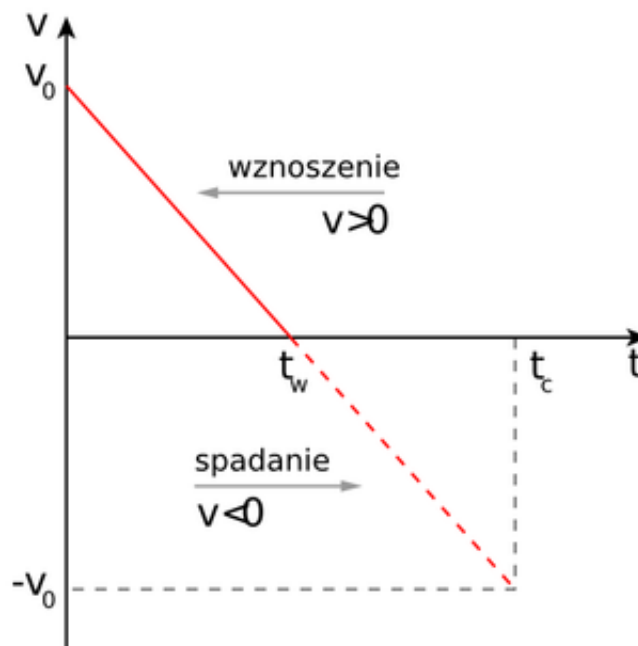
Wartość prędkości dla rzutu pionowego dana jest wzorem ([wzór 33](#) na stronie 22), w którym podstawiono na miejsce a przyspieszenie ziemskie g :

$$(\text{wzór 73}) \quad v = v_0 - gt$$



Rysunek 1.31: Wykres zależności wysokości wzniesienia się ciała od czasu w rzucie pionowym w górę

Łatwo możemy się teraz przekonać, że prędkość końcowa ciała w chwili zderzenia z ziemią jest równa prędkości początkowej, ale, oczywiście, zwróconej przeciwnie: $\vec{v} = -\vec{v}_0$. Po osiągnięciu wysokości maksymalnej ciało zawraca i prędkość zmienia znak, ale w dalszym ciągu obowiązuje wzór ([wzór 73](#) na stronie 41) (patrz – wykres prędkości na [Rysunek 1.29: Spadający samochód](#) na stronie 38). Fakt, że tuż przy ziemi ciało osiąga prędkość $v = -v_0$, wynika ze wzoru ([wzór 73](#) na stronie 41).



Rysunek 1.32: Wykres zależności prędkości od czasu w rzucie pionowym w górę

XLSM PDF Rzut pionowy

Przykład 8

Obliczymy najmniejszą prędkość, z jaką należy rzucić pionowo w górę jakieś ciało, aby dotarło na wysokość $H = 12$ m czteropiętrowego budynku.

Odpowiedź: Skorzystamy ze wzoru (wzór 70 na stronie 39) na maksymalną wysokość H w rzucie pionowym. Wyznaczając z niego prędkość początkową v_0 , mamy:

$$(\text{wzór 74}) \quad v_0 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot 12 \text{ m}} = 15,34 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 55,22 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aby ciało dotarło na wysokość 12 m, należy je wyrzucić z prędkością równą co najmniej 55,22 km/h.

Pytania i problemy

1. Jaki czas należy wstawić do wzoru (wzór 68 na stronie 39), aby otrzymać wzór (wzór 70 na stronie 39) na maksymalną wysokość H . Wykonaj odpowiednie przekształcenia.
2. Udowodnij, że dla rzutu pionowego prędkość końcowa v_k (tuż przed upadkiem ciała) jest równa, co do wartości bezwzględnej, prędkości początkowej v_0 .
3. Wykonaj wykresy położenia wysokości i prędkości ciała w funkcji czasu, wykorzystując dane z przykładu (Przykład 8 na stronie 42).
4. Przedstaw na wykresach zależności prędkości od czasu i na wykresach zależności drogi od czasu ruch samochodu opisany w przykładzie (Przykład 6 na stronie 36). Zaznacz punkty, w których nastąpi zderzenie z przeszkodą. Rozszerz wykresy w ten sposób, aby uwidocznili czas i drogę hamowania, gdy nie ma przeszkody.

Doświadczenie wirtualne „Rzut pionowy”

Doświadczenie - rzut pionowy

Rysunek 1.33: Animacja

1. Uruchom animację kliknięciem myszy.
Stoper uruchamia się sam w momencie, gdy chłopiec wypuszcza piłkę.
2. Obserwuj ruch piłki i zatrzymaj animację w momencie, gdy piłka: a) znajduje się w najwyższym położeniu, b) znajduje się z powrotem w miejscu wyrzutu.
3. Zanotuj odczyty a) i b) stopera (z animacji) i wpisz do tabelki pomiarów w sprawozdaniu.
Oblicz (korzystając z równań (wzór 68 na stronie 39) – (wzór 73 na stronie 41)) wysokość H - zasięg rzutu w pionie (tu wysokość budynku) oraz prędkość początkową wyrzutu v_0 . Następnie, powtórz (dwukrotnie) czynności 1-3. Moment zastopowania animacji zależy od czynników przypadkowych (twój refleks). Dlatego, tak jak w „realu”, za każdym razem uzyskasz nieco inny odczyt na stoperze - to pozwoli ci dokładniej określić H i v_0 oraz właściwie ocenić niepewności pomiarowe ΔH i Δv_0 . Niepewności te oceń tak, jakbyś miał do czynienia z doświadczeniem realnym.

1.10 Operacje na wektorach

Dotychczas mieliśmy do czynienia z wektorami współliniowymi, tzn. mającymi ten sam wspólny kierunek. Teraz poznamy operacje, które można wykonać na wektorach o różnych kierunkach. Opiszemy: dodawanie wektorów, odejmowanie wektorów, rozkładanie wektora na składowe, oraz rzutowanie wektora na osie układu współrzędnych.

Dodawanie wektorów. Składanie ruchów

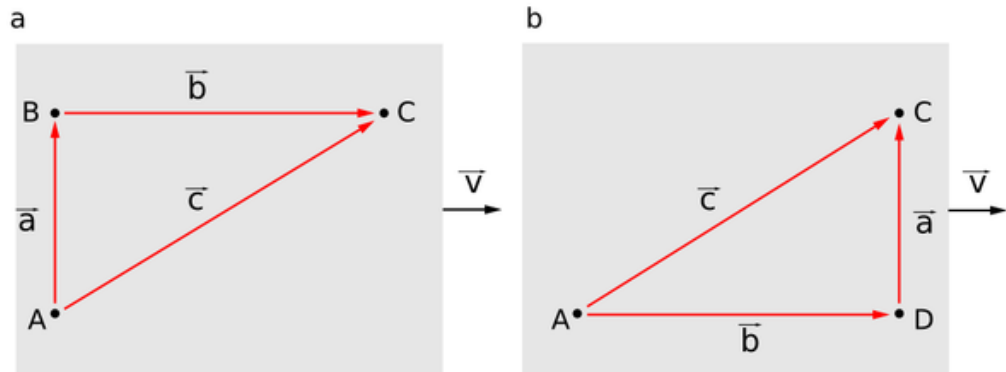
W jaki sposób powinniśmy dodawać wektory? Na przykład, jak powinniśmy dodawać przemieszczenia? Rozpatrzmy następującą sytuację: przypuścimy, że na poziomej platformie w punkcie A znajduje się człowiek, który następnie przechodzi do punktu B (Rysunek 1.34: *Składanie dwóch niezależnych ruchów – człowieka i platformy* na stronie 43). Przemieszczenie AB człowieka dane jest przez wektor \vec{a} . Jeżeli platforma przesunie się wzdłuż toru, człowiek zostanie przemieszczony do punktu C . Przemieszczenie BC jest dane przez wektor \vec{b} . W rezultacie, przemieszczenie AC człowieka względem ziemi dane jest przez wektor \vec{c} . Widzimy więc, że złożenie (czyli zsumowanie) przemieszczeń AB i BC jest równe przemieszczeniu AC . W języku wektorów wyrazimy to następująco: suma wektorów \vec{a} i \vec{b} jest równa \vec{c} , co zapisujemy

$$(\text{wzór 75}) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Rezultat ten nie zależy od kolejności dokonywanych przemieszczeń. Jeżeli człowiek znajdujący się w punkcie A zostanie najpierw przemieszczony do punktu D (Rysunek 1.34: *Składanie dwóch niezależnych ruchów – człowieka i platformy* na stronie 43; $AD = BC$), a później przejdzie do punktu C ($DC = AB$), to – jak widać na rysunku – przemieszczenie wypadkowe będzie takie samo jak poprzednio, czyli będzie to AC . Zapytajmy teraz, jakie będzie przemieszczenie wypadkowe człowieka, gdy oba przemieszczenia odbywać się będą równocześnie. Oczywiście, jeżeli marsz człowieka i ruch platformy odbywają się równocześnie, w rezultacie obu przemieszczeń człowiek znajdzie się dokładnie w tym samym punkcie C . Widzimy zatem, że jeżeli dwa przemieszczenia składowe dokonują się jednocześnie, to przemieszczenie wypadkowe jest dokładnie takie samo, jak w przypadku, gdy oba przemieszczenia dokonują się oddzielnie. Obowiązuje tu zasada dodawania wektorów składowych, w wyniku czego otrzymuje się wektor wypadkowy, któremu odpowiada przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach składowych.

- a) najpierw przemieszcza się człowiek z punktu A do B , a następnie platforma przemieszcza człowieka do punktu C , b) najpierw platforma przemieszcza człowieka z punktu A do D , a następnie człowiek

przemieszcza się do punktu C . Rezultat: przemieszczenie $AC = \vec{c}$ nie zależy od kolejności dokonywanych



przemieszczeń

Rysunek 1.34: Składanie dwóch niezależnych ruchów - człowieka i platformy

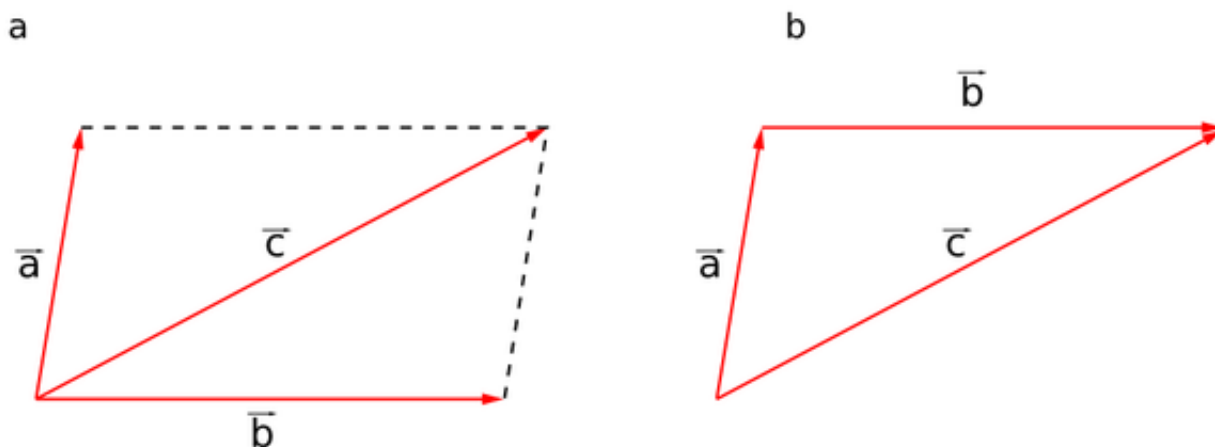
Twierdzenie to można uogólnić i wyrazić następująco:

Ⓡ Zamapiętać:

Niezależność ruchów

Jeżeli punkt materialny wykonuje kilka ruchów jednocześnie, to każdy ruch składowy odbywa się tak, jak gdyby pozostałe ruchy nie miały miejsca (czyli ruchy składowe nie przeszkadzają ani nie pomagają sobie wzajemnie). Dowolny ruch na płaszczyźnie można opisać jako złożenie dwóch niezależnych ruchów.

Wektor będący sumą dwóch wektorów można przedstawić graficznie jako przekątną równoległoboku (*Rysunek 1.35: Dodawanie wektorów* na stronie 45a). Można go również przedstawić w ten sposób, że najpierw początek drugiego składnika przykłada się do końca pierwszego, a następnie tworzy się wektor wypadkowy, którego początek pokrywa się z początkiem pierwszego, a koniec – z końcem drugiego składnika (*Rysunek 1.35: Dodawanie wektorów* na stronie 45b).



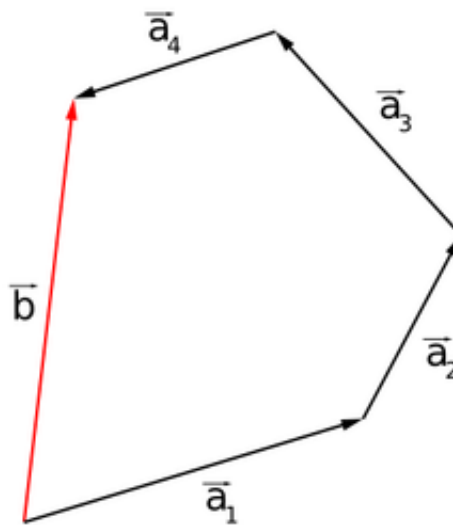
Zgodnie z regułą: a) równoległoboku, b) trójkąta

Rysunek 1.35: Dodawanie wektorów

W ogólnym przypadku, aby dodać kilka wektorów, na przykład \vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \vec{a}_3 i \vec{a}_4 , należy początek drugiego składnika przyłożyć do końca pierwszego, początek trzeciego do końca drugiego itd. Następnie tworzy się wektor wypadkowy \vec{b} , którego początek pokrywa się z początkiem pierwszego składnika, a koniec z końcem ostatniego składnika (Rysunek 1.36: Dodawanie kilku wektorów zgodnie z regułą wieloboku na stronie 46). Ten wektor jest właśnie sumą wektorów składowych:

$$(\text{wzór 76}) \quad \vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$$

Taki sposób dodawania wektorów nazywamy *regułą wieloboku*.



Rysunek 1.36: Dodawanie kilku wektorów zgodnie z regułą wieloboku

Odejmowanie wektorów

Operacja odejmowania jest operacją odwrotną do dodawania wektorów. Sposób graficznego odejmowania wektorów odczytamy wprost z [Rysunek 1.35: Dodawanie wektorów](#) na stronie 45, gdzie mamy przedstawiony wektor \vec{c} będący sumą dwóch wektorów, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Oczywiście, z tego zapisu wynika, że wektor \vec{b} jest różnicą wektorów \vec{c} i \vec{a} ,

$$(\text{wzór 77}) \quad \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$$

Widzimy, że wektor \vec{b} jest poprowadzony w ten sposób, że łączy końce wektorów \vec{a} i \vec{c} . Możemy zatem podać ogólny przepis na odejmowanie wektorów:

Ⓡ Zamapiętać:

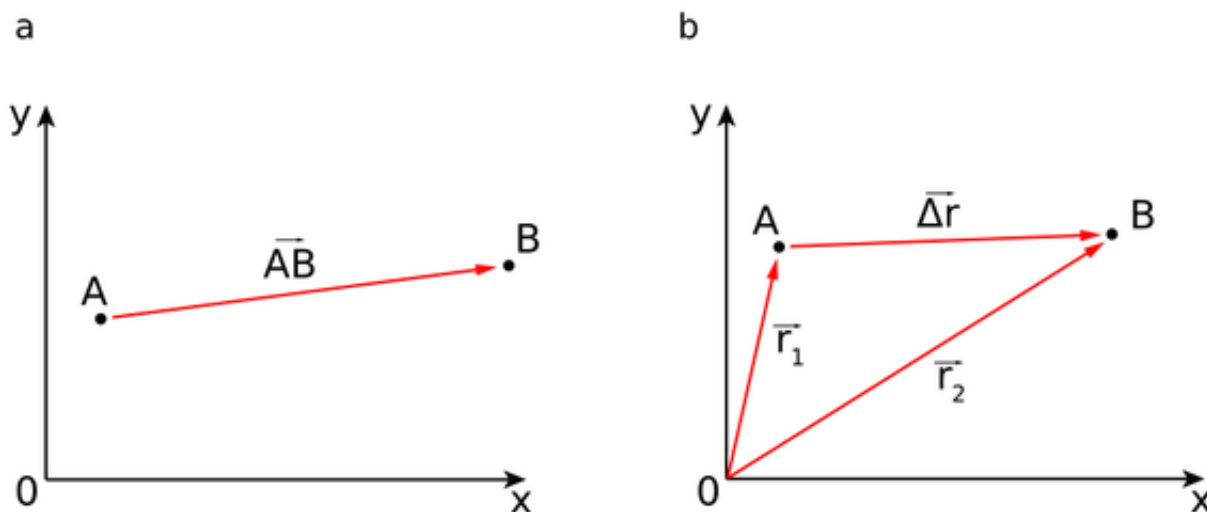
Aby otrzymać wektor \vec{b} będący różnicą wektorów \vec{c} i \vec{a} należy wektory \vec{c} i \vec{a} sprowadzić do wspólnego początku i następnie poprowadzić wektor od końca wektora \vec{a} do końca wektora \vec{c} ([Rysunek 1.37: Wektor przemieszczenia](#) na stronie 47).

Wektor wodzący

Za pomocą różnicy wektorów można określać zmianę położenia ciała wyrażoną wektorem przemieszczenia. W tym celu wprowadza się tak zwany *wektor wodzący* (lub *wektor położenia*) \vec{r} . Przyjmijmy, że ciało znajduje się początkowo w punkcie A , a później w punkcie B . Wektor łączący te dwa punkty jest wektorem przemieszczenia \vec{AB} . Ustalmy jakiś punkt O , w którym umieścimy początek układu współrzędnych $(x;y)$ – [Rysunek 1.37: Wektor przemieszczenia](#) na stronie 47a. Poprowadźmy z punktu O wektor \vec{r} do chwilowego położenia ciała. Ten właśnie wektor nazywa się wektorem wodzącym. Przyjmuje on wartość r_1 , gdy ciało jest w punkcie A , oraz r_2 – w punkcie B ([Rysunek 1.37: Wektor przemieszczenia](#) na stronie 47b). Widzimy, że wektor przemieszczenia \vec{AB} jest równy

różnicy wektorów \vec{r}_2 i \vec{r}_1 , czyli przemieszczenie AB jest równe $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Różnicę wektorów oznaczyliśmy tutaj jako $\Delta \vec{r}$, gdyż oznacza ona zmianę wektora wodzącego \vec{r} .

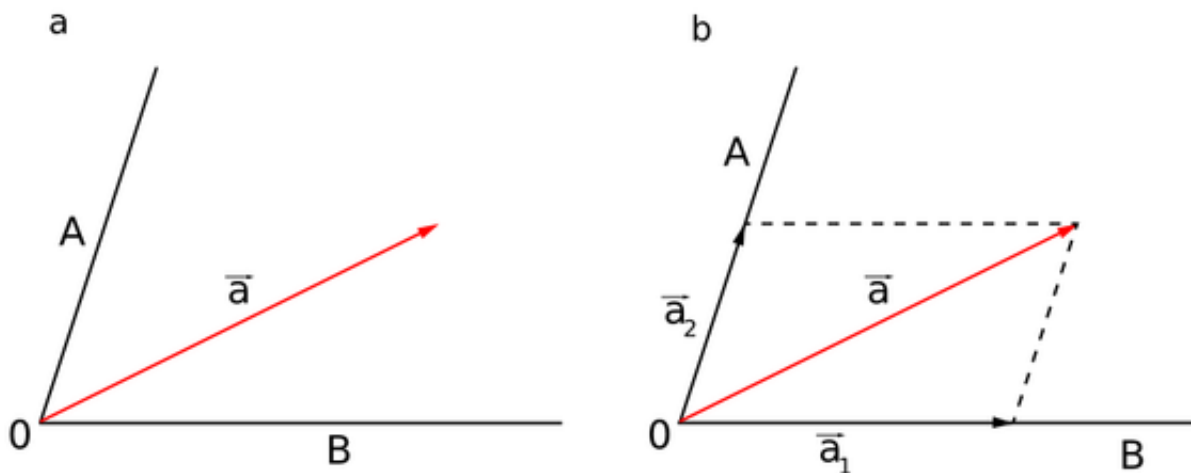
a) wektor \vec{AB} w układzie współrzędnych O_{xy} , b) jako różnica dwóch wektorów wodzących, $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



Rysunek 1.37: Wektor przemieszczenia

Rozkładanie wektora na składowe

Rozkładanie wektora na składowe jest czynnością odwrotną do składania, czyli sumowania wektorów. Jeżeli mamy dany wektor \vec{a} , który chcemy rozłożyć na dwa składowe wektory wzdłuż z góry ustalonych kierunków, na przykład wzdłuż linii OA i OB , jak na [Rysunek 1.38: Składowe wektora](#) na stronie 48a, to musimy postępować następująco: z końca wektora \vec{a} wyprowadzamy pomocnicze linie równoległe do zadanych linii OA i OB . Powstaje w ten sposób równoległobok. Boki równoległoboku, którym nadajemy zwroty, czyli wektory \vec{a}_1 i \vec{a}_2 , są szukanymi składowymi wektora \vec{a} ([Rysunek 1.38: Składowe wektora](#) na stronie 48b).



a) Wektor \vec{a} należy rozłożyć na składowe wzdłuż kierunków OA i OB , b) rozłożenie wektora \vec{a} na składowe \vec{a}_1 i \vec{a}_2 zgodnie z regułą równoległoboku

Rysunek 1.38: Składowe wektora

Rzutowanie wektora na osie

W niektórych zagadnieniach fizycznych interesują nas składowe wektora wzdłuż osi układu współrzędnych O_x lub O_y . Te składowe wektora nazywamy rzutami wektora na określone osie. Na rysunku [Rysunek 1.39: Rzutowanie wektora](#) na stronie 49 widać, że wartości liczbowe rzutów \vec{a}_x i \vec{a}_y można wyrazić wzorami:

$$(\text{wzór 78}) \quad a_x = a \cos \alpha$$

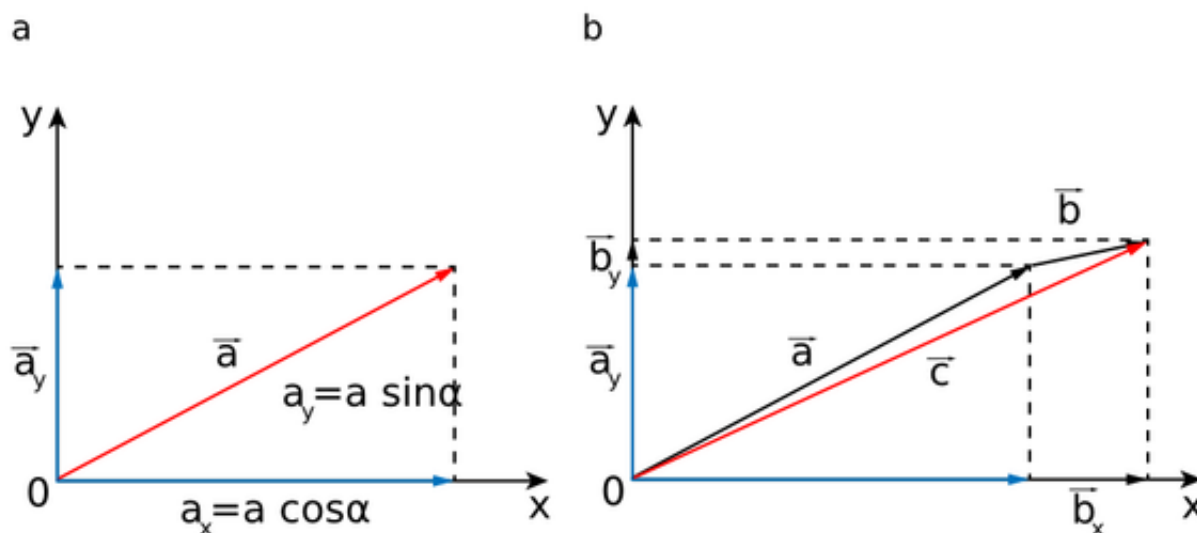
$$(\text{wzór 79}) \quad a_y = a \sin \alpha$$

W powyższych wyrażeniach a oznacza długość wektora \vec{a} .

Z drugiej strony, jeżeli są dane rzuty prostopadłe \vec{a}_x i \vec{a}_y wektora \vec{a} , a wartość wektora jest nieznana, to – korzystając z twierdzenia Pitagorasa – tę nieznaną wartość wektora możemy obliczyć ([Rysunek 1.39: Rzutowanie wektora](#) na stronie 49):

$$(\text{wzór 80}) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

a) Rzutowanie wektora na osie x i y . b) Rzuty wektora \vec{c} będącego sumą wektorów \vec{a} i \vec{b} ($\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$) są sumami rzutów wektorów składowych, tzn. $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$



Rysunek 1.39: Rzutowanie wektora

Kinematyka - wektor przemieszczenia, dodawanie wektorów

Rysunek 1.40: Animacja

Pytania i problemy

1. Jakie czynności należy wykonać, aby dodać graficznie dwa wektory przemieszczenia? Zastosuj regułę: a) wieloboku, b) równoległoboku. Przyjmij, że kierunki wektorów nie leżą na tej samej prostej.
2. Jakie czynności należy wykonać, aby dodać graficznie pięć wektorów?
3. Jakie czynności należy wykonać, aby odjąć graficznie dwa wektory?
4. Co nazywamy wektorem wodzącym? Jaki jest związek między wektorem wodzącym a przemieszczeniem?
5. Jakie czynności należy wykonać, aby rozłożyć graficznie wektor na dwa składowe wektory wzdłuż z góry ustalonych kierunków?
6. Co to są rzuty wektora na określone osie układu współrzędnych (x, y) ? Wykonaj rysunek i podaj odpowiednie wzory.
7. Statek przepływa przez rzekę, która ma szerokość $d = 200\text{m}$. Wektor jego przemieszczenia jest nachylony pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do osi x umieszczonej wzdłuż brzegu. Rozłóż wektor przemieszczenia na dwie składowe: wzdłuż osi x oraz wzdłuż osi y – prostopadłej do brzegu. Oblicz długość wektora przemieszczenia oraz jego składowej x , jeżeli jego składowa $y = 200\text{m}$.

1.1 Wektor prędkości

Wektor prędkości i jego współrzędne

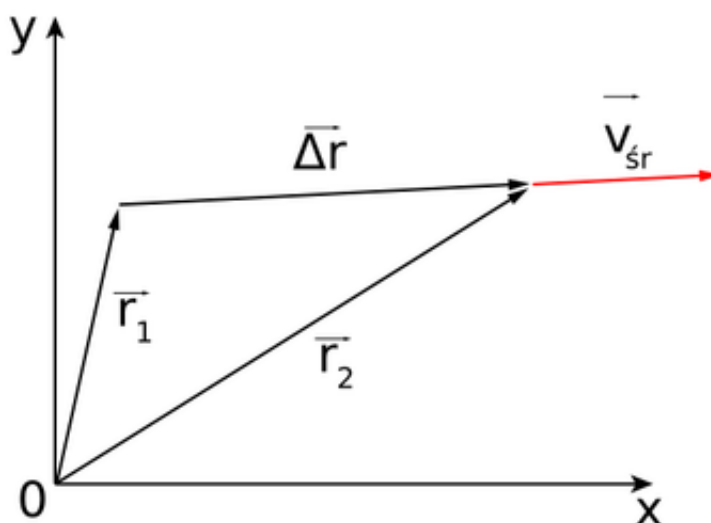
Rozważmy najpierw przypadek, gdy ruch punktu materialnego odbywa się po prostej. Niech w chwili t_1 punkt materialny znajduje się w miejscu wyznaczonym przez wektor wodzący \vec{r}_1 , w chwili t_2 – przez \vec{r}_2 (*Rysunek 1.41: Wektory w ruchu prostoliniowym* na stronie 50). Wektor przemieszczenia wynosi

$$(\text{wzór 81}) \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Wyznacza on (w sytuacji ruchu po prostej) drogę punktu materialnego przebytą w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$. Zatem prędkość średnia określona wzorem

$$(\text{wzór 82}) \quad \vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

jest oczywiście wektorem, ponieważ dzielenie wektora $\Delta \vec{r}$ przez skalar Δt jest innym wektorem, którego kierunek i zwrot jest zgodny z wektorem przemieszczenia (*Rysunek 1.41: Wektory w ruchu prostoliniowym* na stronie 50).



W przypadku ruchu prostoliniowego kierunek i zwrot wektora prędkości jest taki sam jak wektora przemieszczenia

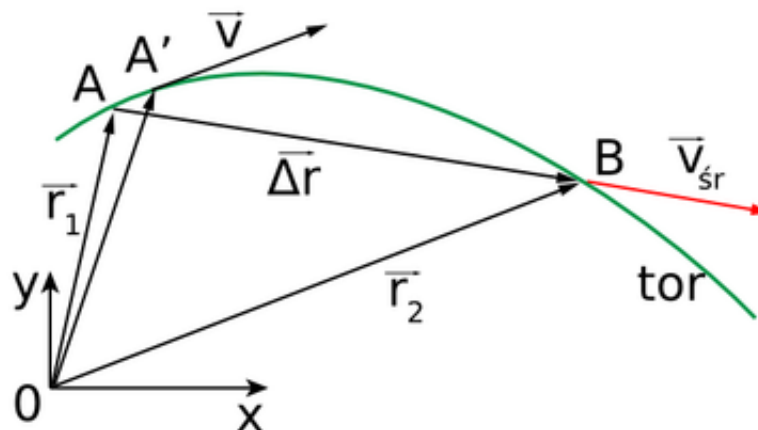
Rysunek 1.41: Wektory w ruchu prostoliniowym

Wektor prędkości chwilowej

Prędkość chwilowa określona w bardzo krótkim przedziale czasu Δt :

$$(\text{wzór 83}) \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

jest także wektorem, który w ogólnym przypadku ruchu krzywoliniowego jest styczny do toru (*Rysunek 1.42: Wektor prędkości średniej i wektor prędkości chwilowej* na stronie 51).



Kierunek wektora prędkości średniej \vec{v}_{sr} jest zgodny z cięciwą (AB) toru ruchu punktu materialnego, podczas gdy kierunek wektora prędkości chwilowej \vec{v} jest styczny do toru (gdyż wektor \vec{v} jest utworzony z cięciwy AA' – bardzo bliskich punktów toru)

Rysunek 1.42: Wektor prędkości średniej i wektor prędkości chwilowej

Twierdzenie to można uogólnić i wyrazić następująco:

Ⓡ Zamapiętać:

Wektor prędkości chwilowej

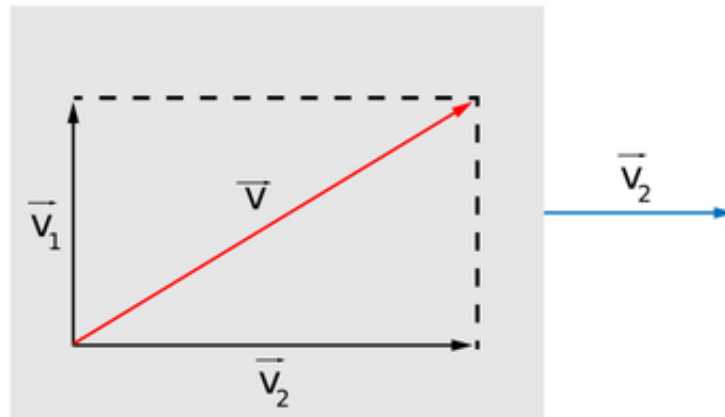
$$(\text{ wzór 84 }) \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

określony w bardzo krótkim czasie Δt , jest zawsze styczny do toru.

Składanie prędkości

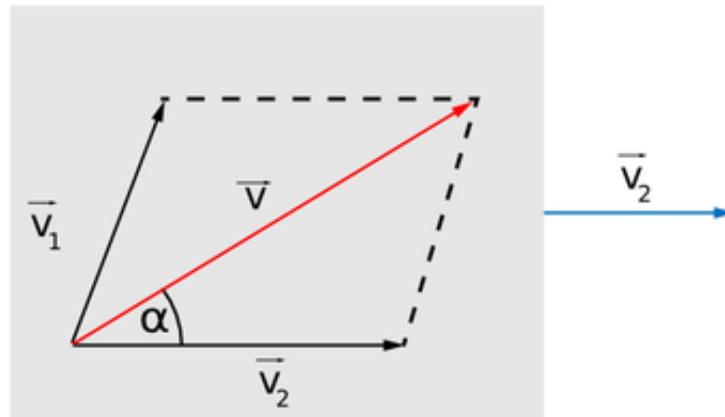
Aby wyjaśnić sposób dodawania prędkości, rozważymy ponownie ruch człowieka i platformy. Jak stwierdziliśmy poprzednio, wektor prędkości ma taki sam kierunek i zwrot jak wektor przesunięcia. Stąd wynika, że wektory prędkości będą dodawały się tak samo jak wektory przesunięcia. Zatem, jeżeli człowiek porusza się z prędkością \vec{v}_1 względem platformy, a platforma porusza się z prędkością \vec{v}_2 względem ziemi, to wypadkowa prędkość człowieka względem ziemi wynosi (patrz [Rysunek 1.43: Dodawanie prędkości człowieka względem platformy \$v \rightarrow 1\$ i platformy względem ziemi \$v \rightarrow 2\$](#) na stronie 52)

$$(\text{ wzór 85 }) \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$



Rysunek 1.43: Dodawanie prędkości człowieka względem platformy \vec{v}_1 i platformy względem ziemi \vec{v}_2

Obowiązuje tu reguła dodawania wektorów, która jest słuszna w ogólnym przypadku, a więc również w przypadku, gdy prędkość człowieka jest skierowana pod dowolnym kątem α do wektora prędkości platformy (*Rysunek 1.44: Dodawanie prędkości człowieka $v \rightarrow 1$ i platformy $v \rightarrow 2$ na stronie 53*). Wzór (*wzór 85* na stronie 51) wyraża prawo dodawania prędkości w postaci wektorowej.



Rysunek 1.44: Dodawanie prędkości człowieka \vec{v}_1 i platformy \vec{v}_2

Przykład 9

Między punktami A i B na rzece, oddległymi od siebie o $l = 10$ km, kursuje statek, który ma stałą prędkość \vec{v}_s względem wody. Oblicz wartości prędkości statku v_s oraz prędkości prądu wody w rzece v_p , jeżeli wiadomo, że statek, płynąc w górę rzeki, pokonuje tę odległość w czasie $t_1 = 1$ h, natomiast w dół rzeki – w czasie $t_2 = 0,5$ h.

Kinematyka - łódź na rzece

Rysunek 1.45: Animacja

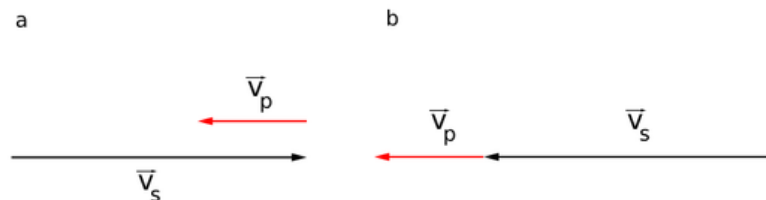
Odpowiedź: Wektory prędkości statku i prądu rzeki są równoległe, choć mają przeciwne zwroty, gdy statek płynie pod prąd (w górę rzeki) zaś zgodne zwroty, gdy płynie z prądem. Tak więc, choć wektory prędkości statku względem brzegu wyrażają się podobnymi wzorami, to wartości tych wektorów są różne:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_s + \vec{v}_p \text{ (podróż pod prąd); ale } v_1 = v_s - v_p \text{ (bo } \vec{v}_s \text{ i } \vec{v}_p \text{ mają przeciwne zwroty);}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_s + \vec{v}_p \text{ (podróż z prądem); ale } v_2 = v_s + v_p \text{ (bo } \vec{v}_s \text{ i } \vec{v}_p \text{ mają zgodne zwroty).}$$

Ilustruje to ([Rysunek 1.46: Składanie prędkości statku i rzeki](#) na stronie 54)

a) Statek płynie w górę rzeki – wektory prędkości statku i prądu rzeki odejmują się, b) statek płynie w dół rzeki – wektory prędkości statku i prądu rzeki dodają się



się

Rysunek 1.46: Składanie prędkości statku i rzeki

Natomiast $v_1 = \frac{l}{t_1}$ i $v_2 = \frac{l}{t_2}$. Mamy więc

$$(\text{wzór 86}) \frac{l}{t_1} = v_s - v_p$$

oraz

$$(\text{wzór 87}) \frac{l}{t_2} = v_s + v_p$$

Sumując te dwa równania stronami, wyeliminujemy v_p . Otrzymamy

$$(\text{wzór 88}) 2v_s = \frac{l}{t_1} + \frac{l}{t_2}$$

Stąd

$$(\text{wzór 89}) v_s = \frac{l(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} \quad v_p = \frac{l(t_1 - t_2)}{2t_1 t_2}$$

Podstawiając wartości liczbowe, otrzymamy, że prędkość statku względem wody wynosi $v_s = 15 \text{ km/h}$, zaś prędkość prądu rzeki $v_p = 5 \text{ km/h}$.

Przykład 10

Przy przepływaniu przez rzekę łódź startuje z punktu O i kieruje się cały czas pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do linii brzegu, pod prąd rzeki (*Rysunek 1.48: Przeprowa łodzi przez rzekę* na stronie 55). Oblicz, na jaką odległość l od punktu A rzeka znieśie łódź. Szerokość rzeki wynosi $d = 100 \text{ m}$, prędkość łodzi względem wody $v_l = 1,2 \text{ m/s}$, a prędkość prądu rzeki $v_p = 0,8 \text{ m/s}$. Pod jakim kątem należy kierować łódź, aby przybiła do brzegu w punkcie A ?

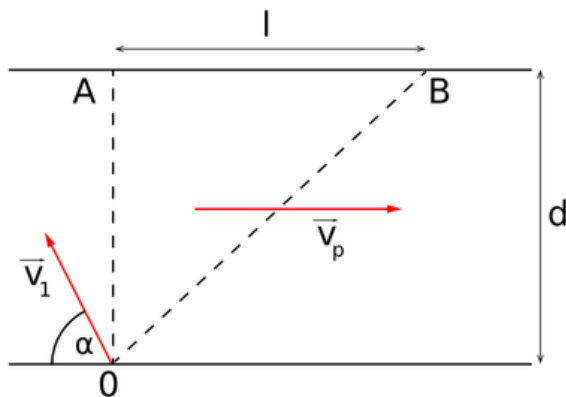
Przeprowa łodzią przez rzekę

Rysunek 1.47: Animacja

Odpowiedź: Obierzmy układ współrzędnych O_{xy} i zrzutujemy na osie prędkość łodzi (*Rysunek 1.48: Przeprawa łodzi przez rzekę* na stronie 55); otrzymamy wartości

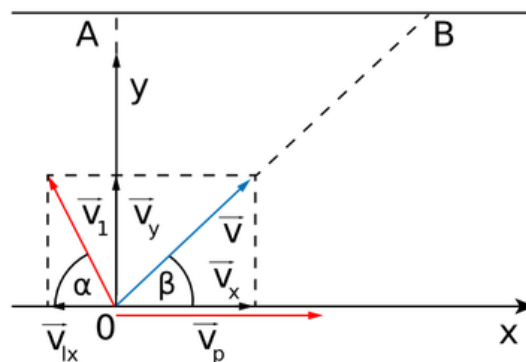
$$(\text{wzór 90}) v_{lx} = v_l \cos \alpha$$

$$(\text{wzór 91}) v_{ly} = v_l \sin \alpha$$



Rysunek 1.48: Przeprawa łodzi przez rzekę

Wektor wypadkowy prędkości ma składowe: $v_x = v_p - v_{lx}$



$$v_y = v_{ly}$$

Rysunek 1.49: Rozkład wektora prędkości łodzi v_l

Wypadkowa prędkość łodzi w kierunku osi x wynika z nałożenia się prędkości prądu rzeki v_p i składowej x -owej prędkości łodzi v_{lx} , czyli

$$(\text{wzór 92}) v_x = v_p - v_{lx} = v_p - v_l \cos \alpha$$

Natomiast w kierunku osi y prędkość wypadkowa łodzi

$$(\text{wzór 93}) v_y = v_{ly} = v_l \sin \alpha$$

Odległość l wyznaczmy z trójkąta OAB

$$(\text{wzór 94}) l = \frac{d}{\operatorname{tg}\beta}$$

Gdzie β jest kątem, jaki wektor wypadkowy \vec{v} tworzy z osią x . Zatem

$$(\text{wzór 95}) \operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_l \sin\alpha}{v_p - v_l \cos\alpha}$$

więc

$$(\text{wzór 96}) l = d \frac{v_p - v_l \cos\alpha}{v_l \sin\alpha}$$

zatem

$$(\text{wzór 97}) l = 100 \cdot \frac{0,8 - 1,2 \cdot \cos 60^\circ}{1,2 \cdot \sin 60^\circ} = 19,2 \text{ m}$$

czyli rzeka zniesie łódź na odległość $l = 19,2 \text{ m}$.

Kąt α_0 , pod jakim należy skierować łódź, aby w wyniku unoszenia rzeki dopłynęła prostopadłe do brzegu, można otrzymać z ostatniego wzoru na l , przyjmując, że $l = 0$. Wówczas $v_p - v_l \cos\alpha_0 = 0$ (co oznacza, że składowa $v_x = 0$), zatem

$$(\text{wzór 98}) \cos\alpha_0 = \frac{v_p}{v_l} = \frac{0,8}{1,2} = 0,66$$

stąd

$$(\text{wzór 99}) \alpha_0 \approx 48^\circ$$

Zatem gdy łódź będzie skierowana pod kątem 48° do brzegu, to kierunek jej wypadkowego ruchu będzie prostopadły do brzegu.

Kinematyka - wektor prędkości w ruchu prostoliniowym

Rysunek 1.50: Animacja

Kinematyka - wektor prędkości w ruchu krzywoliniowym

Rysunek 1.51: Animacja

Pytania i problemy

1. Podaj definicję wektora prędkości średniej.
2. Podaj definicję wektora prędkości chwilowej.
3. Przedstaw na rysunku tor krzywoliniowy ciała i zaznacz wektor prędkości średniej i chwilowej.
4. Na wybranym przykładzie wyjaśnij zasadę niezależności ruchów.
5. Sformułuj prawo dodawania prędkości w postaci wektorowej.

1.12 Wektor przyspieszenia

Przyspieszenie średnie zdefiniowane jako stosunek przyrostu wektora prędkości $\Delta \vec{v}$ do czasu Δt , w jakim ten przyrost nastąpił:

$$(\text{wzór 100}) \vec{a}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

jest wektorem (ponieważ dzielenie wektora przez skalar Δt daje wektor).

Na przyspieszeniach możemy wykonywać, w konkretnych zagadnieniach fizycznych, operacje wcześniej zdefiniowane dla wektorów, jak dodawanie, rozkładanie na wektory składowe, rzutowanie na określone osie i inne.

Wskazówka:

W ruchu prostoliniowym wektory \vec{v}_1 i \vec{v}_2 mają ten sam kierunek, zgodny z torem ruchu. Tak więc wektor $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ma ten sam kierunek, zgodny z torem (*Rysunek 1.52: Wektory w ruchu prostoliniowym* na stronie 57). Z tego zaś wynika, że wektor przyspieszenia \vec{a} także ma kierunek zgodny z torem. Mówimy, że przyspieszenie jest w tej sytuacji styczne do toru. Opisuje ono zmianę wartości prędkości; kierunek prędkości się nie zmienia.

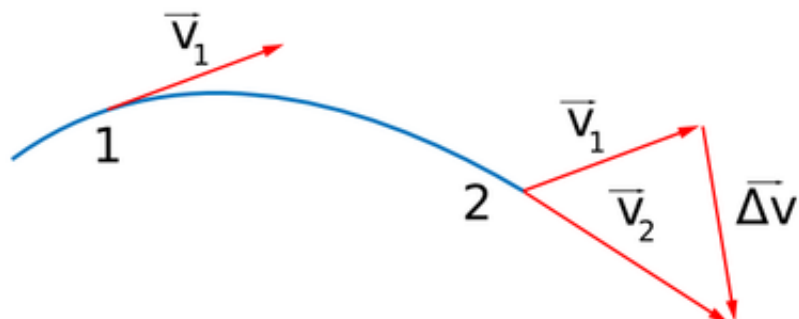


W ruchu przyspieszonym prostoliniowym wektor \vec{v} ma zawsze kierunek zgodny z torem

Rysunek 1.52: Wektory w ruchu prostoliniowym

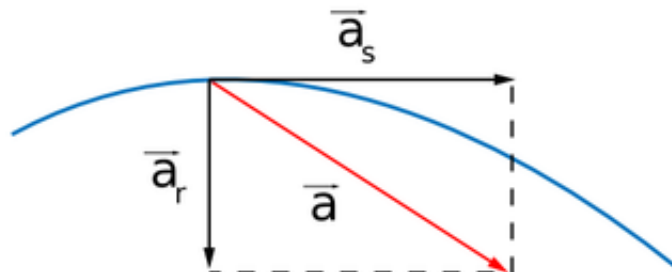
Inaczej jest w ruchu krzywoliniowym...

Zwróćmy uwagę na to, że wektor przyspieszenia chwilowego w ruchu krzywoliniowym nie jest styczny do toru. Widać to na *Rysunek 1.53: Wektor $\Delta v \rightarrow$ nie jest styczny do toru* na stronie 58 – w punktach 1 i 2 wektory prędkości są styczne do toru, natomiast wektor $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, który występuje w liczniku wzoru (*wzór 100* na stronie 56), nie jest styczny do toru (nawet wtedy, gdy punkty 1 i 2 zbliżają się do siebie), a przecież kierunek wektora \vec{a} jest zgodny z kierunkiem $\Delta \vec{v}$. W takiej sytuacji wektor przyspieszenia \vec{a} rozkładamy na dwa wektory składowe wzajemnie prostopadłe (*Rysunek 1.54: Przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym można rozłożyć na wzajemnie prostopadłe składowe $a \rightarrow s$ i $a \rightarrow r$* na stronie 59): \vec{a}_s – styczny do toru i \vec{a}_r – prostopadły (normalny); ten ostatni wektor nazywa się *przyspieszeniem dośrodkowym*.



Rysunek 1.53: Wektor $\Delta \vec{v}$ nie jest styczny do toru

Taki rozkład wektora przyspieszenia ma sens, ponieważ każda z opisanych składowych powoduje inny skutek. Składowa styczna związana jest ze zmianą **wartości** prędkości. Zauważmy, że przyspieszenie a zdefiniowane wcześniej za pomocą wzoru ([wzór 17](#) na stronie 17) - rozdz. [1.4 Ruch jednostajnie przyspieszony](#) na stronie 16, jest właśnie wartością składowej stycznej przyspieszenia a_s . Natomiast składowa prostopadła przyspieszenia opisuje zmianę **kierunku** prędkości.

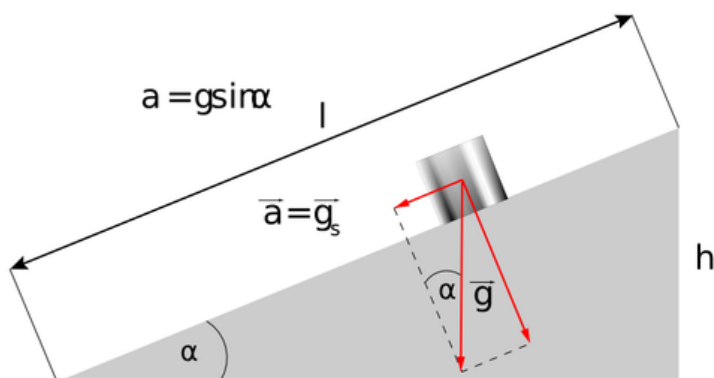


Rysunek 1.54: Przyspieszenie w ruchu krzywoliniowym można rozłożyć na wzajemnie prostopadłe składowe \vec{a}_s i \vec{a}_r

Przykład 11

Ciało zsuwa się po równi pochyłej o długości $l = 1\text{ m}$, z wysokości $h = 2\text{ cm}$ (Rysunek 1.55: *Przyspieszenie ciała na równi pochyłej bez tarcia* na stronie 59). Pomijając opory ruchu, oblicz czas trwania ruchu i prędkość końcową ciała u podnóża równi. Ile wynosi czas spadania i prędkość końcowa ciała, gdy spada ono swobodnie z tej samej wysokości?

Jest ono równe rzutowi wektora przyspieszenia ziemskiego \vec{g} na kierunek równi, $a = g_s = g \sin \alpha$



Rysunek 1.55: Przyspieszenie ciała na równi pochyłej bez tarcia

Odpowiedź: Przyspieszenie ziemskie jest wektorem i zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, wektor ten można rzutować na dowolne kierunki. W naszym przypadku odpowiednim kierunkiem rzutu jest kierunek równoległy do równi (bo tylko w takim kierunku ciało może się poruszać — ruch w kierunku prostopadłym do powierzchni równi jest niedostępny).

Zatem ciało zsuwa się z równi z przyspieszeniem \vec{a} równym co do wartości rzutowi przyspieszenia ziemskiego $g_s = g \sin\alpha$. Ale $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, więc

$$(\text{wzór 101}) \quad a = g \sin\alpha = g \frac{h}{l}$$

Wzdłuż równi ciało pokonuje drogę l ruchem jednostajnie przyspieszonym w czasie t , z zerową prędkością początkową ($v_0 = 0$), zatem $l = \frac{at^2}{2}$. Podstawiając tu wzór na a , otrzymamy: $l = \frac{ght^2}{2l}$, stąd

$$(\text{wzór 102}) \quad t = l \sqrt{\frac{2}{gh}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych $l = 1\text{ m}$, $h = 0,02\text{ m}$ oraz $g = 9,81\text{ m/s}^2$ otrzymujemy, że czas ruchu ciała wzdłuż równi wynosi $t = 3,2\text{ s}$.

Prędkość ciała u podnóża równi wynosi $v = at$. Podstawmy tu czas t wyprowadzony ze wzoru

$$l = \frac{at^2}{2}$$

$$(\text{wzór 103}) \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

zatem

$$(\text{wzór 104}) \quad v = at = a \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2al}$$

Podstawiając otrzymany wcześniej wzór na a , mamy $v = \sqrt{2 \frac{gh}{l} l}$. Stąd

$$(\text{wzór 105}) \quad v = \sqrt{2gh}$$

Biorąc pod uwagę dane liczbowe, otrzymamy, że $v = 0,62\text{ m/s}$.

Czas swobodnego spadania t_0 z wysokości h otrzymamy z równania $h = \frac{gt_0^2}{2}$. Mamy więc

$$(\text{wzór 106}) \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Porównajmy ten czas z czasem t ruchu ciała wzdłuż równi pochyłej. W tym celu przekształcimy wyżej wyprowadzony wzór na t w następujący sposób:

$$(\text{wzór 107}) \quad t = l \sqrt{\frac{2}{gh}} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{l}{h} t_0$$

Widzimy, że czas t zsuwania się ciała po równi jest tyle razy dłuższy od czasu t_0 swobodnego spadania, ile razy długość równi jest większa od jej wysokości. Podstawiając dane liczbowe, otrzymamy $t_0 = 0,064\text{ s}$.

Prędkość ciała swobodnie spadającego z wysokości h wynosi $v = gt_0$. Podstawiając $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

otrzymamy $v = \sqrt{2gh}$ – identyczny wzór ze wzorem na prędkość ciała zsuwającego się po równi. Widzimy zatem, że wartość prędkości końcowej ciała zsuwającego się bez tarcia po równi pochyłej jest równa wartości prędkości ciała swobodnie spadającego z tej samej wysokości.

Pytania i problemy

1. Zdefiniuj i opisz wektor przyspieszenia średniego.
2. Rozłóż graficznie wektor przyspieszenia w ruchu krzywoliniowym na składowe – prostopadłą i styczną do toru. Która z tych składowych związana jest ze zmianą kierunku prędkości?
3. Uzasadnij wniosek, że na ogół wektor przyspieszenia ma inny kierunek niż wektor prędkości. Wykorzystaj wzór (wzór 100 na stronie 56).
4. Podaj, jaki związek ma przyspieszenie a zdefiniowane za pomocą wzoru (wzór 17 na stronie 17) w rozdziale 1.4 *Ruch jednostajnie przyspieszony* na stronie 16 z przyspieszeniem zdefiniowanym we wzorze (wzór 100 na stronie 56).
5. Opisz przy jakich działaniach kierowcy pojawia się niezerowe przyspieszenie styczne samochodu?
6. Opisz przy jakich działaniach kierowcy pojawia się niezerowe przyspieszenie dośrodkowe samochodu?
7. Opisz ruch, podczas którego składowa prostopadła przyspieszenia równa jest zeru.
8. Opisz ruch, podczas którego składowa styczna przyspieszenia równa jest zeru. (Jeśli to pytanie wydaje Ci się za trudne, wyjaśnienie znajdziesz w rozdziale 1.15 *Ruch jednostajny po okręgu* na stronie 71 o ruchu po okręgu).

1.13 Doświadczenie „Akceleracja”

Wykonując to doświadczenie, przekonamy się, że wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym dobrze zgadza się z rzeczywistością. To znaczy, że wzór ten prawidłowo opisuje zależność drogi od czasu i na wykresie tej zależności przedstawia się jako parabola. Wyznamy wartość przyspieszenia kulki staczającej się po równi pochyłej.

Uwaga: Kulka nie może mieć zbyt dużych rozmiarów, aby można było zaniedbać efekty związane z ruchem obrotowym kulki - średnica nie powinna być większa niż 1 cm.

Przy okazji poznamy ciekawy sposób przekształcenia krzywej na wykresie w linię prostą. Ułatwia to analizę błędów oraz pozwala jasno unaocznic odchylenia doświadczalnych pomiarów od teorii.

Doświadczenie wykonujemy w następujący sposób:

Z zestawu do doświadczeń z mechaniki wybieramy dwa pręty o długości 1 m i łączymy je tak, aby utworzyły szyny, które ustawiamy na stole, podkładając z jednego końca wsporniki. W ten sposób powstaje równia pochyła o niewielkim kącie nachylenia do poziomu (*Rysunek 1.56: Przygotowanie równi pochyłej do pomiarów czasu staczania się kulki* na stronie 62). Oznaczamy na niej kredą (lub w inny sposób) jednakowe odcinki drogi, na przykład co $l = 10$ cm.



Rysunek 1.56: Przygotowanie równi pochyłej do pomiarów czasu staczania się kulki

Za pomocą stopera wykonujemy pomiary czasu staczania się kulki na coraz dłuższych odcinkach drogi. Mierzmy czas t_1 na drodze $s_1 = l$, t_2 na drodze $s_2 = 2l$ itd. Kulkę puszczaemy za każdym razem z wierzchołka równi. Każdy pomiar powtarzamy trzykrotnie, aby łącznie otrzymać trzy serie pomiarów.

Wpisujemy wyniki pomiarów czasu do odpowiednich rubryk tabelki pomiarów znajdującej się w [sprawozdaniu z doświadczenia](#).

Dla każdej wartości drogi obliczamy średni czas ruchu kulki i wpisujemy go do rubryki t_{sr} . Dzięki temu uzyskujemy dokładniejsze wartości czasów (jak sądzisz – dlaczego?). Obliczamy wartości kwadratów czasów średnich i wpisujemy je w ostatniej rubryce tabelki.

Sporządzamy wykres zależności drogi od czasu dla wartości uzyskanych podczas pomiaru. Na osi rzędnych odkładamy drogę s w metrach, a na osi odciętych czas w sekundach. Pamiętajmy o doborze właściwej skali na osiach, aby wykres był czytelny. Nanosimy punkty doświadczalne i wykreślamy krzywą, prowadząc ją „od ręki” pomiędzy punktami doświadczalnymi (nie należy kreślić linii łamanej od punktu do punktu).

Sprawdzamy, czy otrzymana krzywa przypomina parabolę. Teoretyczny wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym (wzór (wzór 24 na stronie 20) – 1.4 Ruch jednostajnie przyspieszony na stronie 16) przedstawia, jak wiemy, funkcję kwadratową czasu

$$(\text{wzór 108}) s = \frac{at^2}{2}$$

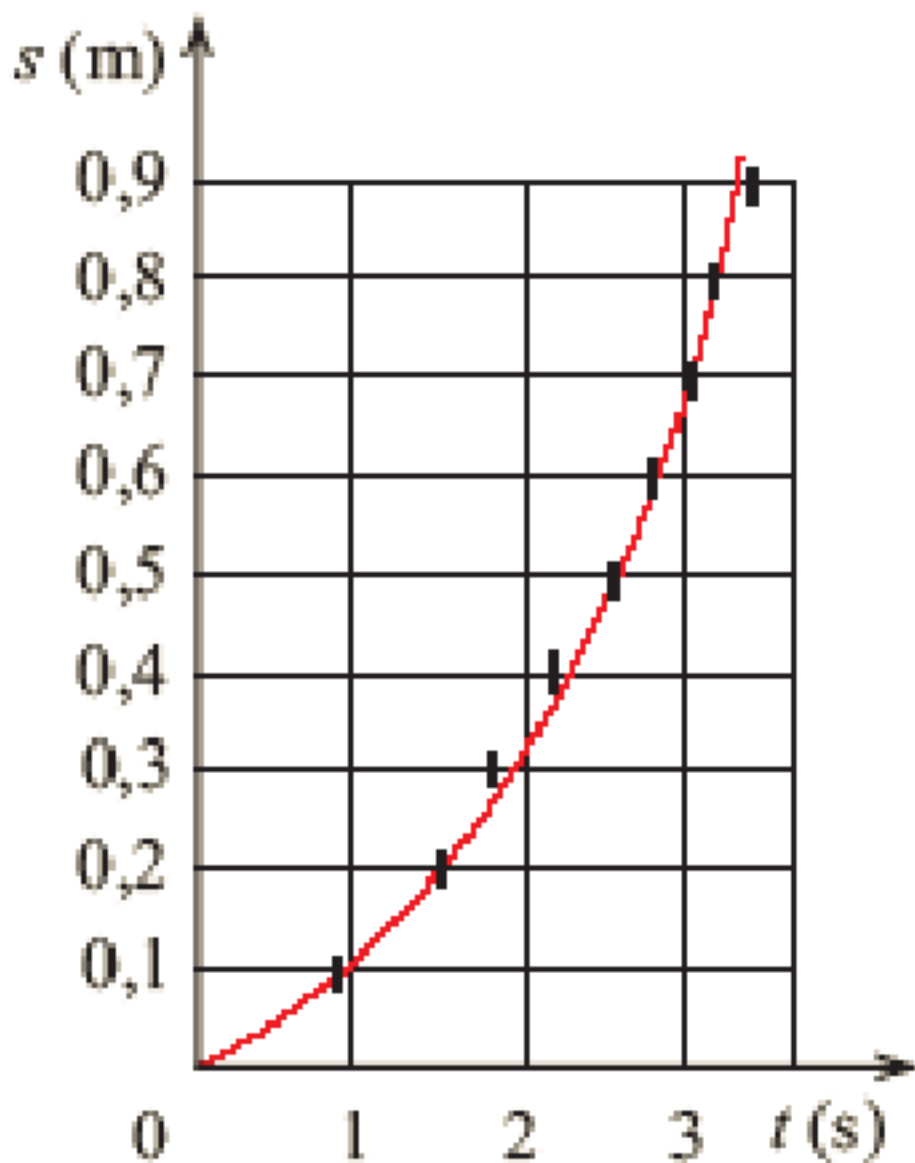
Zapisujemy wniosek, jaki wynika z kształtu otrzymanej krzywej.

Prześledzimy opracowanie wyników doświadczenia na przykładzie konkretnych danych otrzymanych w jednej ze szkół. Wyniki pomiarów i obliczeń zawarte są w tabeli na [Rysunek 1.58: Przykładowe dane pomiarów](#) na stronie 64. Korzystając z nich, sporządzono wykres zależności s od t , odkładając jako rzędne punktów doświadczalnych wartości t_{sr} .

Wykreślona krzywa ([Rysunek 1.57: Wykres zależności drogi od czasu](#) na stronie 63) bardzo przypomina parabolę. Dzięki temu otrzymuje się potwierdzenie doświadczalne wzoru teoretycznego (wzór 108 na stronie 62). Jeżeli

otrzymaliśmy taki wynik, możemy się cieszyć, jednakże możemy odczuwać pewien niedosyt, gdyż uzyskaliśmy tylko jakościowe („na oko”) potwierdzenie teorii.

Doświadczalny wykres zależności drogi od czasu dla kulki staczającej się po równi



pochyłej

Rysunek 1.57: Wykres zależności drogi od czasu

Droga s (m)	Czas t (s)			t_{sr} (s)	t^2 (s ²)
	1	2	3		
0,1	0,9	0,9	1,0	0,9	0,8
0,2	1,5	1,5	1,4	1,5	2,2
0,3	1,9	1,9	1,6	1,8	3,2
0,4	2,3	2,0	2,3	2,2	4,8
0,5	2,3	2,7	2,6	2,5	6,2
0,6	3,0	2,4	2,7	2,7	7,3
0,7	3,2	3,0	2,8	3,0	9,0
0,8	3,3	3,3	3,0	3,2	10,2
0,9	3,4	3,4	3,4	3,4	11,6

Rysunek 1.58: Przykładowe dane pomiarów

Spróbujemy znaleźć potwierdzenie bardziej obiektywne i dokładniejsze. Gdybyśmy mieli do czynienia z funkcją liniową, a nie, jak w tym przypadku, z funkcją kwadratową, dużo łatwiej byłoby stwierdzić zgodność położenia punktów doświadczalnych z teoretyczną linią prostą (wystarczyłoby tylko przyłożyć linijkę). Spróbujemy zatem „wyprostować” parabolę odpowiadającą zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową.

Jeżeli na osi rzędnych będziemy odkładać drogę s , a na osi odciętych, zamiast wartości czasu t , wartości kwadratów czasu t^2 , to powinniśmy otrzymać prostą. Wtedy w równaniu ([wzór 109](#) na stronie 64) jako zmienną niezależną traktujemy nie t , ale t^2 , natomiast s jako zmienną zależną. Otrzymujemy w ten sposób zależność liniową między s a t^2 :

$$(\text{wzór 109}) s = \frac{a}{2} (t^2) \equiv (y = \frac{a}{2}x)$$

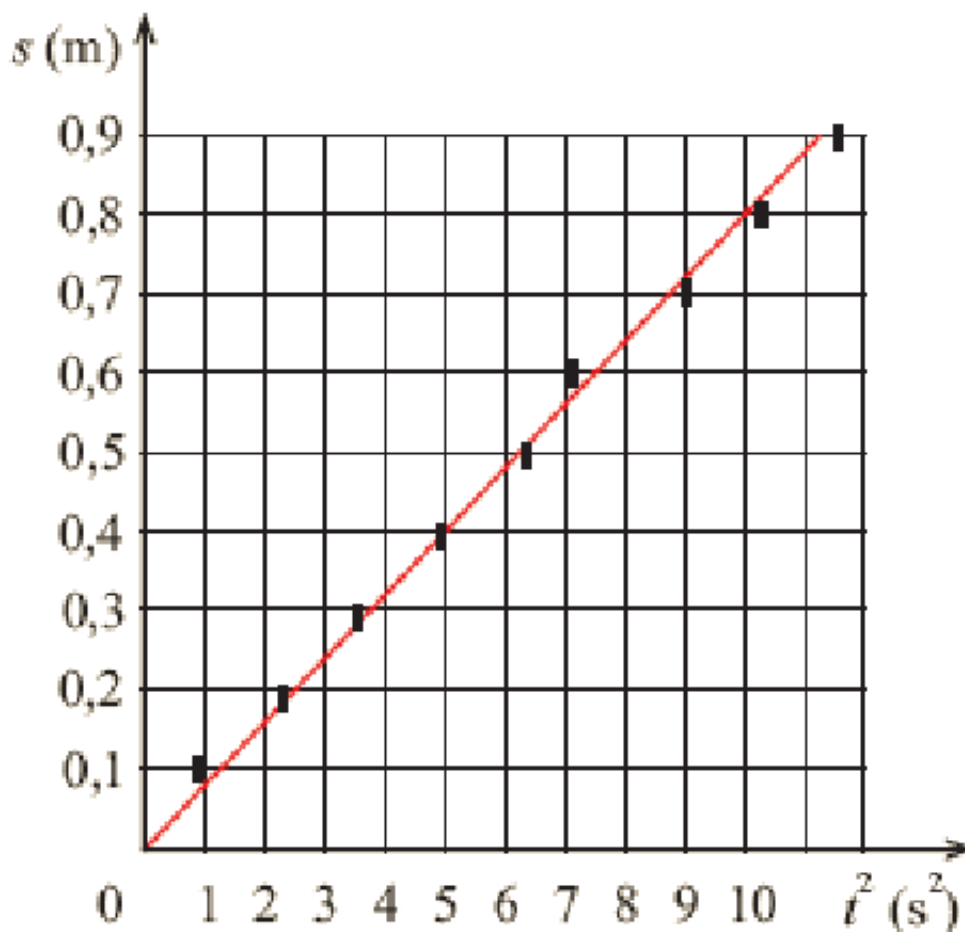
Wykorzystując ostatnią rubrykę w tabelce, możemy sporządzić wykres zależności s od t^2 . Wykres dla podanych wartości doświadczalnych przedstawiony jest na rysunku [Rysunek 1.59: Doświadczalny wykres zależności drogi od kwadratu czasu dla kulki staczającej się po równi pochylej](#) na stronie 65. Teraz widzimy wyraźnie, że punkty doświadczalne układają się wzdłuż prostej – nie mamy wątpliwości, że nasze doświadczenie potwierdza teoretyczny wzór na drogę jako funkcję czasu! Widzimy wprawdzie, że punkty pomiarowe nie leżą dokładnie na prostej, ale nie możemy oczekiwać czegoś takiego w doświadczeniu, którego wyniki są zawsze obarczone określoną niepewnością pomiarową. Istotne jest, że odstępstwa punktów od prostej mają charakter przypadkowy (losowy), a nie systematyczny.

Moglibyśmy teraz odczytać z wykresu doświadczalną wartość przyspieszenia, bo, jak widać (równanie ([wzór 109](#) na stronie 64)), tangens kąta nachylenia naszej prostej do osi (t^2), czyli współczynnik kierunkowy, jest równy liczbowo $\frac{a}{2}$. Jednakże zrobimy to nieco później, ponieważ prostą na rysunku [Rysunek 1.59: Doświadczalny wykres zależności drogi od kwadratu czasu dla kulki staczającej się po równi pochylej](#) na stronie 65 poprowadziliśmy trochę „na wycucie” między punktami doświadczalnymi. Nie mamy pewności, czy nie można by jej dokładniej poprowadzić między tymi punktami. Bardziej precyzyjnie poprowadzimy prostą, jeżeli uwzględnimy niepewności pomiarowe.



Wskazówka:

W fachowych badaniach doświadczalnych, dla prowadzenia precyzyjnych wykresów stosuje się specjalne procedury komputerowe – może byś spróbował zastosować jedną z nich na lekcji informatyki?



Rysunek 1.59: Doświadczalny wykres zależności drogi od kwadratu czasu dla kulki staczającej się po równi pochyłej

Przeprowadzimy teraz **dyskusję niepewności pomiarowych** (najpierw należy zapoznać się z Dodatkiem 1.1. „Ocena dokładności wyników pomiarów” zamieszczonym w e_podręczniku „fizyka XXI, kl.1”).

Liczbowym wynikiem naszego doświadczenia ma być przyspieszenie kulki. Wynik pomiaru jest wtedy pełny, gdy podajemy niepewność, z jaką go wyznaczono. Nasz końcowy wynik nie powstaje przez bezpośredni pomiar, lecz przez złożenie pomiarów bezpośrednich. Wobec tego jest on obciążony niepewnościami tych pomiarów. Zatem, podobnie jak to czyniliśmy w przypadku doświadczenia „Galileusz”, ocenimy najpierw niepewności pomiarów bezpośrednich.

a) Niepewności pomiarów bezpośrednich

Mamy dwie wielkości mierzone bezpośrednio – drogę s i czas t . Przy ocenie niepewności pomiaru drogi s należy wziąć pod uwagę to, że kreski, którymi zaznaczaliśmy odcinki drogi, mają pewną grubość (kreda), i że stosowaliśmy podziałkę centymetrową, która ma ograniczoną dokładność. Przyjmijmy więc, że maksymalna niepewność, z jaką mierzyliśmy drogę, wynosi

$$(\text{wzór 110}) \Delta s = 0,5 \text{ cm}$$

Czas mierzyliśmy za pomocą stopera, którego dokładność jest wyznaczona przez wartość najmniejszej działki (w podanym przykładzie 0,1 s). Powinniśmy dodać jeszcze czas reakcji przy włączaniu i wyłączaniu stopera w przybliżeniu 0,1 s. Przyjmijmy więc, że maksymalna niepewność pomiaru czasu wynosi

$$(\text{wzór 111}) \Delta t = 0,3 \text{ s}$$

b) Niepewność pomiaru wielkości złożonej

Przekształcając wzór (wzór 108 na stronie 62), otrzymujemy

$$(\text{wzór 112}) a = \frac{2s}{t^2}$$

więc przyspieszenie a , będące wynikiem końcowym pomiaru, ma postać iloczynową. Zatem możemy stosować taką samą regułę jak w przypadku doświadczenia „Galileusz”. Niepewność względna wyniku końcowego jest sumą niepewności względnych pomiarów bezpośrednich. Niepewności pomiarowe mogą być dodatnie lub ujemne i mogą redukować się nawzajem, jednak przy ocenie niepewności wyniku końcowego uwzględnimy sytuację najbardziej niekorzystną, kiedy niepewności się sumują. Dlatego sumujemy wszystkie niepewności ze znakiem plus, czyli dodajemy ich wartości bezwzględne:

$$(\text{wzór 113}) \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| + 2 \left| \frac{\Delta t}{t} \right|$$

Niepewność względną $\left| \frac{\Delta t}{t} \right|$ podwoiliśmy, ponieważ czas t występuje we wzorze (wzór 112 na stronie 66) na przyspieszenie w drugiej potęgze ($t^2 = t \cdot t$).

Teraz możemy przystąpić do obliczeń szczegółowych. Obliczymy przyspieszenie i niepewność naszego wyniku końcowego. Przede wszystkim poprowadzimy dokładniej linię prostą na wykresie zależności s od t^2 . W tym celu przedstawimy graficznie niepewności Δs i $\Delta (t^2)$. Niepewność Δs oceniliśmy jako równą $\pm 0,5 \text{ cm}$, natomiast niepewność kwadratu czasu $\Delta (t^2)$ musimy potraktować jako niepewność pomiaru złożonego $\frac{|\Delta (t^2)|}{t^2} = 2 \frac{|\Delta t|}{t}$, więc

$$(\text{wzór 114}) |\Delta (t^2)| = 2 |\Delta t| t$$

Przyjeliśmy, że $\Delta t = \pm 0,3 \text{ s}$, więc

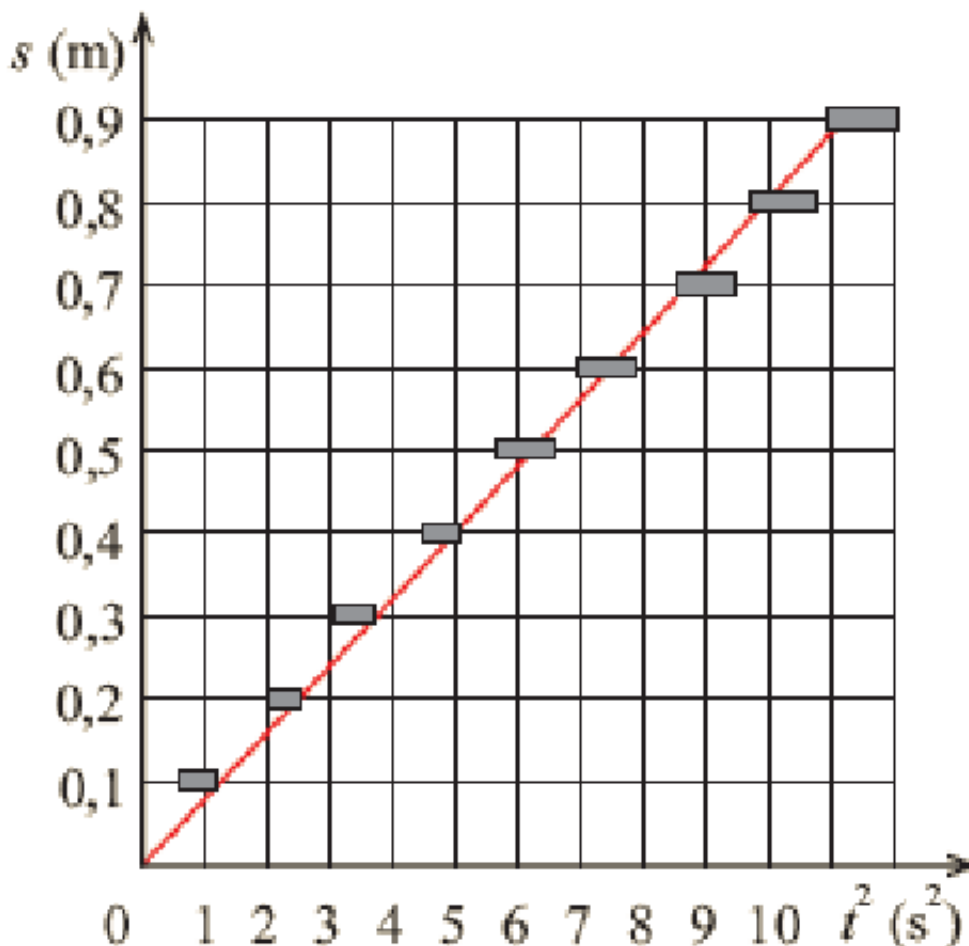
$$(\text{wzór 115}) |\Delta (t^2)| = 0,6t (s^2)$$

Dla każdego czasu t obliczamy niepewność $|(t^2)|$. Obliczone wartości oraz wartości pozostałych niepewności wpisujemy do tabelki niepewności pomiarów (przykładowe dane w *Rysunek 1.60: Tabelka niepewności pomiarów (dane przykładowe)* na stronie 66).

Droga s (m)	s (m)	Czas t_{sr} (s)	t (s)	$2 (t^2) = 2t_{\text{sr}} t$ (s²)
0,1	0,005	0,9	0,2	0,8
0,2		1,5		2,2
0,3		1,8		3,2
0,4		2,2		4,8
0,5		2,5		6,2
0,6		2,7		7,3
0,7		3,0		9,0
0,8		3,2		10,2
0,9		3,4		11,6

Rysunek 1.60: Tabelka niepewności pomiarów (dane przykładowe)

Każdy punkt doświadczalny na wykresie otoczmy tak zwanym prostokątem niepewności pomiarowych (*Rysunek 1.61: Niepewności pomiarowe* na stronie 67) informującym nas o maksymalnej niepewności przy ustalaniu położenia punktu. Prostokąt niepewności ma podstawę równą $2|\Delta t^2|$, różną dla różnych punktów, i wysokość $2|\Delta s| = 1\text{ cm}$, jednakową dla wszystkich punktów.



Graficzne przedstawienie niepewności pomiarowych na wykresie zależności s od t^2 . Linia prosta obrazująca rzeczywisty ruch kulki powinna przechodzić przez co najmniej 70% prostokątów niepewności pomiarowych

Rysunek 1.61: Niepewności pomiarowe

Teraz możemy śmiało poprowadzić prostą w pobliżu punktów doświadczalnych; nie popełnimy pomyłki, jeżeli prosta będzie przechodzić przez większość (powyżej 70%) prostokątów niepewności, jak na wykresie – *Rysunek 1.61: Niepewności pomiarowe* na stronie 67. Oto sposób na możliwie najdokładniejsze poprowadzenie linii na wykresie doświadczalnym.

Teraz wyznaczmy przyspieszenie kulki a . Zgodnie ze wzorem (*wzór 100* na stronie 56), tangens kąta nachylenia prostej do osi t^2 (współczynnik kierunkowy prostej) jest liczbowo równy połowie przyspieszenia kulki:

$$(\text{wzór 116}) \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2} \quad (\text{liczbowo}) \quad 11,4\text{s}^2$$

Aby obliczyć wartość tangensa, możemy wziąć z wykresu rzędną i odcięta dowolnego punktu na prostej; najlepiej obrać punkt na końcu prostej. Weźmy zatem punkt o rzędnej równej 0,9 m. Wtedy odcięta wyniesie 11,4s² (patrz

wykres na rysunku *Rysunek 1.59: Doświadczalny wykres zależności drogi od kwadratu czasu dla kulki staczającej się po równi pochyłej* na stronie 65) i liczbowo

$$(\text{wzór 117}) a = 2 \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot \frac{0,9}{11,4} = 0,158$$

Jest to liczba mianowana, zatem przyspieszenie kulki

$$(\text{wzór 118}) a = 0,158 \text{ m/s}^2$$

Jednakże nie jest to jeszcze pełny wynik końcowy naszego doświadczenia, ponieważ nie podaliśmy niepewności wyznaczonej wartości przyspieszenia Δa . Aby ją wyznaczyć, skorzystamy ze wzoru (*wzór 113* na stronie 66) na niepewność względną (oznaczymy ją przez ε). Otrzymamy

$$(\text{wzór 119}) \varepsilon = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| + 2 \left| \frac{\Delta t}{t} \right|$$

Czyli

$$(\text{wzór 120}) \varepsilon = \frac{0,005 \text{ m}}{0,9 \text{ m}} + 2 \cdot \frac{0,3 \text{ s}}{3,4 \text{ s}} = 0,18$$

Zatem niepewność względna pomiaru przyspieszenia jest równa $\varepsilon = 0,18$, czyli stanowi 18% obliczonej wartości a .

Niepewność bezwzględna wynosi $\Delta a = \varepsilon a$, więc

$$(\text{wzór 121}) \Delta a = 0,18 \cdot 0,158 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,028 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Dopiero teraz możemy napisać pełny wynik końcowy pomiaru. Wyznaczona wartość przyspieszenia kulki, zgodnie z powyższym rozwiązaniem, wynosi

$$(\text{wzór 122}) a = (0,158 \pm 0,028) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Analizę wyniku tego doświadczenia można poszerzyć, korzystając z teorii ruchu bryły sztywnej (obracającej się kulki na równi pochyłej) – zob. *Doświadczenie „Akceleracja BIS”* na stronie 205.

Doświadczenie wirtualne - akceleracja

Rysunek 1.62: Animacja

1. Uruchom animację kliknięciem myszy
Stoper uruchamia się sam w momencie, gdy chłopiec upuszcza piłkę na równię pochyłą.
2. Obserwuj ruch piłki i zatrzymuj kolejno animację w momencie, gdy piłka mija kolejny znacznik.
3. Zanotuj kolejne odczyty stopera i wpisz do tabelki pomiarów w sprawozdaniu.
przyjmij, że cała droga kulki wzdłuż równi wynosi $s = 1,8 \text{ m}$. Moment zastopowania animacji zależy od czynników przypadkowych (m.in. - twój refleks). Dlatego, tak jak w „realu” pomiary są obciążone niepewnościami, które powinieneś ocenić i wykorzystać w tzw. „Dyskusji błędów”. Kieruj się wskazówkami zawartymi w ww. opisie doświadczenia realnego.

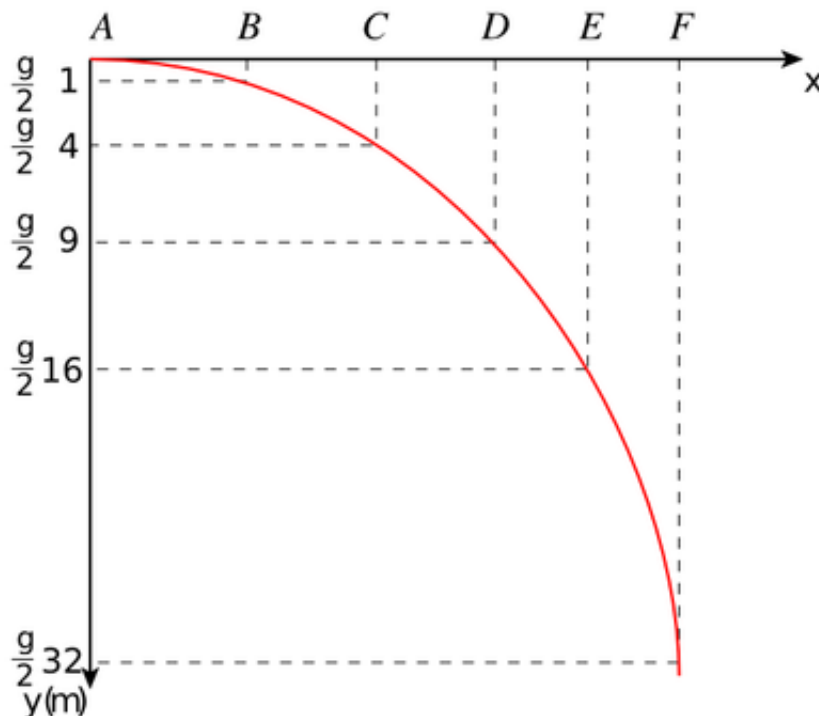
Pytania i problemy

1. Co nazywamy prostokątem niepewności pomiarowych?
2. Wyjaśnij, dlaczego wyniki pomiarów przedstawia się na wykresach za pomocą prostokątów niepewności pomiarowych.
3. Podaj zasady, jakie należy stosować przy prowadzeniu krzywej na wykresie z zaznaczonymi punktami doświadczalnymi.

1.14 Rzut poziomy

Załóżmy, że ciało znajdującemu się początkowo na pewnej wysokości H nad ziemią nadajemy prędkość początkową \vec{v}_0 skierowaną poziomo. Gdyby na ciało nie działała siła ciężkości, to poruszałoby się ono cały czas poziomo

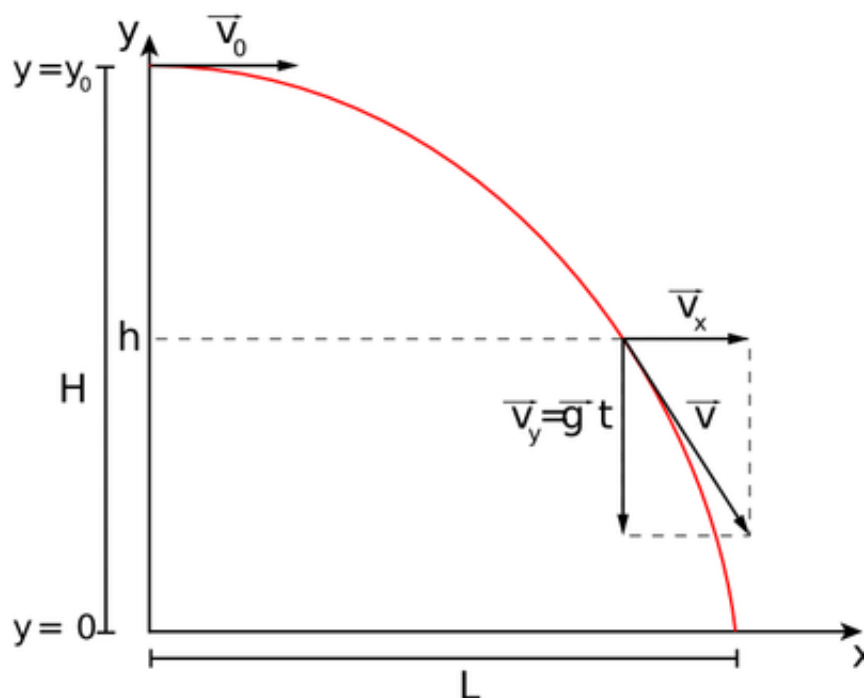
ruchem jednostajnym z prędkością \vec{v}_0 . Siła ciężkości powoduje, że ciało jednocześnie wykonuje ruch jednostajnie przyspieszony w dół. W rezultacie złożenia tych dwóch ruchów ciało porusza się po torze zakrzywionym – po paraboli. Punkty A, B, C, D i E na *Rysunek 1.63: Rzut poziomy. Krzywa toru jest parabolą* na stronie 69 oznaczają miejsca, do których ciało by dotarło po czasie 1 s, 2 s, 3 s, 4 s i 5 s, gdyby nie działała siła ciężkości. Ciało jednak swobodnie spada, więc po pierwszej sekundzie znajdzie się nie w punkcie B , ale niżej o $\Delta h_B = \frac{g}{2} \cdot (1 \text{ s})^2$, czyli w punkcie B' . Po drugiej sekundzie znajdzie się w punkcie C' , czyli o $\Delta h_C = \frac{g}{2} \cdot (2 \text{ s})^2$ metra poniżej punktu C itd. Jeżeli, na przykład, bombowiec leci poziomo ruchem jednostajnym wzdłuż linii $ABC\dots$ i w punkcie A otworzy luk, spuszczając swobodnie bombę, to obserwator na ziemi widzi, że bomba porusza się po paraboli $AB'C'D'E'$. Natomiast pilot widzi ją spadającą pionowo (w rzeczywistości opór powietrza będzie nieco opóźniał ruch bomby, co spowoduje pewne odkształcenie toru).



Rysunek 1.63: Rzut poziomy. Krzywa toru jest parabolą

Prędkość ciała w każdym punkcie toru jest wypadkową złożenia prędkości \vec{v}_0 stałej w kierunku poziomym ($\vec{v}_x = \vec{v}_0$) i prędkości pionowej $\vec{v}_y = \vec{g}t$, której wartość wzrasta w miarę upływu czasu. W rezultacie prędkość wypadkowa jest styczna do toru (*Rysunek 1.64: Rzut poziomy* na stronie 70).

Wektor prędkości wypadkowej jest styczny do



toru

Rysunek 1.64: Rzut poziomy

Wyprowadzimy teraz *równanie toru*, czyli równanie krzywej, wzdłuż której porusza się ciało w rzucie poziomym. Spójrzmy na [Rysunek 1.64: Rzut poziomy](#) na stronie 70. Ruch ciała składa się z dwóch niezależnych ruchów: w kierunku poziomym x i w kierunku pionowym y . Rozważmy je oddzielnie. Najpierw wyrazimy współrzędną y . Początkowe położenie ciała wynosi $y_0 = H$, przyspieszenie ciała g wystąpi ze znakiem minus, gdyż jest zwrócone przeciwnie do osi y . Zatem

$$(\text{wzór 123}) \quad y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$$

W kierunku osi x mamy ruch jednostajny z prędkością stałą v_0 , więc

$$(\text{wzór 124}) \quad x = v_0 t$$

Te dwa ostatnie równania połączymy w jedno, wyznaczając z równania ([wzór 124](#) na stronie 70) czas t – mamy $t = \frac{x}{v_0}$ – i podstawiając go do równania ([Rysunek 1.63: Rzut poziomy. Krzywa toru jest parabolą](#) na stronie 69). Otrzymujemy wówczas równanie toru

$$(\text{wzór 125}) \quad y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0$$

Jak widzimy, jest to równanie paraboli typu $y = -ax^2 + b$. Współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc ramiona paraboli są skierowane w dół, zgodnie z rzeczywistym kształtem toru. Zwróćmy jeszcze uwagę, że na [wzór 124](#) na stronie 70 pokazano tylko jedno z ramion paraboli. Drugie ramie, dla ujemnych wartości współrzędnej x , nie opisuje rzutu poziomego (np. ruchu spadającej bomby).

Obliczymy teraz *zasięg poziomy rzutu* L . Jest to odległość, liczona w poziomie, na jaką dotrze ciało wyrzucone poziomo z wysokości H . Wzór na zasięg otrzymamy „natychmiast” z równania toru. Wystarczy tylko do równania toru podstawić jako y_0 początkową wysokość H , jako wartość współrzędnej y ciała w momencie upadku wartość 0,

a jako x zasięg rzutu L (patrz [Rysunek 1.63: Rzut poziomy. Krzywa toru jest parabolą](#) na stronie 69). Wówczas mamy

$$(\text{ wzór 126 }) 0 = -\frac{g}{2v_0^2}L^2 + H$$

Po przekształceniu tego równania otrzymujemy wzór na zasięg

$$(\text{ wzór 127 }) L = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Przykład rzutu poziomego

Rysunek 1.65: Animacja

[XLSM PDF](#) Rzut poziomy

[XLSM PDF](#) Rzut ukośny

Pytania i problemy

1. Opisz warunki, w których realizuje się ruch zwany rzutem poziomym.
2. Opisz rzut poziomy za pomocą ruchów składowych.
3. Napisz wzory przedstawiające zależności od czasu współrzędnych (x i y) ciała rzuconego poziomo z prędkością początkową.
4. Udowodnij, że torem ciała rzuconego poziomo jest parabola.
5. Równanie toru ciała rzuconego poziomo z wysokości H ([Rysunek 1.64: Rzut poziomy](#) na stronie 70) ma postać $y = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}$. Posługując się z tym równaniem, wyprowadź wzór na zasięg poziomy rzutu.
6. Wykresem zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest parabola. Dla opisu wyników doświadczenia „Akceleracja” posługiwaliśmy się takim układem współrzędnych, w którym ta zależność była przedstawiona w postaci linii prostej. Czy można znaleźć taki układ współrzędnych, w którym funkcję kwadratową toru ciała rzuconego poziomo można było by przedstawić jako linię prostą?
7. Zbadaj, czy jest możliwy rzut poziomy, w którym zasięg L byłby równy początkowej wysokości H . Przyjmij, że $H \neq 0$.

1.15 Ruch jednostajny po okręgu

Jeżeli ciało w ruchu po okręgu przebywa jednakowe odcinki łuków w jednakowych odstępach czasu, to mówimy, że mamy do czynienia z *ruchem jednostajnym po okręgu*. Przykładami takiego ruchu mogą być: ruch wentyla na wirującym kole roweru, ruch na karuzeli, ruch jakiegoś punktu na kuli ziemskiej, ruch satelity okrążającego Ziemię itd.

Z podstawami opisu ruchu jednostajnego po okręgu zapoznaliśmy się w pierwszej klasie. Przypomnijmy teraz poznane przy tej okazji wielkości fizyczne; poszerzymy także opis o nowe elementy. Jedną z poznanych wielkości jest prędkość v .

Wartość prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu jest stała. Może być ona określona jako stosunek łuku Δs , jaki zakreśli poruszający się punkt, do czasu Δt , w którym ten łuk został zakreślony

$$(\text{ wzór 128 }) v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

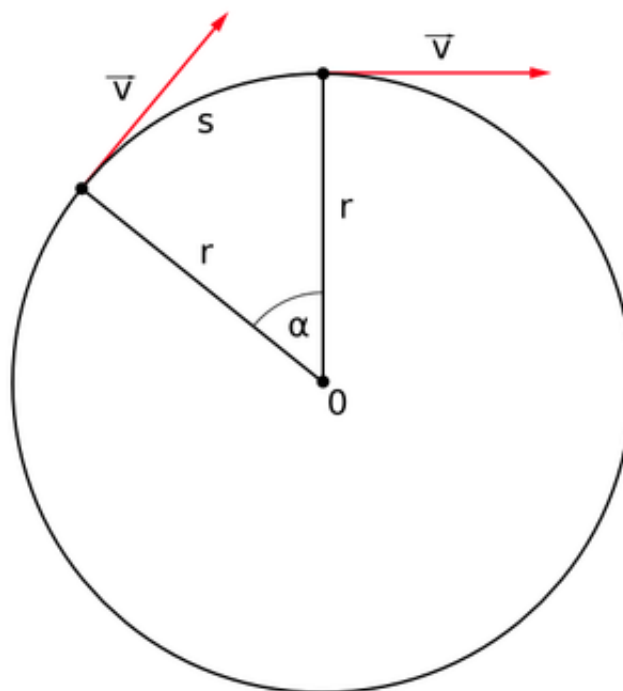
Wektor prędkości jest styczny do okręgu ([Rysunek 1.67: Wektor prędkości ciała poruszającego się po okręgu jest styczny do okręgu](#) na stronie 72), ponieważ prędkość jest styczna do toru w każdym ruchu krzywoliniowym, co omówiliśmy już uprzednio.

Prędkość określoną wzorem (wzór 128 na stronie 71) nazywamy *prędkością liniową* dla odróżnienia od *prędkości kątowej*. Prędkość kątową w ruchu jednostajnym po okręgu definiujemy jako stosunek kąta $\Delta \alpha$ zakreślonego przez promień okręgu, do czasu Δt , w którym kąt ten został zakreślony

$$(\text{wzór 129}) \omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

Kinematyka - ruch jednostajny po okręgu

Rysunek 1.66: Animacja



Rysunek 1.67: Wektor prędkości ciała poruszającego się po okręgu jest styczny do okręgu

Jednostką prędkości kątowej jest radian na sekundę (rad/s) albo po prostu odwrotność sekundy (s⁻¹). Ponieważ miarą kąta (w radianach) jest stosunek łuku s, na którym jest oparty kąt, do promienia r:

$$(\text{wzór 130}) \Delta \alpha = \frac{\Delta s}{r}$$

więc kąt mierzy się w m/m, czyli jest bezwymiarowy – radian jest jednostką „ułamną”. Podstawiając wzór (wzór 130 na stronie 72) do (wzór 129 na stronie 72), otrzymamy

$$(\text{wzór 131}) \omega = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r}$$

Uwzględniając, że $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, uzyskamy związek między prędkością kątową a prędkością liniową:

$$(\text{wzór 132}) \omega = \frac{v}{r} \quad \text{lub} \quad v = \omega r$$

Inną wielkością charakteryzującą ruch po okręgu jest okres obiegu T , który definiujemy jako czas, w którym punkt materialny wykona pełny obieg. Zarówno prędkość liniowa, jak i prędkość kątowa mogą być wyrażone za pomocą okresu obiegu. Prędkość liniową można przedstawić jako stosunek obwodu koła $2\pi r$ do okresu T

$$(\text{wzór 133}) v = \frac{2\pi r}{T}$$

Prędkość kątową można przedstawić jako stosunek pełnego kąta 2π do okresu T :

$$(\text{ wzór 134 }) \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Następna wielkość to *częstotliwość* ν (wielkość ta często bywa oznaczana symbolem f); definiujemy ją jako liczbę obiegów, którą punkt materialny wykonuje w ciągu jednostki czasu. Częstotliwość jest odwrotnością okresu obiegu. Fakt ten łatwo zrozumieć na przykładzie: jeśli $\nu = 3 \text{ s}^{-1}$ to ciało wykonuje 3 pełne obiegi w ciągu jednej sekundy. Wobec tego jeden obieg trwa $1/3$ sekundy i to jest właśnie okres obiegu. Uogólniając ten przykład otrzymujemy związek

$$(\text{ wzór 135 }) \nu = \frac{1}{T}$$

Jednostką częstotliwości jest odwrotność sekundy (s^{-1}). Jednostka ta ma swoją nazwę: 1 Hz. Łącząc wzory (*wzór 134* na stronie 73) i (*wzór 135* na stronie 73), widzimy, że

$$(\text{ wzór 136 }) \omega = 2\pi\nu$$

Bardzo ważnym pojęciem w ruchu po okręgu jest *przyspieszenie dośrodkowe* (oznaczamy je a_r). Mimo że w ruchu jednostajnym po okręgu wartość prędkości punktu materialnego nie zmienia się, jednak prędkość jako wektor wciąż zmienia kierunek (w każdym miejscu jest styczny do okręgu).

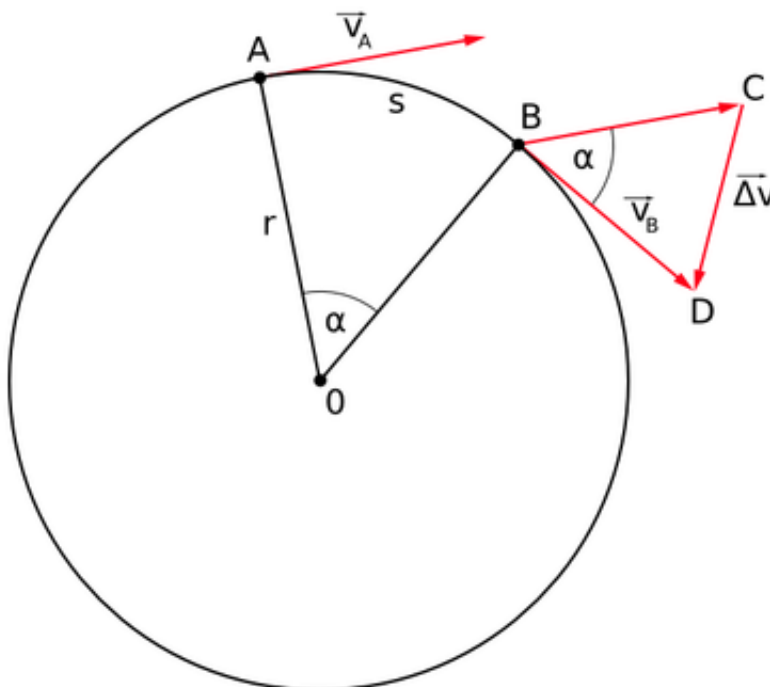
Wyobraźmy sobie, że punkt materialny przechodzi bardzo mały odcinek łuku s od punktu A do B w czasie t (*Rysunek 1.69: Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu* na stronie 74). Przenieśmy wektor prędkości z punktu A do punktu B . Wektor prędkości w punkcie B możemy traktować jako wynik dodania do wektora \vec{v}_A przyrostu wektora $\Delta \vec{v}$. Bardzo mały łuk s możemy uważać za odcinek prostej. Wtedy trójkąt równoramienny OAB jest podobny do trójkąta BCD i możemy napisać proporcję

$$(\text{ wzór 137 }) \frac{s}{r} = \frac{\Delta v}{v_A}$$

Kinematyka - przyspieszenie dośrodkowe

Rysunek 1.68: Animacja

W ruchu jednostajnym po okręgu przyspieszenie dośrodkowe zmienia kierunek wektora prędkości, ale nie zmienia jego



wartości

Rysunek 1.69: Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu

Ponieważ założyliśmy, że wartość wektora prędkości nie zmienia się, więc $v_A = v$ i po podzieleniu równania stronami przez t otrzymamy:

$$(\text{wzór 138}) \frac{s}{rt} = \frac{\Delta v}{vt}$$

W równaniu tym występuje $\frac{s}{t} = v$ oraz przyspieszenie $a_r = \frac{\Delta v}{t}$. Napiszemy więc

$$(\text{wzór 139}) \frac{v}{r} = \frac{a_r}{v}$$

Stąd otrzymujemy wzór na wartość tego przyspieszenia

$$(\text{wzór 140}) a_r = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie to nazywa się przyspieszeniem dośrodkowym, gdyż jego kierunek pokrywa się z kierunkiem promienia okręgu i jest ono zwrócone do środka tego okręgu. Widoczne to jest na [Rysunek 1.69: Przyspieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu](#) na stronie 74. Wektor $\Delta \vec{v}$ ma kierunek zbliżony do promienia okręgu. W granicy, dla czasu t zmierzającego do zera, kierunek ten pokryje się z kierunkiem promienia. Przyspieszenie \vec{a}_r ma taki sam kierunek jak $\Delta \vec{v}$, czyli ma kierunek zgodny z promieniem i zwrot do środka okręgu.

Przyspieszenie dośrodkowe możemy wyrazić również za pomocą prędkości kątowej, którą wprowadzimy do wzoru ([wzór 140](#) na stronie 74), pamiętając, że $v = r\omega$. Otrzymamy

$$(\text{wzór 141}) a_r = \omega^2 r$$

Jeżeli skorzystamy ze wzoru $\omega = 2\pi\nu$, otrzymamy

$$(\text{wzór 142}) a_r = 4\pi^2\nu^2 r$$

Czasami wygodniej jest stosować okres $T = \frac{1}{\nu}$, zatem

$$(\text{ wzór 143 }) a_r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

Przypomnijmy sobie (patrz [1.12 Wektor przyspieszenia](#) na stronie 56), że przyspieszenie jest wektorem, który w przypadku ruchu krzywoliniowego nie jest styczny do toru. W szczególności, w ruchu jednostajnym po okręgu wektor przyspieszenia jest prostopadły do toru. Wtedy przyspieszenie jest równe przyspieszeniu dośrodkowemu, a składowa przyspieszenia styczna do okręgu jest równa zero ($a_s = 0$). Zgadza się to z definicją przyspieszenia ([wzór 17](#) na stronie 17), ponieważ wartość prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu jest stała, czyli jej przyrost wynosi zero ($\Delta v = 0$), co oznacza, że przyspieszenie styczne musi być także równe zero, więc $a_s = 0$.

W przypadku gdy mamy do czynienia z ruchem niejednostajnym po okręgu, przyrost wartości prędkości nie jest równy zero ($\Delta v \neq 0$), więc występuje niezerowe przyspieszenie styczne do okręgu, które jest równe przyspieszeniu zdefiniowanemu za pomocą wzoru ([wzór 17](#) na stronie 17). Ponieważ występuje tu również przyspieszenie dośrodkowe a_r , widzimy, że w przypadku ruchu niejednostajnego po okręgu wypadkowe przyspieszenie jest skierowane pod pewnym kątem do stycznej do toru, różnym od 90° . Składowa styczna przyspieszenia opisuje zmianę wartości prędkości, zaś składowa normalna (czyli przyspieszenie dośrodkowe) wynika ze zmiany kierunku wektora prędkości.

Ⓡ Zamąpiętać:

Wybrane wzory opisujące ruch jednostajny po okręgu

Związek między prędkością liniową v a kątową:

$$(\text{ wzór 144 }) v = \omega r$$

gdzie r – promień okręgu

Związek między okresem T i częstotliwością ν :

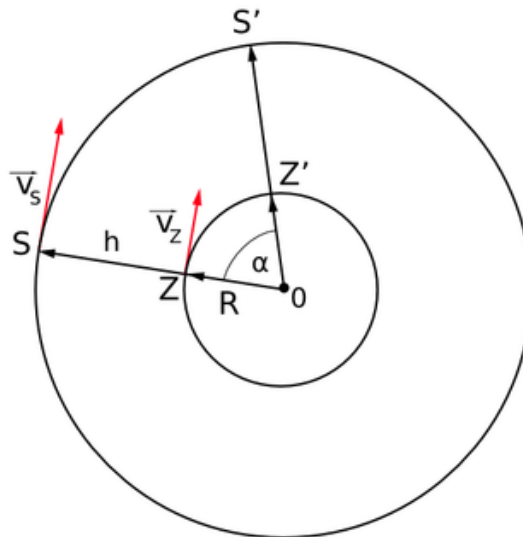
$$(\text{ wzór 145 }) \nu = \frac{1}{T}$$

Przyspieszenie dośrodkowe:

$$(\text{ wzór 146 }) a_r = \frac{v^2}{r}$$

Przykład 12

Telekomunikacyjny satelita stacjonarny znajduje się stale nad jednym punktem równika Ziemi na wysokości $h = 35\,630$ km. Promień Ziemi wynosi $R = 6\,370$ km. Z jaką prędkością liniową porusza się satelita?



Jest ona taka sama jak prędkość Ziemi, bo Ziemia obróci się o ten sam kąt, co satelita w tym samym czasie

Rysunek 1.70: Prędkość kątowna satelity stacjonarnego

Odpowiedź: Satelita S krążący stale nad jednym punktem równika (Z na [Rysunek 1.70: Prędkość kątowna satelity stacjonarnego](#) na stronie 76) musi mieć prędkość kątowną równą prędkości kątownej tego punktu. Zatem prędkość liniowa satelity, zgodnie ze wzorem ([wzór 133](#) na stronie 72), jest równa

$$\text{(wzór 147) } v_s = \frac{2\pi(R+r)}{T}$$

czyli

$$\text{(wzór 148) } v_s = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot (6370 + 35630) \text{ km}}{24} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10990 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Jak widzimy, jest to bardzo duża prędkość w ludzkiej skali.

Zapytajmy przy okazji, z jaką prędkością porusza się punkt Z , a więc i wszystkie przedmioty spoczywające na równiku Ziemi.

$$\text{(wzór 149) } v_z = \frac{2\pi R}{T}$$

czyli

$$\text{(wzór 150) } v_z = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6370 \text{ km}}{24} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1667 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Widzimy, że jest to też duża prędkość (odpowiadająca prędkości szybkich samolotów odrzutowych), ale jest ona wielokrotnie mniejsza od prędkości satelity stacjonarnego.

Przykład 13

Rowerzysta jedzie ze stałą prędkością $v = 6 \text{ m/s}$. Średnica koła wynosi $2R = 70 \text{ cm}$.

a). Oblicz częstotliwość ν obrotów kół roweru.

b). Narysuj tor zakreślany przez punkt zaznaczony kredą na boku bieżnika opony, gdy jest on obserwowany z chodnika.

c). Oblicz prędkość kapturka wentyla względem ziemi w jego najwyższym położeniu. Odległość kapturka od osi koła wynosi $r = 28 \text{ cm}$.

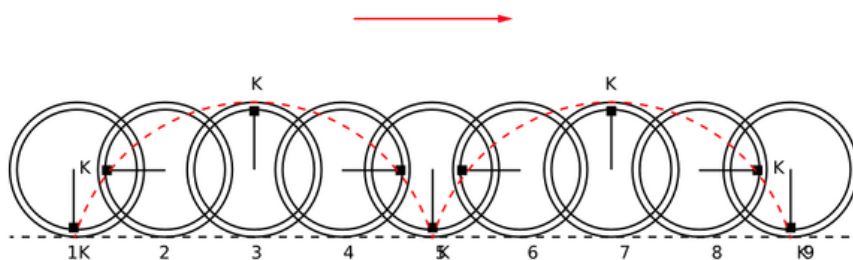
Odpowiedź: Ad a) Rower porusza się z prędkością \vec{v} względem ziemi, to znaczy, że również i osie jego kół mają tę prędkość. Przyjmujemy, że koła toczą się bez poślizgu – to znaczy, że punkty styku kół z ziemią mają względem ziemi chwilowe prędkości równe zero. Natomiast w układzie odniesienia związanym z rowerzystą osie kół, oczywiście, nie poruszają się, a całe otoczenie wraz z ziemią porusza się do tyłu, z prędkością $-\vec{v}$. W jego układzie odniesienia wszystkie punkty na obwodzie koła obracają się z jednakową prędkością liniową równą $v = 2\pi Rv$. Stąd otrzymujemy częstotliwość obrotu kół

$$(\text{ wzór 151 }) v = \frac{v}{2\pi R}$$

czyli

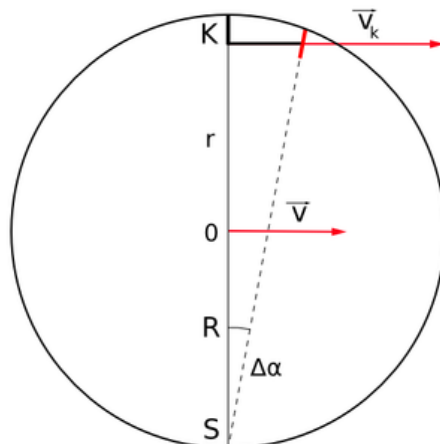
$$(\text{ wzór 152 }) v = \frac{6}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,35} \frac{1}{s} = 2,73 \frac{1}{s}$$

Ad b) Na *Rysunek 1.71: Punkt K na oponie roweru zatacza cykloidę* na stronie 77 przedstawiono kolejne pozycje koła z zaznaczonym punktem K w jednakowych odstępach czasu. Łącząc poszczególne pozycje punktu otrzymujemy krzywą jego toru. Krzywa ta nazywa się *cykloidą* – jest to krzywa znana w geometrii; zakreśla ją ustalony punkt okręgu toczącego po płaskiej powierzchni.



Rysunek 1.71: Punkt K na oponie roweru zatacza cykloidę

Ad c) W pewnej chwili wentyl koła znajduje się w najwyższym położeniu. Dla obserwatora zewnętrznego chwilową osią obrotu jest wtedy linia przechodząca przez punkt leżący na styku koła z ziemią (punkt S na *Rysunek 1.72: Pionowa linia po bardzo krótkim czasie odchyli się o kąt $\Delta \alpha$* na stronie 78).



Rysunek 1.72: Pionowa linia po bardzo krótkim czasie odchyli się o kąt $\Delta\alpha$

Na linii pionowej znajdują się następujące trzy punkty: K – kapturek wentyla, O – oś koła i wspomniany punkt S . Oś koła, czyli punkt O , ma prędkość liniową v , równą prędkości roweru, zaś punkt K – chwilową prędkość liniową v_K . Możemy przyjąć, że po bardzo krótkim czasie t linia ta odchyli się od pionu o niewielki kąt $\Delta\alpha$. Wszystkie punkty na tej linii mają wspólną prędkość kątową $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$. Korzystając ze wzoru (wzór 132 na stronie 72), otrzymamy

$$(\text{wzór 153}) \quad \omega = \frac{v_K}{R+r}$$

oraz

$$(\text{wzór 154}) \quad \omega = \frac{v}{R}$$

Przyrównując prawe strony tych równości, otrzymujemy, że prędkość liniowa punktu K wynosi

$$(\text{wzór 155}) \quad v_K = \frac{R+r}{R} v$$

Stąd

$$(\text{wzór 156}) \quad v_K = \frac{0,35+0,28}{0,35} \cdot 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Zatem prędkość chwilowa kapturek wentyla w jego najwyższym położeniu wynosi 10,8 m/s.

Warto dodać, że – z punktu widzenia obserwatora z zewnątrz – ruch kapturek możemy potraktować jako złożenie dwóch ruchów: ruchu obrotowego względem osi koła i ruchu postępowego roweru. Kapturek bowiem wykonuje jednocześnie te dwa ruchy. Prędkość wypadkowa w każdym momencie będzie sumą wektorową prędkości tych dwóch ruchów. Będzie ona styczna do cykloidy.

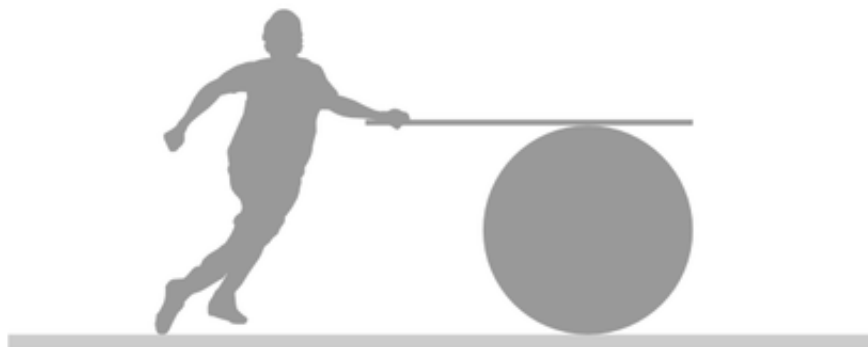
Z kolei punkt styku kół z ziemią ma prędkość w ruchu postępowym skierowaną do przodu oraz w ruchu obrotowym prędkość skierowaną do tyłu. Aby punkt ten nie ślizgał się (był w spoczynku) te dwie prędkości muszą być sobie równe co do wartości - wtedy ich wypadkowa prędkość wynosi zero.

Kinematyka - cykloida

Rysunek 1.73: Animacja

Pytania i problemy

1. Zdefiniuj prędkość kątową w ruchu po okręgu. Oblicz wartość prędkości kątowej małej wskazówki zegara.
2. Podaj wzór wiążący prędkość liniową z prędkością kątową ciała w ruchu jednostajnym po okręgu.
3. Podaj definicję częstotliwości ν . W jakich jednostkach wyrażamy częstotliwość?
4. Podaj definicję okresu w ruchu po okręgu. W jakich jednostkach wyrażamy okres obiegu? Podaj związek okresu z częstotliwością.
5. Opisz wektor przyspieszenia dośrodkowego w ruchu jednostajnym po okręgu.
6. Wyjaśnij, dlaczego w ruchu jednostajnym po okręgu występuje przyspieszenie dośrodkowe.
7. Jaki kierunek i jaki zwrot ma przyspieszenie dośrodkowe?
8. Opisz kształt toru zakreślonego przez punkt leżący na obwodzie koła toczącego się ze stałą prędkością po płaskiej powierzchni – z punktu widzenia obserwatora zewnętrznego.
9. Chłopiec obraca beczkę w kształcie walca, opierając na niej poziomo płaską listwę o długości $l = 1,5\text{ m}$. Zbliża się on przy tym do beczki (*Rysunek 1.74: Chłopiec obraca beczkę za pomocą płaskiej listwy* na stronie 79). Jaką drogę s musi przebyć chłopiec, aby dotknąć beczkę? **Wskazówka:** Zastanów się z jaką prędkością liniową względem ziemi porusza się punkt styczności z listwą, a z jaką oś obrotu beczki. Jeżeli trudno Ci to sobie wyobrazić, to weź linijkę lub okrągły ołówek i zrób eksperyment.



Rysunek 1.74: Chłopiec obraca beczkę za pomocą płaskiej listwy

10. Uczniowie po przeczytaniu rozwiązania przykładu *Przykład 13* na stronie 76c odczuwali pewien niedosyt poznawczy. Nie bardzo zrozumieli bowiem, o co chodzi z „chwilową osią obrotu widzianą przez zewnętrznego obserwatora”. Jednak po przeczytaniu komentarza pod rozwiązaniem wpadli na inny pomysł: by prędkość kapturka względem ziemi \vec{v}_K obliczyć jako złożenie jego prędkości liniowej w ruchu po okręgu względem osi koła \vec{v}_O i prędkości osi koła \vec{v} względem ziemi. Uzupełnij rozumowanie uczniów i oblicz wartość prędkości v_K korzystając z ich pomysłu. Gdy uzyskasz ten sam wynik, co w rozwiązaniu przykładu *Przykład 13* na stronie 76c, to przekonasz się, że pojęcie „chwilowej osi obrotu” ma sens.

Rozdział

2

Dynamika

Podrozdziały:

- [2.1 Pierwsza zasada dynamiki Newtona](#)
- [2.2 Druga zasada dynamiki Newtona](#)
- [2.3 Doświadczenie „Dyna”](#)
- [2.4 Trzecia zasada dynamiki Newtona](#)
- [2.5 Pęd i popęd](#)
- [2.6 Zasada zachowania pędu](#)
- [2.7 Siły bezwładności, układy nieinercjalne](#)
- [2.8 Doświadczenie „Inercja”](#)
- [2.9 Siły w ruchu po okręgu](#)
- [2.10 Siła tarcia](#)
- [2.11 Opory ruchu ciała w płynie - cieczy lub gazie](#)

Rysunek 2.1: Wirtualny nauczyciel

Ucząc się dynamiki, uświadomisz sobie zdumiewającą rzecz, że wiele zjawisk w otaczającym nas świecie można przewidzieć z bardzo dużą dokładnością.

Rozpatrując zagadnienie ruchu w kinematyce, zapewne zauważyłeś, że znając aktualne położenie, prędkość i przyspieszenie ciała, można było wyznaczyć jego współrzędne w dowolnej chwili w przyszłości i w przeszłości. Z kolei, by znać przyspieszenie, trzeba znać siły działające na ciało. Zatem, jak widzisz, niezbędna jest znajomość sił, które są przyczyną przyspieszenia ciała.

Zagadnienia omawiane w tym rozdziale wzbogacą twoją wiedzę o ruchu przez zbadanie przyczyn, czyli sił wywołujących przyspieszenie ciała. Rozdziałowi temu nadałmy tytuł – *dynamika*, ponieważ tak nazywa się nauka o siłach.



Rysunek 2.2: Zagadnienia omawiane w tym rozdziale wzbogacą twoją wiedzę o ruchu przez zbadanie przyczyn, czyli sił wywołujących przyspieszenie ciała

2.1 Pierwsza zasada dynamiki Newtona

Arystoteles – starożytny wielki myśliciel – uznawał doświadczenie i obserwację za podstawę nauki. Obserwując poruszające się ciała, wyciągnął wniosek, że aby utrzymać ciało w ruchu jednostajnym prostoliniowym, konieczna jest siła. Obserwacje wskazywały bowiem na to, że dowolne ciało, któremu nadano prędkość, zatrzymuje się po pewnym czasie, jeżeli jego ruch nie jest podtrzymywany działającą siłą. Ten pogląd został przyjęty przez wszystkich naukowców i przetrwał około dwa tysiąclecia, aż do XVII wieku. Jednakże obserwacje Arystotelesa nie były pełne, gdyż nie dostrzegał przeszkód, jakie wszelkiemu ruchowi stawia ośrodek – nie dostrzegał między innymi oporu powietrza.



Rysunek 2.3: Arystoteles - wielki starożytny myśliciel

Zasadniczą przyczyną takiego poglądu było przekonanie, że Ziemia jest środkiem Wszechświata i znajduje się w absolutnym spoczynku. Obserwacje ruchu ciał względem Ziemi wskazywały (jak już wspomniano), że ciała, którym nadano prędkość, po pewnym czasie zatrzymują się. Dlatego przyjęto, że naturalnym stanem ciał jest spoczynek. Przyjmowano na przykład, że w przypadku ruchu strzały powietrze popycha ją i podtrzymuje jej ruch.

Dopiero w XVII wieku, dzięki pracom Kopernika, Galileusza i innych fizyków, obalono przekonanie o bezwzględny spoczynku Ziemi. Okazało się, że Ziemia jest tylko jedną z planet krążących wokół Słońca. To był pierwszy poważny wyłom w dotychczasowym sposobie myślenia. Stąd wynikał wniosek nie do podważenia,

że planety (jak i inne ciała) mogą poruszać się bez konieczności popychania ich przez inne ciała. Zupełnie nieprawdopodobna była możliwość przyjęcia, że Ziemię i inne planety coś popychało przez miliardy lat! Jednakże nie wszystko od razu było jasne. Należało wyjaśnić, na przykład, dlaczego – podskakując pionowo i odrywając się od Ziemi – spadamy na to samo miejsce na powierzchni Ziemi.

Prawidłowe rozwiązanie problemu ruchu podał Galileusz. Jako pierwszy, na początku XVII wieku, wskazał on dwie zasadnicze kwestie. Po pierwsze uznał, że Ziemia nie stanowi wyróżnionego, bezwzględnie spoczywającego układu odniesienia. Wprowadził *zasadę względności ruchów* postulując, że z każdym obiektem można związać układ odniesienia i że opisy tego samego ruchu w każdym układzie są równoważne. Ten postulat został doprecyzowany pół wieku później przez Newtona, który wprowadził rozróżnienie pomiędzy układami odniesienia inercyjnymi i nieinercyjnymi. O tym rozróżnieniu wspomnimy nieco później.

Po drugie, Galileusz zrozumiał, że jeżeli usuniemy przeszkody ruchu, to zniknie potrzeba podtrzymywania ruchu przez jakąkolwiek siłę. Ruch jednostajny prostoliniowy będzie się odbywać sam przez się, bez żadnej pomocy z zewnątrz.

Rozważmy, co się będzie działo z ruchem ciała, gdy usuniemy oddziaływania z wszystkimi innymi ciałami. Weźmy przykładowo pewien wózek toczący się po piasku. Wózek wkrótce się zatrzyma. Jednakże, jeżeli wózek ustawimy na gładkim podłożu, np. na szynach, to jego ruch będzie trwał zdecydowanie dłużej. Jeżeli jeszcze zmniejszymy tarcie, np. przez posmarowanie osi kół, to wózek będzie się poruszał znacznie dłużej. Rozumowanie nasze możemy aproksymować do przypadku, gdy usuniemy wszystkie opory ruchu. Wtedy, oczywiście, wózek będzie się poruszał dowolnie długo ruchem jednostajnym *bezwładnym*. W ten właśnie sposób Galileusz doszedł do swojej idei bezwładnego ruchu ciał.

Izaak Newton – geniusz przełomu XVII i XVIII stulecia – przejął i rozwinął ideę Galileusza. Zagadnienie ruchu ciał ujął w swoim *prawie bezwładności* (lub *inercji*) jako *I zasadę dynamiki*.

Ⓡ **Zamapiętać:**

I zasada dynamiki, czyli zasada bezwładności

Każde ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dopóki działanie innych ciał nie zmusi go do zmiany tego stanu.

W świetle prawa bezwładności staje się jasne, dlaczego – skacząc w górę i odrywając się od Ziemi – spadamy na to samo miejsce. Mamy przecież tę samą prędkość co podłoże pod stopami. Ponieważ w kierunku poziomym nie działa żadna siła, więc nie ma przyczyny, aby wywołać zmianę prędkości w tym kierunku. Podobne zjawisko występuje na przykład, gdy w jadącym ruchem jednostajnym wagonie podskoczmy w górę. Również spadniemy na to samo miejsce na podłodze wagonu, gdyż mamy tę samą prędkość co wagon i podczas skoku pokonujemy w poziomie tę samą drogę co wagon.

Newton, genialny uczyony, stworzył m.in. podstawy mechaniki; odkrył prawo grawitacji, które wyjaśniło zarówno ruch ciał w kosmosie, jak i ciężenie ciał na



Ziemi

Rysunek 2.4: Izaak Newton (1642-1724)

Zauważmy, że ruch bezwładny odbywa się po drodze najkrótszej ze wszystkich możliwych. Ruch ten odbywa się po torze prostoliniowym, a jak wiemy, najkrótszą odległością między dwoma punktami w pustej przestrzeni jest odcinek prostej.

Inercjalne układy odniesienia i zasada względności

Spoczynek nie jest absolutny, dlatego właśnie pierwsza zasada dynamiki traktuje jednakowo zarówno stan spoczynku ciała, jak i jego ruch jednostajny prostoliniowy. Ciało spoczywa tylko względem danego układu odniesienia, ale sam układ może poruszać się względem innego układu. Na przykład, siedząc w tramwaju jesteś w spoczynku względem tramwaju, natomiast względem obserwatora na ziemi poruszasz się razem z tramwajem.

Zapytajmy teraz, czy jeżeli w jednym układzie odniesienia ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, to czy we wszystkich układach odniesienia ciało będzie się poruszać ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Piłka poruszająca się po podłodze w tramwaju ruchem jednostajnym prostoliniowym względem innego tramwaju przyspieszającego (np. ruszającego z przystanku) będzie poruszać się ruchem niejednostajnym.

Ruch omawianego ciała nie będzie ruchem jednostajnym prostoliniowym w układzie, który sam doznaje przyspieszenia.

Wszystkie układy odniesienia można podzielić na dwa rodzaje:

- *Inercjalne* – takie, w których ciała poruszają się ruchem jednostajnym prostoliniowym w nieobecności oddziaływań lub w przypadku równoważenia się oddziaływań. Układy inercjalne muszą się poruszać ruchem jednostajnym prostoliniowym względem siebie - nie doznają one przyspieszenia (np. tramwaj jadący ruchem jednostajnym prostoliniowym względem Ziemi).

- *Neinercjalne* – takie, które same doznają przyspieszenia względem jakiegokolwiek układu inercjalnego (np. tramwaj przyspieszający względem Ziemi).

W związku z tym zasadę bezwładności należy sprecyzować tak, aby wyrażała w sposób jawny odpowiednie stwierdzenie o rodzaju układu odniesienia, względem którego rozpatruje się dany ruch.

Zasadę bezwładności można sformułować następująco:

® Zamapiętać:

Zasada bezwładności

Istnieją układy odniesienia, zwane układami inercjalnymi, względem których wszystkie ciała nie oddziałujące z innymi ciałami poruszają się jednostajnie prostoliniowo lub pozostają w spoczynku. [Kliknij, aby uruchomić animację](#)

Zatem pierwszą zasadę dynamiki Newtona należy traktować jako postulat istnienia oraz definicję układów inercjalnych. To samo można ująć inaczej: zasada bezwładności w swojej wersji „prototypowej” obowiązuje wyłącznie w inercjalnych układach odniesienia. Jest to o tyle istotne, że w konkretnych zagadnieniach praktycznych, gdy opisujemy ruchy w inercjalnych układach odniesienia, powołujemy się na pierwszą zasadę dynamiki, mając na myśli właśnie jej wersję „prototypową”. Tak będziemy postępować dalej w podręczniku.

Zasada bezwładności pozostawia jednak pewien niedosyt: postuluje ona bowiem istnienie inercjalnych układów odniesienia, ale nie wskazuje żadnego z nich. Musimy w tej kwestii posługiwać się przybliżeniami. Zgodnie z dotychczasowym doświadczeniem, układ odniesienia związany ze Słońcem odpowiada z dużą dokładnością warunkom stawianym układom inercjalnym. Środek tego układu znajduje się w środku Słońca, a osie układu skierowane są ku pewnym określonym dalekim gwiazdom. Układ odniesienia związany z Ziemią jest gorszym przybliżeniem układu inercjalnego, ale dla większości zagadnień praktycznych odstępstwa od inercjalności są tak małe, że można je z powodzeniem zaniedbać.

Istnieją jednak zjawiska, które są wywołane przez obrót Ziemi dookoła swojej osi oraz jej ruch dookoła Słońca. Oczywiście, ruchy te wywołują efekty nie występujące w układach inercjalnych. Przykładem takiego efektu może być ruch wahadła zwanego *wahadłem Foucaulta*. Na zdjęciu ([Rysunek 2.5: Wahadło Foucaulta](#) na stronie 86) przedstawione jest wielkie wahadło Foucaulta pozwalające unaocznic ruch wirowy Ziemi.



Orientacja w przestrzeni płaszczyzny wahań pozostaje niezmienna podczas gdy okrągły stół wraz z całą Ziemią obraca się. Kąt obrotu tej płaszczyzny można mierzyć za pomocą kątowej podziałki widocznej na zdjęciu

Rysunek 2.5: Wahadło Foucaulta

Wyżej omówiliśmy zagadnienie względności ruchu i stwierdzamy, że każdy ruch musimy odnosić do określonego układu odniesienia. Obecnie, znając pojęcie układów inercjalnych, możemy uogólnić zagadnienie względności i przedstawić je w formie podstawowej zasady, tak zwanej *zasady względności*.

Przed wszystkim zauważmy, że układów inercjalnych może być nieskończenie wiele. Dowolny układ odniesienia, który wykonuje ruch jednostajny prostoliniowy względem innego układu inercjalnego, sam jest układem inercjalnym. Jeżeli bowiem jakieś ciało w pewnym układzie inercjalnym wykonuje ruch bezwładny, to i w drugim układzie – poruszającym się względem układu inercjalnego prostoliniowo ze stałą prędkością – ciało to będzie mieć inną, ale znowu stałą prędkość – co do wartości i kierunku. Na przykład, układ odniesienia związany z wagonem poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem Ziemi jest w takim samym stopniu układem inercjalnym jak Ziemia.

Na podstawie doświadczenia możemy stwierdzić, że dowolne zjawisko mechaniczne będzie zachodzić tak samo w wagonie, jak i na Ziemi. Na przykład:

- ciało upuszczone spada pionowo w dół na podłogę,
- z taką samą łatwością możemy się przemieszczać do przodu, jak i do tyłu,
- kula wystrzelona z pistoletu leci z taką samą prędkością do tyłu, jak do przodu wagonu,
- woda nalana do naczynia ma powierzchnię poziomą zarówno w wagonie, jak i na Ziemi.

Te i wiele innych doświadczeń przekonują nas, że żaden eksperyment mechaniczny nie wyróżnia jakiegokolwiek układu inercyjnego. Jest to podstawowe prawo przyrody, które nosi nazwę *zasady względności Galileusza*.

📌 Zamapiętać:

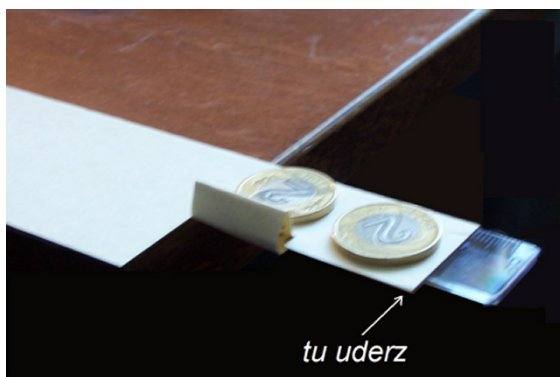
Zasada względności Galileusza

Istnieje nieskończenie wiele układów inercyjnych. Wszystkie te układy są równoważne i żaden z nich nie jest wyróżniony za pomocą jakiegokolwiek zjawiska mechanicznego.

Zasada względności, tak sformułowana, dotrwała aż do 1905 r., kiedy Einstein zapostulował takie jej rozszerzenie, by obejmowała ona wszystkie zjawiska, nie tylko mechaniczne. Tak rozszerzona zasada względności ta ma charakter fundamentalnego postulatu przyrody i jest jedną z podstaw współczesnej metodologii fizyki.

Pytania i problemy

1. Jaki pogląd na ruch jednostajny panował powszechnie przed Galileuszem?
2. Czy stwierdzenie: „naturalnym stanem ciała jest spoczynek” jest słuszne? Uzasadnij odpowiedź.
3. Jakie doświadczenia skłoniły Galileusza do przyjęcia nowego poglądu na ruch?
4. Podaj treść zasady bezwładności, czyli pierwszej zasady dynamiki Newtona.
5. Zadanie (domowe) doświadczalne „Galileo”.
 - a. Wytnij i wymodeluj pasek ze sztywnego kartonu jak na [Rysunek 2.6: Ustawienie monet do doświadczenia „Galileo”](#) na stronie 87
 - b. Połóż dwie jednakowe monety i uderz pstryczkiem w miejsce pokazane na zdjęciu. Jedna z monet ześlizgnie się przeciwnie do strzałki wskazanej na zdjęciu, druga popchnięta przez zagięcie kartonu polecą do przodu. Po czym obie monety upadną na ziemię. Słuchaj uważnie – usłyszysz jedno czy dwa uderzenia monet o podłogę
 - c. Wynik objaśnij z punktu widzenia zasady niezależności ruchów. Zastanów się, jak można ustawić pasek kartonu, aby jedna moneta poruszała się zgodnie, a druga przeciwnie do wektora prędkości ruchu wirowego Ziemi. Sprawdź, czy wynik eksperymentu będzie zależeć od tego ustawienia.



Rysunek 2.6: Ustawienie monet do doświadczenia „Galileo”

6. Podaj po trzy przykłady układów inercyjnych i układów nieinercyjnych. W każdym z przykładów układu inercyjnego wskaż przybliżenie (przybliżenia), które należy uczynić.
7. Dla większości zagadnień praktycznych przyjmuje się, że układ związany z Ziemią jest układem inercyjnym. Wyjaśnij, czy to założenie jest w pełni uzasadnione.
8. Na początku omawiania dynamiki podaliśmy dwie podstawowe zasady: bezwładności i względności. Jak sądzisz, czy zasady te mają jakiś związek ze sobą?

2.2 Druga zasada dynamiki Newtona

Siła

Co to jest siła? Dotychczasowe doświadczenie wykazuje, że wszystkie ciała oddziałują na siebie wzajemnie. Ciała stałe znajdujące się w naszym otoczeniu nie rozsypują się na części, ponieważ te części przyciągają się siłami spójności. Cząsteczki kropli cieczy również przyciągają się wzajemnie, chociaż słabiej. Powietrze w nadmuchanym baloniku oddziałuje na gumową powłokę balonika, napinając ją. Namagnesowane ciała oddziałują na siebie wzajemnie. Wszystkie ciała na Ziemi podlegają przyciąganiu przez nią. Ziemia przyciąga Księżyc itd.

Początkowo pojęcie siły powstało z oceny napięcia mięśni. Do dzisiaj używamy takich określeń, jak silny człowiek, wysiłek mięśni, itp. Później rozszerzono zakres tego pojęcia i używano go w takich wyrażeniach, jak siła woli, siła ducha, siły witalne i tym podobne. Wszystkie te terminy są nieprecyzyjne i z właściwym pojęciem siły mają mało wspólnego. W fizyce siła jest to wielkość fizyczna, określająca jak duże jest oddziaływanie (przyciąganie, lub odpychanie) między określonymi ciałami.

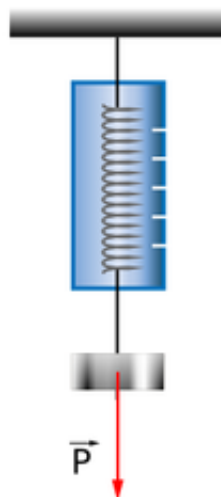
Zgodnie z tym, co powiedziano w rozdziale wstępnym, wszystkie rodzaje sił mają źródło w czterech podstawowych oddziaływaniach: grawitacyjnym, elektromagnetycznym, jądrowym i słabym. W mechanice będziemy mieli do czynienia z różnymi siłami, ale w zasadzie wszystkie te siły, jak się przekonamy, dadzą się sprowadzić tylko do dwóch rodzajów oddziaływań – grawitacyjnego i elektromagnetycznego.

Podstawą określenia siły jako wielkości fizycznej, zgodnie z tym, co zaznaczono w rozdziale wstępnym, powinien być dokładny przepis umożliwiający pomiar siły. Tylko w ten sposób można otrzymać ścisłą definicję siły.

Ścisłe pojęcie siły jest wynikiem uogólnienia wielu doświadczeń. Stwierdzono, że mechanicznym skutkiem wzajemnego oddziaływania ciał może być:

- *odkształcenie* (deformacja) ciała (skutek statyczny), lub
- *przyspieszenie* (zmiana wartości lub kierunku prędkości) ciała (skutek dynamiczny).

Oczywiście, skutki te mogą występować również jednocześnie. Każdy z nich może służyć do pomiaru siły. W praktyce łatwiej jest mierzyć odkształcenie niż przyspieszenie. Dlatego do pomiaru siły stosuje się zwykle *siłomierz* (*Rysunek 2.7: Siłomierz* na stronie 89), w którym miarą działającej siły jest wartość odkształcenia sprężyny.



Rysunek 2.7: Siłomierz

Sprężyna szczególnie nadaje się do pomiaru siły, ponieważ wykazuje proporcjonalność między wartością przyłożonej siły F a wydłużeniem sprężyny Δl (stanowi to treść *prawa Hooke'a* w odniesieniu do sprężyny, która podlega odkształceniom sprężystym, to znaczy takim, które znikają po ustaniu działania siły).

Dla sprężyny obowiązuje następująca zależność

$$(\text{wzór 157}) F = k(l - l_0) = k \Delta l$$

gdzie l_0 – początkowa długość sprężyny, l – długość sprężyny odkształconej, k – współczynnik proporcjonalności, zwany *współczynnikiem sprężystości*. Widzimy więc, że siłę F możemy wyznaczyć, mierząc odkształcenie sprężyny Δl .

Siła jest wektorem. Jeżeli na jakieś ciało działa kilka sił, to wypadkową siłę możemy wyznaczyć, korzystając z zasady składania wektorów. Każdą siłę możemy rozłożyć na siły składowe wzdłuż określonych kierunków, jak również możemy rzutować siłę na wybrany kierunek.

Jedną z najbardziej popularnych sił jest siła ciężkości (pojęcie siły ciężkości będzie szczegółowo omówione w ramach prawa powszechnego ciężenia, któremu poświęcony jest rozdział *Ciążenie powszechne (grawitacja)* na stronie 211). Jest to siła, z jaką Ziemia przyciąga do siebie inne ciała. Z siłą ciężkości spotykamy się na co dzień. Wiemy, że wszystkie ciała spadają na Ziemię, jeżeli temu ruchowi nie przeszkadzają jakieś inne ciała. Siłę ciężkości odczuwamy bezpośrednio wtedy, gdy podnosimy przedmioty o dużej masie. Mówimy, że podnosimy ciężary.

Ciążar w nauce o siłach ma jednoznaczną definicję – **ciężar ciała jest równy sile, z jaką Ziemia przyciąga to ciało** (ściślej: ciężar ciała jest równy sile wypadkowej siły ciężenia i siły bezwładności wynikającej z ruchu układu odniesienia. Siły bezwładności będą omówione w podrozdziale *2.8 Doświadczenie „Inercja”* na stronie 115). Siłę tę możemy z łatwością zmierzyć, posługując się odpowiednio wyskalowanym siłomierzem i stosując wzór (*wzór 157* na stronie 89). Miarą siły ciężkości jest wtedy odkształcenie Δl sprężyny siłomierza, na którym zawieszono dane ciało.

Wiemy, że wszystkie ciała, niezależnie od wartości ich masy, w pobliżu Ziemi (w próżni) spadają ruchem jednostajnie przyspieszonym z jednakowym przyspieszeniem – przyspieszeniem ziemskim g . Natomiast wykonując proste

doświadczenie, zawieszając na siłomierzu ciała o różnej masie, przekonujemy się, że wartość siły ciężkości P zależy wprost proporcjonalnie od masy ciała m :

$$(\text{wzór 158}) P \sim m$$

Przyspieszenie ziemskie jest nieco inne w różnych miejscach na Ziemi i jego wartość zależy od szerokości geograficznej oraz od wysokości. Dla każdego z tych miejsc obowiązuje taka sama zależność ([wzór 158](#) na stronie 90). Ale ciężar ciała o ustalonej masie w różnych miejscach przyjmuje nieco inne wartości, proporcjonalne do miejscowego przyspieszenia ziemskiego

$$(\text{wzór 159}) P \sim g$$

Widzimy więc, że ciężar ciała jest proporcjonalny zarówno do jego masy, jak i do przyspieszenia ziemskiego. Zatem te dwie zależności ([wzór 158](#) na stronie 90) i ([wzór 159](#) na stronie 90) można zapisać w postaci jednej wspólnej: $P \sim mg$. Czyli $P = Kmg$, gdzie K jest stałym współczynnikiem proporcjonalności zależnym od doboru jednostek. Jeżeli zastosujemy układ jednostek SI, w którym siłę P wyraża się w niutonach, to $K = 1$. Zatem

$$(\text{wzór 160}) \vec{P} = m\vec{g}$$

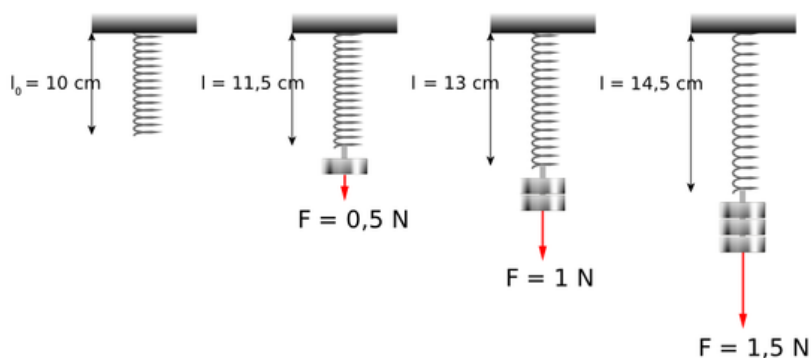
Napisaliśmy tę zależność w postaci wektorowej, ponieważ siła i przyspieszenie są wektorami (masa jest skalarem). Równanie to, jak się przekonamy, jest szczególnym przypadkiem ogólnego prawa – drugiej zasady dynamiki Newtona, która zostanie dokładnie rozpatrzona niżej.

Równanie ([wzór 160](#) na stronie 90) ma duże znaczenie praktyczne, gdyż pozwala mierzyć masę różnych ciał przez porównanie ich ciężarów. Pomiarów tych możemy dokonywać za pomocą siłomierza czy wagi sprężynowej lub stosując wagę szalkową. Widzimy, że słowo „ważenie” używane jest w dwóch różnych znaczeniach – jako pomiar ciężaru (czyli siły) albo masy.

Doświadczenie „Sprężyna”

Zadanie nasze polega na sprawdzeniu doświadczalnym wzoru ([wzór 157](#) na stronie 89) dla sprężyny. Doświadczenie wykonujemy w następującej kolejności:

Zawieszamy pionowo sprężynę i mierzymy długość l_0 . Zawieszamy ciężarek o określonej masie m , więc i o określonym ciężarze P . Sprężyna ulegnie rozciągnięciu pod wpływem siły ciężkości ciężarka. Mierzmy miarką milimetrową długość l_1 naciągniętej sprężyny. Następnie doczepiamy drugi taki sam ciężarek o tej samej masie i mierzymy aktualną długość sprężyny l_2 . Czynności te powtarzamy, podwieszając trzeci, czwarty i piąty ciężarek.



Rysunek 2.8: Sukcesywne zwiększanie obciążenia sprężyny ciężarkami powoduje proporcjonalne jej wydłużenie

Wyniki pomiarów wpisujemy do tabelki pomiarów – *Rysunek 2.9: Tabelka pomiarów* na stronie 91.

Liczba ciężarków n	Siła $F = nmg$ (N)	Długość sprężyny l_n (cm)	$l = l_n - l_0$ (cm)

Rysunek 2.9: Tabelka pomiarów

Sporządzamy wykres zależności F od Δl z uwzględnieniem niepewności pomiarowych długości sprężyny.

Cieszymy się, jeżeli punkty doświadczalne rozmieszczone są wzdłuż linii prostej, gdyż w ten sposób uzyskaliśmy potwierdzenie doświadczalne wzoru (*wzór 157* na stronie 89). Dzięki temu możemy wyznaczyć, bezpośrednio z wykresu, współczynnik sprężystości sprężyny k , bowiem zgodnie ze wzorem (*wzór 157* na stronie 89) jest on liczbowo równy tangensowi kąta nachylenia tej prostej do osi odciętych.

Na koniec zapisujemy wnioski, jakie wynikają z przeprowadzonego doświadczenia.

Druga zasada dynamiki

Rysunek 2.10: Film

Druga zasada dynamiki Newtona

Galileusz wykazał, że siła nie jest potrzebna do podtrzymania ruchu jednostajnego ciała po linii prostej. Newton ujął to w postaci prawa bezwładności jako pierwszą zasadę dynamiki. Newton jednakże poszedł dalej od swojego poprzednika, stwierdzając, że **siła nie jest potrzebna do podtrzymania ruchu jednostajnego i prostoliniowego, ale jest konieczna do zmiany wektora prędkości ciała**. Żadna zmiana prędkości nie zajdzie, jeżeli nie zadziała na ciało siła. Innymi słowy, siła działająca na ciało wywołuje zmianę prędkości, czyli nadaje mu przyspieszenie. To właśnie jest treścią drugiej zasady dynamiki Newtona. Było to genialne odkrycie, które pchnęło naukę na nowe tory. Prawo to wydaje się nam dzisiaj niezwykle proste i dostrzeżenie tej prawdy w wielu zjawiskach wydaje się łatwe. Jednakże w owym czasie była to myśl nowatorska i musiała pokonać uprzedzenia narosłe przez całe stulecie.

Ⓜ Zamapiętać:

Druga zasada dynamiki

$$(\text{wzór 161}) \quad \vec{F} = m\vec{a}$$

siła \vec{F} działająca na ciało o masie m udziela mu przyspieszenia \vec{a} o wartości proporcjonalnej do wartości siły. Kierunek i zwrot przyspieszenia są zgodne z kierunkiem i zwrotem siły. Współczynnikiem proporcjonalności jest masa m .

Jest to podstawowe równanie dynamiki, które ma niezwykle szeroki zasięg. Prawo to sprawdza się we wszystkich zjawiskach mechanicznych makroskopowych i mikroskopowych na Ziemi i w Kosmosie.

Jedynie dla bardzo dużych prędkości, zbliżonych do prędkości światła, wzór (*wzór 161* na stronie 91) ulega pewnej modyfikacji wynikającej z teorii względności Einsteina.

Wzór (*wzór 161* na stronie 91) pozwala na zdefiniowanie jednostki siły, którą na cześć Newtona nazwano *niutonem*. Jeden niuton jest to siła, która ciału o masie 1kg nadaje przyspieszenie 1m/s^2 :

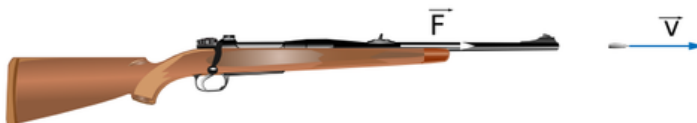
$$(\text{wzór 162}) \quad 1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Do niedawna bardzo rozpowszechnioną jednostką siły był (i jest ciągle jeszcze stosowany) tzw. *kilogram-siła*, 1kG (zwany inaczej kilopondem – kp). Jest to siła, z jaką Ziemia przyciąga ciało o masie 1kg w miejscu, gdzie przyspieszenie ziemskie $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Zatem

$$(\text{ wzór 163 }) 1\text{kG} = 9,80665 \text{ N}$$

Przykład 1

Obliczmy, z jaką siłą F pocisk o masie $m = 10 \text{ g}$ jest wyrzucany z lufy karabinu o długości $l = 60 \text{ cm}$, wiedząc, że prędkość pocisku u wylotu lufy $v = 800 \text{ m/s}$. Przyjmijmy, że ruch pocisku w lufie karabinu jest jednostajnie przyspieszony.



Rysunek 2.11: Pocisk w lufie karabinu uzyskuje przyspieszenie na skutek działania siły

Odpowiedź: Droga pocisku w ruchu jednostajnie przyspieszonym jest równa

$$(\text{ wzór 164 }) l = \frac{at^2}{2}$$

gdzie a – przyspieszenie pocisku, t – czas ruchu pocisku w lufie.

Prędkość pocisku po czasie t wynosi

$$(\text{ wzór 165 }) v = at$$

Z tych dwóch równań (po wyeliminowaniu czasu t) otrzymamy

$$(\text{ wzór 166 }) l = \frac{v^2}{2a}$$

skąd

$$(\text{ wzór 167 }) a = \frac{v^2}{2l}$$

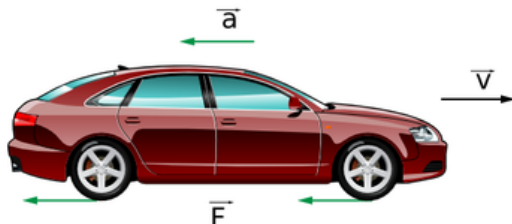
Siła działająca na pocisk $F = ma = m \frac{v^2}{2l}$. Zatem

$$(\text{ wzór 168 }) F = 0,01 \text{ kg} \cdot \frac{800^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 0,6 \text{ m}} = 5333,3 \text{ N}$$

Jest to bardzo duża siła; odpowiada ona na Ziemi ciężarowi ciała o masie ponad pół tony! Można ją także ocenić przez porównanie z siłą występującą w następnym przykładzie.

Przykład 2

Dopuszczalne opóźnienie przy hamowaniu samochodu (przy którym samochód nie wpada jeszcze w poślizg) $a = 4,9 \text{ m/s}^2$. Z jaką maksymalną siłą hamuje wtedy samochód o masie $m = 1000 \text{ kg}$?



Rysunek 2.12: Samochód hamuje i uzyskuje opóźnienie a na skutek działania siły hamowania $F = ma$

Odpowiedź: Siła hamowania $F = ma$, zatem

$$(\text{ wzór 169 }) F = 1000 \text{ kg} \cdot 4,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4900 \text{ N}$$

Tak duża siła jest potrzebna do wyhamowania pędzącego samochodu, a jednak siła ta jest mniejsza od siły z poprzedniego przykładu wypychającej małe pocisk z lufy karabinu.

Pytania i problemy

1. Jeszcze dzisiaj stosujemy w życiu codziennym termin „siła” w odniesieniu do wielu pojęć niefizycznych. Jakim warunkom musi odpowiadać pojęcie siły, aby była ona wielkością fizyczną? Podaj przykład siły jako pojęcia fizycznego oraz niefizycznego pojęcia siły.
2. Podaj przykłady statycznego i dynamicznego skutku działania siły.
3. Wyjaśnij zasadę pomiaru wartości siły za pomocą siłomierza.
4. Jakie doświadczenie należy wykonać, aby się przekonać, że w danym miejscu na kuli ziemskiej siła ciężkości działająca na ciała o różnej masie ma wartość wprost proporcjonalną do masy ciała?
5. Czy siła jest wektorem? Odpowiedź uzasadnij
6. Uczeń stanął na wadze i stwierdził, że waga wskazała 65 kilogramów. Podaj fizyczną interpretację wyniku tego pomiaru.
7. Podaj treść drugiej zasady dynamiki Newtona i odpowiedni wzór.
8. Przyjmując, że samolot odrzutowy podczas rozpedzania się przy starcie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, oblicz z jaką siłą działają jego silniki. Masa samolotu wynosi 10 000 kg, droga rozbiegu: 500 m, czas rozbiegu: 25 s.
9. Porównaj siłę silników samolotu przy starcie (pytanie 8.) z siłami z przykładów [Przykład 1](#) na stronie 92 i [Przykład 2](#) na stronie 93. Podaj jakie wnioski stąd wypływają?

2.3 Doświadczenie „Dyna”

Celem doświadczenia jest sprawdzenie zależności między siłą a przyspieszeniem w praktyce. Wykonamy je w dwóch etapach. Będą to:

1. rozkład sił na równi pochyłej,
2. sprawdzenie wzoru Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$

Kula i klocek na równi pochyłej

Rysunek 2.13: Film

Rozkład sił na równi pochyłej

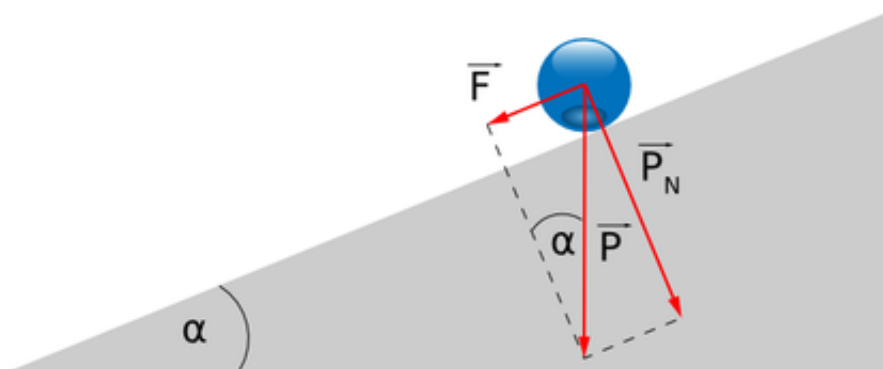
Na *Rysunek 2.14: Rozkład sił na równi pochyłej* na stronie 94 przedstawiono ciało na równi pochyłej. Siłę ciężkości $\vec{P} = m\vec{g}$ możemy rozłożyć na dwie siły składowe – równoległą do równi

$$(\text{wzór 170}) F = P \sin \alpha$$

i prostopadłą do równi

$$(\text{wzór 171}) P_n = P \cos \alpha$$

W doświadczeniu tym zaniedbujemy siłę tarcia, gdyż jest ona mała w porównaniu z pozostałymi siłami.



Rysunek 2.14: Rozkład sił na równi pochyłej

Przekonamy się teraz doświadczalnie, że taki rozkład sił na równi może zachodzić w rzeczywistości.

Zmontujmy równię pochyłą, korzystając z zestawu do doświadczeń z mechaniki. Ciałem badanym na równi będzie obciążony wózek.

Wózek ustawiamy na równi, obciążamy obciążnikami i równoważymy siłą równą sile naciągu \vec{N} linki przerzuconej przez blok na szczycie równi (Rysunek 2.15: Siła $N = P_1$ równoważy wózek na równi pochyłej na stronie 95). Ta siła naciągu jest równa (co do wartości) ciężarowi szalki z odważnikami P_1 .

Mierzymy i zapisujemy kąt α – kąt nachylenia równi do poziomu. Powiedzmy przykładowo, że $\alpha = 30^\circ$

Zapisujemy następujące dane początkowe (podajemy tu przykładowe wartości):

masa wózka $m_w = 90$ g,

masa obciążników $m_{ob} = 3 \cdot 50$ g = 150 g,

masa szalki $m_{sz} = 50$ g,

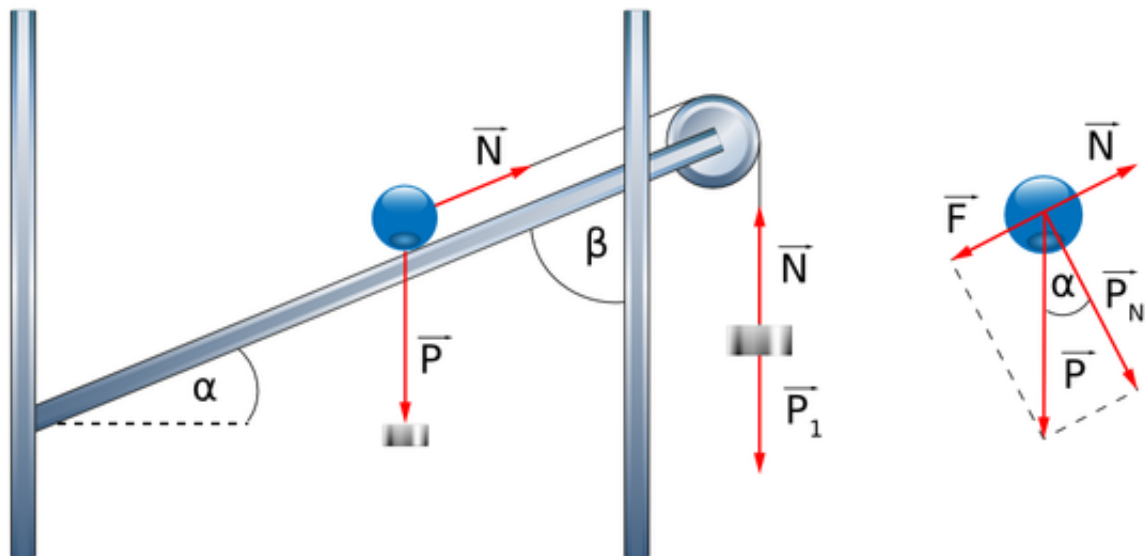
masa odważników $m_{od} = 70$ g,

kąt nachylenia równi $\alpha = 30^\circ$.

Obliczamy wartości sił, np.:

$$\text{(wzór 172) } P = (m_w + m_{ob})g = (0,240 \cdot 9,81)\text{N} = 2,35\text{N}$$

$$\text{(wzór 173) } P_1 = (m_{sz} + m_{od})g = (0,120 \cdot 9,81)\text{N} = 1,18\text{N}$$



Rysunek 2.15: Siła $N = P_1$ równoważy wózek na równi pochyłej

Gdybyśmy nie obciążyli linki działającej siłą naciągu \vec{N} na wózek, stoczyłby się on wzdłuż równi pod wpływem siły \vec{F} , której wartość wynosi $F = P \sin \alpha$. Wyciągamy stąd wniosek, że $N = F$, czyli $P_1 = F$.

Sprawdźmy to. Obliczmy siłę F ze wzoru (wzór 170 na stronie 94) i porównajmy otrzymaną wartość z wartością ciężaru szalki z odważnikami. W naszym przykładzie $F = P \sin 30^\circ = (2,35 \cdot 0,5)\text{N} = 1,18\text{N}$

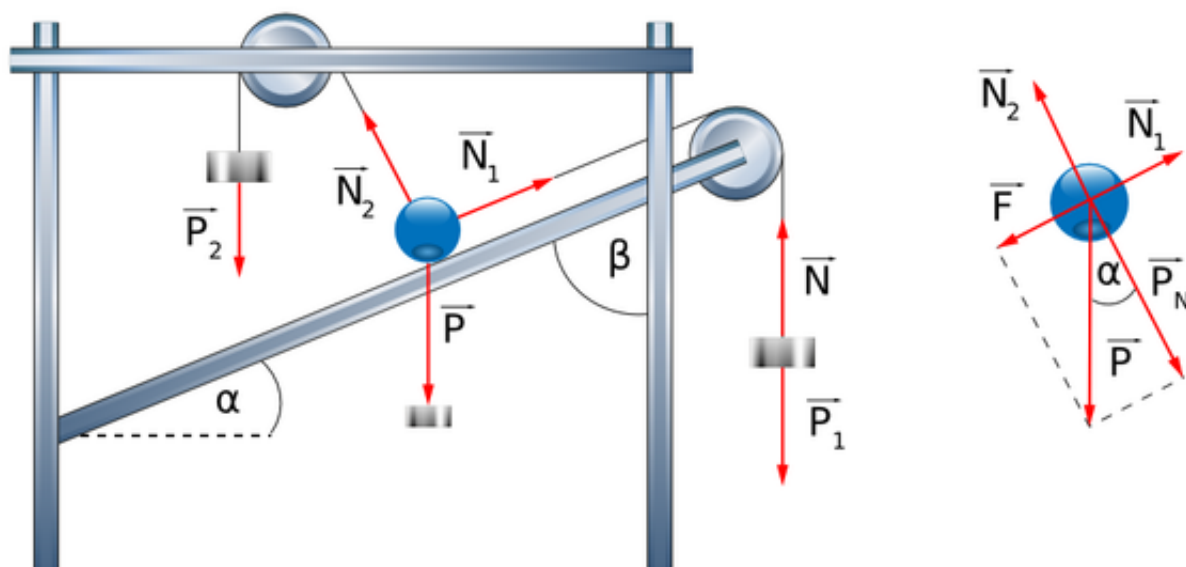
Widzimy, że otrzymana wartość siły zgadza się doskonale z wartością siły P_1 ! Fakt ten zapisujemy w postaci wniosku.

Oprócz siły \vec{F} równoległej do równi, która ściąga wózek w dół równi, jest jeszcze siła \vec{P}_n przyciskająca wózek do niej. Jednakże w tym kierunku nie występuje żaden ruch wózka. Zatem siła \vec{P}_n musi być zrównoważona jakąś inną siłą. Jaka siła równoważy siłę \vec{P}_n ? Możemy się domyślać, że siłę tę równoważy siła reakcji równi (*Rysunek 2.15: Siła $N = P \sin \alpha$ równoważy wózek na równi pochyłej* na stronie 95).

Siła reakcji równi powstaje na skutek nieznacznego sprężystego ugięcia równi pod wpływem siły nacisku \vec{P}_n . Sprawdźmy doświadczalnie ten wniosek.

Przez blok umieszczony tak jak na *Rysunek 2.16: Rolę siły reakcji równi przejmuje $N \rightarrow 2$ - siła naciągu linki* na stronie 96 przerzucamy drugą linkę w kierunku prostopadłym do równi. Jeden koniec linki zaczepiamy do wózka, a drugi obciążamy szalką z odważnikami o łącznym ciężarze (szalka + odważniki) równym \vec{P}_2 . Staramy się tak obciążyć szalkę, aby wózek oderwał się nieznacznie od równi i utrzymywał w powietrzu tuż nad nią. W ten sposób rolę siły reakcji równi przejmuje siła naciągu linki \vec{N}_2 .

Zapisujemy dane, np. masa szalki drugiej $m_{sz} = 50$ g, masa odważników $m_{od} = 160$ g.



Rysunek 2.16: Rolę siły reakcji równi przejmuje \vec{N}_2 - siła naciągu linki

Obliczamy wartość siły \vec{N}_2 , np.

$$(\text{ wzór 174 }) N_2 = P_2 = (m_{sz} + m_{od})g = (0,210 \cdot 9,81)\text{N} = 2,06\text{N}$$

Obliczamy P_n według wzoru (*wzór 171* na stronie 94) i porównujemy otrzymaną wartość z wartością siły N_2 . W naszym przykładzie

$$(\text{ wzór 175 }) P_n = P \cos 30^\circ = (2,35 \cdot 0,866)\text{N} = 2,04\text{N}$$

Sprawdzamy, czy otrzymana wartość siły P_n jest równa N_2 . W naszym przykładzie zgodność zachodzi z dokładnością do 0,02 N.

Otrzymany wynik świadczy o tym, że rzeczywiście zachodzi taki rozkład siły ciężkości wózka, jak na [Rysunek 2.14: Rozkład sił na równi pochyłej](#) na stronie 94, i że poprawność wzoru ([wzór 171](#) na stronie 94) można sprawdzić doświadczalnie. Zapisujemy to w postaci kolejnego wniosku.

Sprawdzenie wzoru Newtona $\vec{F} = m\vec{a}$

Tę część doświadczenia wykonamy na torze z poduszką powietrzną. Najpierw będziemy mierzyć przyspieszenie wózka wywołane siłą ściąającą \vec{F} na równi pochyłej ([Rysunek 2.14: Rozkład sił na równi pochyłej](#) na stronie 94). Przekonaliśmy się uprzednio, że siła ta jest składową (równoległą do równi) siły ciężkości wózka (siła ciężkości wózka $P = mg$). Siłę F wyznaczmy doświadczalnie, podstawiając do wzoru ([wzór 170](#) na stronie 94) zmierzoną masę wózka m i kąt α nachylenia równi do poziomu.

Przyspieszenie wózka a wyznaczmy ze wzoru na drogę s wzdłuż równi pochyłej w ruchu jednostajnie przyspieszonym, $s = \frac{at^2}{2}$, zatem

$$(\text{wzór 176}) \quad a = \frac{2s}{t^2}$$

Mierząc s i t , możemy doświadczalnie wyznaczyć przyspieszenie wózka a .

Widzimy więc, że jesteśmy w stanie wyznaczyć doświadczalnie zarówno siłę F , jak i przyspieszenie a . Dzięki temu możemy sprawdzić, czy zachodzi zależność liniowa między przyspieszeniem a i siłą F . W tym celu należy powtórzyć eksperyment kilkakrotnie przy różnych kątach nachylenia równi.

Dalszą część doświadczenia wykonujemy w następujący sposób: ważąc wózek, wyznaczamy jego masę m . Ustawiamy tor powietrzny w poziomie (stosując np. poziomnicę), następnie jeden koniec toru powietrznego podnosimy i ustawiamy na wysokości h (np. $h = 1,5$ cm). Mierzmy długość toru l . Zaznaczamy na torze odcinek drogi s (np. $s = 1$ m).

Zapisujemy dane m , l i s .

Mierzmy czas t ruchu wózka na drodze s . Aby zwiększyć dokładność, pomiar czasu powtarzamy trzykrotnie. Doświadczenie powtarzamy wielokrotnie (np. sześć razy), zmieniając za każdym razem h - wysokość równi.

Wyniki pomiarów wpisujemy do uprzednio przygotowanej tabelki pomiarów – [Rysunek 2.17: Tabelka pomiarów](#) na stronie 97.

Wysokość równi h (cm)	Czas ruchu t (s)			t_{sr} (s)	Przyspieszenie a (m/s ²)	Siła F (N)
	1	2	3			

Rysunek 2.17: Tabelka pomiarów

Dla każdej wysokości równi h obliczamy średni czas ruchu wózka, przyspieszenie a według wzoru ([wzór 176](#) na stronie 97) i siłę, która zgodnie ze wzorem ([wzór 170](#) na stronie 94) jest równa

$$(\text{wzór 177}) \quad a = \frac{2s}{t^2}$$

Korzystając z wyników zapisanych w dwóch ostatnich rubrykach [Rysunek 2.17: Tabelka pomiarów](#) na stronie 97, wykonaj wykres zależności F od a . W pobliżu punktów doświadczalnych wykreśl linię. Powinna to być linia prosta.

Jeżeli punkty doświadczalne układają się wzdłuż linii prostej, to znaczy, że nasze doświadczenie potwierdza liniową zależność F od a . O to właśnie w tym doświadczeniu chodziło.

Obliczamy niepewności pomiarowe i nanosimy je na wykresie.

Na koniec zapisujemy wnioski, jakie wynikają z przeprowadzonego doświadczenia.

Rysunek 2.18: Równia pochyła

2.4 Trzecia zasada dynamiki Newtona

Pierwsza i druga zasada dynamiki Newtona mówią nam o ruchu ciała, gdy nie działa lub działa na nie siła. Zasady te nie określają, skąd pochodzą siły działające na ciało. Newton zrozumiał, że aby na ciało zadziałała siła, potrzebne jest jakieś inne ciało. To inne ciało nie musi być w bezpośrednim kontakcie z danym ciałem, na które oddziałuje siłą. Zawsze jednak obowiązuje zasada:

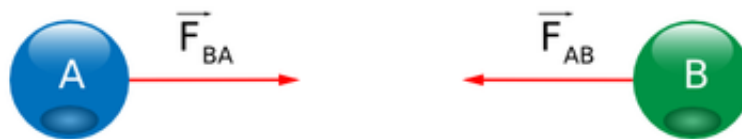
Ⓡ **Zamapiętać:**

Trzecia zasada dynamiki

Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą \vec{F}_{AB} , to ciało B działa na ciało A siłą \vec{F}_{BA} , która ma tę samą wartość i kierunek, lecz przeciwny zwrot, czyli

$$(\text{wzór 178}) \quad \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Na *Rysunek 2.19: Ilustracja trzeciej zasady dynamiki Newtona* na stronie 98 przedstawiono dwa ciała oddziałujące na siebie, jednak pokazane siły nie równoważą się wzajemnie, mimo że są zwrócone przeciwnie. Dzieje się tak, bowiem siły te są przyłożone do różnych ciał.



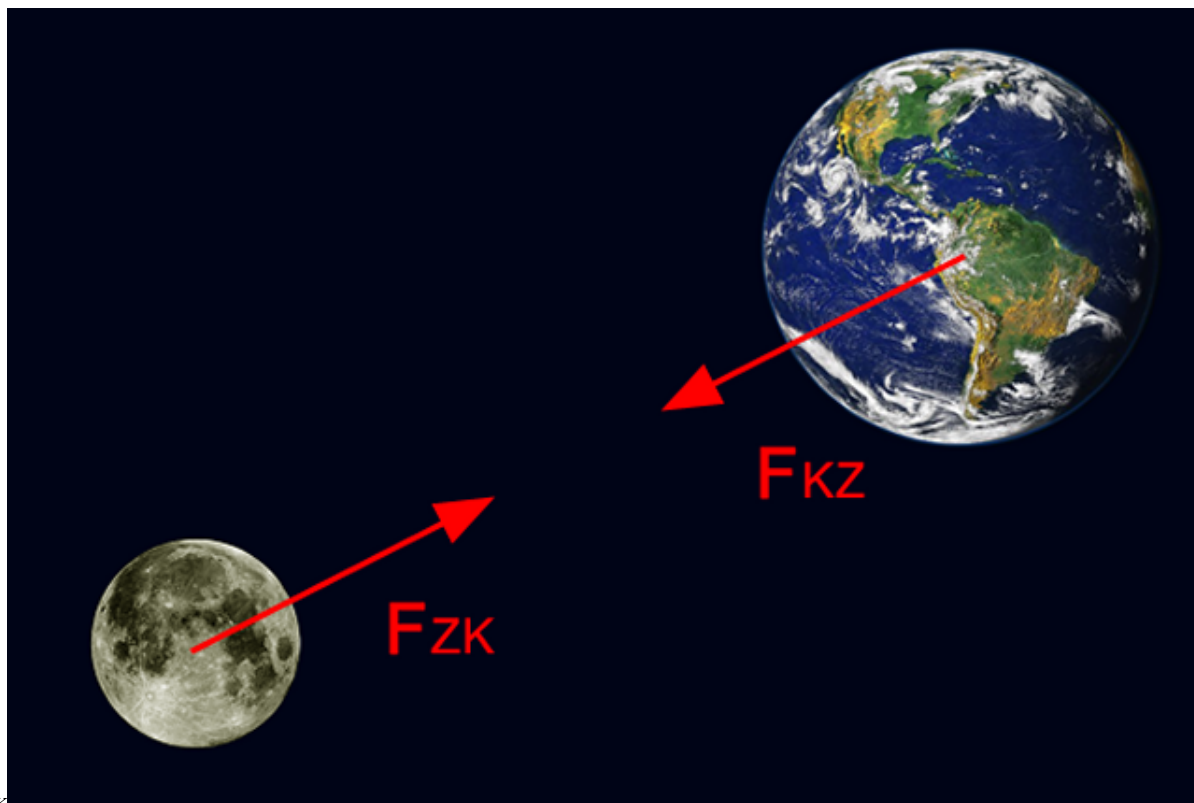
Rysunek 2.19: Ilustracja trzeciej zasady dynamiki Newtona

Oba zespoły działają siłą o tej samej wartości na linę, lecz przeciwnie zwróconą (póki linę pozostaje w spoczynku)



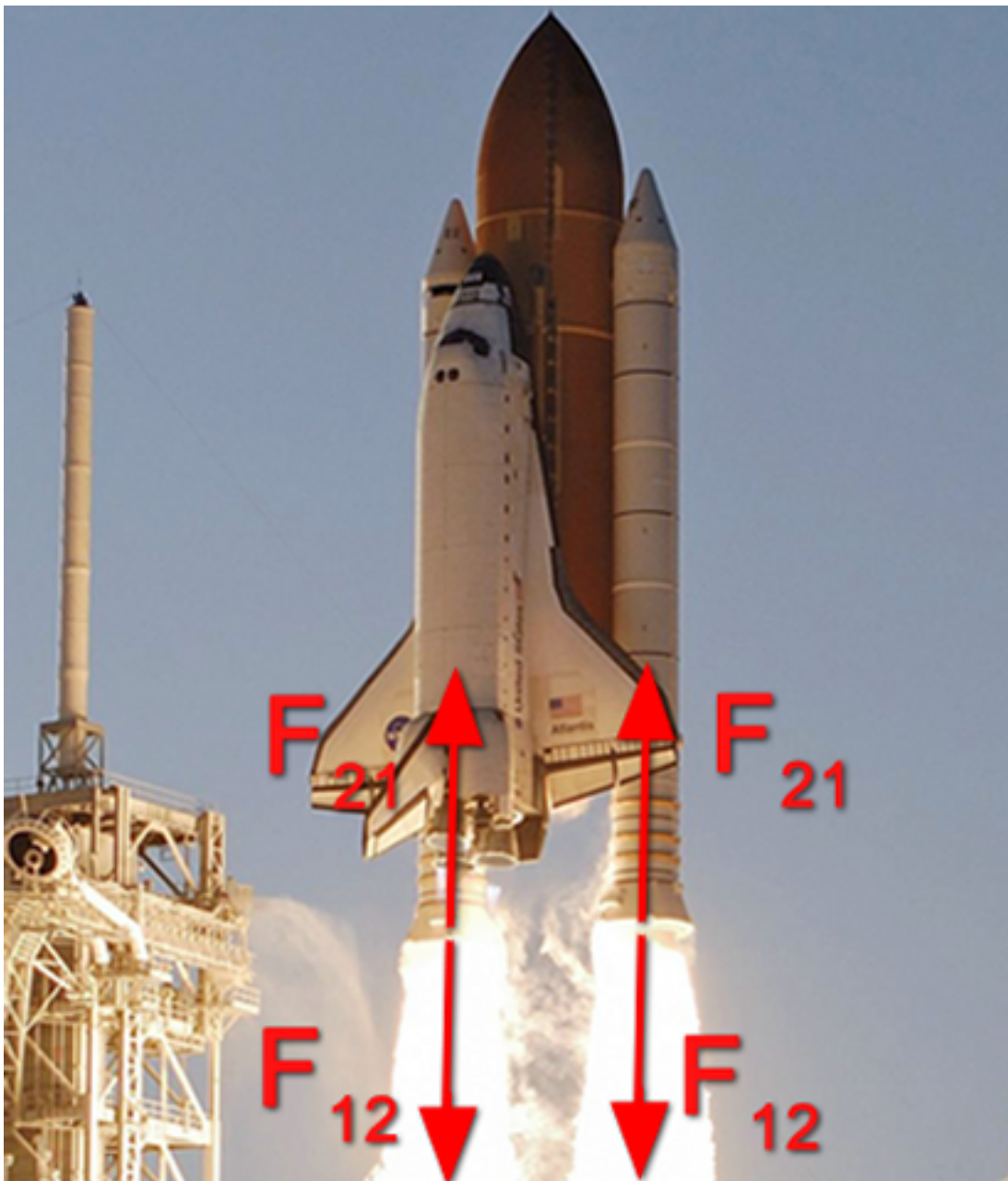
Rysunek 2.20: Przeciąganie liny

Ziemia przyciąga Księżyc siłą \vec{F}_{KZ} również Księżyc przyciąga Ziemię siłą \vec{F}_{ZK} . Te dwie siły są równe sobie – co do wartości, lecz przeciwnie zwrócone



$$\vec{F}_{KZ} = -\vec{F}_{ZK}$$

Rysunek 2.21: Siły przyciągania Ziemi i Księżyca



Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona – silniki odrzucają spaliny – działają siłami takimi samymi (co do wartości) jak spaliny na silniki, lecz przeciwnie zwróconymi $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

Rysunek 2.22: Przykład działania trzeciej zasady dynamiki Newtona

Trzecia zasada dynamiki stwierdza ponadto, że siły zawsze występują parami. Odrzutowiec działa siłą na odrzucane przez niego spaliny, natomiast spaliny działają na odrzutowiec taką samą siłą, ale w stronę przeciwną, dzięki temu uzyskuje on przyspieszenie i pokonuje opór powietrza. Ziemia przyciąga spadający kamień siłą $\vec{F} = m\vec{g}$. Ale kamień przyciąga Ziemię z siłą o takiej samej wartości. Dlaczego tego nie zauważamy? Ponieważ masa Ziemi M jest znacznie większa od masy kamienia m , więc przyspieszenie Ziemi, a , jest niezauważalnie małe. Zgodnie z zasadami dynamiki Newtona otrzymamy

$$(\text{wzór 179}) \quad m\vec{g} = -M\vec{a}$$

skąd

$$(\text{wzór 180}) \quad \vec{a} = -\frac{m}{M}\vec{g}$$

Ten przykład poucza nas dobitnie, że choć działające siły mają jednakowe wartości, to skutki działania tych sił są na ogół różne.

Możemy zapytać, dlaczego tak jest, dlaczego siły oddziaływania między dowolnymi dwoma ciałami są jednakowe co do wartości?

Odpowiedź na to pytanie nie jest łatwa, ale możemy zauważyć, że zawsze wtedy, gdy mamy do czynienia z oddziaływaniem dwóch ciał, to między nimi występuje „pośrednik”. Tym pośrednikiem może być np. lina łącząca dwóch chłopców na łyżworolkach, sprężyna łącząca dwa wózki na torze powietrznym, pole grawitacyjne w przykładzie oddziaływania Ziemi z Księżycem. Ten pośrednik jest właśnie nośnikiem sił. Wydaje się więc naturalne, że siła występująca w linie, czy sprężynie jest jednakowa i nie zależy na jakie ciało działa. (Ten "pośrednik" nie zawsze jest łatwo zauważalny, np. w przypadku ciężarowca utrzymującego sztangę z ciężarami. W tym przypadku pośrednikiem jest pole elektryczne występujące między molekułami dłoni ciężarowca a atomami sztangi. Wynikiem jest odpychanie elektrostatyczne elektronów występujących w tych molekułach i atomach.)



Rysunek 2.23: Dwa elektrony odpychają się dzięki nieustannej emisji i absorpcji (czyli wymianie) fotonu

Współczesne poglądy na istnienie sił są następujące. Dwa ciała makroskopowe oddziałują na siebie poprzez oddziaływanie ich cząstek składowych. Oddziaływanie makroskopowe składa się z bardzo dużej liczby oddziaływań elementarnych. Dwie cząstki elementarne oddziałują poprzez wymianę trzeciej cząstki (coś w rodzaju „ping-pongu”). Na przykład dwa elektrony odpychają się dzięki nieustannej wymianie fotonów (*Rysunek 2.23: Dwa elektrony odpychają się dzięki nieustannej emisji i absorpcji (czyli wymianie) fotonu* na stronie 101).

® Zamapiętać:

Oddziaływanie elementarne

Oddziaływanie makroskopowe składa się z bardzo dużej liczby oddziaływań elementarnych. Dwie cząstki elementarne oddziałują dzięki wymianie trzeciej cząstki.

Zrozumiałe jest zatem dlaczego foton przenosi taką samą siłę między dwoma elektronami. Byłoby dziwne, gdyby ten sam foton przekazywał różne siły elektronom.

Przykład 3

Dwa klocki A i B o masach m_A i m_B połączone nicią leżą na idealnie gładkiej powierzchni poziomej (*Rysunek 2.24: Siły oddziaływania wzajemnego połączonych klocków* na stronie 102). Jaki warunek musi spełniać siła \vec{F} przyłożona do klocka B , aby nić się nie zerwała? Wiadomo, że nić wytrzymuje obciążenie równe F_{\max} .

**Rysunek 2.24: Siły oddziaływania wzajemnego połączonych klocków**

Odpowiedź: Siła zewnętrzna F wywołuje przyspieszenie a obu klocków. Na klocek B działa siła F i siła F_{AB} , a na klocek A działa tylko siła F_{BA} . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona możemy napisać dwa równania, dla każdego klocka oddzielnie:

$$\text{(wzór 181) } F - F_{AB} = m_B a$$

$$\text{(wzór 182) } F_{BA} = m_A a$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona wartości sił oddziaływania wzajemnego klocków są sobie równe, $F_{AB} = F_{BA}$. Nić przenosi oddziaływania między klockami za pomocą siły naciągu F_N , zatem $F_{AB} = F_{BA} = F_N$. Mamy więc

$$\text{(wzór 183) } \left. \begin{array}{l} F - F_N = m_B a \\ F_N = m_A a \end{array} \right\}$$

Dodając stronami te dwa równania, eliminujemy F_N . Otrzymamy:

$$\text{(wzór 184) } F = m_A a + m_B a = (m_A + m_B) a$$

Stąd przyspieszenie obliczymy ze wzoru

$$\text{(wzór 185) } a = \frac{F}{m_A + m_B}$$

Podstawiając to wyrażenie do drugiego równania we wzorze (*wzór 183* na stronie 102), otrzymamy wartość siły naciągu nici

$$\text{(wzór 186) } F_N = m_A \frac{F}{m_A + m_B}$$

Nić nie ulegnie zerwaniu, gdy siła naciągu nici będzie mniejsza od siły F_{max} , czyli gdy $F_N < F_{max}$, zatem

$$(\text{wzór 187}) F_N = m \frac{F}{m_A + m_B} < F_{max}$$

skąd

$$(\text{wzór 188}) F < \frac{(m_A + m_B) F_{max}}{m_A}$$

Otrzymaliśmy zatem warunek na siłę F , przy którym nić nie ulega zerwaniu.

Pytania i problemy

1. Sformułuj trzecią zasadę dynamiki Newtona i wyjaśnij jej zastosowanie na przykładzie.
2. Wykonując doświadczenie „Dyna” stwierdziliśmy, że w stanie równowagi siła naciągu linki N jest równa sile ciężkości odważnika P_1 (*Rysunek 2.15: Siła $N = P_1$ równowagi wózek na równi pochylej* na stronie 95). Podaj, co trzeba by było zrobić, aby te dwie siły nie były równe sobie. Jak to można uzgodnić z trzecią zasadą dynamiki? Zastanów się, czy nadal będzie trwał stan równowagi, gdy ciężar odważnika P_1 i siła naciągu linki będą różne.
3. Stoisz na wadze i stwierdzasz, że Ziemia przyciąga Cię siłą $P = 65\text{kG}$. Czy to znaczy, że i Ty przyciągasz Ziemię siłą równą 65kG ? Odpowiedź uzasadnij.
4. Scharakteryzuj wektory sił akcji i reakcji, o których mówi trzecia zasada dynamiki Newtona. Czy siły te mogą się równoważyć? Odpowiedź uzasadnij.
5. Wyjaśnij następujący „paradoks”: Chłopiec ciągnie sanki pewną siłą. W myśl trzeciej zasady dynamiki Newtona sanki ciągną chłopca w przeciwną stronę tą samą siłą. Dlaczego sanki w ogóle się poruszają?

2.5 Pęd i popęd

Po sformułowaniu przez Newtona zasad dynamiki oraz prawa powszechnego ciążenia, w XVIII w. nastąpił gwałtowny rozwój nauki zwanej mechaniką. W jej właśnie ramach, po raz pierwszy w historii, połączono w nowoczesny sposób matematykę, fizykę oraz konkretne zastosowania praktyczne uzyskiwanych wyników. Zastosowania te obejmowały bardzo szeroki wachlarz zagadnień, od opisu ruchu planet i innych obserwowanych ciał niebieskich w astronomii, aż po projektowanie i konstrukcję budynków i mostów. Rozwój mechaniki doskonale wpisał się w oświeceniowy charakter całego XVIII wieku. Dziś mechanika jest integralną częścią fizyki, jest również jedną z podstaw techniki. Nieprzypadkowo także wiele wydziałów matematycznych uczelni wyższych zajmuje się zagadnieniami z zakresu mechaniki.

Pęd i popęd

Rysunek 2.25: Film

Jednym z aspektów owego rozwoju mechaniki, w sferze teorii, było poszukiwanie i tworzenie nowych wielkości oraz praw fizycznych na bazie wcześniej poznanych. Wymienimy tu tylko dwa takie zabiegi: pomnożenie działającej na ciało siły \vec{F} przez czas jej działania Δt oraz pomnożenie tej siły \vec{F} przez przemieszczenie $\Delta \vec{s}$, które towarzyszy temu działaniu. Pierwsza koncepcja doprowadziła fizyków do pojęcia pędu i zasady jego zachowania, drugi zaś pomysł jest wstępem do pojęcia energii i zasady jej zachowania, z uwzględnieniem różnych jej form.

Załóżmy, że ciało o masie m porusza się pod wpływem stałej siły. Wtedy ciało uzyskuje stałe przyspieszenie. Jeżeli początkowo ciało miało prędkość \vec{v}_1 , to po czasie Δt uzyska prędkość \vec{v}_2 , więc

$$(\text{wzór 189}) \vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Ponieważ $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, więc

$$(\text{ wzór 190 }) \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Po przekształceniu otrzymamy

$$(\text{ wzór 191 }) \vec{F} \Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

Przyjrzyjmy się temu równaniu. Po lewej stronie mamy iloczyn siły i czasu jej działania $\vec{F} \Delta t$. Wyrażenie to nazywamy *popędem* lub *impulsem siły*. Po prawej stronie (*wzór 191* na stronie 104) występuje różnica dwóch wyrażeń tego samego typu, iloczynu masy i prędkości. Otóż iloczyn masy i prędkości zwany *pędem* jest wielkością spełniającą ważną rolę w fizyce. Oznaczamy go symbolem \vec{p} .

Ⓡ Zamapiętać:

Pęd

Iloczyn masy i prędkości nazywamy *pędem* ciała

Pęd to wielkość wektorowa, charakteryzująca ilość ruchu, jaką ma ciało. Zmienia się pod wpływem działającej na ciało siły zgodnie z wyrażeniem (*wzór 193* na stronie 104). W mechanice klasycznej pęd wiążemy z masą ciała i jego prędkością zgodnie z wyrażeniem (*wzór 192* na stronie 104). Jednostką pędu jest, zgodnie z wyrażeniem (*wzór 192* na stronie 104), kilogram razy metr na sekundę.

$$(\text{ wzór 192 }) \vec{p} = m\vec{v}$$

Różnica wyrażeń $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ jest równa przyrostowi pędu $\Delta \vec{p}$. Zatem wzór (*wzór 191* na stronie 104) możemy wyrazić następująco: **przyrost pędu jest równy popędowi udzielonemu ciału:**

$$(\text{ wzór 193 }) \vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p}$$

Wzór ten po prostym przekształceniu przybierze postać:

$$(\text{ wzór 194 }) \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Jest to inna, najbardziej ogólna postać drugiej zasady dynamiki Newtona. Wzór ten jest bardzo przydatny przy rozwiązywaniu wielu ważnych zagadnień fizycznych. Będziemy go nieraz stosować.

Ⓡ Zamapiętać:

Wachadło Newtona

Rysunek 2.26: Film

Druga zasada dynamiki w innej postaci

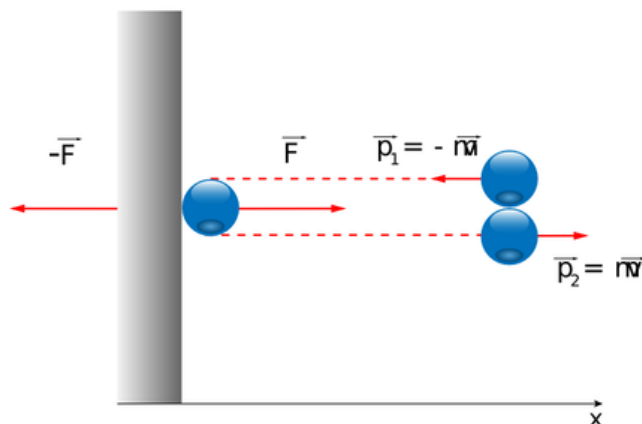
Siła działająca na ciało jest równa stosunkowi przyrostu pędu do czasu, w jakim ten przyrost występuje.

Zmiana pędu ciała wskutek oddziaływania jest równa popędowi siły działającej na to ciało.

Przykład 4

Piłka o masie $m = 0,1 \text{ kg}$ uderzyła w ścianę z prędkością równą $v = 20 \text{ m/s}$ prostopadle do ściany. Zetknięcie piłki ze ścianą trwało $\Delta t = 0,1 \text{ s}$. Wyznacz średnią siłę F , z jaką ściana działa na piłkę podczas uderzenia. Przyjmij, że zderzenie jest doskonale sprężyste, to znaczy, że po odbiciu od ściany piłka ma taką samą wartość prędkości jak przed uderzeniem, ale jej zwrot jest przeciwny niż przed zderzeniem (*Rysunek 2.27: Działanie ściany zmienia pęd piłki* na stronie 105).

Symbolem \vec{v} oznaczono tutaj końcową prędkość piłki, już po odbiciu od ściany. Tak więc początkową prędkość piłki wynosi $-\vec{v}$, gdyż ma tę samą wartość, ale przeciwny



zwrot

Rysunek 2.27: Działanie ściany zmienia pęd piłki

Odpowiedź: Najpierw obliczymy zmianę pędu, jakiej doznała piłka po uderzeniu w ścianę. Pęd piłki przed zderzeniem wynosił $\vec{p}_1 = -m\vec{v}$, zaś po zderzeniu $\vec{p}_2 = m\vec{v}$, zatem przyrost pędu wyniósł

$$(\text{wzór 195}) \Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = m\vec{v} - (-m\vec{v}) = m\vec{v} + m\vec{v} = 2m\vec{v}$$

Przyrost pędu piłki jest równy popędowi, jakiego ściana udzieliła piłce. Zgodnie z równaniem (wzór 193 na stronie 104) $\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p} = 2m\vec{v}$. Stąd $F = \frac{2mv}{\Delta t}$, więc

$$(\text{wzór 196}) F = \frac{2 \cdot 0,1 \text{ kg} \cdot 20 \text{ m/s}}{0,1 \text{ s}} = 40 \text{ N}$$

Widzimy zatem, że ściana działa na piłkę średnią siłą równą 40 N. Warto zwrócić uwagę, że w tym zderzeniu ściana także doznała popędu ze strony piłki. Jednak w praktyce nie zauważamy tego w postaci zmiany prędkości ściany - to ze względu na ogromną jej masę w porównaniu z masą piłki.

Pytania i problemy

1. Podaj definicję pędu ciała. Czy pęd jest wektorem? Odpowiedź uzasadnij.
2. Podaj definicję popędu siły. Czy popęd jest wektorem? Odpowiedź uzasadnij.
3. Wykaż, że jednostki pędu ciała i jednostki popędu siły są jednakowe.
4. Sformułuj drugą zasadę dynamiki Newtona, wykorzystując pojęcia pędu i popędu.
5. Pocisk o masie 0,01 kg uderza z prędkością 500 m/s w ścianę i grzęźnie w niej. Czas trwania ruchu pocisku w ścianie wynosi 0,001 s. Oblicz średnią siłę oporu działającą na pocisk w ścianie. Rozwiąż zadanie dwoma sposobami: korzystając z pojęcia pędu, korzystając z pojęcia przyspieszenia.

2.6 Zasada zachowania pędu

Najpierw zapoznamy się z pojęciem *układu odosobnionego*. Aby dokładnie opisać ruch określonego ciała, należy uwzględnić wszystkie siły działające na nie. Jednakże takie zadanie w praktyce jest niewykonalne ze względu na olbrzymią ilość tych sił. W rzeczywistości każde ciało jest otoczone wielką liczbą ciał bliższych i dalszych. Na szczęście, zwykle jednak tylko skończona niewielka liczba ciał oddziałuje znacząco na rozpatrywane ciało. Wszystkie inne oddziaływania w praktyce można śmiało pominać, jako że są one bardzo małe. Na przykład, jeżeli kamień

spada na Ziemię, to wszystkie inne siły poza siłą przyciągania Ziemi można zaniedbać, mimo że w rzeczywistości na kamień działają również siły przyciągania pochodzące od Księżyca, innych planet i Słońca. Nie uwzględniamy ich, gdyż są one bardzo małe (małe są również w tym przypadku siły oporu powietrza). Dlatego mamy prawo założyć, że na kamień działa tylko Ziemia. Możemy zatem rozpatrywać układ składający się z dwóch ciał – kamienia i Ziemi. Wszystkie pozostałe ciała można traktować jako zewnętrzne w stosunku do tego układu. Siły pochodzące od ciał spoza układu możemy ewentualnie uwzględniać jako poprawki dodawane do podstawowej siły.

Siły, którymi działają na siebie części składowe układu, nazywamy *siłami wewnętrznymi*. Siły oddziaływania z ciałami spoza układu nazywamy *siłami zewnętrznymi*. Układ nazywa się *odosobnionym* (lub *izolowanym*), jeżeli można zaniedbać siły zewnętrzne. Na przykład, Układ Słoneczny może być traktowany z bardzo dużą dokładnością jako układ odosobniony. Siła wewnętrzna wzajemnego oddziaływania Słońca i Ziemi jest około 800 miliardów razy większa od siły zewnętrznej oddziaływania Ziemi z najbliższą gwiazdą.

W wypadku układów odosobnionych obowiązuje prawo zachowania pędu, które można sformułować w następujący sposób:

Ⓡ **Zamknięta:**

Zasada zachowania pędu

Całkowity pęd układu odosobnionego jest stały i nie ulega zmianie podczas dowolnych procesów zachodzących w układzie.

Oczywiście, pędy poszczególnych ciał wchodzących w skład danego układu mogą się zmieniać, ale całkowity pęd układu, to znaczy wektorowa suma wszystkich pędów składowych, nie ulega zmianie.

Prawo to można wyprowadzić w sposób ścisły z zasad dynamiki Newtona. My wyprowadzimy je dla przypadku układu odosobnionego składającego się z dwóch ciał: A i B . Ciało B działa na ciało A siłą \vec{F}_{BA} , a ciało A na ciało B siłą \vec{F}_{AB} . Zgodnie z trzecią zasadą Newtona $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$, więc

$$(\text{wzór 197}) \quad \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$$

Obierzmy dwie bliskie chwile t_1 i t_2 . Załóżmy, że w chwili t_1 ciało A o masie m_A miało prędkość \vec{v}_{A1} , ciało B o masie m_B – prędkość \vec{v}_{B1} , zaś w chwili t_2 prędkości \vec{v}_{A2} i \vec{v}_{B2} , odpowiednio. Druga zasada Newtona dla ciała A (w postaci (wzór 197 na stronie 106)) ma kształt:

$$(\text{wzór 198}) \quad \vec{F}_{BA}(t_2 - t_1) = m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1}$$

a dla ciała B

$$(\text{wzór 199}) \quad \vec{F}_{AB}(t_2 - t_1) = m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1}$$

Po zsumowaniu stronami równań (wzór 198 na stronie 106) i (wzór 199 na stronie 106) otrzymamy

$$(\text{wzór 200}) \quad (\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB})(t_2 - t_1) = (m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1}) + (m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1})$$

Na podstawie wzoru (wzór 197 na stronie 106) lewa strona powyższego równania jest równa zeru. Po uporządkowaniu prawej strony otrzymamy

$$(\text{wzór 201}) \quad 0 = (m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2}) - (m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1})$$

Stąd

$$(\text{wzór 202}) \quad m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} = m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1}$$

Otrzymaliśmy równanie, które ma następującą interpretację: po lewej stronie mamy sumę pędów ciał A i B w chwili t_1 , a po prawej stronie – w chwili t_2 , zatem suma pędów całego układu składającego się z ciał A i B nie zmienia się w czasie. Możemy to zapisać krócej:

$$(\text{wzór 203}) \quad m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = \text{const}$$

lub

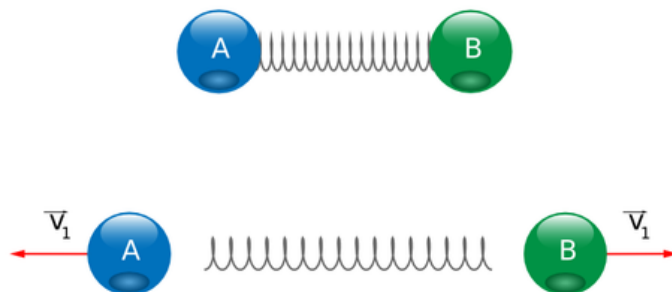
$$(\text{wzór 204}) \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{const}$$

W ten sposób, wychodząc z III zasady dynamiki Newtona, wyprowadziliśmy prawo zachowania pędu dla układu składającego się z dwóch ciał. Dla układu składającego się z wielu ciał prawo zachowania pędu wyrażone w postaci matematycznej ma postać:

$$(\text{wzór 205}) \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \vec{p}_D + \dots = \text{const}$$

Przykład 5

Rozważmy zagadnienie tzw. *rozpadu dwuciałowego*. Na rysunku *Rysunek 2.28: Dwie kulki A i B po zwolnieniu sprężyny rozlatują się w przeciwne strony* na stronie 107 przedstawione są dwie kulki A i B o masach m_A i m_B połączone nitką. Między kulkami znajduje się ściśnięta sprężyna, która je rozpycha. Napięcie nitki jest na granicy wytrzymałości. Wystarczy teraz wstawić między zwoje sprężyny jakieś ciało (w miejscu oznaczonym na rysunku strzałką), aby nitka nie wytrzymała dodatkowego napięcia. Nitka ulega zerwaniu, a kulki rozlatują się w przeciwne strony. Na podstawie prawa zachowania pędu oblicz stosunek ich mas, jeżeli znany jest stosunek ich prędkości.



Rysunek 2.28: Dwie kulki A i B po zwolnieniu sprężyny rozlatują się w przeciwne strony

Odpowiedź: Przed rozpadem obie kulki były w spoczynku, więc ich pędy były równe zero i całkowity pęd układu obu kulek wynosił zero. Zatem i po rozpadzie pęd układu, który jest równy sumie pędów obu kulek, musi być równy zero

$$(\text{wzór 206}) \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Ponieważ \vec{p}_1 i \vec{p}_2 mają przeciwne zwroty, równanie to w zapisie skalarnym ma postać

$$(\text{wzór 207}) p_1 - p_2 = 0$$

czyli

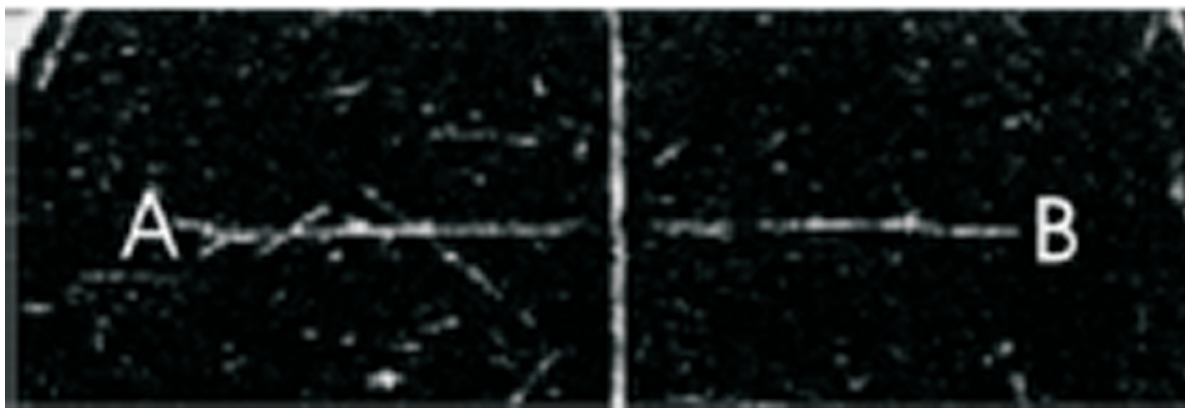
$$(\text{wzór 208}) m_A v_1 - m_B v_2 = 0$$

Kulki uzyskają jednakowe pędy co do wartości, ale ich zwroty są przeciwne. Przekształcając równanie (wzór 208 na stronie 107), otrzymujemy

$$(\text{wzór 209}) \frac{m_A}{m_B} = \frac{v_2}{v_1}$$

Widzimy z powyższego przykładu, że prawo zachowania pędu pozwala na porównywanie masy dwóch ciał bez użycia wagi. W mechanice nie stosujemy zwykle tej metody pomiaru ze względu na trudności związane z dokładnym wyznaczeniem prędkości w obecności tarcia. Jednakże w fizyce cząstek elementarnych i w fizyce jądrowej korzystamy często z tej metody pomiaru mas.

Na *Rysunek 2.29: Rozpad jądra na dwa jądra wtórne A i B*, zdjęcie z komory Wilsona na stronie 108 przedstawione jest zdjęcie śladów różnych cząstek, otrzymane w specjalnej komorze do badania cząstek elementarnych, tak zwanej komorze Wilsona

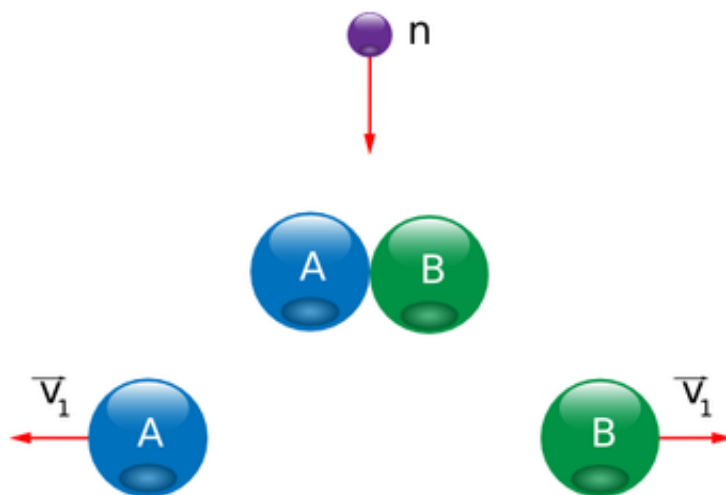


Rysunek 2.29: Rozpad jądra na dwa jądra wtórne A i B, zdjęcie z komory Wilsona

W środku komory widoczna jest cienka płytką zawierająca uran. Na skutek pochłonięcia neutronu jądro uranu rozpadło się na dwa mniejsze jądra rozbiegające się w przeciwne strony. Ich ślady A i B są widoczne na zdjęciu. Prędkość jąder pochodnych (tzn. powstałych w czasie rozpadu) wyznacza się na podstawie znajomości ich zasięgu. Znając stosunek ich prędkości, można wyznaczyć stosunek ich mas.

Układ dwóch kulek na *Rysunek 2.28: Dwie kulki A i B po zwolnieniu sprężyny rozlatują się w przeciwne strony* na stronie 107 jest uproszczonym modelem mechanicznym rozpadu jądra na dwa fragmenty. Rysunek *Rysunek 2.30: Rozpad jądra pod wpływem pochłonięcia powolnego neutronu* na stronie 109 przedstawia w uproszczonej postaci rozpad jądra na dwa jądra wtórne A i B pod wpływem pochłonięcia neutronu n . Części A i B wewnątrz jądra mają jednoimienne ładunki elektryczne – dodatnie. Odpychają się więc one dalekozasięgowymi siłami elektrycznymi (mają jednoimienne ładunki elektryczne – dodatnie). Jądro nie rozpada się jednak, ponieważ mocniejsze są przyciągające siły jądrowe (krótkozasięgowy), które utrzymują części A i B wewnątrz jądra macierzystego (*Rysunek 2.30: Rozpad jądra pod wpływem pochłonięcia powolnego neutronu* na stronie 109a). Mamy tu sytuację taką, jak w modelu mechanicznym, gdzie ściśnięta sprężyna odpycha kulki, a rolę przyciągających sił jądrowych odgrywa napięcie nitki łączącej obie kulki.

Neutron, wchodząc do jądra, „rozpycha” części A i B, oddalając je nieco od siebie. Powoduje to, że krótkozasięgowy siły jądrowe nie są już dłużej w stanie utrzymać części jądra w zwiększonej odległości (odpowiada to przerwaniu nitki łączącej kulki na rys. *Rysunek 2.28: Dwie kulki A i B po zwolnieniu sprężyny rozlatują się w przeciwne strony* na stronie 107). Teraz dochodzą do głosu dalekozasięgowy odpychające siły elektryczne (sprężyna zostaje zwolniona). Nadają one fragmentom A i B odpowiednie prędkości zgodne z zasadą zachowania pędu – jądro rozpada się (*Rysunek 2.30: Rozpad jądra pod wpływem pochłonięcia powolnego neutronu* na stronie 109b).



Rysunek 2.30: Rozpad jądra pod wpływem pochłonięcia powolnego neutronu

Przykład 6

Pocisk o masie $m_p = 10\text{ g}$ jest wyrzucony z prędkością $v_p = 800\text{ m/s}$ z karabinu o masie $m_k = 4\text{ kg}$ (Rysunek 2.31: *Odrzut karabinu* na stronie 109). Powiedzmy, że niewprawy strzelec trzyma luźno karabin. Wyznamy prędkość odrzutu karabinu v_k w chwili, gdy kolba karabinu uderzy strzelca w bark.



Rysunek 2.31: Odrzut karabinu

Odpowiedź: Przed wystrzałem pocisk i karabin są w spoczynku, więc ich całkowity pęd jest równy zeru. Zatem zgodnie z zasadą zachowania pędu, po wystrzale ich wypadkowy pęd jest też równy zeru. Czyli

$$(\text{wzór 210}) 0 = m_k v_k - m_p v_p$$

lub

$$(\text{wzór 211}) m_k v_k = m_p v_p$$

skąd

$$(\text{wzór 212}) v_k = \frac{m_p v_p}{m_k}$$

Zatem

$$(\text{wzór 213}) v_k = \frac{0,01 \text{ kg} \cdot 800 \text{ m/s}}{4 \text{ kg}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Karabin uderza w bark z prędkością $v_k = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Powyższy przykład ilustruje nam **zasadę napędu odrzutowego rakiety**. Karabin możemy traktować jako raketę, a pocisk jako **porcję paliwa** wyrzucanego z prędkością \vec{v}_p . Przy wyrzucaniu porcji paliwa o masie m_p raketa uzyskuje dodatkową prędkość \vec{v}_k .

W rzeczywistości przyrost prędkości rakiety jest większy. Należy uwzględnić poprawkę wynikającą z utraty masy rakiety zużywającej stopniowo porcje paliwa. Mamy tu analogię do karabinu maszynowego. Karabin maszynowy przy każdym wystrzale traci tyle masy, ile ma pocisk. Mianownik we wzorze ([wzór 212](#) na stronie 110) zmniejsza się, więc wartość wyniku (v_k) zwiększa się.



Wskazówka:

Zasadę napędu odrzutowego można wykorzystać również do wprawienia w ruch łódki na jeziorze, bez używania wiosel. Trzeba mieć w łódce pewną liczbę kamieni. Wyrzucając kamienie za rufę, nadajemy łódce coraz większą prędkość. By uzyskać jak najlepszy efekt, winniśmy wyrzucać każdy kamień poziomo, nadając mu pęd o jak największej wartości.

Dynamika - odrzut, eksplodujący granat. Prawo zachowania pędu

Rysunek 2.32: Animacja

Pytania i problemy

1. Jaki układ ciał nazywamy izolowanym (odosobnionym)?
2. Sformułuj zasadę zachowania pędu i wyjaśnij jej zastosowanie na przykładzie.
3. Czy w układach nieizolowanych obowiązuje zasada zachowania pędu? Odpowiedź uzasadnij.
4. Wyjaśnij zasadę napędu rakiety. Którą zasadę dynamiki należy tutaj zastosować?
5. Na [Rysunek 2.29: Rozpad jądra na dwa jądra wtórne A i B](#), [zdjęcie z komory Wilsona](#) na stronie 108 przedstawiono zdjęcie śladów dwóch jąder A i B powstałych po rozpadzie jądra uranu. Jeżeli wiemy, że stosunek ich prędkości wynosi k , ile wynosi stosunek ich mas?
6. Pocisk o masie $m = 10 \text{ kg}$, lecący poziomo z prędkością $v = 400 \text{ m/s}$, uderza w worek z piaskiem i grzęźnie w nim. Worek znajduje się na platformie poruszającej się w stronę przeciwną do pocisku. Oblicz prędkość, jaką miała platforma, jeżeli po uderzeniu pocisku zatrzymała się. Masa platformy z piaskiem wynosi $M = 800 \text{ kg}$.

2.7 Siły bezwładności, układy nieinercjalne

Siły bezwładności zostały szczegółowo omówione w klasie pierwszej (patrz rozdział [1.4 Siła dośrodkowa – epodręcznik kl.1.](#) – zakres podstawowy). Tutaj ograniczymy się tylko do przypomnienia podstawowych pojęć z tego zakresu.

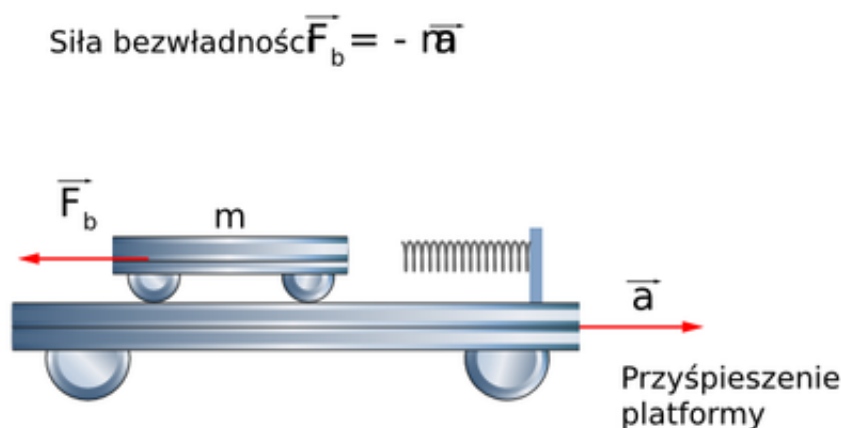
W poprzednich rozdziałach opisywaliśmy zachowanie się ciał w układach inercjalnych. Teraz rozpatrzmy ruch ciał w układach nieinercjalnych, które poruszają się z przyspieszeniem względem układów inercjalnych.

Przykładem układu nieinercjalnego może być (omówiony w podrozdziale [2.1 Pierwsza zasada dynamiki Newtona](#) na stronie 82) tramwaj ruszający z przystanku z przyspieszeniem. Pasażerowie doskonale zdają sobie sprawę, że znajdują się w przyspieszającym tramwaju, czyli w układzie nieinercjalnym, gdyż odczuwają siły bezwładności działające na wszystkie ciała.

W celu prześledzenia działania sił bezwładności rozważmy szczególny przypadek, gdy na ruchomej platformie znajduje się wózek mogący poruszać się prawie bez tarcia ([Rysunek 2.33: Dwie interpretacje ruchu wózka względem platformy](#) na stronie 111). Gdy platforma porusza się w prawo ze stałym przyspieszeniem, to wózek względem platformy porusza się w lewo z takim samym przyspieszeniem, ale zwróconym przeciwnie. Opiszemy ruch wózka z punktu widzenia dwóch różnych obserwatorów: jednego znajdującego się na ziemi, „nieruchomego” – w układzie inercjalnym – oraz drugiego, „ruchomego”, znajdującego się na platformie – w układzie nieinercjalnym.

Poniżej podajemy, jak obaj obserwatorzy interpretują ten sam fakt doświadczalny: ruch wózka względem platformy.

Dla obserwatora „nieruchomego” wózek o masie m jest w spoczynku; na wózek nie działa żadna siła. Dla obserwatora „ruchomego” wózek ma przyspieszenie $-\vec{a}$; na wózek działa siła bezwładności $\vec{F}_b = -m\vec{a}$

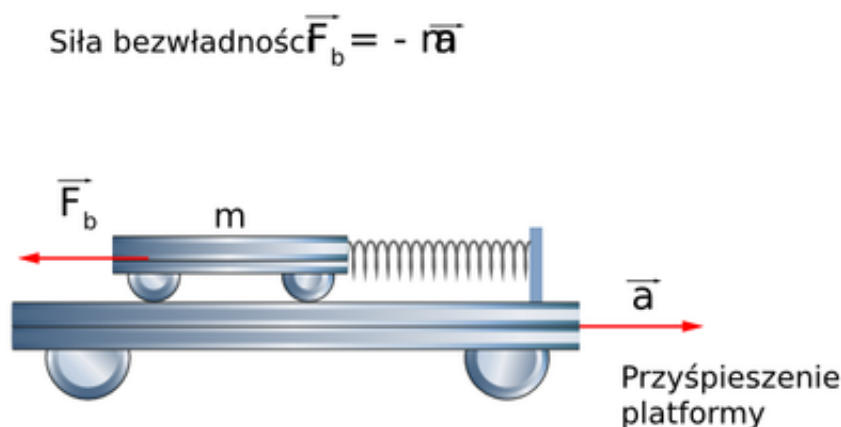


Rysunek 2.33: Dwie interpretacje ruchu wózka względem platformy

- *Układ inercjalny* - (obserwator „nieruchomy”): na wózek nie działają żadne siły skierowane poziomo i wózek pozostaje w spoczynku względem ziemi, zgodnie z zasadą bezwładności. Platforma porusza się z przyspieszeniem \vec{a} , niejako „uciekając” spod wózka.

- *Układ nieinercyjny* - (obserwator „ruchomy”): na wózek nie działają żadne siły, które by pochodziły od innych ciał, a mimo to wózek ma przyspieszenie względem platformy, które wynosi $-\vec{a}$. To siła bezwładności nadaje wózkowi przyspieszenie zgodnie z drugą zasadą dynamiki: $\vec{F}_b = -m\vec{a}$.

Mamy tu zdecydowanie różny opis tego samego zjawiska w dwóch różnych układach odniesienia. W układzie inercyjnym siła bezwładności nie występuje, obserwator „nieruchomy” uzna siłę bezwładności za pozorną – fikcyjną. Natomiast obserwator „ruchomy” – będący w układzie nieinercyjnym – uzna siłę bezwładności za realną, może ją zmierzyć. Jeżeli zaczepi sprężynę znajdującą się na końcu wózka do podpórki platformy (*Rysunek 2.34: Siły w układzie inercyjnym i nieinercyjnym* na stronie 112), to sprężyna zostanie napięta, wydłuży się, a wózek będzie wtedy w spoczynku względem platformy. Wydłużenie tej sprężyny jest miarą siły bezwładności w układzie nieinercyjnym. Jednakże obserwator „nieruchomy” zinterpretuje wydłużenie sprężyny inaczej: to platforma, poruszając się ruchem przyspieszonym i oddalając się od wózka, powoduje rozciągnięcie sprężyny i działa za jej pośrednictwem na wózek. Wydłużenie sprężyny jest miarą oddziaływania platformy na wózek zgodnie z właściwościami sił sprężystych.



W układzie nieinercyjnym platformy naciągnięta sprężyna równoważy siłę bezwładności; powoduje to, że wózek względem platformy pozostaje nieruchomy. Tym samym siła sprężystości jest miarą siły bezwładności. Dla obserwatora w układzie inercyjnym siła sprężystości \vec{F}_s , z jaką platforma, za pośrednictwem sprężyny, działa na wózek powoduje przyspieszony ruch wózka w prawo

Rysunek 2.34: Siły w układzie inercyjnym i nieinercyjnym

Rozstrzygniemy ten spór między obydwojema obserwatorami. Przede wszystkim zauważmy, że pojęcie siły bezwładności nie jest zgodne z trzecią zasadą dynamiki. Zasada ta wymaga, aby siła była wynikiem oddziaływania dwóch lub więcej ciał. Siła bezwładności nie pochodzi od jakiegokolwiek innego ciała.

W układzie nieinercyjnym wszystkie ciała swobodne doznają przyspieszenia, które jest równe co do wartości przyspieszeniu a całego układu, ale o zwrocie przeciwnym. Dlatego we wzorze na siłę bezwładności \vec{F}_b pojawia się znak minus

$$(\text{wzór 214}) \vec{F}_b = -m\vec{a}$$

(gdzie \vec{a} jest przyspieszeniem układu nieinercyjnego). Wzór ten ma zastosowanie w układach nieinercyjnych, nie zawiera realnej siły, ale siłę specyficzną – *siłę bezwładności*.

Do sił bezwładności nie stosuje się trzecia zasada dynamiki Newtona, gdyż siły te są wywołane przez przyspieszenie układu odniesienia i nie pochodzą z oddziaływań z innymi ciałami.

Siły bezwładności są siłami pozornymi, gdyż nie mogą należeć do żadnego z czterech podstawowych rodzajów oddziaływań występujących w przyrodzie.

Siły bezwładności nie występują w ogóle w układach inercyjnych i jeżeli ktoś się nimi posługuje w tych układach, robi poważny błąd.

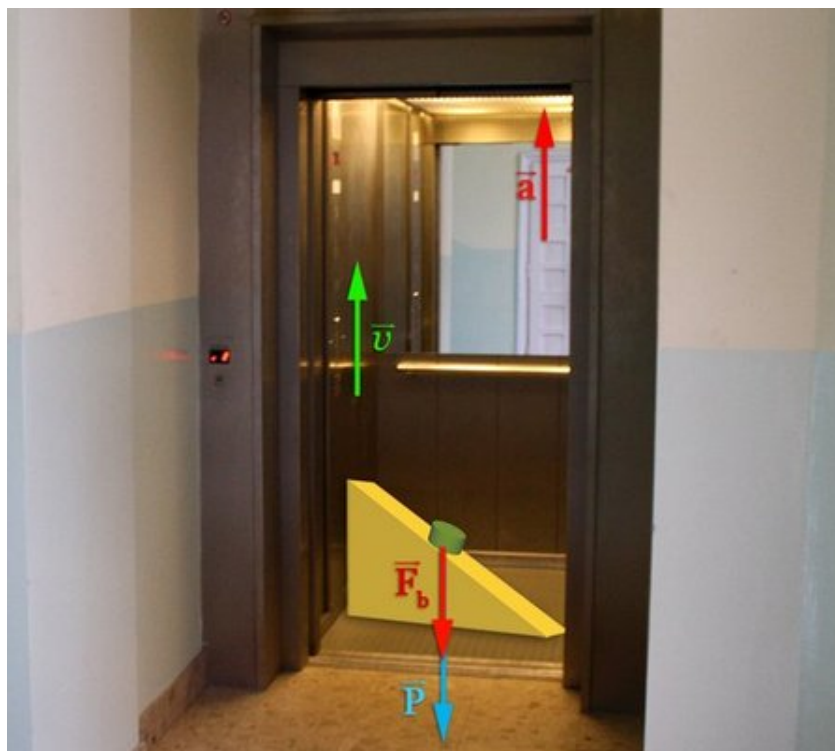
Przy rozwiązywaniu różnych problemów fizycznych wykorzystywanie pojęcia sił bezwładności w układach nieinercyjnych często znakomicie ułatwia zadanie. Dozwolone jest wtedy stosowanie ogólnego równania Newtona zawierającego „poprawkę” na siłę bezwładności:

$$(\text{ wzór 215 }) \vec{a} = (\vec{F} + \vec{F}_b) / m$$

gdzie \vec{F} oznacza wypadkową wszystkich realnych sił działających na ciało.

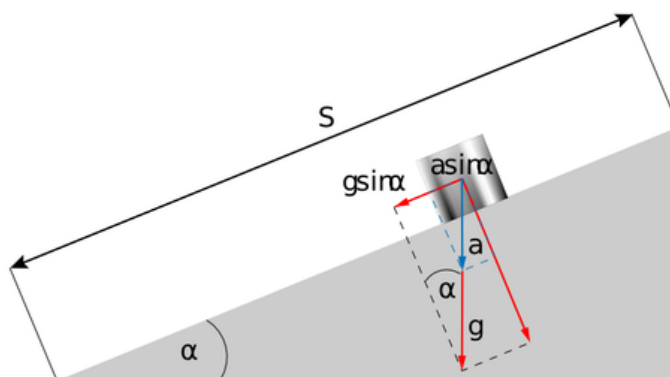
Przykład 7

W windzie znajduje się równia pochyła (*Rysunek 2.35: Klocek na równi pochyłej w przyspieszającej windzie* na stronie 113). Gdy winda wznosi się pionowo w górę ruchem jednostajnie przyspieszonym, czas zsuwania klocka po równi od wierzchołka do podstawy jest $n = 1, 2$ razy krótszy od analogicznego czasu zsuwania się wtedy, kiedy winda jest w spoczynku – tarcie jest znikome. Ile wynosi przyspieszenie windy?



Rysunek 2.35: Klocek na równi pochyłej w przyspieszającej windzie

Odpowiedź: Załóżmy, że kąt nachylenia równi do poziomu wynosi α , a droga wzdłuż równi wynosi s (*Rysunek 2.36: Rozkład wektorów przyspieszenia g i a na równi* na stronie 114).



Rysunek 2.36: Rozkład wektorów przyspieszenia g i a na równi

Rozważmy dwa przypadki:

- a) winda jest w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym – *układ inercjalny*,
- b) winda porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym w górę - *układ nieinercjalny*.

W przypadku a) ruch klocka wzdłuż równi odbywa się z przyspieszeniem

$$(\text{wzór 216}) g_s = g \sin \alpha$$

Zatem drogę s wzdłuż równi wyrazimy wzorem:

$$(\text{wzór 217}) s = \frac{g \sin \alpha}{2} t_a^2$$

W przypadku b) winda jest układem nieinercjalnym. Oznacza to, że na klocek działa, oprócz siły ciężkości $m \cdot \vec{g}$ (zwróconej w dół), także siła bezwładności $\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}$. Przyspieszenie windy \vec{a} zwrócone jest ku górze, więc siła bezwładności \vec{F}_b ma zwrot do dołu, tak jak siła ciężkości. To zaś oznacza, że wypadkowa tych dwóch sił ma także zwrot w dół a wartość jej wynosi $\vec{F}_{\text{wyp}} = m \cdot (\vec{a} + \vec{g})$. Widać więc, że klocek na przyspieszającej w górę równi zachowuje się tak, jakby przyspieszenie ziemskie miało wartość nie g , lecz $(a + g)$. Możemy zatem stwierdzić, że ruch klocka wzdłuż równi odbywa się z przyspieszeniem

$$(\text{wzór 218}) (a + g)_s = (a + g) \sin \alpha$$

Wzór na drogę s wzdłuż równi ma zatem postać:

$$(\text{wzór 219}) s = \frac{(a + g) \sin \alpha}{2} t_b^2$$

Dzieląc równania ([wzór 219](#) na stronie 114) i ([wzór 217](#) na stronie 114) stronami, po prostym przekształceniu otrzymamy:

$$(\text{wzór 220}) \frac{t_b^2}{t_a^2} = \frac{a + g}{g}$$

Zgodnie z warunkami zadania stosunek czasów $t_b/t_a = n$, zatem

$$(\text{wzór 221}) n^2 = \frac{a + g}{g}$$

Stąd

$$(\text{ wzór 222 }) a = (n^2 - 1) g$$

Podstawiając $n = 1, 2$ otrzymamy, że przyspieszenie windy wynosi

$$(\text{ wzór 223 }) a = 0,44g = 4,32 \text{ m/s}^2$$

Przyjeliśmy, że przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Pytania i problemy

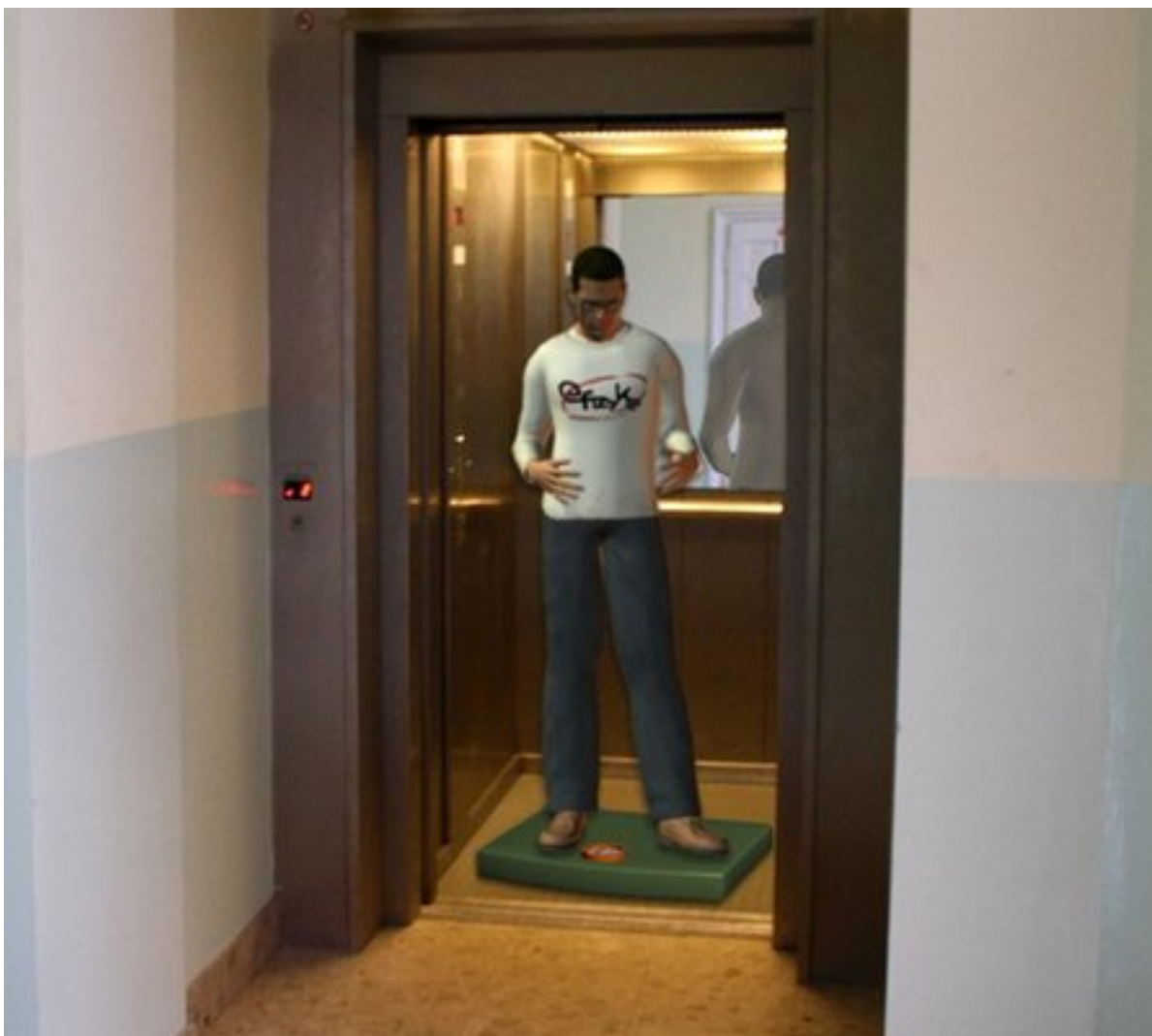
1. Podaj przykłady układów odniesienia, w których pojawiają się siły bezwładności. Czym charakteryzują się te układy?
2. Sformułuj drugą zasadę dynamiki Newtona dla ciała w układzie nieinercyjnym. Na wybranym przykładzie wyjaśnij zastosowanie tej zasady.
3. Nazwij podstawowe cztery oddziaływania w przyrodzie. Czy siły bezwładności stanowią przykład któregoś z nich?
4. W tramwaju pod sufitem zawieszono na nici kulę. Tramwaj porusza się z przyspieszeniem $a = 4,9 \text{ m/s}^2$. O jaki kąt niech odchyła się od pionu?

2.8 Doświadczenie „Inercja”

Celem doświadczenia jest zbadanie sił bezwładności w windzie. W pierwszej klasie omawialiśmy zagadnienie sił bezwładności (*przykład* w rozdziale *1.6 Siły bezwładności* pierwszego tomu), a obecnie wykonamy doświadczenie. Najlepiej przeprowadzić je w windzie szybkobieżnej w wysokim wieżowcu, na przykład w Pałacu Kultury i Nauki w Warszawie. Doświadczenie wykonujemy w następujący sposób:

Stajemy na wadze „lazienkowej” i notujemy wskazania wagi w czasie postoju i w siedmiu fazach ruchu windy:

1. Postój na dole,
2. Ruch przyspieszony w górę,
3. Ruch jednostajny w górę,
4. Ruch opóźniony w górę,
5. Postój na górze,
6. Ruch przyspieszony w dół,
7. Ruch jednostajny w dół,
8. Ruch opóźniony w dół.



Rysunek 2.37: Wskazania wagi w windzie informują nas o sile bezwładności

Zauważamy, że wskazania wagi w poszczególnych stanach ruchu windy nie są takie same. Wskazania wagi informują nas o sile bezwładności działającej na nasze ciało. Niech P_0 będzie wskazaniem wagi w pierwszym i piątym przypadku, tj. w układzie „nieruchomym”, gdzie siły bezwładności nie występują. P_0 oznacza siłę ciężkości naszego ciała mierzoną w kG (tutaj wyjątkowo będziemy się posługiwać jednostką siły kG, chociaż nie wchodzi ona do układu jednostek SI). Wskazania wagi w pozostałych przypadkach wyrażą się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 224}) \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{F}_b$$

gdzie \vec{F}_b oznacza siłę bezwładności.

Obliczamy ze wzoru ([wzór 224](#) na stronie 116) wartość siły bezwładności dla każdej fazy ruchu windy, czyli

$$(\text{wzór 225}) \vec{F}_b = |\vec{P} - \vec{P}_0|$$

Wyniki obliczeń wpisujemy do tabelki pomiarów (tab. [Rysunek 2.38: Tabelka pomiarów](#) na stronie 117), gdzie już uprzednio wpisaliśmy wskazania wagi P . Jeśli chcemy w zwarty sposób zaznaczyć w tabeli **zwrot** siły bezwładności, możemy skorzystać z wyrażenia

$$(\text{wzór 226}) \vec{F}_b = \vec{P} - \vec{P}_0$$

Dodatni wynik tego odejmowania oznacza, że wartość P jest większa niż P_0 ; w tym przypadku siła F_b ma zwrot w dół, zwiększa ona ciężar P_0 . Ujemny wynik oznacza przypadek przeciwny: siła F_b ma zwrot do góry, powodując w efekcie zmniejszenie ciężaru P_0 .

Faza ruchu windy	Wskazanie wagi P (kG)	Siła bezwładności F_b (kG)	Przyspieszenie windy a (m/s ²)

Rysunek 2.38: Tabelka pomiarów

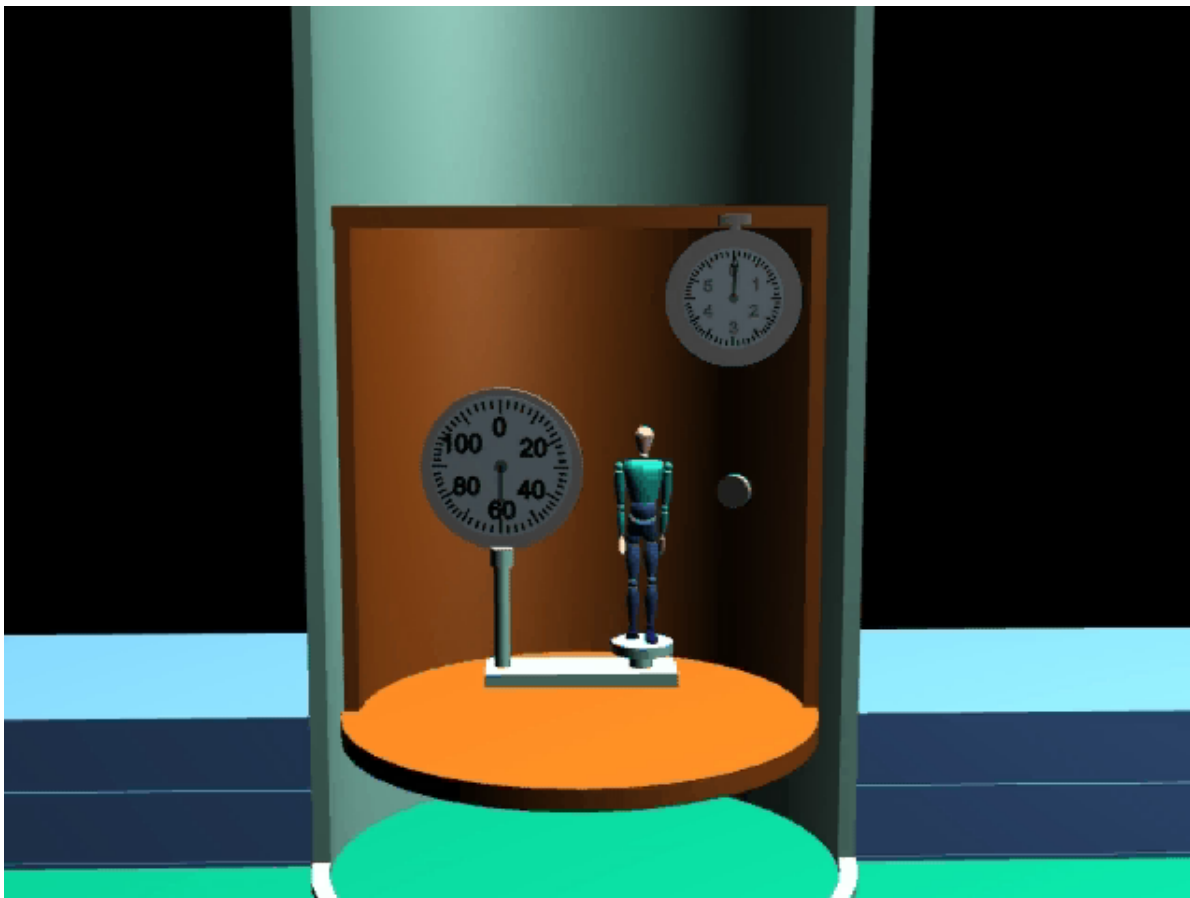
Wypełniamy ostatnią rubrykę tabelki i zapisujemy wniosek końcowy z naszego doświadczenia.

Doświadczenie to możesz wykonać też wirtualnie, które wzbogacimy o pomiar czasu stoperem za pomocą animacji, wykonując następujące kroki:

1. Uruchom animację kliknięciem myszy – stoper uruchamia się sam w momencie, gdy winda rusza.
2. Obserwuj ruch windy. Notuj wskazania wagi i odczyt stopera w każdej fazie ruchu windy:
 - a. Postój windy – zanotuj wskazanie wagi (jednostki),
 - b. Ruch przyspieszony w górę – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - c. Ruch jednostajny w górę – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - d. Ruch opóźniony w górę – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - e. Postój na górze – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - f. Ruch przyspieszony w dół – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - g. Ruch jednostajny w dół – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - h. Ruch opóźniony w dół – zanotuj wskazanie wagi i stopera (pamiętaj o jednostkach),
 - i. Postój windy na dole.

Wpisz te dane do tabelki pomiarów w sprawozdaniu. Następnie, powtórz pomiary. Moment odczytu stopera zależy od czynników przypadkowych (twój refleks). Dlatego, tak jak w „realu” za każdym razem uzyskasz nieco inny odczyt na stoperze - to pozwoli ci właściwie ocenić niepewności pomiarowe doświadczenia (waga jest wyskalowana w kG). Niepewności ΔP i Δt oceń tak, jak w doświadczeniu realnym.

3. Wykonaj obliczenia: a) przyspieszeń windy a , b) odległości między piętrami H .
4. Wykonaj sprawozdanie z doświadczenia, tak jak w doświadczeniu realnym.



Wirtualne wykonanie ćwiczenia "inercja"

Rysunek 2.39: Animacja

[PDF](#) O dziesięć mniej

2.9 Siły w ruchu po okręgu

Z problematyką ruchu po okręgu i sił towarzyszących takiemu ruchowi zetknęliśmy się już w pierwszym tomie e-podręcznika (rozdziały [1.3 Ruch jednostajny po okręgu](#), [1.4 Siła dośrodkowa](#) i [1.6 Siły bezwładności](#)). W tomie drugim (rozdział [1.15 Ruch jednostajny po okręgu](#) na stronie 71) przypomnieliśmy podstawy kinematyki ruchu po okręgu.

Przypomnimy teraz, w postaci zbiorczej syntezy zilustrowanej przykładowym problemem, podstawowe zagadnienia związane z dynamiką ruchu jednostajnego po okręgu.

Przyspieszenie dośrodkowe

1. Ruch po okręgu musi być ruchem przyspieszonym. Nawet jeżeli nie zmienia się wartość prędkości w takim ruchu, to nieustannie zmienia się jej kierunek. Tak więc ciało w ruchu jednostajnym po okręgu doznaje przyspieszenia dośrodkowego zgodnie z wzorem ([wzór 227](#) na stronie 118)

$$(\text{wzór 227}) \quad a_r = \frac{v^2}{r}$$

2. Jeśli wprowadzimy do opisu ruchu po okręgu wielkości ω (prędkość kątowna), ν (częstotliwość obiegu) oraz T (okres obiegu), to związki tych wielkości z prędkością v oraz promieniem okręgu r pozwalają zapisać przyspieszenie dośrodkowe jeszcze na trzy sposoby, równoważne ze wzorem (wzór 227 na stronie 118):

$$(\text{wzór 228}) \quad a_r = \omega^2 \cdot r$$

$$(\text{wzór 229}) \quad a_r = 4\pi^2 \cdot \nu^2 \cdot r$$

$$(\text{wzór 230}) \quad a_r = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$$

3. Przyspieszenie dośrodkowe jest wektorem zawsze prostopadłym do wektora prędkości i skierowanym dokładnie ku środkowi okręgu.

Siła dośrodkowa

Druga zasada Newtona mówi, że przyspieszenie ciała jest wywołane siłą. Zatem w ruchu po okręgu przyczyną występowania przyspieszenia dośrodkowego jest siła zwana *siłą dośrodkową* i oznaczana symbolem F_r . Siłę dośrodkową zgodnie ze wzorem Newtona $F_r = ma_r$, możemy przedstawić następująco:

$$(\text{wzór 231}) \quad F_r = \frac{mv^2}{r}$$

gdzie m – masa ciała.

Podobnie jak w przypadku przyspieszenia dośrodkowego, siła dośrodkowa może być wyrażona za pomocą trzech innych, równoważnych wzorów:

$$(\text{wzór 232}) \quad F_r = m\omega^2 r$$

$$(\text{wzór 233}) \quad F_r = 4\pi^2 m \nu^2 r$$

$$(\text{wzór 234}) \quad F_r = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

Na mocy drugiej zasady dynamiki kierunek i zwrot przyspieszenia jest zgodny z kierunkiem i zwrotem działającej siły. Siła dośrodkowa jest więc skierowana do środka okręgu.

Siła dośrodkowa nie jest rodzajem oddziaływania - określenie „dośrodkowa” opisuje rolę, jaką spełnia siła. W roli siły dośrodkowej mogą występować różne siły, np. siła grawitacji, siła tarcia, siła sprężystości, siła elektryczna czy siła magnetyczna.

Wzór (wzór 231 na stronie 119) opisuje zapotrzebowanie na siłę dośrodkową, by zapewnić ruch jednostajny ciała o masie m po okręgu o promieniu r z prędkością liniową v . Analogiczną interpretację mają wzory (wzór 232 na stronie 119)-(wzór 234 na stronie 119).

Nieinercjalny wirujący układ odniesienia. Siła odśrodkowa

W układzie nieinercjalnym, obracającym się razem z ciałem poruszającym się po okręgu, występuje siła bezwładności. Jest ona przeciwnie skierowana do przyspieszenia dośrodkowego tego układu, czyli od środka okręgu. Stąd siła ta nosi nazwę siły odśrodkowej.

Jak każda siła bezwładności, tak siła odśrodkowa wyraża się ogólnym wzorem:

$$(\text{wzór 235}) \quad \vec{F}_{\text{od}} = -m \cdot \vec{a}_r$$

Uwzględniając wzór (wzór 236 na stronie 119) możemy zatem zapisać wartość tej siły jako:

$$(\text{wzór 236}) \quad \vec{F}_{\text{od}} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Porównując wzory (wzór 236 na stronie 119) i (wzór 231 na stronie 119) można odnieść wrażenie, że wartości siły odśrodkowej i dośrodkowej są sobie równe. Pamiętać jednak należy, że równość ta obowiązuje tylko w sytuacji

„statycznej”, gdy w wirującym układzie nieinercyjnym rozpatrywane ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym.

Jak każda siła bezwładności, tak siła odśrodkowa jest siłą pozorną: nie podlega ona III zasadzie dynamiki Newtona i występuje jedynie w nieinercyjnym wirującym układzie odniesienia. Jeżeli chcemy opisać ruch ciała w takim układzie, stosując do tego II zasadę dynamiki, to siłę odśrodkową dodajemy - wektorowo - do wszystkich sił realnych działających na to ciało.

Przykład 8

Kto z nas nie jeździł na karuzeli? Znamy z własnego doświadczenia, jak na karuzeli działa odśrodkowa siła bezwładności. Jak opisuje działające siły obserwator ruchomy, a jak obserwator nieruchomy?

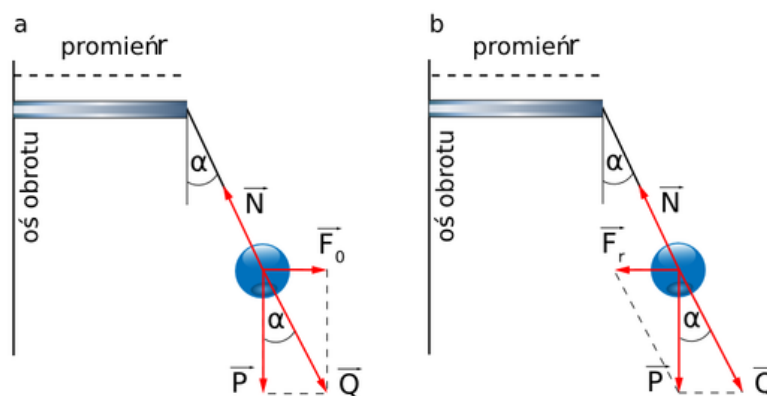
Odpowiedź:

Obserwator ruchomy, który obraca się wraz z karuzelą i patrzy na pasażera siedzącego w foteliku obok, stwierdzi istnienie siły odśrodkowej. To ona powoduje, że w czasie ruchu karuzeli lina, na której jest zawieszony fotelik, odchyła się od pionu o kąt α (na *Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120 fotelik z pasażerem jest zastąpiony kółkiem). Rozkład sił w układzie ruchomym – nieinercyjnym – przedstawia *Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120a.

Suma sił działających na fotelik i pasażera musi być równa zero, aby byli oni nieruchomi w tym układzie. Działają tu trzy siły: siła ciężaru \vec{P} , siła odśrodkowa \vec{F}_{od} i siła sprężystości napiętej liny \vec{N} .

Rzeczywiście suma wektorowa tych sił jest równa zero, bo sumą sił \vec{P} i \vec{F}_{od} jest siła \vec{Q} napinająca linę, zaś w wydłużonej nieco linie powstaje siła reakcji (siła naciągu liny) \vec{N} , która jest równa sile \vec{Q} , lecz ma przeciwny zwrot.

a) Obserwator ruchomy: siła odśrodkowa powoduje odchylenie liny od pionu, złożenie sił \vec{P} i \vec{F}_{od} daje siłę \vec{Q} , która jest równoważona przez \vec{N} . b) Obserwator nieruchomy: odchylenie liny od pionu wytwarza poziomą siłę wypadkową (sił \vec{P} i \vec{N}) \vec{F}_r , siły



dośrodkowej

Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego

Obserwator nieruchomy (układ inercjalny) stwierdzi, że na pasażera działają dwie siły: ciężkości \vec{P} oraz sprężystości (naprężenia) liny \vec{N} . Zanim karuzela zaczęła się kręcić, siły te miały ten sam pionowy kierunek, przeciwne zwroty i jednakowe wartości; równoważyły się zatem. Wprawienie karuzeli w obrót spowodowało odchylenie fotelika od pionu. Zmieniło to kierunek działania siły \vec{N} , spowodowało także wzrost jej wartości. Siły \vec{P} i \vec{N} nie są teraz współliniowe, więc nie mogą się równoważyć. Ich wypadkowa, \vec{F}_r , jest skierowana poziomo, gdy lina przestaje się już odchyłać. Ta siła właśnie pełni rolę siły dośrodkowej powodującej, że torem fotelika nie jest linia prosta, ale okrąg.

Uzupełnimy powyższe opisy wyprowadzeniem wzorów na wartość kąta α , o jaki odchyła się od pionu lina karuzeli oraz wartość siły sprężystości (naprężenia) \vec{N} samej liny.

W tym celu zauważmy, że skoro

$$\vec{F}_r = \vec{P} + \vec{N}$$

to:

$$\vec{P} = \vec{F}_r - \vec{N}$$

Możemy teraz wprowadzić siłę $\vec{Q} = -\vec{N}$ (*Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120b). Pozwala to stwierdzić, że

$$\vec{P} = \vec{F}_r + \vec{Q}$$

Zatem ciężar \vec{P} można matematycznie rozłożyć na dwie siły składowe: \vec{F}_r , skierowaną poziomo i zwróconą ku środkowi okręgu oraz \vec{Q} skierowaną wzdłuż liny (*Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120b). Siła \vec{Q} jest równoważona przez siłę naciągu liny \vec{N} .

Jak widać na rysunku *Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120

$$(\text{wzór 237}) \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\text{od}}}{P} = \frac{F_r}{P}$$

Ponieważ $F_r = m\omega^2 r$ oraz $P = mg$, więc

$$(\text{wzór 238}) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Z kolei $\cos \alpha = \frac{P}{Q} = \frac{P}{N}$. Daje to nam

$$(\text{wzór 239}) N = \frac{P}{\cos \alpha}$$

Zatem, im większa jest prędkość obrotów - prędkość kątowna karuzeli, tym większy jest kąt α . Z kolei wraz ze wzrostem kąta α rośnie wartość siły naprężenia liny \vec{N} (bo maleje wartość $\cos \alpha$).

Pytania i problemy

1. W jaki sposób pasażer karuzeli (*Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120a) wyjaśni dlaczego znajduje się w stanie spoczynku względem krzesła? W jaki sposób scharakteryzuje działającą na niego siłę bezwładności?
2. Posługując się rysunkiem *Rysunek 2.40: Siła działająca na fotelik z punktu widzenia obserwatora ruchomego i nieruchomego* na stronie 120b, zaproponuj wyjaśnienie, które przedstawi obserwator nieruchomy w celu opisanego przyczyny ruchu pasażera karuzeli.
3. Dziewczynka o masie $m = 50 \text{ kg}$ huśta się na huśtawce. Jaką siłą działa ona na siodelko huśtawki podczas przejścia przez najniższy punkt z prędkością $v = 5 \text{ m/s}$? Linki huśtawki mają długości $l = 4 \text{ m}$.

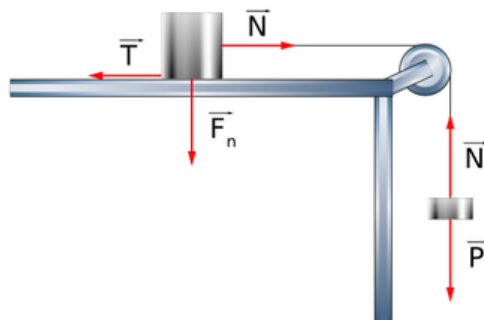
2.10 Siła tarcia

Siłę, która powstaje na styku powierzchni dwóch ciał i przeciwdziała ich względnemu ruchowi, nazywamy *siłą tarcia*. Siła tarcia działa zawsze „przekornie” – przeciwnie do zwrotu prędkości ciała.

Doświadczenie „Tarcie”

Na płaskiej poziomej płycie stołu kładziemy klocek o masie m . Do klocka zaczepiamy nić i przierzucamy ją przez błocek.

Na drugim końcu nici zawieszamy szalkę z lekkim odważnikiem, *Rysunek 2.41: Siła tarcia przeciwstawia się ruchowi klocka* na stronie 122 (tak dobranym, aby klocek nie zaczął się poruszać). Klocek pozostaje nadal w spoczynku, mimo że działa na niego siła \vec{N} równa ciężarowi szalki z odważnikiem.



Rysunek 2.41: Siła tarcia przeciwstawia się ruchowi klocka

Wnioskujemy, że na klocek oprócz siły N musi działać inna siła przeciwnie zwrócona i równa tej sile, gdyż, zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona, wtedy właśnie ciało może być w spoczynku. Jest to siła tarcia. Dokładamy stopniowo dodatkowe odważniki, zwiększając siłę działającą na klocek. Rośnie w ten sposób siła N i siła tarcia. Nazywamy ją *tarciem statycznym*, ponieważ klocek jest w dalszym ciągu w spoczynku.

Dopiero przy odpowiednio dużym wzroście obciążenia szalki klocek rusza. Zatem siła tarcia statycznego T_{st} może zmieniać się od zera do pewnej wartości maksymalnej $T_{st\max}$

$$(\text{wzór 240}) \quad 0 \leq T_{st} \leq T_{st\max}$$

Zwykle, używając terminu „siła tarcia statycznego”, mamy na myśli tę maksymalną wartość $T_{st\max}$. Wartość siły tarcia statycznego jest proporcjonalna do wartości siły nacisku F_n ciała na podłoże

$$(\text{wzór 241}) \quad T_{st\max} = \mu_{st} F_n$$

μ_{st} nosi nazwę *współczynnika tarcia statycznego*. Ze wzoru (*wzór 241* na stronie 122) można odczytać, że współczynnik tarcia statycznego jest bezwymiarowy.

Przy starannym doborze obciążenia szalki możemy doprowadzić do tego, że klocek po lekkim pchnięciu będzie poruszał się ruchem jednostajnym. Zatem zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona siły działające na klocek równoważą się, to znaczy, że siła naciągu nici (równa tutaj ciężarowi szalki z odważnikami) będzie równa sile tarcia. W ten sposób możemy zmierzyć tę siłę

tarcia. Siła tarcia działająca na ciało będące w ruchu nazywa się *tarciem kinetycznym* lub *tarciem dynamicznym*. Zwykle, dla prostoty, gdy mówimy „siła tarcia”, mamy na myśli właśnie tarcie kinetyczne.

Doświadczenia podobne do opisanego wyżej pozwalają na stwierdzenie następujących charakterystycznych praw rządzących siłą tarcia:

1. **Siła tarcia nie zależy od prędkości ciała.** Niezależnie od tego, czy przy pchnięciu klocka nadamy mu prędkość małą, czy dużą, klocek porusza się ruchem jednostajnym. Oznacza to, że siła tarcia jest taka sama.
2. **Siła tarcia nie zależy od wielkości powierzchni styku ciała z podłożem.** Możemy się łatwo o tym przekonać – siła tarcia będzie taka sama, gdy dwa klocki położymy jeden na drugim, jak i w przypadku, gdy połączymy je i będą się znajdować jeden za drugim.
3. **Siła tarcia jest proporcjonalna do siły nacisku F_n ciała na podłoże**

$$(\text{wzór 242}) T = \mu F_n$$

μ nosi nazwę *współczynnika tarcia*. Ze wzoru ([wzór 242](#) na stronie 123) można odczytać, że współczynnik tarcia jest bezwymiarowy. Jego wartość zależy od rodzaju trących o siebie powierzchni. Oto kilka przykładów wartości współczynnika tarcia:

- dla drewna na gładkim drewnie $\mu = 0,3 \div 0,5$,
- dla opon gumowych na betonie $\mu = 0,8 \div 1,0$,
- dla metalu na metalu $\mu = 0,2 \div 1,0$.

Stwierdzono doświadczalnie, że siła tarcia kinetycznego jest mniejsza od siły tarcia statycznego (mierzonej w jednakowych warunkach) zwykle o kilka procent.

Gdy ciało toczy się po podłożu bez poślizgu, powstająca siła tarcia kinetycznego nosi nazwę *tarcia tocznego*. Siła tarcia tocznego jest o wiele mniejsza od siły *tarcia ślizgowego*.

W wielu urządzeniach tarcie jest niekorzystne – prowadzi do nagrzewania się powierzchni trących, dlatego w celu zmniejszenia tarcia stosuje się specjalne metody, np. w łożyskach kulkowych ([Rysunek 2.42: Tarcie toczne w łożysku kulkowym](#) na stronie 124) tarcie ślizgowe jest zastąpione tarciem tocznym. Wprowadzenie płynu, np. oleju, między powierzchnie trące znakomicie zmniejsza tarcie.

W innych sytuacjach z kolei, tarcie jest bardzo korzystne, wręcz pożądane. Jako oczywisty przykład można tu podać tarcie opon samochodu o jezdnię - siła ta umożliwia zarówno rozpędzenie samochodu jak i jego zatrzymanie.

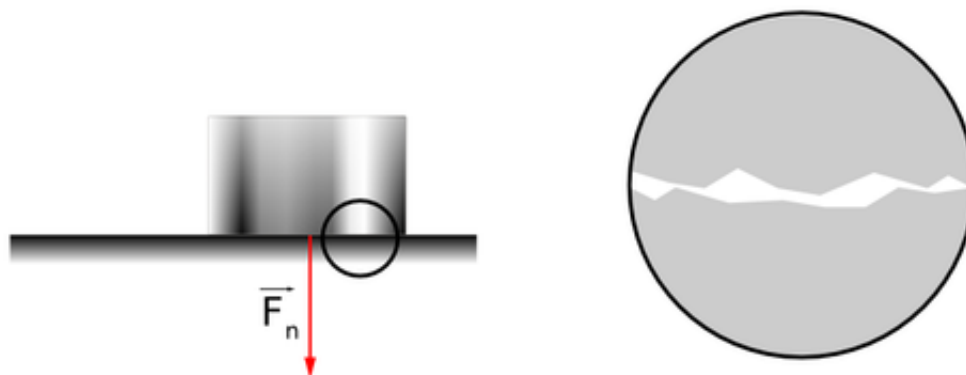
Skąd się bierze tarcie? Powierzchnie różnych ciał, które naszym oczom wydają się gładkie, w rzeczywistości takie nie są. Możemy się o tym przekonać, oglądając je pod mikroskopem. Zobaczymy liczne mikrowystępy, bruzdy i szczeliny. Często powierzchnia pokryta jest różnymi mikrocząsteczkami wbiętego w nią pyłu, tlenkami, jak również adsorbowanymi warstewkami gazów czy cieczy. Podczas zetknięcia powierzchni ciała z powierzchnią podłoża mikrowystępy jednej powierzchni wchodzą w zagłębienia drugiej. Przekrój poprzeczny stykających się powierzchni może wyglądać w powiększeniu tak jak na [Rysunek 2.43: Przekrój poprzeczny makroskopowo gładkich powierzchni w powiększeniu](#) na stronie 124. Rozumiemy teraz, dlaczego podłoże hamuje ruch zetkniętego z nim ciała.

Zaczepianie się licznych nierówności powierzchni przeciwdziała ich względnemu ruchowi. W niektórych miejscach odległość między stykającymi się ciałami jest bardzo mała, porównywalna z odległościami, na których działają siły przyciągania atomów w cząsteczkach. W tych miejscach występuje zlepianie się ciał. Powiększa to wypadkową siłę tarcia.



Siła tarcia tocznego jest mniejsza od siły tarcia ślizgowego, co jest wykorzystywane w łożysku kulkowym

Rysunek 2.42: Tarcie toczne w łożysku kulkowym

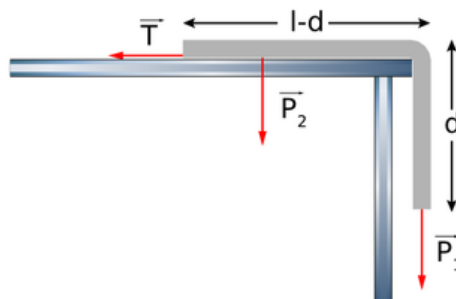


Rysunek 2.43: Przekrój poprzeczny makroskopowo gładkich powierzchni w powiększeniu

Siła nacisku ciała na podłoże sprzyja wzajemnemu zagłębieniu się mikrowystępów obu stykających się powierzchni. Suma wszystkich tych mikrooddziaływań jest tym większa, im większa jest siła nacisku. Stąd pochodzą zależności makroskopowe siły tarcia od siły nacisku, wyrażone wzorami ([wzór 241](#) na stronie 122) i ([wzór 242](#) na stronie 123). Rolę siły nacisku F_n może odgrywać ciężar ciała lub inna siła prostopadła do trących się powierzchni.

Przykład 9

Lina o długości $l = 1$ m leży na stole w ten sposób, że jeden jej koniec zwisa. Lina zaczyna się zsuwać ze stołu, gdy długość części zwisającej wynosi $d = 20$ cm. Ile wynosi współczynnik statycznego tarcia liny o stół?

**Rysunek 2.44: Pomiar współczynnika tarcia liny o stół**

Odpowiedź: Ciężar całej liny oznaczmy przez P , ciężar części zwisającej wyniesie

$$(\text{wzór 243}) P_1 = P \frac{d}{l}$$

zaś ciężar części leżącej na stole

$$(\text{wzór 244}) P_2 = P \frac{l-d}{l}$$

Lina zaczyna się zsuwać ze stołu wtedy, gdy ciężar części zwisającej jest równy sile tarcia statycznego, czyli $P_1 = T_{st_{\max}}$ (*Rysunek 2.44: Pomiar współczynnika tarcia liny o stół* na stronie 125). Ale $T_{st_{\max}} = \mu_{st} P_2$. Zatem $P_1 = \mu_{st} P_2$. Podstawiając tu wzory (*wzór 243* na stronie 125) i (*wzór 244* na stronie 125) – otrzymamy

$$(\text{wzór 245}) P \cdot (d/l) = \mu_{st} \cdot P \cdot (l-d)/l$$

Po przekształceniu tego wzoru otrzymujemy ostatecznie

$$(\text{wzór 246}) \mu_{st} = \frac{d}{l-d} = \frac{1}{4}$$

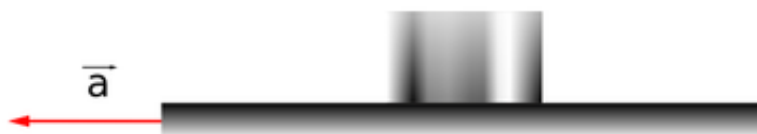
Widzimy, że w tym przypadku jesteśmy w stanie wyznaczyć współczynnik tarcia, mając dane pochodzące jedynie z pomiaru długości wykonanego miarką centymetrową.

Uwaga: W celu otrzymania prawidłowego wyniku pomiaru powinniśmy zminimalizować tarcie liny na krawędziach stołu (np. przez wygładzenie i zaokrąglenie krawędzi stołu) – ważne!

Pytania i problemy

1. Opisz siłę tarcia statycznego. W jakich warunkach, przy ustalonej wartości siły nacisku i rodzaju powierzchni trących, tarcie statyczne osiąga maksymalną wartość?
2. Rozróżnijmy dwa rodzaje tarcia kinetycznego. Podaj ich nazwy.

3. Podaj trzy charakterystyczne prawa rządzące siłą tarcia kinetycznego.
4. Jaki wymiar ma współczynnik tarcia?
5. Podaj po dwa przykłady niekorzystnego i korzystnego działania tarcia.
6. Jak duże przyspieszenie należy nadać desce, na której leży ciało (*Rysunek 2.45: Ciało na desce poruszającej się z przyspieszeniem* na stronie 126), aby mogło się ześlizgnąć z niej? Współczynnik tarcia między ciałem a deską wynosi $\mu = 0,1$.



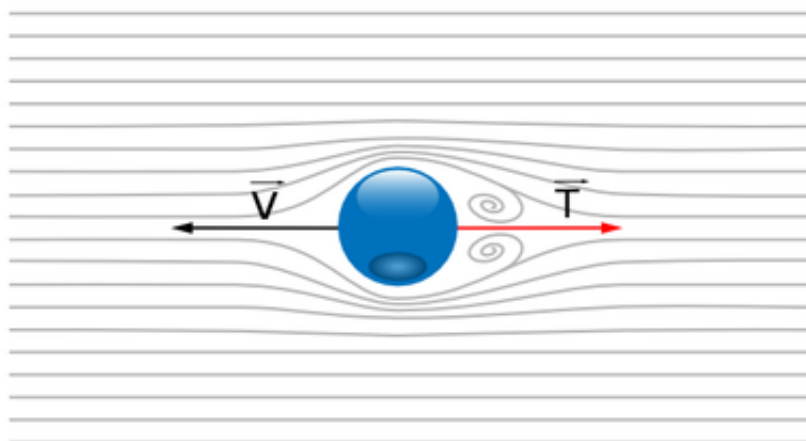
Rysunek 2.45: Ciało na desce poruszającej się z przyspieszeniem

7. Zadanie dla zespołu od 2 do 4 uczniów. Znajdźcie w okolicy plac zabaw dla dzieci. Sfotografujcie wybrane urządzenia i opiszcie ich działanie z punktu widzenia praw fizyki. W każdym opisie uwzględnijcie, możliwie szczegółowo, występujące siły. Tam, gdzie ma to zastosowanie, przedstawcie oddzielny opis dla inercyjnego układu odniesienia i dla układu nieinercyjnego.

2.11 Opory ruchu ciała w płynie - cieczy lub gazie

Na ciało poruszające się w ośrodku ciekłym lub gazowym działa siła oporu skierowana przeciwnie do jego ruchu. Rysunek (*Rysunek 2.46: Siły oporu działające na kulke w cieczy* na stronie 127) przedstawia kulkę poruszającą się w takim ośrodku. Widoczne są strugi płynu opływające kulkę oraz zawirowania za kulką. Całkowity opór T ruchu można podzielić na dwa elementy, które nazwiemy: *tarciem wewnętrznym* T_1 , lub *lepkością*, i *oporem ciśnieniowym* T_2 . Zatem

$$(\text{ wzór 247 }) T = T_1 + T_2$$



Kulka poruszająca się ze znaczną prędkością v doznaje siły oporu \vec{T} wynikającej z lepkości oraz różnicy ciśnienia panującego przed kulką i za nią. Z tyłu za kulką widoczne są zawirowania ośrodka

Rysunek 2.46: Siły oporu działające na kulke w cieczy

Tarcie wewnętrzne wynika z tego, że ciało poruszające się w płynie powoduje ruch warstw płynu przyległych do ciała. Bezpośrednio przylegająca cienka warstwa płynu oblepia ciało i porusza się z prędkością tego ciała. Coraz dalsze warstwy mają coraz mniejszą prędkość. Między warstwami występują siły tarcia wewnętrznego wynikające z wymiany cząsteczek między nimi. Cząsteczki przechodzące z warstwy powolniejszej hamują warstwę szybszą i na odwrót – cząsteczki przechodzące z warstwy szybszej do powolniejszej przyspieszają tę ostatnią.

Stwierdzono, że tarcie wewnętrzne dominuje w przypadku małych prędkości v ciała i że siła oporu jest proporcjonalna do v :

$$(\text{wzór 248}) T_1 = K_1 v$$

gdzie K_1 – współczynnik proporcjonalności, który zależy od rodzaju płynu oraz od kształtu ciała. Przykładowo, dla kuli o promieniu r współczynnik ten wynosi

$$(\text{wzór 249}) K_1 = 6\pi\eta r$$

gdzie η – tzw. współczynnik lepkości charakterystyczny dla ośrodka.

Opór ciśnieniowy wynika głównie z występowania różnicy ciśnienia w ośrodku przed i za ruchomym ciałem. Przed ciałem występuje zagęszczenie ośrodka i zwiększone jego ciśnienie, zaś za ciałem występuje rozrzedzenie i zmniejszone ciśnienie. Stwierdzono, że opór ciśnieniowy dominuje w przypadku dużych prędkości ciała i jest proporcjonalny do kwadratu jego prędkości:

$$(\text{wzór 250}) T_2 = K_2 v^2$$

gdzie K_2 – współczynnik proporcjonalności, który zależy od rodzaju płynu oraz od kształtu i rozmiaru ciała.

$$(\text{wzór 251}) K_2 = C S \frac{\rho_0}{2}$$

gdzie C – współczynnik liczbowy zależny od kształtu ciała, S – pole powierzchni przekroju ciała poprzecznego do kierunku ruchu, ρ_0 – gęstość płynu.

Przykładowo dla kuli o promieniu r

$$(\text{ wzór 252 }) K_2 = C\pi r^2 \frac{\rho_0}{2}$$

gdzie C – współczynnik liczbowy (typowe wartości C wahają się od 0,2 do 0,4).

Kryterium oceny prędkości – czy dominuje opór T_1 , czy opór T_2 – jest tzw. *liczba Reynoldsa* Re , która wyraża się za pomocą wzoru

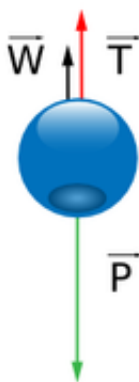
$$(\text{ wzór 253 }) Re = \frac{T_2}{T_1}$$

Gdy $Re < 1$, dominuje lepkość; gdy $Re > 1$, dominuje opór ciśnieniowy.

Przy małych prędkościach i dla ośrodków gdzie $Re < 1$, dominuje lepkość, zawirowania płynu są zanedbywalnie małe i taki ruch nazywamy *ruchem laminarnym*. Przy dużych prędkościach i dla ośrodków gdzie $Re > 1$, dominuje opór ciśnieniowy, występują znaczne zawirowania płynu i taki ruch nazywa się *ruchem turbulentnym*.

Spadek ciała w cieczy lub gazie

W rozdziale [Kinematyka punktu materialnego](#) na stronie 3 omawialiśmy swobodny spadek ciała. Rozważaliśmy ruch ciała pod wpływem jedynie siły ciężkości. Stąd wynika ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem ziemskim g . Teraz uwzględnimy siłę oporu T działającą na spadające ciało w ośrodku. Działa tu jeszcze siła wyporu W ([Rysunek 2.47: Siły działające na spadające ciało](#) na stronie 128).



Na ciało spadające działa oprócz siły ciężkości P , siła oporu T ośrodka oraz siła wyporu W

Rysunek 2.47: Siły działające na spadające ciało

Druga zasada dynamiki Newtona przyjmuje postać:

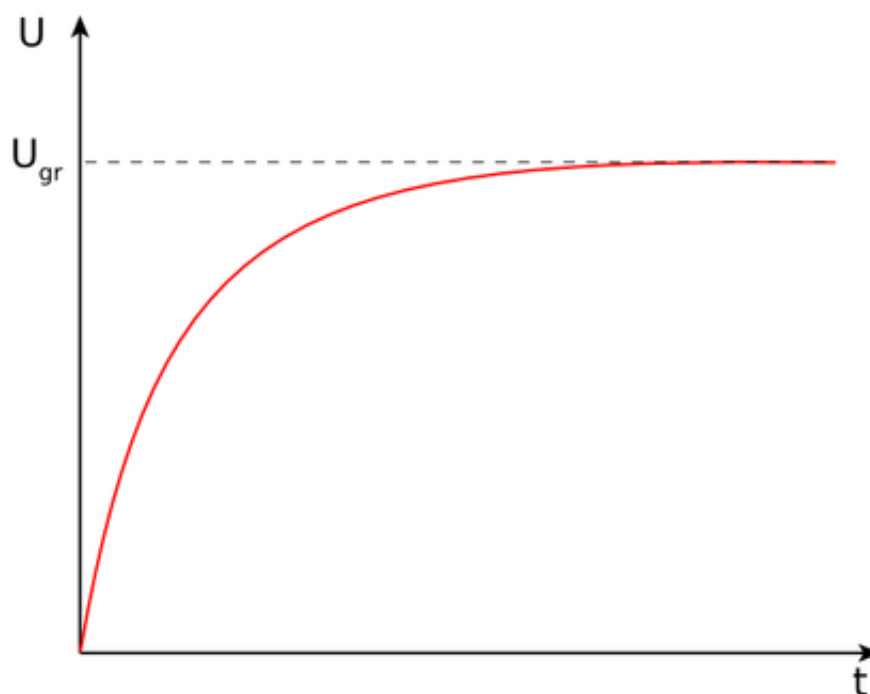
$$(\text{wzór 254}) \quad ma = P - T - W$$

gdzie: m – masa ciała, a – jego przyspieszenie.

Siła ciężkości i siła wyporu pozostają stałe podczas ruchu, natomiast siła oporu wzrasta wraz z prędkością ciała.

W początkowej fazie ruchu, kiedy prędkość jest mała, opór jest mały i (dla niewielkich ciał w powietrzu) wypór jest też mały. Zatem w początkowych sekundach ruch jest jednostajnie przyspieszony – prędkość narasta liniowo w czasie.

W miarę wzrostu prędkości, wzrasta opór, a przyspieszenie ciała maleje. Gdy prędkość wzrośnie znacznie, to siła oporu wzrośnie do tego stopnia, że zrównoważy siłę ciężkości i przyspieszenie spadnie do zera, $a = 0$. Wtedy ruch stanie się jednostajny – ciało będzie opadać ze stałą prędkością zwaną prędkością graniczną v_{gr} . Wykres prędkości ciała w zależności od czasu przedstawia [Rysunek 2.48: Wykres prędkości ciała spadającego w ośrodku lepkiem w zależności od czasu](#) na stronie 129.



Rysunek 2.48: Wykres prędkości ciała spadającego w ośrodku lepkiem w zależności od czasu

W przypadku ciał spadających w powietrzu ruch z tą prędkością nie jest laminarnym i dominuje tu opór ciśnieniowy T_2 (opór laminarny dominuje tylko dla bardzo małych ciał – pyłków, kropelek mgły itp.). Wstawiając do równania ([wzór 254](#) na stronie 129) $a = 0$, $W = 0$, $P = mg$ i $T = T_2 = K_2 v_{gr}^2$, otrzymamy:

$$(\text{wzór 255}) \quad mg = K_2 v_{gr}^2$$

Stąd można obliczyć prędkość graniczną:

$$(\text{wzór 256}) \quad v_{gr} = \sqrt{\frac{mg}{K_2}}$$

Przykład 10

Obliczmy, z jaką prędkością (graniczną) spadają krople deszczu. Przyjmijmy, że kropla ma kształt kulisty, promień kropki wynosi $r = 1 \text{ mm}$, gęstość wody $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, gęstość powietrza $\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$, $C = 0,4$.

Odpowiedź: Do wzoru ([wzór 256](#) na stronie 129) wstawimy $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ i $K_2 = C\pi r^2 \frac{\rho_0}{2}$.

Otrzymamy:

$$(\text{wzór 257}) v_{gr} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi r^3 \rho g}{3 \cdot C\pi r^2 \rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3 \cdot 0,4\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,81}{3 \cdot 0,4 \cdot 1}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Widzimy, że prędkość spadania kropeł wynosi ok. 8 m/s. Doświadczenie potwierdza ten wynik.

Przykład 11

Działanie siły oporu na ciało spadające w powietrzu jest wykorzystywane w spadochronie ratującym życie człowiekowi.

Człowiek, spadając z dużej wysokości bez spadochronu, uderzyłby w ziemię z prędkością graniczną rzędu kilkudziesięciu metrów na sekundę – co zwykle kończy się śmiercią.

Spadochron ma pole przekroju poprzecznego S około sto razy większe w stosunku do człowieka, jak również współczynnik C jest kilka razy większy. Zatem iloczyn CS spadochronu jest kilkaset razy większy niż CS człowieka, co powoduje, że prędkość graniczna człowieka ze spadochronem jest kilkadziesiąt razy mniejsza niż człowieka bez spadochronu. Jest ona bezpieczna, gdyż wynosi ok. 3 m/s do 4 m/s. Jej wartość jest porównywalna z prędkością skoku przez niewielką przeszkodę.

Pytania i problemy

1. Opisz siły oporu działające na ciało poruszające się w ośrodku. Nazwij dwa elementy, z jakich składa się całkowity opór ośrodka.
2. W jakich warunkach dominuje tarcie wewnętrzne (lepkość), a w jakich – opór ciśnieniowy?
3. Co to jest liczba Reynoldsa Re , podaj wzór i interpretację. Rozstrzygnij, jaki jest charakter zależności liczby Reynoldsa od prędkości. Wykorzystaj wzór ([wzór 253](#) na stronie 128).
4. Kiedy występuje ruch laminarny, a kiedy turbulentny?
5. Wyprowadź jednostki, w jakich wyraża się współczynnik K_1 we wzorze ([wzór 248](#) na stronie 127). Na tej podstawie wyprowadź jednostki współczynnika lepkości ośrodka μ we wzorze ([wzór 249](#) na stronie 127).
6. Wyprowadź jednostki, w jakich wyraża się współczynnik K_2 we wzorze ([wzór 250](#) na stronie 127). Wykaż, że stąd wynika, że wielkość C występująca we wzorze ([wzór 252](#) na stronie 128) jest niemianowana i że uzasadnione jest nazywanie C „współczynnikiem liczbowym”.
7. Napisz wzór wyrażający drugą zasadę dynamiki Newtona w przypadku spadku ciała w gazie. Wstaw tu odpowiednie wyrażenie na opór i oblicz prędkość graniczną.
8. Opisz zasadę działania spadochronu w oparciu o prawa ruchu ciała w ośrodku (iloczyn CS).

Rozdział

3

Praca i energia

Podrozdziały:

- [3.1 Praca](#)
- [3.2 Energia potencjalna](#)
- [3.3 Energia kinetyczna](#)
- [3.4 Prawo zachowania energii mechanicznej](#)
- [3.5 Moc](#)
- [3.6 Zderzenia](#)

Rysunek 3.1: Wirtualny nauczyciel

Z terminem energia spotykamy się na co dzień. Jednakże pojęcie energii stosowane potocznie jest zwykle mało precyzyjne i niejednoznaczne. Używamy np. określeń: „człowiek energiczny”, „aktor włożył dużo energii w przygotowanie swojej roli” itp. W nauce jednak musimy się posługiwać pojęciami ścisłymi, dlatego odejmiemy od mglistego pojęcia energii stosowanego w życiu codziennym i zastąpimy je określeniem jednoznacznym i precyzyjnym.

Energia może występować jako energia mechaniczna, elektryczna, jądrowa, promienista i inna. Dowiesz się, że energia – tak jak materia – jest niezniszczalna. Energia może zmieniać swą postać (np. energia mechaniczna może zamienić się w energię elektryczną i na odwrót) jednakże nie może zniknąć, ani być stworzona z niczego.

Energia jest jednym z najbardziej podstawowych pojęć w fizyce. W tym rozdziale ograniczymy się w zasadzie tylko do energii mechanicznej, która może występować pod postacią energii kinetycznej i potencjalnej (jak zapewne wiesz, energia kinetyczna to energia ciała wynikająca z faktu, że ciało jest w ruchu, a potencjalna zależy od wzajemnego położenia ciał). Do określenia energii bardzo pomocne będzie pojęcie pracy, które w fizyce jest również pojęciem precyzyjnym, odbiegającym od potocznego znaczenia.

Na przykładzie przemian energii mechanicznej poznasz bliżej jedno z najważniejszych praw przyrody - zasadę zachowania energii. Dowiesz się, że zasada zachowania energii jest centralnym tematem wielu dziedzin fizyki, takich jak teoria względności, teoria grawitacji, termodynamika, fizyka atomowa, fizyka jądrowa itd. Nauczysz się stosowania zasady zachowania energii mechanicznej do rozwiązywania różnych problemów. W wielu przypadkach będziesz mógł rozwiązać zadania w sposób łatwiejszy i prostszy, niż dotychczas, bez konieczności wnikania w szczegóły dynamiki i kinematyki.

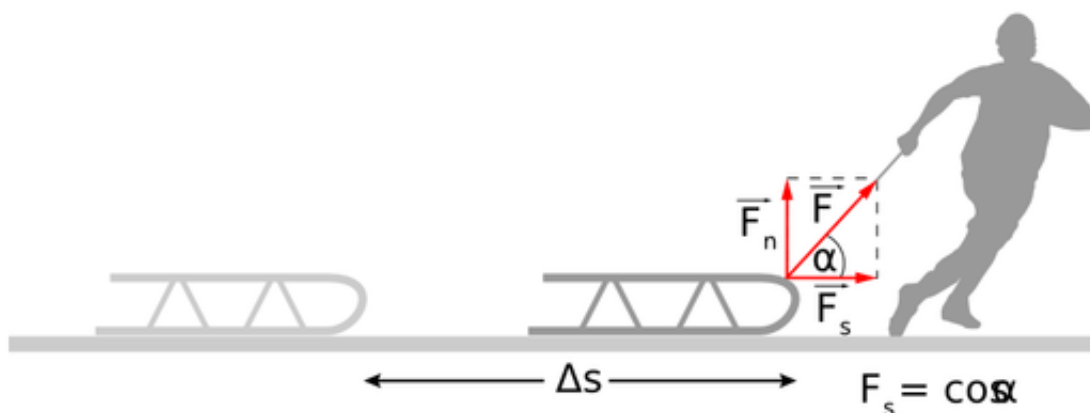
3.1 Praca

Jeżeli pewna siła jest przyłożona do określonego ciała i przesuwa je w kierunku działania siły o mały odcinek drogi Δs , to mówimy, że siła wykonuje *pracę* ΔW równą iloczynowi wartości siły i przesunięcia:

$$(\text{wzór 258}) \quad \Delta W = F \Delta s$$

Ta definicja pracy poznana w gimnazjum jest słuszna w przypadku, gdy siła i przemieszczenie mają ten sam kierunek. W ogólnym przypadku, gdy siła i przesunięcie mają różne kierunki, wzór ten należy zmodyfikować.

Weźmy pod uwagę chłopca ciągnącego sanki siłą \vec{F} za pomocą linki nachylonej pod kątem α do kierunku przesunięcia, jak na *Rysunek 3.2: Praca przesunięcia sanek wynosi $\Delta W = F_s \Delta s = F \Delta s \cos \alpha$* na stronie 132.



Rysunek 3.2: Praca przesunięcia sanek wynosi $\Delta W = F_s \Delta s = F \Delta s \cos \alpha$

Siła jest wektorem, możemy więc ją rozłożyć na dwie składowe: $F_s = F \cos \alpha$ równoległą do przesunięcia Δs i $F_n = F \sin \alpha$ prostopadłą do Δs . Zgodnie ze wzorem (*wzór 258* na stronie 132) praca wynosi $\Delta W = F_s \Delta s$, więc

$$(\text{wzór 259}) \quad \Delta W = F \Delta s \cos \alpha$$

Siła składowa prostopadła nie wykonuje pracy, bo w tym kierunku sanki się nie przemieszczają.

Wzór (*wzór 259* na stronie 132) można stosować dla dowolnego przypadku stałej siły skierowanej pod kątem α do przesunięcia wzdłuż drogi. W przypadku, gdy siła nie jest stała, należy wziąć średnią wartość siły na drodze Δs .

Ponieważ jednostką siły jest niuton, a jednostką drogi metr, więc jednostką pracy jest iloczyn 1 N i 1 m. Jednostka ta nazywa się *dżulem* (symbol J, na cześć angielskiego fizyka Joule'a):

$$(\text{wzór 260}) \quad 1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

® Zamapiętać:
Praca

Praca ΔW jest równa iloczynowi wartości siły F , przesunięcia Δs i kosinusa kąta α między siłą a przesunięciem Δs :

$$(\text{wzór 261}) \quad \Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha$$

Jednostka pracy dżul (J): $1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m}$.

Praca jest wielkością nie mającą kierunku – jest skalarem. Ale siła i przesunięcie mają określone kierunki i są wektorami. Wielkość skalarna, która powstaje w wyniku skalarnego mnożenia dwóch wektorów, nazywa się *iloczynem skalarnym* wektorów. Iloczyn skalarny dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} tworzących kąt α zapisujemy symbolicznie jako $\vec{a} \cdot \vec{b}$, a jego wartość wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 262}) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Wzór na pracę ([wzór 259](#) na stronie 132) ma postać iloczynu skalarnego dwóch wektorów \vec{F} i $\Delta \vec{s}$. Zatem

$$(\text{wzór 263}) \quad \Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

Przykład 1

Chłopiec ciągnie sanki po poziomej drodze siłą $F = 20\text{N}$ skierowaną poziomo. Jaką pracę wykona chłopiec, ciągnąc sanki na drodze $s = 200\text{m}$?

Odpowiedź: Praca $\Delta W = Fs \cos \alpha$, czyli $W = 20\text{N} \cdot 200\text{m} \cdot \cos 0^\circ = 4000\text{N} \cdot \text{m} = 4\text{kJ}$.

Chłopiec wykona pracę równą 4 kJ.

Przykład 2

Chłopiec ciągnie sanki po poziomej drodze siłą $F = 20\text{N}$ skierowaną pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do poziomu ([Rysunek 3.2: Praca przesunięcia sanek wynosi \$\Delta W = Fs \Delta s = F \Delta s \cos \alpha\$](#) na stronie 132). Jaką pracę wykona chłopiec, ciągnąc sanki na drodze $s = 200\text{m}$?

Odpowiedź: Praca $\Delta W = Fs \cos \alpha$, czyli $W = 20\text{N} \cdot 200\text{m} \cdot \cos 60^\circ = 2000\text{N} \cdot \text{m} = 2\text{kJ}$.

Chłopiec wykona pracę równą 2 kJ.

Przykład 3

Kierowca włączył hamulce. Hamująca siła tarcia wynosi $T = 5000\text{N}$, droga hamowania wynosi $s = 50\text{m}$. Oblicz pracę siły tarcia.

Odpowiedź: Praca $\Delta W = Ts \cos \alpha$, czyli $W = 5000\text{N} \cdot 50\text{m} \cdot (-1) = -250000\text{N} \cdot \text{m} = -250\text{kJ}$. Praca siły tarcia wynosi -250 kilodżuli.

Przykład 4

Ziemia okrąży Słońce, bo jest utrzymywana na swojej orbicie prawie kołowej siłą dośrodkową pochodzącą od pola grawitacyjnego Słońca. Czy pole grawitacyjne wykonuje pracę?

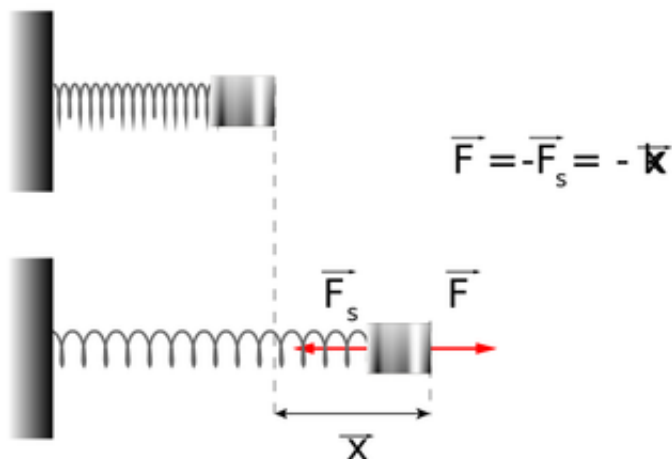
Odpowiedź: Siła dośrodkowa – grawitacji w ruchu kołowym – nie wykonuje pracy, ponieważ działa pod kątem $\alpha = 90^\circ$ do przemieszczenia Ziemi w jej ruchu po okręgu:
 $\Delta W = F \Delta s \cos 90^\circ = 0$

Praca rozciągania sprężyny

Rozważmy teraz przypadek obliczenia pracy, gdy siła nie jest stała na drodze swojego działania. Obliczymy pracę, jaką należy wykonać, aby, rozciągając sprężynę, zwiększyć jej długość o odcinek x ([Rysunek 3.3: Praca rozciągania](#)

sprężyny na stronie 134). Podczas rozciągania sprężyny trzeba działać siłą F równą *sile sprężystości* sprężyny, lecz przeciwnie zwróconą. Siła sprężystości sprężyny jest proporcjonalna do wydłużenia sprężyny x i wyraża się za pomocą wzoru $\vec{F}_s = -k\vec{x}$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym *współczynnikiem sprężystości sprężyny* (wartość k zależy od materiału, z jakiego została wykonana sprężyna, oraz od rozmiarów sprężyny). Widzimy więc, że siła wykonująca pracę jest skierowana wzdłuż drogi, ale nie ma stałej wartości na tej drodze

$$(\text{wzór 264}) F = kx$$



Rysunek 3.3: Praca rozciągania sprężyny

Zgodnie z tym, co powiedziano wyżej, aby obliczyć pracę, należy w takim przypadku wziąć wartość średnią siły na drodze x . Średnia siła wyraża się tu za pomocą średniej arytmetycznej z dwóch wartości siły – początkowej $F_0 = 0$ i końcowej $F_k = kx$ (ponieważ zależność siły od wydłużenia x sprężyny jest liniowa).

⚠ **Wskazówka:** Stosowanie tak prostego wyrażenia na średnią wartość siły jest uzasadnione faktem, że siła zmienia się liniowo wraz z wydłużeniem sprężyny. Przy innej niż liniowa zależności, wzór na średnią wartość siły przybrałby postać bardziej skomplikowaną, a jego wyprowadzenie wymagałoby użycia rachunku całkowego.

Zatem

$$(\text{wzór 265}) F_{\text{sr}} = \frac{F_0 + F_k}{2} = \frac{kx}{2}$$

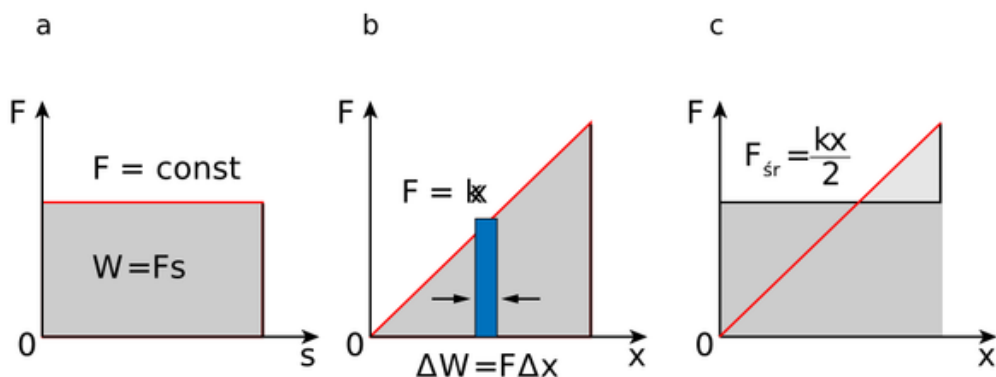
Wobec tego praca rozciągnięcia sprężyny na drodze x wyniesie $W = \frac{kx}{2} \cdot x$ lub

$$(\text{wzór 266}) W = \frac{kx^2}{2}$$

Przy obliczaniu pracy w przypadkach, gdy siła działająca wzdłuż drogi nie jest stała, wygodnie jest posługiwać się wykresem zależności siły od przesunięcia. Na [Rysunek 3.4: Wykres zależności siły od przesunięcia](#) na stronie 135a przedstawiono wykres dla stałej siły. Widzimy, że pracę $W = Fs$ można liczbowo wyrazić za pomocą pola powierzchni prostokąta, którego podstawą jest przesunięcie s , a wysokością siła F . Na [Rysunek 3.4: Wykres zależności](#)

siły od przesunięcia na stronie 135b przedstawiono wykres siły zmiennej liniowo działającej na sprężynę podczas jej rozciągania.

Również w tym przypadku, mimo że siła nie jest stała, praca jest wyrażona przez pole figury pod wykresem zależności siły od przesunięcia. Łatwo można to wykazać. Pole takie można przedstawić jako sumę pól wąskich pasków (jeden pasek jest zaznaczony na *Rysunek 3.4: Wykres zależności siły od przesunięcia* na stronie 135a). Przy małym przesunięciu x siła zmienia się nieznacznie, czyli jest stała z małym błędem. Zatem pole paska oznacza pracę wykonaną przez siłę na tym odcinku: $\Delta W = F \Delta x$. Suma tych małych prac jest równa pracy wykonanej na całej drodze x . Całe pole pod linią $F = kx$ jest równe sumie małych pól tych wąskich pasków z tym większą dokładnością, im węższe paski były brane pod uwagę. Odcinki Δx można uczynić dowolnie małymi, zatem całe pole pod wykresem siły jest miarą wartości pracy wykonanej na tej drodze.



a) Przy stałej sile równoległej do przesunięcia, pracę $W = Fs$ wyznacza pole powierzchni prostokąta; b) gdy siła jest równoległa do przesunięcia, ale ma wartość zmienną, całkowita praca jest sumą małych prac na małych przesunięciach Δx – jest więc równa polu powierzchni pod wykresem zależności siły od przesunięcia x ; c) praca, wyznaczona polem powierzchni trójkąta, jest równa pracy stałej siły – średniej; pole powierzchni trójkąta ABC jest równe polu powierzchni prostokąta $ADEC$

Rysunek 3.4: Wykres zależności siły od przesunięcia

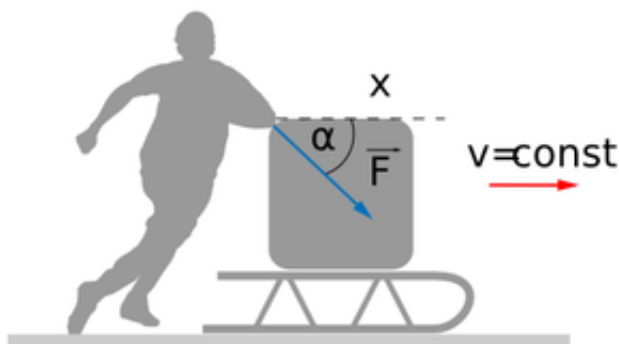
Rozumowanie powyższe jest prawdziwe również w ogólnym przypadku, nawet wtedy, gdy siła równoległa do przesunięcia zmienia się w dowolny sposób wzdłuż drogi (podobne rozumowanie przedstawiliśmy w podrozdziale 1.4 *Ruch jednostajnie przyspieszony* na stronie 16 dla przypadku, gdy pole pod wykresem zależności prędkości od czasu reprezentowało drogę).

W przypadku rozciągania sprężyny pole pod wykresem zależności siły F od przesunięcia x jest polem trójkąta ABC – *Rysunek 3.4: Wykres zależności siły od przesunięcia* na stronie 135c. Pole to jest równe polu prostokąta $ADEC$ utworzonego przez linię odpowiadającą sile średniej (średniej arytmetycznej) $F_{\text{śr}}$ działającej na sprężynę na drodze x . Łatwo to zauważyć, gdyż pola jaśniejszych trójkątów na *Rysunek 3.4: Wykres zależności siły od przesunięcia* na stronie 135c są sobie równe.

Pytania i problemy

1. Przedstaw wyrażenie definiujące pracę.
2. Jak nazywa się jednostka pracy w układzie SI? Wyraż tę jednostkę za pomocą jednostek podstawowych.
3. Wyjaśnij, dlaczego nie można stosować wzoru (*wzór 259* na stronie 132) w celu obliczenia pracy w przypadku, gdy wartość siły zmienia się w czasie przesuwania ciała. W jaki sposób można w takim przypadku obliczyć pracę?

4. Sprężyna została wydłużona o odcinek $\Delta x = x_2 - x_1$. W jaki sposób postąpisz, by za pomocą wykresu zależności siły od wydłużenia sprężyny obliczyć pracę potrzebną do rozciągnięcia sprężyny?
5. Chłopiec pcha sanki (*Rysunek 3.5: Chłopiec pcha sanki na poziomej drodze* na stronie 136) po poziomej drodze siłą $F = 30\text{ N}$ skierowaną pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do poziomu. Sanki poruszają się ruchem jednostajnym.



Rysunek 3.5: Chłopiec pcha sanki na poziomej drodze

- a. Jaką pracę wykona chłopiec, pchając sanki na drodze $s = 100\text{ m}$?
- b. Ile wynosi siła tarcia sanek o podłoże?

3.2 Energia potencjalna

Co to jest energia? Jeżeli ciało lub układ ciał ma zdolność do wykonania pracy, to mówimy, że ciało ma energię, którą mierzymy za pomocą pracy, jaką ciało może wykonać. Ogólnie:



Ważne:

Energia to wielkość fizyczna, która wyraża się w jednostkach pracy. Jednostką energii jest jeden dżul, $1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot 1\text{ m}$.

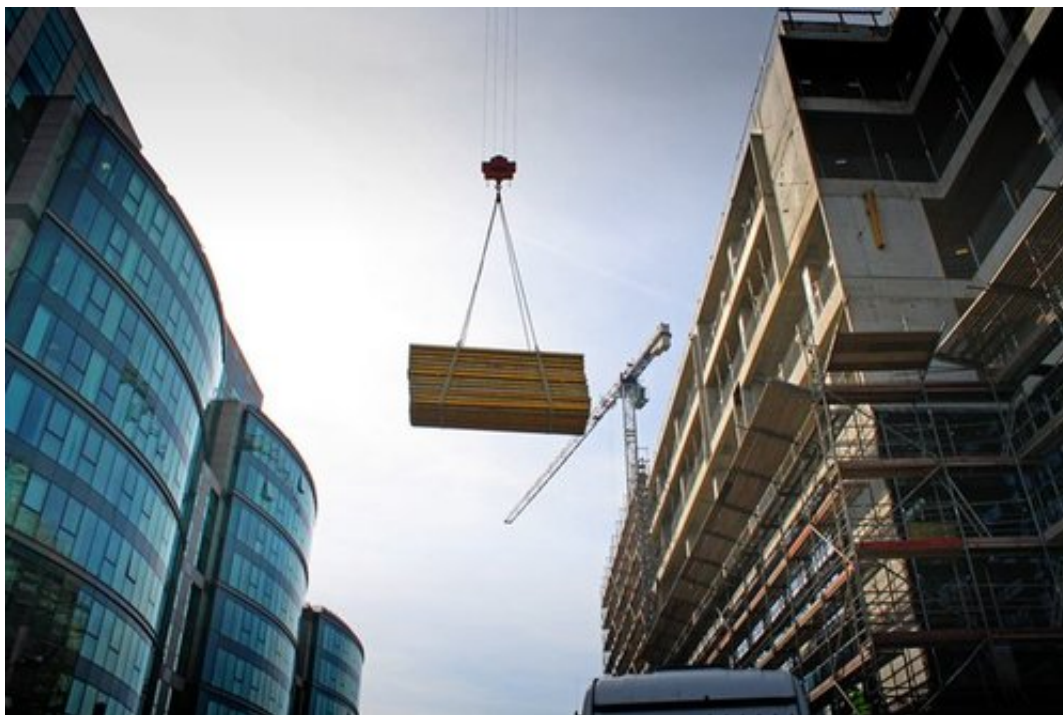
Energia potencjalna to energia układu ciał zależna od ich wzajemnego położenia. Nazywa się ją również "wzajemną energią potencjalną".

Energia potencjalna w polu sił ciężkości Ziemi

Powiedzmy, że mamy jakieś ciało o masie m znajdujące się na wysokości h nad określonym poziomem, na przykład nad podłogą pomieszczenia, w którym wykonujemy doświadczenie. Ciało to ma energię (należy zwrócić uwagę na to, że energię potencjalną ma nie samo ciało lecz układ złożony z Ziemi i tego ciała, jednakże zwrot „energia potencjalna ciała” jest dopuszczalny pod warunkiem, że będziemy pamiętać o obecności pola grawitacyjnego Ziemi),

bo jeżeli pozwolimy mu spadać swobodnie z tej wysokości, to siła ciężkości $P = mg$ wykona na drodze h pracę. Praca ta wyniesie

$$(\text{wzór 267}) W = mgh$$



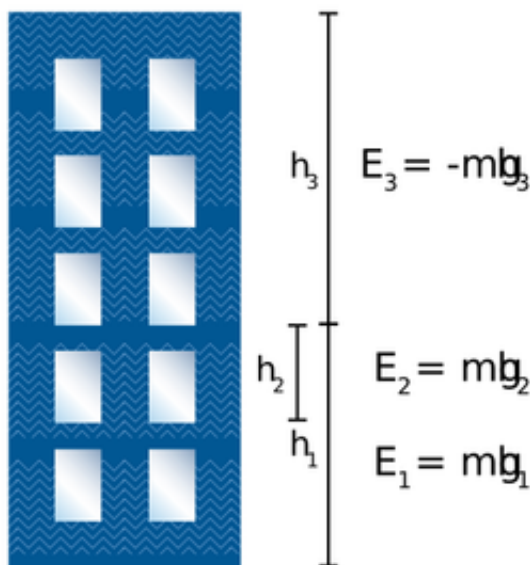
Dźwig, podnosząc ciężary, wykonuje pracę. Ciężary te nabywają energii potencjalnej

Rysunek 3.6: Energia potencjalna podnoszonych ciał

Zatem ciało znajdujące się na wysokości h ma zapas energii równy mgh . Ten zapas energii nazywamy *energiją potencjalną ciężkości*, która wyraża się wzorem

$$(\text{wzór 268}) E_p = mgh$$

Dla niedużych różnic wysokości nad Ziemią przyspieszenie g nie zmienia się i siła ciężkości działająca na ciało pozostaje stała na całej drodze h . Dlatego wzór ([wzór 268](#) na stronie 137) na energię potencjalną ciała można stosować tylko dla małych wysokości h . Dokładny wzór na energię potencjalną ciała w polu grawitacyjnym, dla dowolnych wysokości, podamy w rozdziale [5.6 Pole grawitacyjne](#) na stronie 232 dotyczącym grawitacji.



Ciało znajduje się na wysokości h_1 nad ziemią i ma energię $E_1 = mgh_1$. To samo ciało znajduje się na wysokości h_2 nad pierwszym piętrzem i ma energię $E_2 = mgh_2$, a względem dachu ma energię ujemną

Rysunek 3.7: Energia potencjalna ciała w różnych położeniach

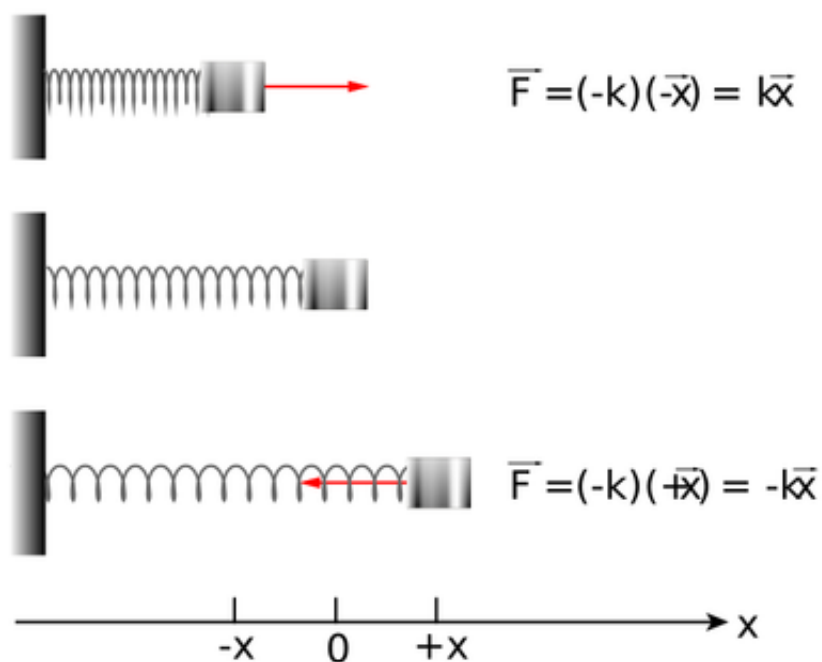
Zauważmy, że wartość energii potencjalnej zależy od miejsca, względem którego ją wyznaczamy. Wynika to z określenia pojęcia energii potencjalnej jako wielkości względnej. Czegoś takiego, jak bezwzględna wartość energii potencjalnej bez podania miejsca, względem którego wyznaczamy energię, po prostu nie ma! Jedno i to samo ciało może mieć różną wartość energii potencjalnej względem różnych ciał. Na przykład, kamień, który znajduje się w pomieszczeniu na drugim piętrze domu, ma inną wartość energii potencjalnej względem poziomu ziemi, a inną względem poziomu pierwszego piętra. Względem dachu energia potencjalna kamienia będzie ujemna ([Rysunek 3.7: Energia potencjalna ciała w różnych położeniach](#) na stronie 138).

Energia potencjalna sprężystości

Praca wykonana przez zewnętrzną siłę przeciwko sile sprężystości sprężyny może być zwrócona przez sprężynę powracającą do swego stanu wyjściowego. Zatem odkształcona sprężyna ma zdolność do wykonania pracy, czyli ma energię potencjalną równą pracy wykonanej przy odkształcaniu sprężyny. Zgodnie ze wzorem ([wzór 266](#) na stronie 134) *energia potencjalna sprężyny* będzie więc równa

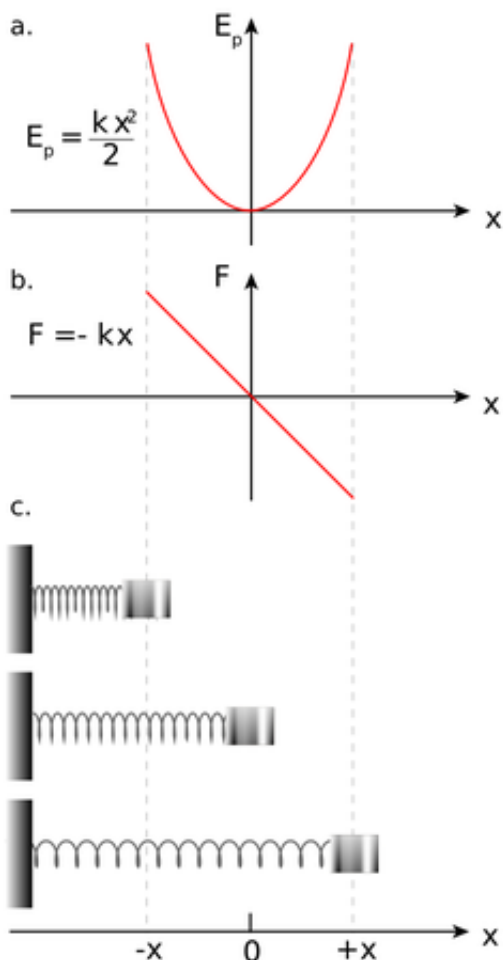
$$(\text{wzór 269}) E_p = k \frac{x^2}{2}$$

We wzorze tym x występuje w drugiej potęgce, zatem energia sprężyny nie zależy od znaku x . Znak x jest istotny dla siły sprężystości $\vec{F} = -k\vec{x}$, która jest wielkością wektorową. Znak minus w tym wzorze oznacza, że zwrot siły jest przeciwny do zwrotu wektora odkształcenia sprężyny \vec{x} (patrz [Rysunek 3.8: Siła sprężysta jest zwrócona przeciwnie do odkształcenia \$x\$ sprężyny](#) na stronie 139).



Rysunek 3.8: Siła sprężysta jest zwrócona przeciwnie do odkształcenia x sprężyny

Natomiast sprężyna, niezależnie od tego, czy jest rozciągnięta, czy ściśnięta o tę samą wartość x , będzie miała zdolność do wykonania tej samej pracy, czyli będzie miała taką samą dodatnią energię potencjalną. Wykres energii potencjalnej sprężyny jest przedstawiony na [Rysunek 3.9: Odkształcenie sprężyny](#) na stronie 140a, a wykres siły na [Rysunek 3.9: Odkształcenie sprężyny](#) na stronie 140b.



a) Energia potencjalna sprężyny. b) Siła w zależności od odkształcenia x sprężyny. c) Sprężyna w różnych stanach odkształcenia

Rysunek 3.9: Odkształcenie sprężyny

Pojęcie energii potencjalnej jest pojęciem ogólnym, które stosuje się do wielu przypadków, nie tylko do pola grawitacyjnego i siły sprężystości. Pojęcie energii potencjalnej stosuje się do wszystkich przypadków, gdzie występują *siły zachowawcze*. Co to jest siła zachowawcza? Przykładem siły zachowawczej jest siła grawitacji. Jeżeli podniesiemy ciało na pewną wysokość, to praca wykonana przez siłę równą sile ciężkości, lecz przeciwnie skierowaną nie ginie (w fizyce mówimy: nie rozprasza się), ale odnajdujemy ją w energii potencjalnej, którą możemy znów wykorzystać do wykonania pracy.

Z tej cechy siły zachowawczej wynika twierdzenie, że praca wykonana przez siłę zachowawczą na drodze zamkniętej jest równa zero. Dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi, jako ćwiczenie. Z twierdzenia tego wynika, że nie możemy zyskiwać (ani tracić) energii przez wielokrotne obieganie tego samego toru, gdy mamy do czynienia z siłą zachowawczą.

Tarcie należy do sił niezachowawczych. Związane jest to z tym, że przy działaniu siły tarcia wydziela się ciepło i energia się rozprasza. Nie można jej odzyskać w prosty sposób. Jeżeli przesuwamy ciało po poziomej podstawie ruchem jednostajnym działając siłą F przeciwko sile tarcia T , to praca wykonana przy przesunięciu ciała nie zwiększa energii potencjalnej ciała. Pracy tej nie można odzyskać, gdyż nie została zachowana w postaci energii mechanicznej - została ona zmarnowana dla nas bezpowrotnie. Dlatego tarcie zaliczamy do "*sił niezachowawczych*".

Wszystkie cztery podstawowe oddziaływania należą do kategorii sił zachowawczych. Zatem, podstawowe siły działające między cząstkami elementarnymi należą do sił zachowawczych. Również dotyczy to sił, które można w prosty sposób zredukować do sił podstawowych. Przykładem może być tu siła sprężystości sprężyny. Podczas

rozciągania sprężyny atomy zostają nieco od siebie odsunięte i elektrostatyczne przyciąganie między nimi sumując się daje makroskopowy efekt w postaci siły sprężystej sprężyny.



Wskazówka:

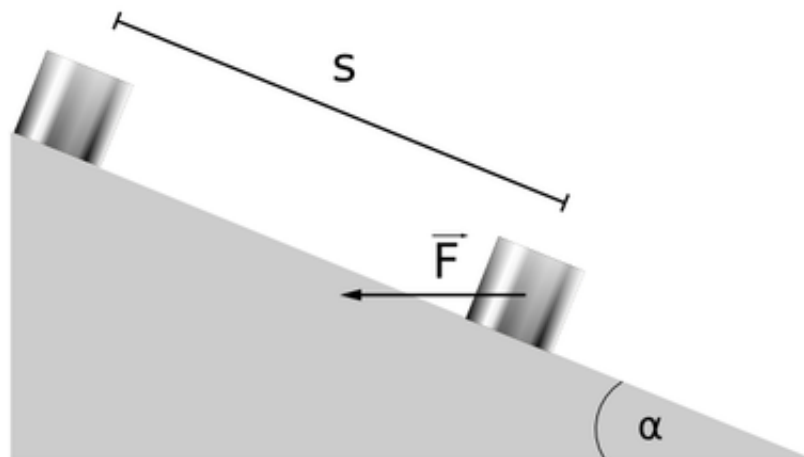
Nie jest łatwo podać ogólny przepis, który pozwalałby stwierdzić, czy dana siła jest zachowawcza, czy nie. Wszystkie cztery podstawowe oddziaływania należą do kategorii sił zachowawczych, gdy rozpatrujemy je w układach dwóch ciał. Jednak w miarę wzrostu liczby oddziałujących ciał zaczynają się pojawiać problemy z uzyskaniem „drogi zamkniętej”, na którą powołaliśmy się wyżej. Wynika to z faktu, że prawdopodobieństwo powrotu układu do stanu wyjściowego jest tym mniejsze, im układ ten jest bardziej skomplikowany (nieco więcej na ten temat powiemy w rozdziale poświęconym drugiej zasadzie termodynamiki). Tak więc przypisanie cechy zachowawczości (lub niezachowawczości) makroskopowej sile zależy nie tyle od jej podstawowej natury, ile od okoliczności, w których to podstawowe oddziaływanie się objawia. Spróbujmy to wyjaśnić na dwóch przykładach: siły tarcia i siły sprężystości.

Pojawienie się makroskopowej siły tarcia jest uwarunkowane różnorodnymi, często przypadkowymi oddziaływaniami wielu różnych atomów. Nawet jeśli każda para oddziałujących atomów magazynuje - w postaci energii potencjalnej lub innej formy energii - część pracy wykonanej przy przesuwaniu ciała, to nie możemy oczekiwać, że przy przesunięciu odwrotnym wszystkie pary, niejako „na komendę”, oddadzą zmagazynowaną energię. Z czysto teoretycznego punktu widzenia jest to wprawdzie możliwe, ale tak mało prawdopodobne, że stwierdzamy, iż tarcie jest niezachowawcze.

Nieco inaczej ma się sprawa, gdy rozpatrujemy rozciągnięcie sprężyny. Podczas tego procesu wszystkie atomy zostają od siebie nieco odsunięte, praktycznie w ten sam sposób - nie występuje tu element chaosu charakterystyczny dla siły tarcia. Elektrostatyczne przyciąganie między atomami powoduje, że każda para uzyskuje elektryczną energię potencjalną (udział innych form energii można z powodzeniem pominąć). Energie te sumując się dają makroskopowy efekt w postaci energii sprężystości sprężyny. Gdy pozwalamy sprężynie powrócić do stanu wyjściowego, wszystkie atomy, tym razem niemalże „na komendę”, powracają do swoich stanów równowagowych i oddają zmagazynowaną energię. Stwierdzamy zatem, że siła sprężystości jest w bardzo dobrym przybliżeniu zachowawcza.

Pytania i problemy

1. Zinterpretuj wzór na energię potencjalną sprężyny o stałej sprężystości k , rozciągniętej o x .
2. Przedstaw za pomocą wykresu zależność energii potencjalnej sprężyny od jej wydłużenia.
3. Siła $F = 50 \text{ N}$ działająca w kierunku poziomym przesuwaa ciężar po równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 60^\circ$ (*Rysunek 3.10: Siła przemieszcza ciężar po równi pochyłej* na stronie 142). Ciężar przemieszcza się o odcinek drogi $s = 50 \text{ cm}$. Oblicz przyrost energii potencjalnej ciała.



Rysunek 3.10: Siła przemieszcza ciężar po równi pochyłej

3.3 Energia kinetyczna

Powiedzieliśmy uprzednio, że ciało ma energię wtedy, gdy może wykonać pracę. Otóż, gdy ciało porusza się z pewną prędkością, to może wykonać pracę, na przykład może wykonać pracę przeciwko siłom tarcia na drodze hamowania. Zatem ciało będące w ruchu ma energię. Energię związaną z ruchem ciała nazywamy *energią kinetyczną*.

Zapytajmy, ile energii ma ciało o masie m , gdy porusza się z prędkością v ? Energię tę możemy wyznaczyć obliczając pracę, jaką może wykonać ciało. Można podejść do tego zagadnienia odwrotnie - obliczyć pracę siły przyspieszającej potrzebną do tego, aby ciało nabyło prędkość v . Przyjmijmy, że na spoczywające początkowo ciało działa stała siła F wzdłuż drogi s , która przyspiesza je nadając mu stałe przyspieszenie a . Droga s , jaką przebędzie ciało w czasie t , wynosi

$$(\text{wzór 270}) s = \frac{at^2}{2}$$

Pracę potrzebną do nadania ciału prędkości v ($v = at$) otrzymamy mnożąc siłę F przez drogę s

$$(\text{wzór 271}) W = Fs = mas = ma \frac{at^2}{2} = m \frac{(at)^2}{2} = m \frac{v^2}{2}$$

Zatem, aby rozpędzić ciało początkowo nieruchome, należy wykonać pracę $W = mv^2/2$. Praca ta jest nagromadzona w rozpędzonym ciele i w całości może być w odpowiednich warunkach oddana, czyli ciało ma zdolność do wykonania pracy. Jest to energia kinetyczna ciała. Chociaż wzór ten wyprowadziliśmy dla szczególnego przypadku - rozpędzania ciała przez stałą siłę, to jest on prawdziwy dla dowolnego ciała mającego prędkość v . Energia kinetyczna ciała mającego prędkość v wyraża się więc wzorem:

$$(\text{wzór 272}) E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia kinetyczna jest wyrażona za pomocą kwadratu prędkości, jest zatem zawsze dodatnia, niezależnie od tego w którą stronę ciało się porusza. Prędkość jest wektorem, ale kwadrat prędkości jest skalarem (kwadrat wektora jest iloczynem skalarnym dwóch jednakowych wektorów, a iloczyn skalarny wektorów jest skalarem), więc i energia kinetyczna musi być skalarem (bo i masa jest też skalarem, a wielkość będąca iloczynem skalarów musi być też skalarem).

Przykład 5

Ile wynosi energia kinetyczna samochodu o masie $m = 1000 \text{ kg}$ jadącego z prędkością $v = 100 \text{ km/h} = 27,78 \text{ m/s}$?

Odpowiedź:

$$(\text{ wzór 273 }) E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1000 \text{ kg} (27,78 \text{ m/s})^2}{2} = 385864,2 \text{ J} \approx 386 \text{ kJ}$$

Przykład 6

Ile wynosi energia kinetyczna kuli karabinowej o masie $m = 10 \text{ g}$ lecącej z prędkością $v = 1000 \text{ m/s}$?

Odpowiedź:

$$(\text{ wzór 274 }) E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,01 \text{ kg} (1000 \text{ m/s})^2}{2} = 5000 \text{ J} \approx 5 \text{ kJ}$$

Wzór na energię kinetyczną $E_k = mv^2/2$ zawiera prędkość v , która jak wiemy jest wielkością względną – tzn. wartość prędkości zależy od układu względem, którego mierzymy tę prędkość. Zauważmy zatem, że wartość energii kinetycznej ciała zależy od układu odniesienia.

Widzimy więc, że podobnie jak w przypadku energii potencjalnej, gdzie zależała ona od położenia poziomu odniesienia, tak i energia kinetyczna zależy od układu odniesienia. Pokreślmy jednak istotną różnicę pomiędzy energią kinetyczną a energią potencjalną: ta pierwsza jest cechą pojedynczego ciała, zależną od jego masy i prędkości, ale niezależną bezpośrednio od tego, czy ciało to oddziałuje z innymi. Tymczasem energia potencjalna jest cechą układu co najmniej dwóch ciał i konkretnego oddziaływania między nimi.



Wskazówka:

Wyobraźmy sobie kamień wiszący na lince. Dla kogoś stojącego obok na Ziemi kamień nie ma energii kinetycznej, bo nie porusza się. Natomiast pasażer w jadącym samochodzie widzi ten sam kamień zbliżający się do niego z dużą prędkością. W tym układzie kamień ma znaczną energię kinetyczną, która w momencie zderzenia z szybą samochodu zamieni się na pracę, skutkującą (między innymi) wybiciem szyby.



Cięciwa zwolniona wykona pracę, która nadaje prędkość strzale i strzała uzyskuje energię kinetyczną

Rysunek 3.11: Cięciwa napiętego łuku ma energię

Całkowita energia ciała

Szczególna teoria względności przedstawia ciekawe uogólnienie pojęcia energii kinetycznej ciała. W jej ramach wprowadza się energię całkowitą ciała, które nie oddziałuje z innymi obiektami:

$$(\text{wzór 275}) E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gdzie m jest masą ciała poruszającego się z prędkością v , $c = 3 \cdot 10^8$ m/s – prędkość światła.

Z tej relacji wynika, że energia ciała zależy od prędkości v z jaką się ono porusza w danym układzie odniesienia. W różnych układach ciało ma różną prędkość. Ciało ma najmniejszą energię E_0 w układzie, w którym spoczywa, czyli ma prędkość $v = 0$. Tę energię

$$(\text{wzór 276}) E_0 = mc^2$$

nazywamy energią spoczynkową ciała.

Wzór (wzór 276 na stronie 144) to słynny wzór Einsteina, który stwierdza, że każde ciało ma energię spoczynkową określoną przez jego masę mnożoną przez czynnik c^2 (nie należy mylić tej energii z energią potencjalną związaną z oddziaływaniem z innymi ciałami).

Powiedzieliśmy uprzednio, że ciało ma energię wtedy, kiedy może wykonać pracę. Otóż, gdy ciało porusza się z pewną prędkością, może wykonać pracę, na przykład przeciwko siłom tarcia na drodze hamowania. Zatem ciało będące w ruchu ma energię. Energię związaną z ruchem ciała nazwaliśmy energią kinetyczną.

Relacja (wzór 275 na stronie 144) pozwala na wyznaczenie energii kinetycznej ciała o dowolnej prędkości $0 < v < c$ (wzór (wzór 272 na stronie 142) stosuje się tylko dla małych prędkości $v \ll c$, co wykażemy później).

Zapytajmy ogólnie, ile energii kinetycznej ma ciało o masie m , gdy porusza się z prędkością v . Stwierdziliśmy, że z określenia energii (wzór 275 na stronie 144) wynika, że energia ciała zależy od jego prędkości v . Zatem energię kinetyczną ciała E_k możemy zdefiniować, jako różnicę między jego energią całkowitą a energią spoczynkową:

$$(\text{wzór 277}) E_k = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

Wzór ten jest dokładny dla całego zakresu prędkości ciała, $0 < v < c$.

Wzór ten znacznie się uprości, gdy ciało ma małą prędkość w stosunku do prędkości światła, tzn. gdy $v/c \approx 0$. W tym celu przekształcimy wzór (wzór 277 na stronie 144), pomnożymy licznik i mianownik tego wzoru przez $(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})$:

$$(\text{wzór 278}) E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) = mc^2 \frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Otrzymamy

$$(\text{wzór 279}) E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1 - (1 - v^2/c^2)}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dla małych prędkości możemy zaniedbać wyraz v^2/c^2 . Przyjmując, że $v^2/c^2 = 0$, wzór (wzór 279 na stronie 145) uprości się i otrzymamy:

$$(\text{wzór 280}) E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Wzór ten jest dokładnie taki sam jak (wzór 279 na stronie 145).

Wzór ten jest powszechnie stosowany w mechanice newtonowskiej. W zwykłych przypadkach, z którymi mamy do czynienia w życiu codziennym wzór ten jest wystarczająco dokładny. Nawet dla prędkości rzędu setek kilometrów na sekundę, daje wartość różniącą się od dokładnego wzoru (wzór 277 na stronie 144) o mniej niż jedną dziesięciotysięczną procenta.

Pytania i problemy

1. Co to jest energia?
2. Zdefiniuj pojęcie energii kinetycznej.
3. Podaj wzór na energię kinetyczną ciała o masie m mającego prędkość v . Wyprowadź ten wzór dla przypadku rozpędzania ciała stałą siłą.
4. Do jakich wielkości fizycznych – wektorowych, czy skalarnych – należy energia kinetyczna? Odpowiedź uzasadnij.
5. Pęd kuli karabinowej wynosi $8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, a jej energia kinetyczna ma wartość $3,2 \text{ kJ}$. Wyznacz masę kuli oraz jej prędkość.

3.4 Prawo zachowania energii mechanicznej

Zasada zachowania energii

Rysunek 3.12: Film

Suma energii potencjalnej i kinetycznej ciała nazywa się *energiami mechaniczną* ciała

$$(\text{wzór 281}) E = E_p + E_k$$

Ciało może mieć jednocześnie niezerową energię potencjalną i kinetyczną. Na przykład, lądujący prom kosmiczny, szybujący na niewielkiej wysokości h z prędkością v , ma zarówno energię potencjalną $E_p = mgh$, jak i energię kinetyczną $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Energia mechaniczna promu wyniesie więc

$$(\text{wzór 282}) E = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

Jeżeli pilot włączy silniki, to zadziała siła, która wykona pracę W . Siła ta może spowodować zarówno zmianę wysokości lotu, jak i prędkości. Zatem, kosztem tej pracy, nastąpi przyrost energii potencjalnej ΔE_p i przyrost energii kinetycznej ΔE_k . Suma tych dwóch rodzajów energii będzie przyrostem energii mechanicznej i będzie równa

pracy W . To samo stosuje się do dowolnego ciała i do dowolnego układu ciał, w którym działają wyłącznie siły zachowawcze. Mamy zatem równanie

$$(\text{wzór 283}) \quad W = \Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k$$

Równanie to jest wyrazem bardzo ważnej prawidłowości występującej we wszystkich zjawiskach mechanicznych, w których siły oporu i tarcia można zaniedbać: **praca sił zewnętrznych wykonana na układzie zachowawczym ciał (to znaczy takim, w którym działają tylko siły zachowawcze (rozdział 3.2 Energia potencjalna na stronie 136) jest równa zmianie całkowitej energii mechanicznej układu.**

Założmy teraz, że układ jest odosobniony i nie jest wykonywana nad nim żadna praca sił zewnętrznych. Wtedy $W = 0$ i przyrost energii układu jest równy zeru (mimo, że mogą w nim zachodzić różne procesy), czyli

$$(\text{wzór 284}) \quad W = \Delta E = E_2 - E_1 = 0$$

lub $E_1 = E_2 = \text{const}$. Oznacza to, że całkowita energia mechaniczna układu jest wtedy stała. Symbolami E_1 i E_2 oznaczamy tutaj energię mechaniczną układu, odpowiednio, przed rozpatrywanym procesem i po tym procesie. Ponieważ energia mechaniczna składa się z energii potencjalnej i kinetycznej, zatem

Ⓡ Zamapiętać:

Prawo zachowania energii mechanicznej

$$(\text{wzór 285}) \quad E = E_p + E_k = \text{const}$$

Całkowita energia mechaniczna izolowanego układu zachowawczego jest stała (jest zachowywana).

Przykład 7

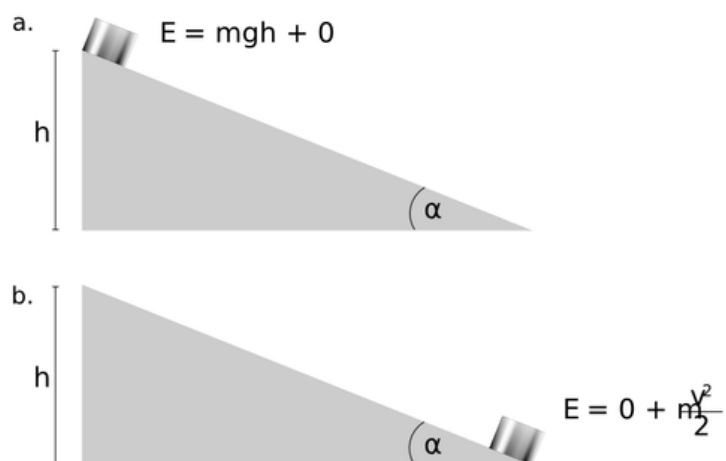
Ciało zsuwa się bez tarcia po równi pochyłej o wysokości h (*Rysunek 3.13: Całkowita energia ciała zsuwającego się po równi bez tarcia $E = E_p + E_k = \text{const}$ na stronie 147*). Ile wynosi prędkość ciała v u podstawy równi?

Odpowiedź: Całkowita energia ciała na szczycie równi wynosi $E_1 = E_p + 0 = mgh$ zaś u podstawy: $E_2 = 0 + E_k = \frac{mv^2}{2}$. Z przyrównania tych dwóch wielkości mamy, że prędkość końcowa

$$(\text{wzór 286}) \quad v = \sqrt{2gh}$$

Widzimy, że prędkość końcowa ciała zależy tylko od wysokości, z jakiej ciało się zsuwało, a nie zależy od kąta nachylenia równi.

a) u szczytu równi ciało ma tylko energię potencjalną, b) u podstawy równi ciało ma tylko energię



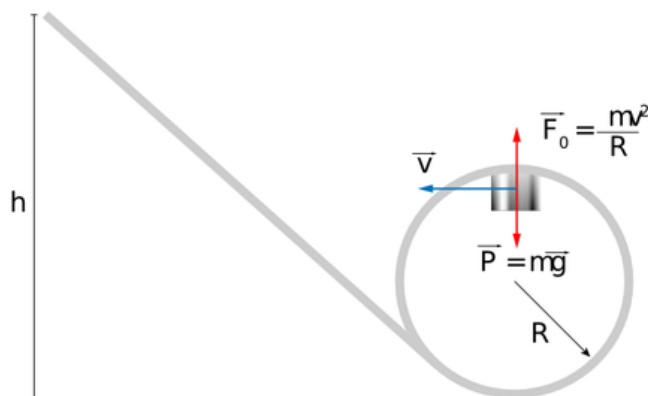
kinetyczną

Rysunek 3.13: Całkowita energia ciała zsuwającego się po równi bez tarcia
 $E = E_p + E_k = \text{const}$

Rysunek 3.14: Martwa pętla

Przykład 8

Ciało zsuwa się po równi i następnie pokonuje „diabelską pętlę” o promieniu R (Rysunek 3.15: *Ciało, zsuwając się po równi pochyłej, nabiera prędkości i może pokonać „diabelską pętlę”* na stronie 147). Nie uwzględniając tarcia, oblicz, z jakiej co najmniej wysokości h ciało powinno się zsuwać, aby nie oderwało się od pętli nawet w jej najwyższym punkcie.



Rysunek 3.15: Ciało, zsuwając się po równi pochyłej, nabiera prędkości i może pokonać „diabelską pętlę”

Odpowiedź: Jeżeli prędkość ciała w szczytowym punkcie pętli będzie wystarczająco duża, to siła odśrodkowa (dociskająca ciało do pętli) $F_0 = \frac{mv^2}{R}$ będzie co najmniej równa sile ciężkości ciała $P = mg$ odrywającej je od pętli. Stąd otrzymujemy warunek graniczny

$$\text{(wzór 287) } \frac{mv^2}{R} = mg \quad \text{lub} \quad v^2 = gR$$

Z drugiej strony, z prawa zachowania energii mamy wniosek, że energia potencjalna ciała na szczycie równi $E_p = mgh$ jest równa energii w punkcie szczytowym pętli. Ta ostatnia energia składa się z energii potencjalnej $mg \cdot 2R$ i energii kinetycznej $\frac{mv^2}{2}$. Mamy więc równanie:

$$\text{(wzór 288) } mgh = mg \cdot 2R + \frac{mv^2}{2}$$

Stąd:

$$\text{(wzór 289) } h = 2R + \frac{v^2}{2g}$$

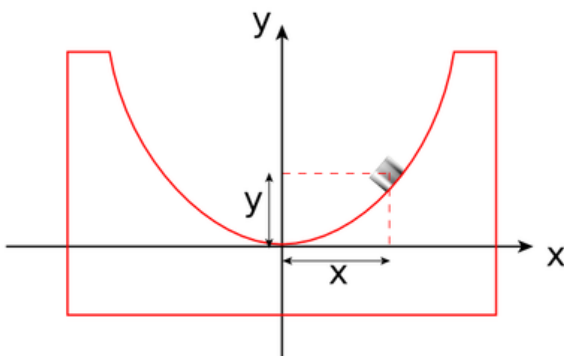
Podstawiając tu $v^2 = gR$, otrzymamy $h = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$. Jest to najmniejsza wysokość, z jakiej powinno się zsuwać ciało, aby nie oderwać się od pętli, zatem h musi spełniać warunek

$$\text{(wzór 290) } h \geq \frac{5}{2}R$$

Widzimy, że warunek ten nie zależy od przyspieszenia ziemskiego g . Zatem taki sam warunek będzie obowiązywał na Księżycu i na jakiegokolwiek planecie.

Przykład 9

Klocek zsuwa się bez tarcia po ścianie wydrążonego dolka wykonanego w kształcie paraboli (*Rysunek 3.16: Ciało zsuwające się po ścianie wydrążonego dolka w kształcie paraboli* na stronie 148) o równaniu $y = cx^2$. Jaka będzie zależność energii potencjalnej $E_p(x)$ ciała od współrzędnej x ?



Rysunek 3.16: Ciało zsuwające się po ścianie wydrążonego dolka w kształcie paraboli

Odpowiedź: Energia potencjalna względem dna wydrążenia wynosi $E_p(x) = mgh$, gdzie wysokość h w trakcie zsuwania ciała wynosi y , zatem $E_p(x) = mgy$. Ponieważ $y = cx^2$, zatem

$$(\text{ wzór 291 }) E_p(x) = mgcx^2$$

Widzimy, że krzywa energii potencjalnej jest parabolą typu

$$(\text{ wzór 292 }) Y = Kx^2$$

gdzie $K = mgc$ jest stałym współczynnikiem.

Kształt tej krzywej energii potencjalnej jest taki sam jak kształt dołka, w którym porusza się klocek.

Łatwo można dojść do ogólnego wniosku, że w przypadku dołka dowolnego kształtu, kształt krzywej energii potencjalnej jest taki sam jak kształt dołka. Zbieżność tych dwóch pojęć sprawiła, że posługujemy się pojęciem *dołu potencjału* lub *studni potencjału* w różnych przypadkach, gdy mamy do czynienia z ruchem ciał w polu sił (nie tylko grawitacji). Pojęcie to jest bardzo użyteczne i stosuje się do wielu zagadnień fizycznych, np. w fizyce atomowej.

Podobnie w przypadku ciała zaczepionego na sprężynie można powiedzieć, że ciało znajduje się w parabolicznej studni potencjału (patrz *Rysunek 3.16: Ciało zsuwające się po ścianice wydrążonego dołka w kształcie paraboli* na stronie 148 i wzór *(wzór 266* na stronie 134)).

Ogólna zasada zachowania energii

Zasada zachowania energii mechanicznej spełniona jest ściśle w przypadku, gdy siły oporu i tarcia nie występują lub są tak małe, że można je zaniedbać. W przeciwnym przypadku w trakcie procesu część energii mechanicznej zostaje stracona. Ale czy rzeczywiście stracona? Otóż nie, bo tę właśnie część energii odnajdujemy w wydzielającym się cieple (powierzchnie trące się ogrzewają). W ogólnym przypadku energia mechaniczna może zamieniać się na różne postacie energii. Na przykład energia potencjalna spadającej wody może napędzać generator wytwarzający prąd elektryczny. W takim przypadku energia mechaniczna zamienia się na energię elektryczną. Znamy wiele różnych postaci energii: mechaniczną, elektryczną, promienistą, fal elektromagnetycznych, jądrową itd.

Weźmy pod uwagę układ izolowany ciał, w którym mogą zachodzić przemiany jednej postaci energii w inną. Niech układ będzie izolowany w ten sposób, że żadna z postaci energii nie ucieka na zewnątrz ani żadna nie przenika do układu. Otóż okazuje się, że wtedy całkowita suma wszystkich możliwych postaci energii jest stała. To znaczy, że energia nie znika ani nie może być stworzona z niczego. Na podstawie niezliczonych eksperymentów i obserwacji naukowych utwierdzono się w przekonaniu o nienaruszalności zasady:

Ⓡ Zamknięta:

Zasada zachowania energii

W układzie odosobnionym suma wszystkich rodzajów energii jest stała.

Ta uniwersalna zasada nosi nazwę *zasady zachowania energii*. Nigdy i nigdzie nie stwierdzono najmniejszego nawet odstępstwa od niej. Ma ona fundamentalne znaczenie w fizyce i na niej opiera się sposób pomiaru nowych form energii.

Zasada zachowania energii należy do nielicznej grupy zasad zachowania. Z jedną z nich spotkaliśmy się już uprzednio, mianowicie z zasadą zachowania pędu. W mechanice występuje jeszcze jedna zasada zachowania – zasada zachowania momentu pędu, którą poznamy później.

Wszystkie zasady zachowania mają fundamentalne znaczenie w fizyce, ponieważ wynikają z podstawowych własności przestrzeni i czasu. Okazuje się, że zasada zachowania energii wynika z zasadniczej własności czasu, która polega na tym, że czas w pustej przestrzeni płynie zawsze jednakowo, nigdy nie przyspiesza ani nie zwalnia. Również zasada zachowania pędu wynika z podobnej własności przestrzeni, zwanej jednorodnością przestrzeni.

Pytania i problemy

1. Objaśnij pojęcie energii mechanicznej. Podaj treść prawa zachowania energii mechanicznej.

2. Ciężarek zaczepiony do sprężyny wykonuje ruch drgający. Przedstaw na wykresie zależność energii kinetycznej (E_k) ciężarka od wydłużenia (x) sprężyny.
3. Ciężarek o masie m jest zaczepiony do sprężyny. Sprężyna została rozciągnięta o odcinek x_M od położenia równowagowego. Oblicz wartość prędkości ciężarka, gdy (po zwolnieniu sprężyny) znajdzie się w odległości $x = \frac{x_M}{2}$ od położenia równowagowego. Stała sprężystości sprężyny wynosi k .
4. Podaj kilka przykładów form energii niebędącej energią mechaniczną.
5. Podaj treść zasady zachowania energii.
6. Wiadomo, że zasada zachowania energii wynika z podstawowej własności czasu. Podaj, jaka to własność.

3.5 Moc

Pojęcie mocy utworzono po to, aby móc dokładnie określać „jak mocny” jest dany silnik, czy dowolne inne urządzenie wykonujące pracę. Dzięki temu możemy porównywać i oceniać ilościowo tę własność różnych urządzeń.

Na przykład, w salonie samochodowym sprzedawca oferuje do wyboru samochód z różnymi silnikami. Jeden z nich osiąga prędkość $v = 100 \text{ km/h}$ po czasie $t_1 = 10 \text{ s}$ od momentu startu, drugi: $v = 100 \text{ km/h}$ – po czasie $t_2 = 8 \text{ s}$.

Zapytajmy, który silnik jest mocniejszy. Mocniejszy jest oczywiście silnik drugi, gdyż wykonuje pracę rozpędzania samochodu w krótszym czasie niż pierwszy. Mówimy, że w tym drugim przypadku mamy do czynienia z większą mocą. Moc oznaczamy symbolem P i definiujemy następująco:

Ⓡ Zamapiętać:

Moc

jest to stosunek pracy W do czasu t , w jakim ta praca została wykonana:

$$(\text{ wzór 293 }) P = \frac{W}{t}$$

Innymi słowy, moc jest „szybkością wykonania pracy”. Jednostka mocy wynika ze wzoru (*wzór 293* na stronie 150); jest ona równa jednemu dżulowi podzielonemu przez jedną sekundę. Nazywa się ją *watem* i oznacza mianem W :

$$(\text{ wzór 294 }) 1W = \frac{1J}{1s}$$

Początkowo w XIX wieku ustanowiono jednostkę mocy w porównaniu do mocy konia. Jednostkę tę nazwano *koniem mechanicznym* (KM).

$$(\text{ wzór 295 }) 1KM = 0,7355kW$$

Jednostka ta jest często stosowana do dziś, mimo że nie jest uznawana przez Międzynarodowy Układ Jednostek SI. Producenci aut chętnie stosują jednostkę konia mechanicznego z tego względu, że jest bardzo pogładowa.

Przykład 9

Uczeń wbiega po schodach na drugie piętro budynku, pokonując wysokość $h = 6 \text{ m}$ w czasie $t = 6 \text{ s}$. Oblicz, z jaką mocą wbiegł uczeń, wiedząc, że jego masa wynosi $m = 60 \text{ kg}$.

Odpowiedź:

$$(\text{ wzór 296 }) P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t}$$

Zatem:

$$(\text{ wzór 297 }) P = \frac{60 \cdot 9,81 \cdot 6}{6} W = 588,6 W$$

Czyli uczeń traktowany jako „urządzenie mechaniczne” miał moc $P = 588,6 \text{ W}$, co odpowiada nie w pełni jednemu koniowi mechanicznemu, $P = 0,8 \text{ KM}$ (można żartobliwie określić, że „był silny prawie jak koń”).

Sprawność

Zasada zachowania energii obowiązuje w każdym przypadku, m in. dotyczy to urządzeń technicznych. Czyli **energia dostarczona** do urządzenia (w określonym czasie, więc i dostarczona moc) nie może zginąć. Jednakże część tej energii (i mocy) zostaje zużyta na pracę przeciwko tarcia i oporom występującym w mechanizmie urządzenia. Zatem część energii (i mocy) zostaje rozproszona bezużytecznie. Pozostała część energii dostarczonej (i mocy) jest zamieniana na *pracę użyteczną* (powodującą np. nadanie prędkości samochodowi).

W celu ilościowego określenia wydajności energetycznej urządzenia definiuje się pojęcie *sprawności urządzeń technicznych* następująco:

Ⓡ Zamapiętać:

Sprawność

Sprawność, to stosunek mocy użytecznej P_U do mocy dostarczonej do urządzenia P_O :

$$(\text{ wzór 298 }) \eta = \frac{P_U}{P_O}$$

Przykład 10

Samochód jedzie z prędkością 100 km/h i zużywa 6 litrów benzyny na 100 kilometrów.

- a) Jaka moc P_O jest dostarczana do silnika? Przyjmij, że przy spalaniu jednego litra benzyny otrzymuje się $3 \cdot 10^7$ energii.
- a) Ile wynosi moc użyteczna silnika P_U potrzebna dla podtrzymania tej prędkości? Siła wypadkowa oporów ruchu wynosi $F = 540 \text{ N}$.
- a) Z jaką sprawnością η pracuje silnik?

Odpowiedź:

Ad. a) Samochód zużywa 6 litrów benzyny w ciągu jednej godziny, czyli w ciągu 3600 s . Zatem moc dostarczona

$$(\text{ wzór 299 }) P_O = \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^7 \text{ J}}{3600 \text{ s}} = 5 \cdot 10^4 \text{ W} = 50 \text{ kW}$$

Ad. b) Praca na drodze s , przeciwko sile oporów ruchu wynosi $W = Fs$. Moc użyteczna

$$(\text{ wzór 300 }) P_U = \frac{Fs}{t} = Fv = 540 \text{ N} \cdot 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15 \text{ kW}$$

Ad. c) Sprawność

$$(\text{ wzór 301 }) \eta = \frac{P_U}{P_O} = \frac{15 \text{ kW}}{50 \text{ kW}} = 0,3 = 30 \%$$

Pytania i problemy

1. Podaj definicję mocy średniej. W jakich jednostkach mierzymy moc? Podaj nazwę jednostki oraz przedstaw ją za pomocą jednostek podstawowych.
2. W jakim celu definiuje się pojęcie sprawności? Podaj definicję tej wielkości.
3. Samochód o masie 1300 kg po rozbiegu trwającym 10 s osiąga prędkość 108 km/h . Wyznacz moc silnika samochodu przyjmując, że jego wypadkowa sprawność wynosi $\eta = 0,4$.

3.6 Zderzenia

Zderzenie – to z pozoru proste zjawisko – może dostarczyć nam wiele cennych informacji o właściwościach zderzających się ciał oraz o siłach między nimi działających. W przypadku gdy mówimy o zderzeniach ciał makroskopowych, mamy na myśli **bezpośrednie zetknięcie się ciał** takich, jak na przykład kule bilardowe. Okazuje się, że ze zderzeniami mamy do czynienia również w mikroświecie, np. wtedy, gdy dwie jednoimiennie naładowane elektrycznie cząstki zbliżają się do siebie i na skutek oddziaływania pól elektrycznych odskakują od siebie. W szczególności zagadnienie zderzeń jest pierwszoplanowe przy współczesnych badaniach cząstek elementarnych oraz przy badaniach elementarnych oddziaływań podstawowych. Wiele bardzo cennych informacji z obszaru mikroświata kwantowego jest dostępnych dla nas tylko dzięki badaniu zderzeń.

Teoria zderzeń, z którą tu się zapoznasz, jest oczywiście dużo prostsza niż teoria stosowana przez fizyków we współczesnych laboratoriach przy pracy z wielkimi akceleratorami cząstek elementarnych. Jednakże poznasz podstawowe zasady, które rządzą tymi zjawiskami. Do zbadania zderzeń mechanicznych posłużą nam dwie zasady – zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii.

Rozróżniamy następujące dwa skrajne rodzaje zderzeń: *zderzenie niesprężyste* i *zderzenie sprężyste*. Zderzenie niesprężyste niekiedy nazywamy zderzeniem doskonale niesprężystym; podobnie, zderzenie sprężyste nazywamy zderzeniem doskonale sprężystym.

Zderzenia niesprężyste

Zderzenia niesprężyste, to takie gdy po zderzeniu ciała nie odskakują od siebie, ale poruszają się razem z jednakową prędkością. To stwierdzenie możemy uznać jako definicję zderzeń niesprężystych:

 **Ważne:**

Jeżeli po zderzeniu ciała poruszają się razem z jednakową prędkością, to takie zderzenie nazywamy *zderzeniem niesprężystym*.

Przykładem zderzenia niesprężystego może być zderzenie dwóch kulek plasteliny, które się zlepiają, uderzenie pocisku w worek z piaskiem lub zderzenie meteorytu z Ziemią. Podczas zderzenia energia mechaniczna nie jest zachowana, gdyż część energii kinetycznej zderzających się ciał zostanie rozproszona na skutek pracy przeciwko siłom tarcia i przekazana otoczeniu pod postacią ciepła. Natomiast prawo zachowania pędu będzie tu obowiązywać w pełni, gdyż ciała zderzające się możemy traktować jako układ izolowany.

Wyobraźmy sobie dwa ciała zbliżające się do siebie, jak na *Rysunek 3.17: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał* na stronie 153. Niech ciało o masie m_1 ma prędkość v_1 , a ciało o masie m_2 – prędkość v_2 . Jaka prędkość będą miały ciała po zderzeniu doskonale niesprężystym? Odpowiemy na to pytanie, korzystając z prawa zachowania pędu. Suma wektorowa pędów obu ciał przed zderzeniem jest pędem całkowitym układu, który pozostaje stały również po zderzeniu. Oba ciała po zderzeniu mają wspólną prędkość \vec{v} , której właśnie poszukujemy, zatem pęd po zderzeniu jest równy

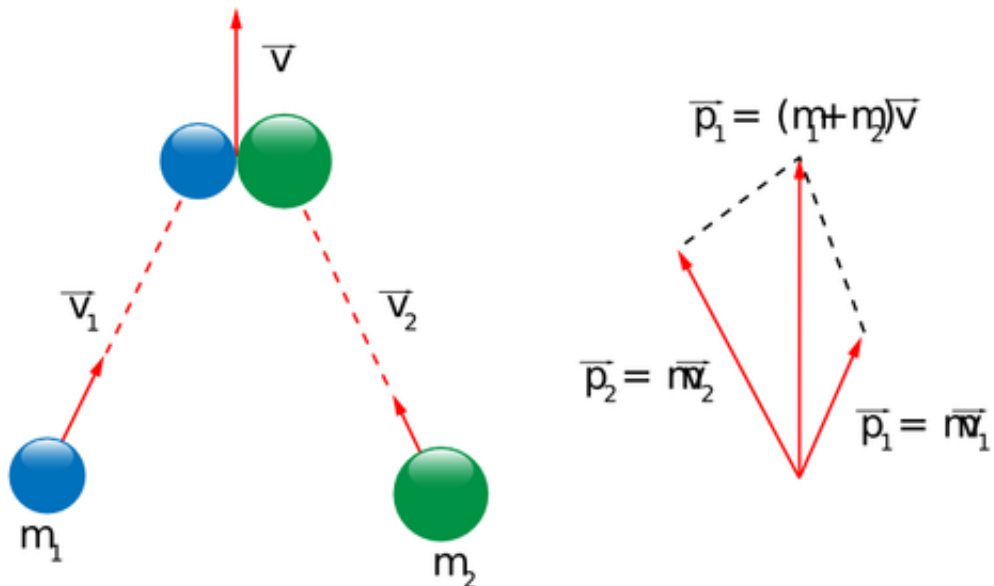
$$(\text{wzór 302}) (m_1 + m_2) \vec{v}$$

Mamy więc równanie:

$$(\text{wzór 303}) m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

Stąd otrzymujemy wzór na szukaną prędkość ciał po zderzeniu

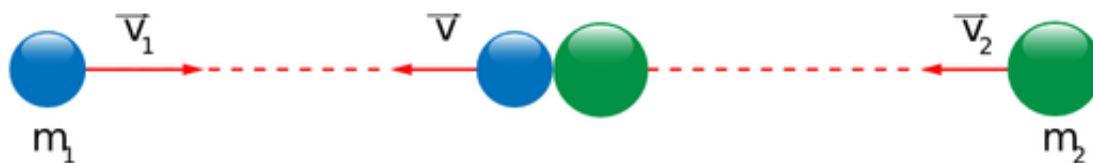
$$(\text{wzór 304}) \vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



Pęd wypadkowy jest stały; całkowity pęd przed zderzeniem jest równy pędowi obu ciał (zlepionych) po zderzeniu

Rysunek 3.17: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał

We wzorze ([wzór 304](#) na stronie 152) występują wielkości wektorowe i nie należy go odczytywać, jakby w liczniku była suma liczb, ale stosować regułę dodawania wektorów. W szczególnym przypadku, gdy ciała zbliżają się do siebie wzdłuż wspólnej prostej ([Rysunek 3.18: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał wzdłuż jednej prostej](#) na stronie 154), równanie ([wzór 304](#) na stronie 152) można zapisać skalarnie, ale należy prędkość jednego ciała zaopatrzyć znakiem plus, a drugiego – znakiem minus.



Rysunek 3.18: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał wzdłuż jednej prostej

W zderzeniu niesprężystym suma energii kinetycznych przed zderzeniem nie jest równa całkowitej energii kinetycznej po zderzeniu, co już wcześniej zostało zaznaczone. Teraz jest to szczególnie widoczne: jeżeli pędy zderzających się ciał są równe, ale przeciwnie zwrócone, to oba ciała po zderzeniu będą miały zerową prędkość, czyli ich energia kinetyczna będzie równa zero, natomiast przed zderzeniem suma ich energii kinetycznych była oczywiście większa od zera.

Przykład 11

Dwie kulki z plasteliny zbliżają się do siebie wzdłuż wspólnej prostej (*Rysunek 3.18: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał wzdłuż jednej prostej* na stronie 154). Kulka o masie $m_1 = 10\text{ g}$ ma prędkość $v_1 = 5\text{ m/s}$, a kulka o masie $m_2 = 30\text{ g}$ – prędkość $v_2 = 2\text{ m/s}$. Jaką prędkość będą miały kulki po zderzeniu i w którą stronę będą się poruszały?

Odpowiedź: suma wektorowa pędów obu ciał przed zderzeniem jest pędem całkowitym układu, który pozostaje stały również po zderzeniu (prawo zachowania pędu).

Przed zderzeniem całkowity pęd obu kulek wynosił:

$$\text{(wzór 305) } m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Po zderzeniu wynosi:

$$\text{(wzór 306) } (m_1 + m_2) v$$

Obie kulki po zderzeniu mają wspólną prędkość v , którą znajdziemy z równania pędów:

$$\text{(wzór 307) } (m_1 + m_2) v = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Stąd otrzymujemy wzór na szukaną prędkość kulek po zderzeniu

$$\text{(wzór 308) } v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$(\text{ wzór 309}) v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{10 \text{ g} \cdot 5 \text{ m/s} - 30 \text{ g} \cdot 2 \text{ m/s}}{10 \text{ g} + 30 \text{ g}} = -0,25 \text{ m/s}$$

Znak minus przed wartością prędkości oznacza, że kulki po zderzeniu będą poruszały się w lewo, tzn. w tę samą stronę w jaką poruszała się kulka druga (gdyż miała ona pęd o większej wartości).

Zderzenia sprężyste

Zderzenie jest doskonale sprężyste, jeśli oprócz całkowitego pędu zachowuje się również suma energii kinetycznych zderzających się ciał. Oczywiście, chodzi tu o całkowity pęd i sumę energii kinetycznych. To znaczy, że podczas zderzenia mogą się zmieniać zarówno pędy, jak i energie poszczególnych ciał, ale sumaryczny pęd i suma energii kinetycznych pozostaje stała. Zatem dla zderzeń doskonale sprężystych otrzymujemy układ dwóch równań:

$$(\text{ wzór 310}) \left. \begin{array}{l} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\ E_{k1} + E_{k2} = E'_{k1} + E'_{k2} \end{array} \right\}$$

Symbole nieopatrzone znakiem ' odpowiadają pędowi i energiiom przed zderzeniem, zaś opatrzone tym znakiem – po zderzeniu.

Rozróżniamy dwa rodzaje zderzeń:

1. zderzenia centralne,
2. zderzenia niecentralne.

Ze zderzeniem centralnym mamy do czynienia wtedy, gdy środki mas zderzających się ciał poruszają się wzdłuż wspólnej linii prostej. W pozostałych przypadkach występuje zderzenie niecentralne.



Zderzenie centralne dwóch kul mających znacznie różniące się masy, kula masywniejsza spoczywa

Rysunek 3.19: Zderzenie centralne kul

Układ równań (wzór 310 na stronie 155) pozwala jednoznacznie wyznaczyć pędy (i prędkości) ciał po zderzeniu, jeśli dane są pędy (i masy) obu ciał przed zderzeniem dla dowolnego przypadku zderzeń doskonale sprężystych centralnych.

Ad. 1. Rozważmy zderzenie centralne dwóch kul. Dla uproszczenia przyjmiemy układ odniesienia taki, w którym kula m_2 spoczywa (*Rysunek 3.19: Zderzenie centralne kul* na stronie 155). Niech kula m_1 w tym układzie przed zderzeniem ma prędkość v . Obliczymy prędkości v'_1 i v'_2 po zderzeniu, korzystając z układu równań (wzór 310 na stronie 155):

$$(\text{wzór 311}) \left. \begin{array}{l} m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} \end{array} \right\}$$

Oba te równania przekształcimy do następującej postaci:

$$(\text{wzór 312}) \left. \begin{array}{l} m_1(v-v'_1) = m_2 v'_2 \\ m_1(v^2 - v'^2_1) = m_2 v'^2_2 \end{array} \right\}$$

Jeżeli teraz drugie równanie podzielimy stronami przez pierwsze, otrzymamy

$$(\text{wzór 313}) \quad v + v'_1 = v'_2$$

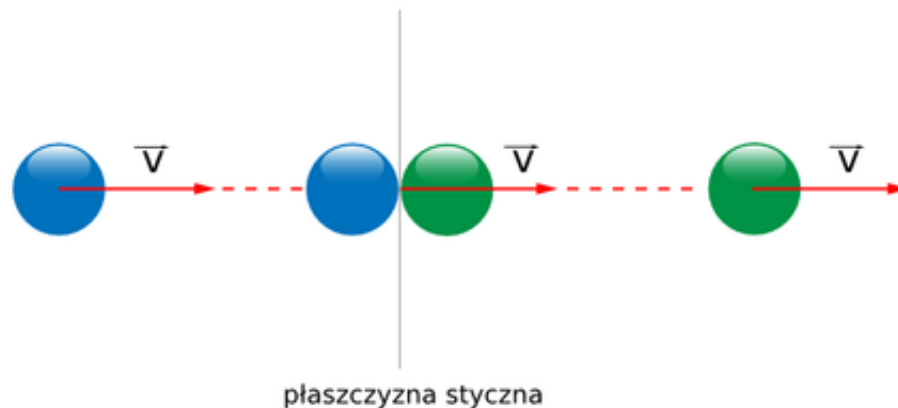
To równanie łącznie z pierwszym równaniem układu (wzór 310 na stronie 155) możemy potraktować jako układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi v'_1 i v'_2 . Stąd po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$(\text{wzór 314}) \quad v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

$$(\text{wzór 315}) \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v$$

Teraz zastosujemy te wzory do dwóch ciekawych przypadków:

a). Jeżeli **obie zderzające się kule mają jednakowe masy**, czyli $m_1 = m_2$, to $v'_1 = 0$ i $v'_2 = v$ (*Rysunek 3.20: Zderzenie centralne dwóch kul mających jednakowe masy, kula druga spoczywa. Narysowana tutaj płaszczyzna styczna w punkcie zetknięcia obu kul jest prostopadła do prędkości $v \rightarrow$* na stronie 157). Oznacza to, że druga kula, która początkowo była nieruchoma, po zderzeniu uzyska prędkość równą dokładnie prędkości kuli pierwszej. Kule po prostu wymieniają się prędkościami. Podobną sytuację możemy mieć w przypadku zderzenia centralnego dwóch identycznych cząstek kwantowych (np. protonów); cząstki takie są nierozróżnialne i efekt zderzenia jest taki, jakby jedna cząstka „przeszła przez drugą” bez zmiany prędkości.

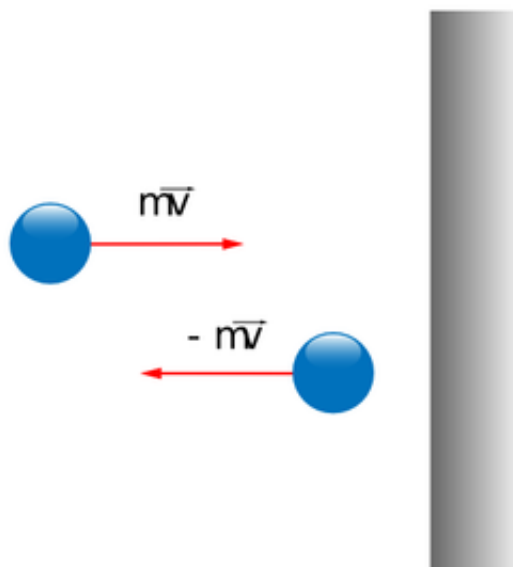


Rysunek 3.20: Zderzenie centralne dwóch kul mających jednakowe masy, kula druga spoczywa. Narysowana tutaj płaszczyzna styczna w punkcie zetknięcia obu kul jest prostopadła do prędkości \vec{v}

b). Jeżeli bardzo lekka kula zderza się centralnie z kulą masywną, tzn. gdy $m_2 \gg m_1$, to stosunek mas $\frac{m_1}{m_2}$ jest bliski zeru i wtedy

$$(\text{wzór 316}) \quad v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v \approx -v$$

czyli kula pierwsza po zderzeniu uzyska prędkość o wartości takiej samej, jaką miała przed zderzeniem, lecz z przeciwnym zwrotem. Natomiast kula druga pozostanie w spoczynku, gdyż zgodnie z równaniem (wzór 315 na stronie 156) jej prędkość będzie bliska zeru, $v'_2 \approx 0$. Sytuacja taka wystąpi również wtedy, gdy kula zderzy się (doskonale sprężyste) ze ścianą. Kula odskoczy od ściany w stronę przeciwną, nie tracąc pierwotnej prędkości (co do wartości bezwzględnej). Ściana natomiast nie uzyska praktycznie żadnej prędkości (*Rysunek 3.21: Zderzenie sprężyste kuli ze ścianą* na stronie 158).



Kula, zderzając się doskonale sprężysto ze ścianą, odskakuje od niej, nie zmieniając bezwzględnej wartości prędkości

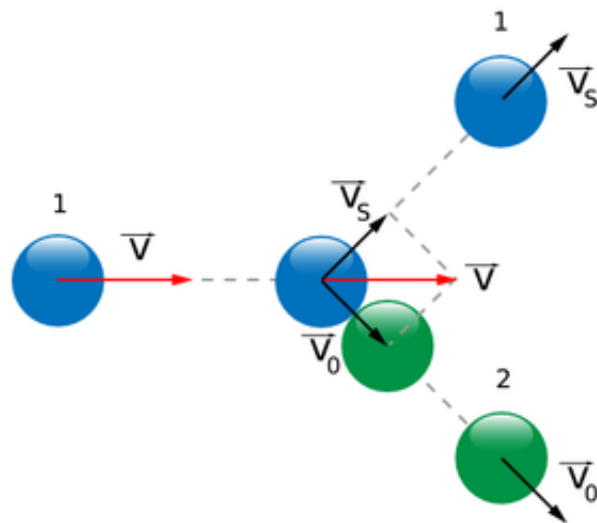
Rysunek 3.21: Zderzenie sprężyste kuli ze ścianą

Ad. 2. Rozważymy teraz szczególny przypadek zderzenia niecentralnego dwóch kul, gdy kule mają jednakowe masy i można nie uwzględniać tarcia oraz ruchu obrotowego kul.

Przyjmijmy, że przed zderzeniem kula 1 ma prędkość \vec{v} , a kula 2 spoczywa ([Rysunek 3.22: Zderzenie kul o jednakowych masach](#) na stronie 159). Aby rozwiązać to zagadnienie, sprowadzimy je do przypadku prostszego rozważonego poprzednio.

W punkcie zetknięcia kul prowadzimy płaszczyznę styczną do powierzchni obu kul. Rozłożmy wektor prędkości \vec{v} na dwie składowe: normalną \vec{v}_0 i styczną do płaszczyzny styku \vec{v}_s . Podczas zderzenia na obie kule działają siły powstałe na skutek deformacji sprężystej kul. Siły te mają kierunek normalnej do płaszczyzny styku kul i zamieniają prędkości \vec{v}_0 obu kul, zupełnie tak samo jak w zderzeniu centralnym – przypadek 1a. Zatem po zderzeniu kula 2 uzyska prędkość

$$(\text{wzór 317}) v'_2 = \vec{v}_0$$

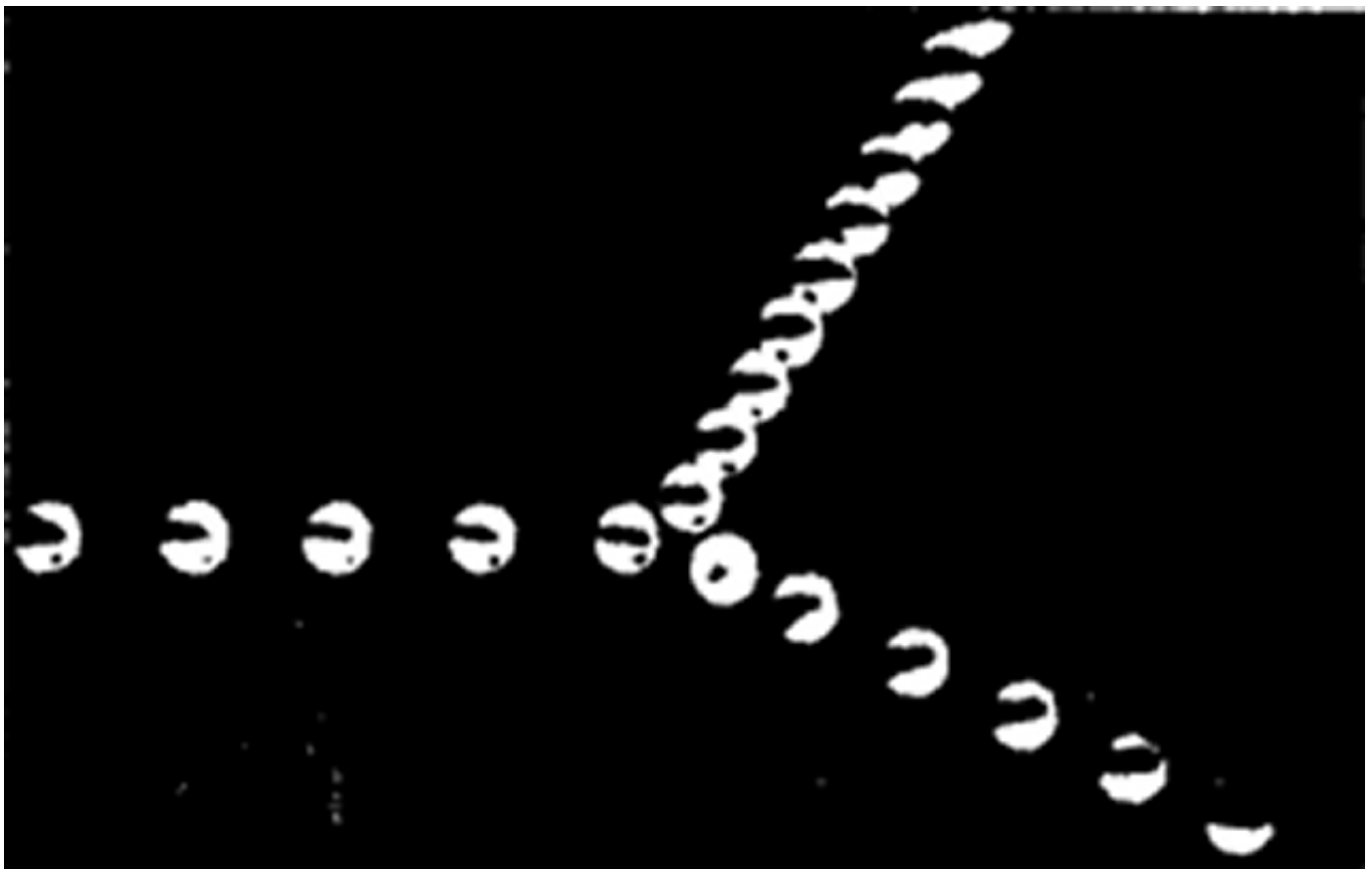


Kula 1 przekazuje spoczywającej kuli 2 składową normalną prędkości (prostopadłą do płaszczyzny styku kul), ale zachowuje składową styczną. Tory kul po zderzeniu tworzą kąt prosty

Rysunek 3.22: Zderzenie kul o jednakowych masach

Natomiast składowa styczna nie ulegnie zmianie, gdyż założyliśmy, że tarcie jest znikomo małe i nie ma powodu, dla którego kule miałyby oddziaływać na siebie w kierunku stycznym do płaszczyzny styku. Kula 1 straci więc swoją składową normalną prędkości, a zachowa tylko składową styczną prędkości. Cała jej prędkość po zderzeniu będzie równa \vec{v}_s .

Ze względu na to, że składowa normalna i styczna są wzajemnie prostopadłe, to po zderzeniu tory obu kul będą tworzyć kąt prosty. Taki właśnie przypadek występuje przy zderzeniu dwóch jednakowych kul bilardowych ([Rysunek 3.23: Zderzenie kul bilardowych](#) na stronie 160). Z podobnymi przypadkami mamy również do czynienia w mikroświecie, przy zderzeniach jednakowych cząstek kwantowych, np. dwóch protonów lub dwóch deuteronów ([Rysunek 3.24: Zderzenie protonu z protonem](#) na stronie 161).



Tory obu kul po zderzeniu tworzą kąt prosty. Zdjęcie wykonano techniką stroboskopową

Rysunek 3.23: Zderzenie kul bilardowych



Ślady obu protonów po zderzeniu tworzą kąt prosty

Rysunek 3.24: Zderzenie protonu z protonem



Wskazówka:

Zauważ, że te same zasady zachowania rządzą ruchem ciał w makroświecie jak i w mikroświecie!

Pytania i problemy

1. Zastosuj zasadę zachowania pędu do wybranego przykładu zderzenia sprężystego oraz zderzenia niesprężystego - zapisz równania wyrażające tę zasadę. Czy dla każdego z tych przypadków energia kinetyczna układu przed i po zderzeniu ma taką samą wartość?
2. Oblicz, jaką część energii kinetycznej tracą kule przy zderzeniu, jak na [Rysunek 3.18: Zderzenie niesprężyste dwóch ciał wzdłuż jednej prostej](#) na stronie 154.
3. Dlaczego przy zderzeniu sprężystym centralnym dwóch jednakowych ciał wymieniają się one prędkościami?
Uwaga: Wykaż, że wynika to z zasad zachowania pędu i energii kinetycznej.
4. Piłka, która miała początkowo pęd o wartości p_0 , uderza prostopadle w ścianę i odbija się od niej doskonale sprężysto. Czy po odbiciu od ściany pęd piłki zmieni się? W odpowiedzi uwzględnij kierunek, zwrot i wartość wektora pędu.
5. Doświadczalnie można stwierdzić, że gdy dwie jednakowe kule, z których jedna spoczywa, zderzają się sprężysto niecentralnie, wówczas po odbiciu ich tory tworzą kąt prosty. Wyjaśnij, dlaczego tak się dzieje.
6. Ze zderzeniem podobnym do omawianych w poprzednim pytaniu mamy również do czynienia w mikroświecie, przy zderzeniach jednakowych cząstek kwantowych, np. dwóch protonów ([Rysunek 3.24: Zderzenie protonu z protonem](#) na stronie 161). Jakie wnioski możesz z tego wyciągnąć rozważając obowiązywanie praw fizyki na różnych poziomach poznania materii?
7. Kulka plasteliny o masie m ma prędkość v . Kulka uderza w drugą spoczywającą kulkę plasteliny o masie $4m$.
 - a. Oblicz, ile wynosi prędkość kulek po sklejeniu v' .
 - b. Oblicz, ile wyniesie energia kinetyczna E_k' kulek po sklejeniu.
 - c. Rozważ, czy energia kinetyczna pierwszej kulki E_k przed sklejeniem się z drugą jest równa energii kinetycznej E_k' obu kulek po sklejeniu.

Rozdział

4

Dynamika bryły sztywnej

Podrozdziały:

- [4.1 Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej](#)
- [4.2 Moment bezwładności i energia kinetyczna](#)
- [4.3 Twierdzenie Steinera. Zależność momentu bezwładności od położenia osi obrotu](#)
- [4.4 Moment siły](#)
- [4.5 Środek ciężkości i środek masy](#)
- [4.6 Moment pędu i druga zasada dynamiki dla bryły sztywnej](#)
- [4.7 Prawo zachowania momentu pędu](#)
- [4.8 Analogia między wielkościami ruchu obrotowego a wielkościami ruchu postępowego](#)
- [Doświadczenie „Akceleracja BIS”](#)

Rysunek 4.1: Wirtualny nauczyciel

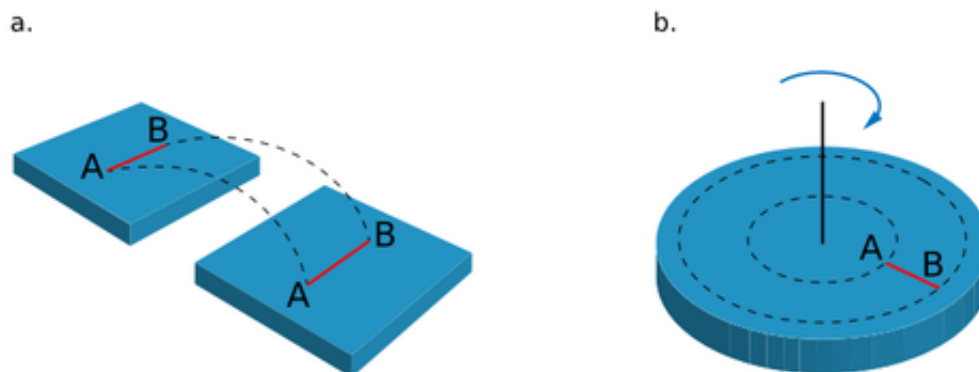
Dotychczas opisywaliśmy ruch ciała w przypadkach, gdy mogliśmy nie uwzględniać jego rozmiarów. Ciało takie traktowaliśmy jako punkt materialny. Obecnie rozszerzymy opis ruchu, uwzględniając rozmiary ciała. Jednakże w naszych rozważaniach ograniczymy się tylko do tzw. ciała sztywnego. *Ciałem sztywnym* lub *bryłą sztywną* nazywamy ciało, którego cząstki składowe zachowują względem siebie stałe odległości. Jest to pewna idealizacja ciał stałych występujących w naszym otoczeniu. Możemy ją stosować do wielu zagadnień wtedy, gdy w ciele stałym zaniedbujemy odkształcenia oraz ruchy drgające i inne ruchy atomów oraz cząsteczek.

Prawa ruchu opisane w tym rozdziale tłumaczą wiele zjawisk występujących w przyrodzie – w skali kosmicznej, makro- i mikro-skopowej.

Wiele urządzeń mechanicznych jest opartych na prawach ruchu bryły sztywnej, np. żyroskopy, śmigła helikopterów i samolotów, koła zamachowe, kołowroty i inne.

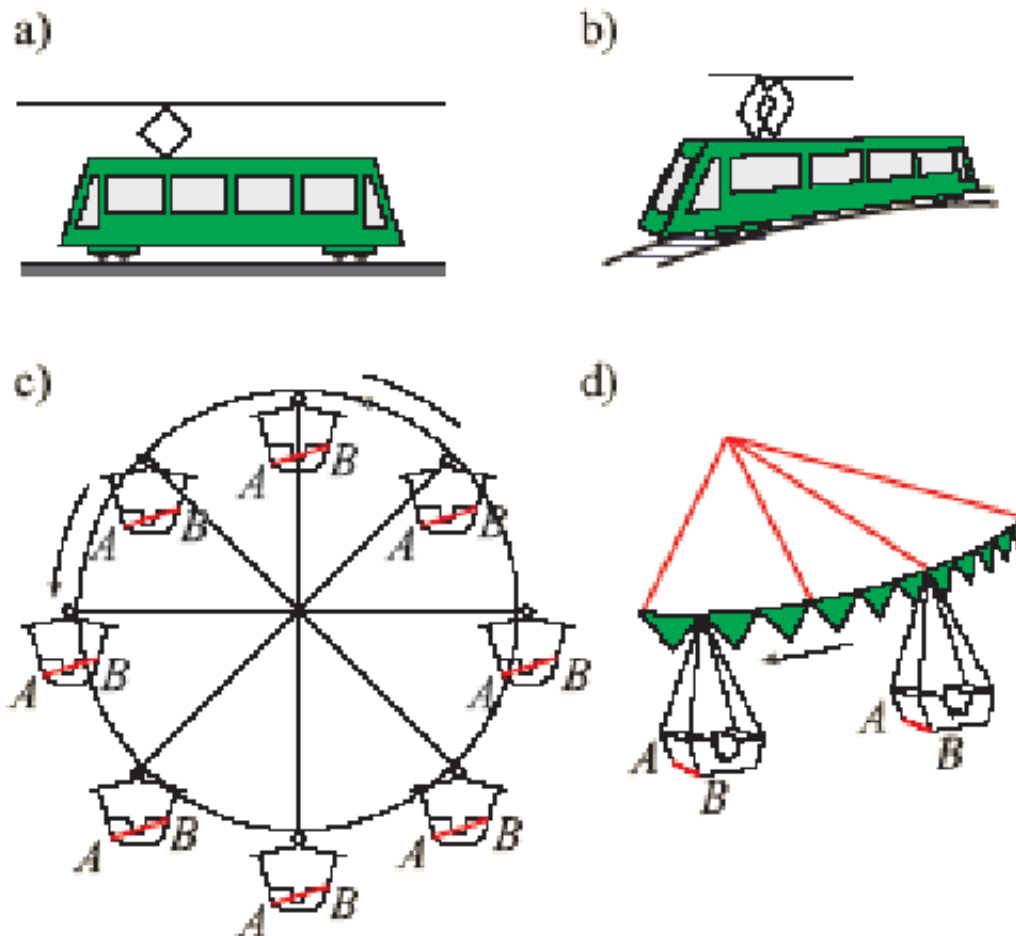
4.1 Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej

Aby opisać ruch ciała rozciągniętego, musimy podać, jak poruszają się jego punkty. Wyróżnimy dwa proste rodzaje ruchu – postępowy i obrotowy. **W ruchu postępowym odcinek łączący dwa dowolne punkty bryły sztywnej przemieszcza się równoległe do siebie, zachowując stały kierunek w przestrzeni** (Rysunek 4.2: *Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej* na stronie 164a). W takim ruchu poszczególne punkty bryły mogą się poruszać po krzywych, a nawet po okręgach, niemniej ruch całości będzie postępowy, zgodnie z definicją tego ruchu. Łatwo można dojść do wniosku, że ruch tramwaju po torze prostym jest ruchem postępowym (Rysunek 4.3: *Przykłady ruchu postępowego i obrotowego* na stronie 165a), natomiast ruch tego tramwaju na zakręcie nie jest ruchem postępowym (Rysunek 4.3: *Przykłady ruchu postępowego i obrotowego* na stronie 165b). Wbrew pozorom ruch wagonika diabelskiego młyna **jest** ruchem postępowym (Rysunek 4.3: *Przykłady ruchu postępowego i obrotowego* na stronie 165c), natomiast nie jest nim ruch wagonika na karuzeli (Rysunek 4.3: *Przykłady ruchu postępowego i obrotowego* na stronie 165d).



a) W ruchu postępowym bryły sztywnej odcinek łączący dwa dowolne punkty A i B przemieszcza się równoległe do siebie; b) w ruchu obrotowym wszystkie punkty ciała opisują okręgi, których środki leżą na wspólnej osi obrotu

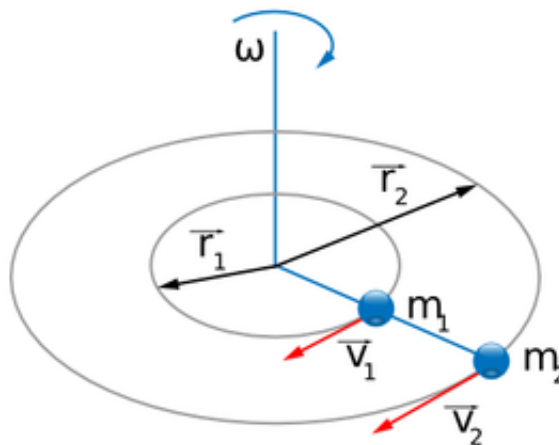
Rysunek 4.2: Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej



a) Tramwaj na prostym torze wykonuje ruch postępowy, b) natomiast na zakręcie wykonuje ruch obrotowy; c) wagonik „diabelskiego młyna” porusza się ruchem postępowym, d) natomiast wagonik karuzeli – ruchem obrotowym

Rysunek 4.3: Przykłady ruchu postępowego i obrotowego

Zarówno ruch tramwaju na zakręcie, jak i ruch wagonika na karuzeli jest ruchem obrotowym. Podczas *ruchu obrotowego* wszystkie punkty bryły zakreślają okręgi leżące na równoległych płaszczyznach, przy czym środki okręgów leżą na wspólnej prostej, zwanej osią obrotu (*Rysunek 4.2: Ruch postępowy i obrotowy bryły sztywnej* na stronie 164b). Różne punkty bryły, znajdujące się w różnych odległościach od osi obrotu, mają różne prędkości liniowe (*Rysunek 4.4: W ruchu obrotowym bryły prędkości liniowe różnych punktów są różne, zaś prędkość kątowa jest jednakowa* na stronie 166), ale wszystkie punkty mają taką samą prędkość kątową ω .



Rysunek 4.4: W ruchu obrotowym bryły prędkości liniowe różnych punktów są różne, zaś prędkość kątowa jest jednakowa

Jeśli **bryła jest w ruchu postępowym**, to można ją zastąpić punktem materialnym, bo wszystkie jej części poruszają się z jednakową prędkością i zakreślają jednakowe tory. Całkowity **pęd bryły** da się przedstawić jako pęd punktu materialnego o masie $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$, gdzie m_1, m_2, \dots, m_n są masami poszczególnych elementów bryły. Pęd bryły jest równy sumie pędów elementów składowych, więc

$$(\text{wzór 318}) \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \vec{v} = m \vec{v}$$

Podobnie, **energię kinetyczną bryły** w ruchu postępowym można wyrazić tak jak energię kinetyczną punktu materialnego

$$(\text{wzór 319}) \quad E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Natomiast w przypadku ruchu obrotowego, bryły nie można zastąpić punktem materialnym, ponieważ różne jej elementy mają różne prędkości liniowe. Możemy jednak wykorzystać fakt, że wszystkie elementy bryły mają jednakową prędkość kątową i opisywać jej ruch za pomocą wielkości dynamicznych zawierających tę prędkość. W tym celu posłużymy się pojęciami: *moment pędu*, *moment bezwładności* i *moment siły*.

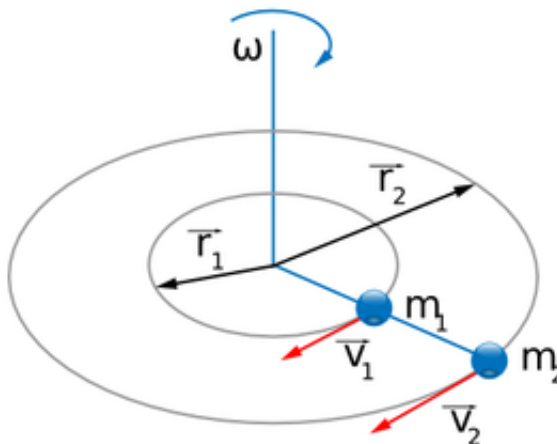
Oczywiście, obliczenie *energii potencjalnej bryły sztywnej* w polu grawitacyjnym Ziemi sprowadza się do energii potencjalnej punktu materialnego położonego w środku masy bryły.

Pytania i problemy

1. Wyjaśnij, dlaczego pojęcie „bryła sztywna” jest ciałem modelowym, jest idealizacją realnych ciał. W jakim celu stosuje się taki model?
2. Czym się różni ruch obrotowy ciała od ruchu postępowego?
3. Podaj trzy przykłady ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej.

4.2 Moment bezwładności i energia kinetyczna

Wyprowadzimy wzór na energię kinetyczną bryły obracającej się z prędkością kątową ω . W tym celu najpierw rozważymy tylko dwa małe elementy bryły o masach m_1 i m_2 , jak na *Rysunek 4.5: Dwie małe kulki umieszczone na lekkim pręcie obracającym się względem osi prostopadłej, przechodzącej przez jego koniec* na stronie 167.



Rysunek 4.5: Dwie małe kulki umieszczone na lekkim pręcie obracającym się względem osi prostopadłej, przechodzącej przez jego koniec

Prędkości liniowe obu elementów wyrazimy za pomocą wspólnej prędkości kątowej:

$$\text{(wzór 320) } v_1 = \omega r_1 \quad \text{oraz} \quad v_2 = \omega r_2$$

Zatem energie kinetyczne tych elementów bryły wyrazimy następująco

$$\text{(wzór 321) } E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} \quad \text{oraz} \quad E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2}$$

Energia kinetyczna E_k bryły składającej się z tych dwóch elementów jest równa

$$\text{(wzór 322) } E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega^2}{2}$$

Wielkość fizyczną w nawiasach nazywamy *momentem bezwładności układu dwóch punktów materialnych* i oznaczamy przez I :

$$\text{(wzór 323) } I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Korzystając z tego pojęcia, energię kinetyczną układu możemy wyrazić za pomocą wzoru

$$\text{(wzór 324) } E_k = \frac{I \omega^2}{2}$$

Ostatnie dwa wzory uogólnimy - zastosujemy je do całej bryły sztywnej. Podzielimy całą bryłę na dostatecznie dużą liczbę: n małych elementów o masach Δm_i odległych od osi obrotu o r_i (Rysunek 4.6: *Podział całej bryły na małe elementy o masach m_i , które są odległe od osi obrotu odpowiednio o r_i* na stronie 168). Te elementy można traktować jako punkty materialne. Zatem moment bezwładności bryły składającej z układu n punktów materialnych po uogólnieniu definicji (wzór 323 na stronie 167) przyjmie postać sumy (nie dwóch, ale) wszystkich n wyrazów: $\Delta m_i r_i^2$. Zatem

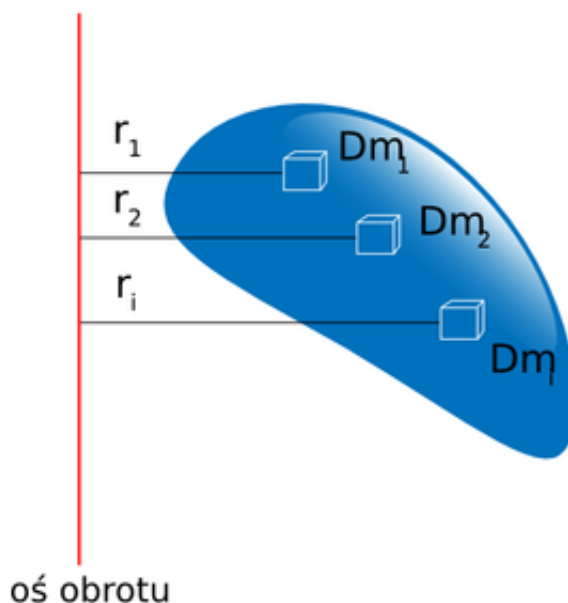
Ⓜ **Zamapiętać:**

Moment bezwładności bryły sztywnej

$$(\text{wzór 325}) I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_i r_i^2 + \Delta m_n r_n^2$$

gdzie cała bryła została podzielona na dużą liczbę: n małych elementów o masach Δm_i odległych od osi obrotu odpowiednio o r_i .

Jednostka momentu bezwładności to: kilogram razy metr do kwadratu, $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.



Rysunek 4.6: Podział całej bryły na małe elementy o masach m_i , które są odległe od osi obrotu odpowiednio o r_i

Energia kinetyczna bryły sztywnej

Pokażemy, że wzór na energię kinetyczną bryły sztywnej jest identyczny ze wzorem (wzór 324 na stronie 167). Każdy element ma prędkość

$$(\text{wzór 326}) v_i = r_i \omega$$

i energię kinetyczną:

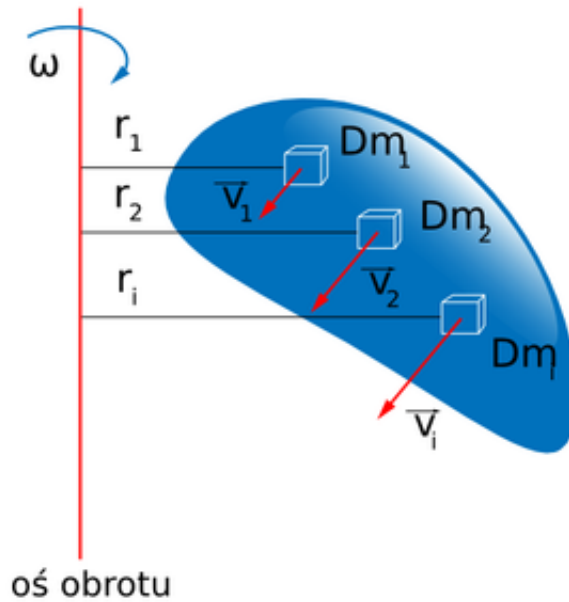
$$(\text{wzór 327}) E_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (r_i \omega)^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \Delta m_i r_i^2 \frac{\omega^2}{2}$$

Zatem całkowita energia kinetyczna bryły składającej z układu n elementów przyjmie postać sumy:

$$(\text{wzór 328}) E_k = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \Delta m_1 r_1^2 \frac{\omega^2}{2} + \Delta m_2 r_2^2 \frac{\omega^2}{2} + \dots + \Delta m_n r_n^2 \frac{\omega^2}{2} = (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2) \frac{\omega^2}{2}$$

Zatem, zgodnie z definicją ([wzór 325](#) na stronie 168)

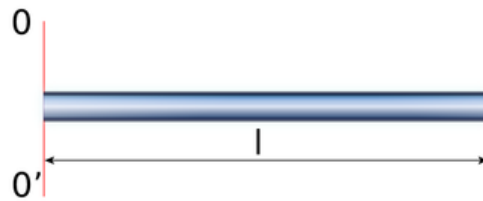
$$(\text{wzór 329}) E_k = (\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2) \frac{\omega^2}{2}$$



Rysunek 4.7: Podział całej bryły na małe elementy o masach m_i , które są odległe od osi obrotu odpowiednio o r_i

Przykład 1

Znajdź wzór na moment bezwładności I jednorodnego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jeden z jego końców ([Rysunek 4.8: Oś obrotu prostopadła do pręta i przechodząca przez jego koniec](#) na stronie 170).



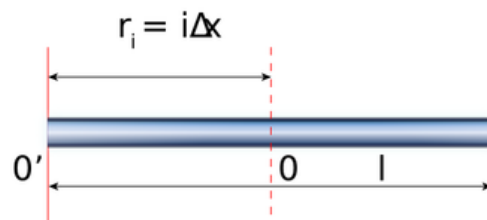
Rysunek 4.8: Oś obrotu prostopadła do pręta i przechodząca przez jego koniec

Odpowiedź: Podzielimy cały pręt na n małych fragmentów o długości Δx i odpowiednio o masie Δm każdy. Moment bezwładności pręta I (mającego masę $m = n\Delta m$ i długość $l = n\Delta x$) względem osi przechodzącej przez jego koniec wyrazimy w postaci sumy momentów bezwładności tych małych fragmentów (które uznamy za punkty materialne). Zatem

$$(\text{wzór 330}) I = \Delta m r_1^2 + \Delta m r_2^2 + \dots + \Delta m r_i^2 + \dots + \Delta m r_n^2$$

po przekształceniach

$$(\text{wzór 331}) I = \Delta m (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_i^2 + \dots + r_n^2)$$



Rysunek 4.9: Podział pręta na małe fragmenty Δx

Ponieważ $r_i = i \Delta x$, więc

$$(\text{wzór 332}) I = \Delta m [\Delta x^2 + (2 \Delta x)^2 + \dots + (i \Delta x)^2 + \dots + (n \Delta x)^2] = \Delta m \Delta x^2 (1 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Występuje tu suma kwadratów liczb naturalnych, która, jak wiadomo z matematyki, wyraża się wzorem

$$(\text{wzór 333}) \quad 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nasze obliczenia momentu bezwładności będą tym dokładniejsze im większą liczbę n fragmentów przyjmujemy. Dla dużej liczby n (np. $n = 1000$) możemy zaniedbać jedynki w nawiasach wzoru ([wzór 333](#) na stronie 171), otrzymamy:

$$(\text{wzór 334}) \quad 1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3}$$

Wstawiając ten wynik do wzoru ([wzór 333](#) na stronie 171) otrzymamy

$$(\text{wzór 335}) \quad I = \Delta m \Delta x^2 (1 + 2^2 + \dots + n^2) = \Delta m \Delta x^2 \frac{n^3}{3}$$

Wzór ten przedstawimy w postaci

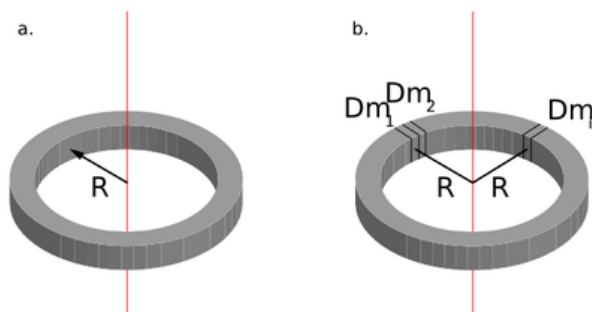
$$(\text{wzór 336}) \quad I = n \Delta m \frac{\Delta x^2 n^2}{3} = m \frac{(n \Delta x)^2}{3} = m \frac{l^2}{3}$$

Zatem I – moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jeden z jego końców – wyraża się wzorem

$$(\text{wzór 337}) \quad I = m \frac{l^2}{3}$$

Pytania i problemy

1. Podaj definicję momentu bezwładności bryły. W jakich jednostkach go wyrażamy?
2. Podaj wzór na energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły sztywnej.
3. W wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku a umieszczono małe kulki o jednakowych masach m . Oblicz moment bezwładności kulek względem osi będącej przedłużeniem jednej wysokości trójkąta.
4. Znajdź wzór na moment bezwładności jednorodnego pierścienia cienkościennego względem osi przechodzącej przez jego środek ([Rysunek 4.10: a\) Pierścień cienkościenny o promieniu \$R\$, b\) ten sam pierścień podzielony na małe elementy](#) na stronie 171a). Pierścień ma masę m_p i promień R .



Rysunek 4.10: a) Pierścień cienkościenny o promieniu R , b) ten sam pierścień podzielony na małe elementy

5. Koło zamachowe o promieniu 25 cm i masie 10 kg obraca się z częstotliwością $\nu = 1\,200\text{ min}^{-1}$. Przyjmując, że cała masa koła skupiona jest na jego obwodzie, oblicz jego energię kinetyczną.

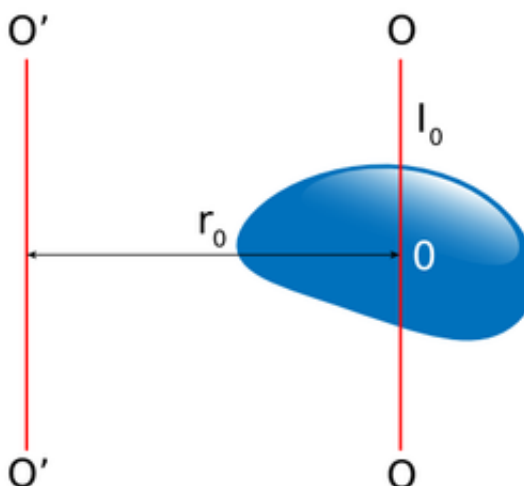
4.3 Twierdzenie Steinera. Zależność momentu bezwładności od położenia osi obrotu

Zgodnie ze wzorem (wzór 325 na stronie 168) moment bezwładności zależy nie tylko od masy bryły, ale również od położenia osi, względem której go określamy. Istnieje zależność między momentem bezwładności I układu względem dowolnej osi a momentem bezwładności I_0 względem równoległej do niej osi przechodzącej przez środek masy układu:

$$(\text{wzór 338}) \quad I = I_0 + mr_0^2$$

gdzie r_0 jest odległością między tymi osiami (Rysunek 4.11: Moment bezwładności ciała względem różnych osi na stronie 172). Zależność ta nosi nazwę *twierdzenia Steinera*.

Moment bezwładności dla bryły sztywnej ma wartość I_0 względem osi O–O przechodzącej przez środek masy, natomiast ma inną wartość I , gdy jest obliczony względem innej osi O'–O'



Rysunek 4.11: Moment bezwładności ciała względem różnych osi

Środek masy

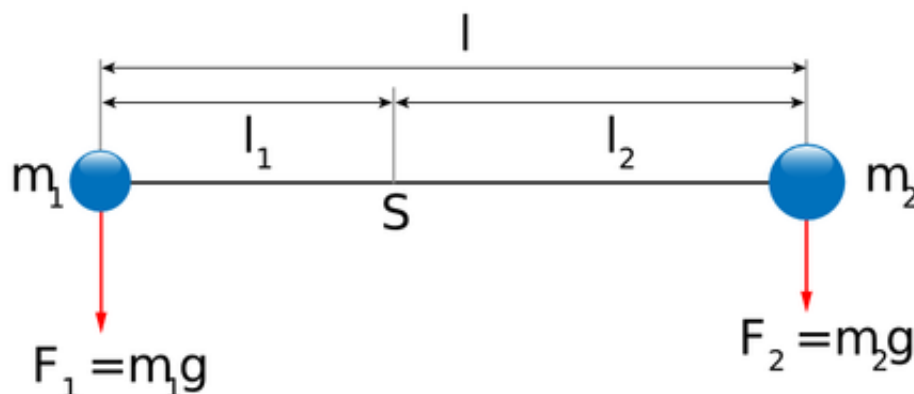
Z pojęciem środka masy zetknąłeś się już wcześniej (w Gimnazjum). Pojęcie to jest bardzo ważne i często stosowane w fizyce. Dlatego poświęcamy mu cały rozdział 4.5 *Środek ciężkości i środek masy* na stronie 185. Tutaj skrótowo podajemy najważniejsze dane potrzebne do zrozumienia treści rozdziału.

Pojęcie środka masy jest bardzo użyteczne, gdyż pozwala na znakomite uproszczenie opisu ruchu układu składającego się z wielu ciał. Zamiast rozpatrywać poszczególne ruchy dużej liczby ciał, wystarczy w wielu przypadkach rozważyć jedynie ruch jednego punktu będącego środkiem masy układu tych ciał. Pojęcie środka masy

stosuje się również do bryły sztywnej. Dzięki zastosowaniu tego pojęcia skomplikowany ruch bryły można prosto opisać, jako złożenie ruchu punktu materialnego i obrotu.

Pojęcie środka masy najłatwiej można wyjaśnić rozważając bliskie mu pojęcie środka ciężkości (*Rysunek 4.12: Środek masy dwóch ciał* na stronie 173).

Środek masy (jak i środek ciężkości) dwóch ciał o masach m_1 i m_2 znajduje się w punkcie S , dzielącym odcinek l na dwa odcinki l_1 i l_2 , w stosunku $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$



Rysunek 4.12: Środek masy dwóch ciał

Pojęcie środka masy stosuje się nie tylko do dwóch ciał, ale również do układu wielu ciał i do brył sztywnych.

W przypadku brył jednorodnych położenie środka masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym symetrycznej bryły. Na przykład, dla jednorodnej kuli środek ciężkości znajduje się dokładnie w środku kuli. Podobnie dla jednorodnych ciał w kształcie walca, sześcianu, równoległościanu itp. – ich środki ciężkości pokrywają się ze środkami geometrycznymi.

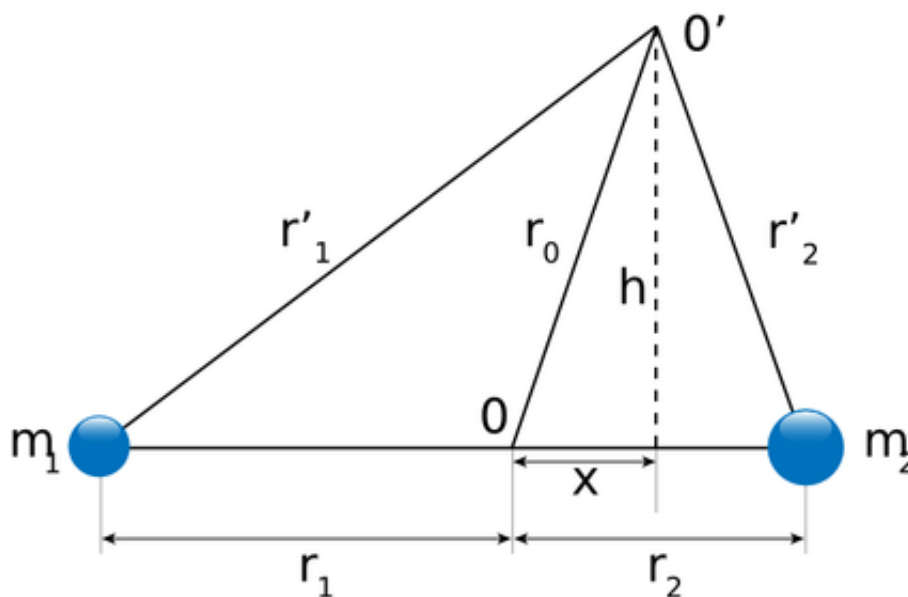
Wykażemy teraz słuszność twierdzenia Steinera dla przypadku układu dwóch punktów materialnych. W tym celu obliczymy ich momenty bezwładności względem dwóch osi równoległych do siebie i prostopadłych do płaszczyzny rysunku (*Rysunek 4.13: Układ dwóch punktów materialnych* na stronie 174), odległych od siebie o r_0 . Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy O wynosi

$$(\text{wzór 339}) I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa: $r_1'^2 = h^2 + (r_1 + x)^2$ i $r_2'^2 = h^2 + (r_2 - x)^2$. Po podstawieniu tego do wzoru (*wzór 338* na stronie 172) i po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(\text{wzór 340}) I = I_0 + (m_1 + m_2)(h^2 + x^2) + 2x(m_1 r_1 - m_2 r_2)$$

Układ dwóch punktów materialnych odległych o r_1 i r_2 od osi przechodzącej przez środek masy O i odległych o r'_1 i r'_2 od osi przechodzącej przez punkt O'

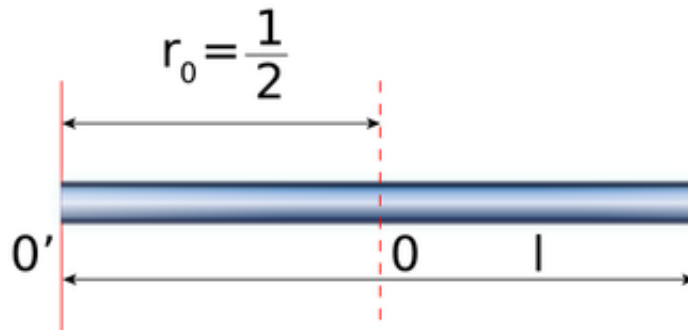


Rysunek 4.13: Układ dwóch punktów materialnych

Ponieważ $h^2 + x^2 = r_0^2$ i $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$ (zob. rozdział 4.5 *Środek ciężkości i środek masy* na stronie 185 - definicja środka masy – oraz wzory ([wzór 377](#) na stronie 190) i ([wzór 379](#) na stronie 190)), więc $I = I_0 + m r_0^2$ (co mieliśmy wykazać).

Przykład 2

Znajdź wzór na moment bezwładności I_0 jednorodnego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek masy ([Rysunek 4.14: Oś obrotu prostopadle do pręta](#) na stronie 175).



Rysunek 4.14: Osie obrotu prostopadłe do pręta

Odpowiedź: Przyjmiemy, że wzór na moment bezwładności pręta (mającego masę m i długość l) względem osi przechodzącej przez jego koniec ma postać

$$\text{(wzór 341) } I = kml^2$$

gdzie k jest bezwymiarowym współczynnikiem.

Zauważmy, że I_0 – moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy – można przedstawić jako sumę momentów bezwładności jego połówek względem osi przechodzących przez ich końce, zatem

$$\text{(wzór 342) } I_0 = 2k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{k}{4}ml^2$$

Ale zgodnie z twierdzeniem Steinera

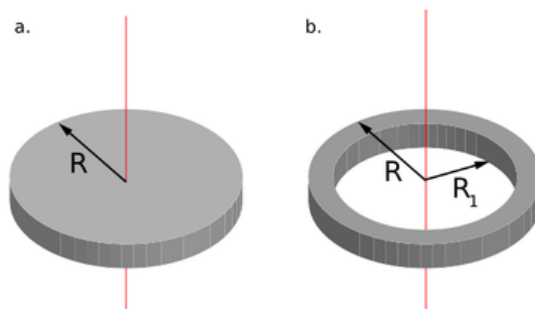
$$\text{(wzór 343) } I = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 + I_0 = \frac{1}{4}ml^2 + \frac{k}{4}ml^2 = \frac{1+k}{4}ml^2$$

Przyrównując prawe strony równości (wzór 341 na stronie 175) i (wzór 343 na stronie 175), mamy, że $k = \frac{1+k}{4}$. Stąd $k = \frac{1}{3}$. Zatem, korzystając ze wzoru (wzór 342 na stronie 175), otrzymujemy, że moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy jest wyrażony za pomocą wzoru

$$\text{(wzór 344) } I_0 = \frac{1}{12}ml^2$$

Przykład 3

Znajdź wzór na moment bezwładności jednorodnego walca względem osi przechodzącej przez jego środek (*Rysunek 4.15: a) Jednorodny walec, b) z walca wycięto pierścień* na stronie 176a).



Rysunek 4.15: a) Jednorodny walec, b) z walca wycięto pierścień

Odpowiedź: Zakładamy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, że wzór na moment bezwładności (obecnie dla walca) ma postać

$$(\text{wzór 345}) I_0 = kmR^2$$

Żeby znaleźć współczynnik k , wytniemy z walca, w myśli, pierścień o wewnętrznym promieniu R_1 (*Rysunek 4.15: a) Jednorodny walec, b) z walca wycięto pierścień* na stronie 176b). Moment bezwładności I_{0p} będzie równy różnicy momentów dwóch walców o promieniach R i R_1 oraz

masach m i $m_1 = \frac{mR_1^2}{R^2}$ (masa walca o ustalonej wysokości jest proporcjonalna do pola powierzchni kołowej podstawy πR^2), zatem

$$(\text{wzór 346}) I_{0p} = I_0 - I_{0,1} = kmR^2 - km_1R^2 = kmR^2 - k \frac{mR_1^2}{R^2} R^2 = \frac{km}{R^2} (R^4 - R_1^4) = k \frac{m(R^2 - R_1^2)}{R^2} (R^2 + R_1^2)$$

Ponieważ $\frac{m(R^2 - R_1^2)}{R^2} = m_p$ jest masą pierścienia, więc

$$(\text{wzór 347}) I_{0p} = km_p(R^2 + R_1^2)$$

Zatem, jeśli pierścień jest dostatecznie cienki (tzn. $R \approx R_1$), to

$$(\text{wzór 348}) I_{0p} = 2km_pR^2$$

Z drugiej strony, na podstawie wzoru (*wzór 325* na stronie 168) (patrz również przykład *Przykład 1* na stronie 169),

$$(\text{wzór 349}) I_{0p} = \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \dots + \Delta m_n R^2 = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n) R^2 = m_p R^2$$

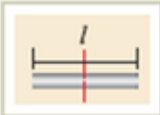

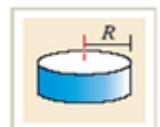
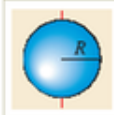
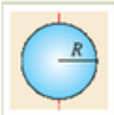
Porównując wzór (*wzór 348* na stronie 176) z (*wzór 349* na stronie 176), po uproszczeniu otrzymujemy, że

$$(\text{wzór 350}) 2k = 1$$

Zatem dochodzimy do wniosku, że $k = 1/2$. Wzór na moment bezwładności dla walca przybiera postać:

$$(\text{wzór 351}) I_0 = \frac{1}{2} mR^2$$

Wyprowadzenie wzorów dla innych prostych brył jednorodnych byłoby bardziej skomplikowane pod względem matematycznym, dlatego ograniczymy się tutaj do podania gotowych wzorów w tabeli *Rysunek 4.16: Moment bezwładności dla wybranych jednorodnych brył I_0 względem osi przechodzącej przez środek masy, zaznaczonej na rysunku* na stronie 177.

Bryła	Moment bezwładności	Kształt
Pręt	$I_0 = \frac{1}{12} ml^2$	
Pierścień cienkościenny	$I_0 = mR^2$	
Walec	$I_0 = \frac{1}{2} mR^2$	
Kula	$I_0 = \frac{2}{5} mR^2$	
Sfera cienkościenna	$I_0 = \frac{2}{3} mR^2$	

Rysunek 4.16: Moment bezwładności dla wybranych jednorodnych brył I_0 względem osi przechodzącej przez środek masy, zaznaczonej na rysunku

Przykład 4

Ile wynosi prędkość liniowa górnego końca słupa upadającego na ziemię? Słup początkowo znajdował się w pozycji pionowej i miał wysokość $H = 4$ m, następnie został podcięty u podstawy.

Odpowiedź: Energia potencjalna słupa o masie m , w pozycji pionowej – środek masy słupa znajduje się na wysokości $\frac{H}{2}$ – wynosi:

$$(\text{wzór 352}) E_p = mg \frac{H}{2}$$

Słup tuż przed upadkiem ma energię kinetyczną ruchu obrotowego (wzór (wzór 324 na stronie 167)):

$$(\text{wzór 353}) E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Moment bezwładności względem osi u podstawy słupa (patrz (wzór 344 na stronie 175) i twierdzenie Steinera (wzór 338 na stronie 172)) wynosi

$$(\text{wzór 354}) I = m \left(\frac{H}{2} \right)^2 + m \frac{H^2}{12} = m \frac{H^2}{3}$$

Wykorzystując to wyrażenie, po przyrównaniu energii kinetycznej do energii potencjalnej słupa, otrzymamy:

$$(\text{wzór 355}) mg \frac{H}{2} = \frac{mH^2 \omega^2}{6}$$

Po uproszczeniu i uwzględnieniu, że prędkość liniowa górnego punktu słupa (tuż przed upadkiem) wynosi $v = H \cdot \omega$, otrzymujemy

$$(\text{wzór 356}) v = \sqrt{3gH}$$

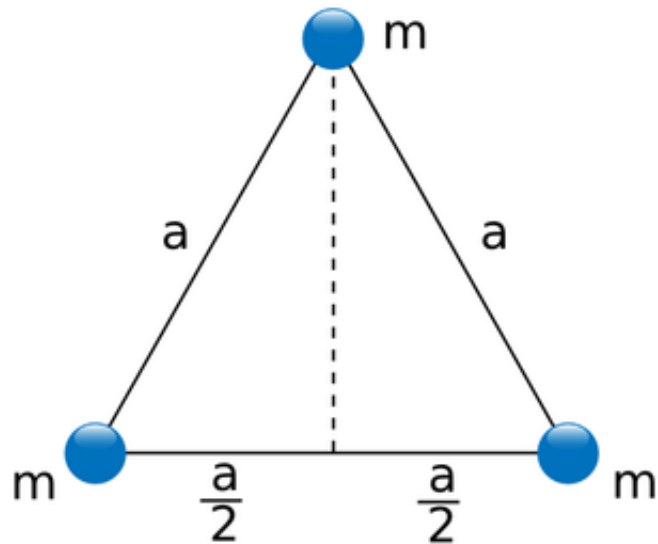
czyli

$$(\text{wzór 357}) v = 10,85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Warto zwrócić uwagę, że prędkość ta jest większa, niż gdyby koniec słupa, rozumiany jako punkt materialny, spadał swobodnie pod wpływem własnego ciężaru. Zastanów się nad przyczyną tego faktu i spróbuj go objaśnić jakościowo.

Pytania i problemy

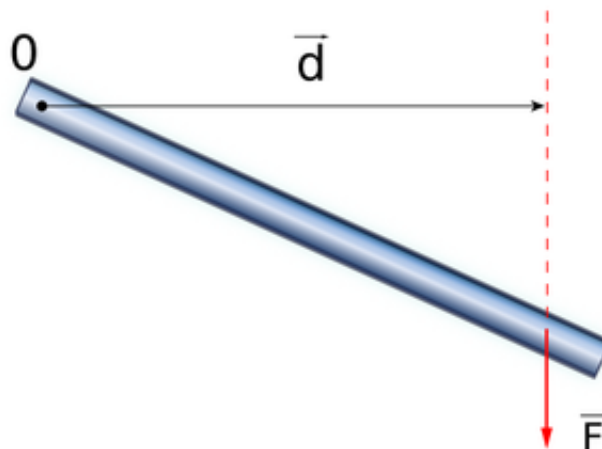
1. W jakim celu stosuje się twierdzenie Steinera? Sformułuj to twierdzenie.
2. Znając moment bezwładności pierścienia cienkościennego o promieniu R i masie m względem osi przechodzącej przez jego środek (tabela *Rysunek 4.16: Moment bezwładności dla wybranych jednorodnych brył I 0 względem osi przechodzącej przez środek masy, zaznaczonej na rysunku* na stronie 177), oblicz moment bezwładności tego pierścienia względem osi przechodzącej przez jeden z punktów leżących na jego obwodzie.
3. W wierzchołkach równobocznego trójkąta o boku a umieszczono małe kulki o jednakowych masach m . Oblicz moment bezwładności kulek względem osi równoległej do wysokości trójkąta i przechodzącej przez kulkę.



Rysunek 4.17: Układ kulek umieszczonych w wierzchołkach równobocznego trójkąta

4.4 Moment siły

Może zauważyłeś, że drzwi łatwiej jest otworzyć, przykładając siłę w jak najdalszej odległości od zawiasów. Dużo większej siły należy użyć, gdy jest ona przyłożona w pobliżu zawiasów, czyli w pobliżu osi obrotu drzwi. Wynika z tego, że dla określenia skutków działania siły w przypadku ruchu obrotowego bryły sztywnej (jaką są np. drzwi) nie wystarczy tylko znajomość wartości siły F , ale ważna jest odległość linii kierunku działania siły od osi obrotu, czyli tzw. *ramię siły* d (Rysunek 4.18: *Siła F obraca bryłę względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O . Ramię siły wynosi d* na stronie 180). Dlatego wprowadza się pojęcie tzw. *momentu siły*.



Rysunek 4.18: Siła F obraca bryłę względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O . Ramię siły wynosi d

Ⓜ Zamapiętać:

Moment siły względem pewnej osi:

jest to iloczyn wartości siły F i jej ramienia d :

$$(\text{wzór 358}) M = F \cdot d$$

ramię siły d jest najkrótszą odległością między osią obrotu a linią kierunku działania siły. Jednostką momentu siły jest niuton \cdot metr ($\text{N} \cdot \text{m}$).

Należy zwrócić uwagę, że mimo formalnego podobieństwa, jednostka momentu siły, nazywana często niutonometrem, ma inną interpretację niż jednostka pracy i energii, czyli jeden dżul. Ta ostatnia powstaje bowiem jako iloczyn siły i *przemieszczenia*, w odróżnieniu od iloczynu siły i *odległości*.

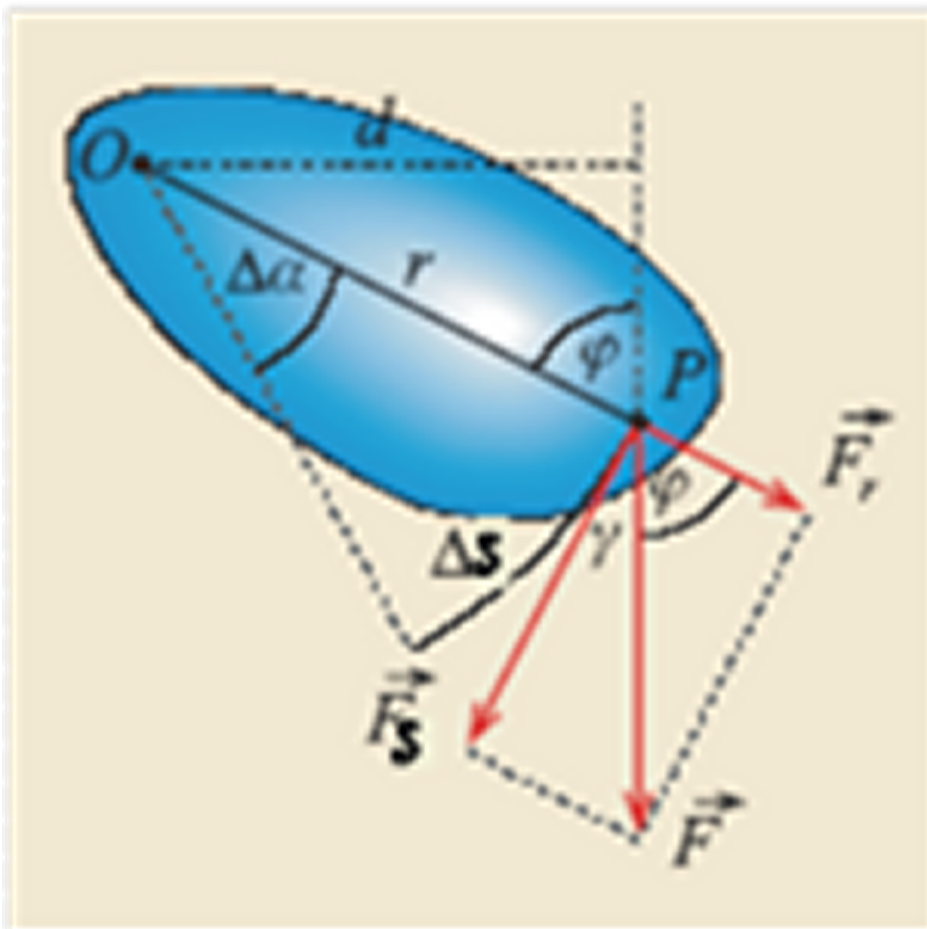
Przyjmuje się umownie, że moment siły ma znak „+”, gdy wywołuje obrót bryły w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, zaś znak „-”, gdy wywołuje obrót w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Kierunek obrotu jest przy tym ustalany z punktu widzenia patrzącego na rysunek czy schemat, na którym zaznaczono działającą siłę.

Praca siły obracającej bryłę sztywną

Wyznamy pracę ΔW siły F obracającej bryłę wokół nieruchomej osi obrotu o kąt $\Delta \alpha$ (*Rysunek 4.19: Rozkład siły F obracającej bryłę. Ramię siły wynosi $d = r \sin \varphi$ na stronie 181*). Siła F jest zaczepiona w odległości r od osi obrotu O (*Rysunek 4.19: Rozkład siły F obracającej bryłę. Ramię siły wynosi $d = r \sin \varphi$ na stronie 181*), a punkt zaczepienia zakreśla łuk $\Delta s = r \Delta \alpha$.

Praca w naszym przypadku jest równa $\Delta W = F_s \Delta s$. Siła F_s jest rzutem siły F na kierunek s i wynosi $F_s = F \sin \varphi$, zaś długość łuku $\Delta s = r \Delta \alpha$, zatem praca siły F przy obrocie bryły o kąt $\Delta \alpha$ wynosi

$$(\text{wzór 359}) \Delta W = Fr \Delta \alpha \sin \varphi$$



Siła F obraca bryłę o chwilowy kąt $\Delta \alpha$ względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, przechodzącej przez punkt O

Rysunek 4.19: Rozkład siły F obracającej bryłę. Ramię siły wynosi $d = r \sin \varphi$

Wzór (wzór 359 na stronie 180) określający pracę obracania bryły sztywnej przybierze podobny kształt do wzoru (wzór 258 na stronie 132) na pracę przesunięcia punktu materialnego:

$$(\text{wzór 360}) \Delta W = F \Delta s$$

gdy zastosujemy pojęcie momentu siły zgodnie ze wzorem (wzór 358 na stronie 180) jako:

$$(\text{wzór 361}) M = Fd = Fr \sin \varphi$$

Po zastosowaniu wyrażenia na wartość momentu siły wzór (wzór 359 na stronie 180) przybierze postać:

$$(\text{wzór 362}) W = M \Delta \alpha$$

❗ **Wskazówka:**

Moment siły jako iloczyn wektorowy

Zauważmy, że we wzorach (wzór 358 na stronie 180) oraz (wzór 361 na stronie 181):

$$(\text{wzór 363}) M = Fd = Fr \sin \varphi$$

występuje charakterystyczny iloczyn wartości dwóch wektorów \vec{F} i \vec{r} oraz sinusa kąta między nimi zawartego:

$$(\text{wzór 364}) Fr \sin \varphi$$

Przypomina to nam iloczyn skalarny dwóch wektorów (patrz rozdział [3.1 Praca](#) na stronie 132 – wzór [\(wzór 262](#) na stronie 133), z tym że tam występował nie sinus lecz kosinus kąta zawartego między wektorami). Powtórzmy tutaj definicję iloczynu skalarnego:

Wielkość skalarna, która powstaje w wyniku skalarnego mnożenia dwóch wektorów, nazywa się *iloczynem skalarnym* wektorów. Iloczyn skalarny dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} zapisujemy symbolicznie jako $\vec{a} \cdot \vec{b}$, a jego wartość wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 365}) \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

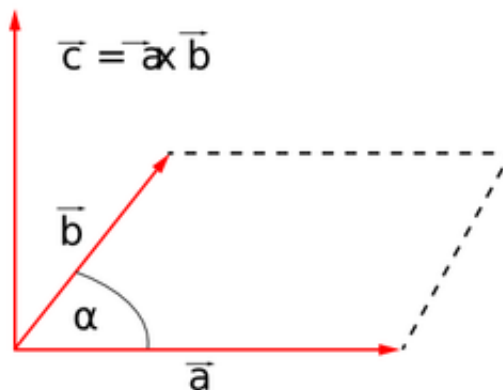
W rachunku wektorowym, oprócz *iloczynu skalarnego*, definiuje się jeszcze *iloczyn wektorowy*. Iloczyn ten można określić następująco:

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} jest wektor \vec{c} ,

$$(\text{wzór 366}) \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

który jest prostopadły do każdego z wektorów \vec{a} i \vec{b} ; ma zwrot taki, że trzy wektory, tworzą w przestrzeni układ prawoskrętny (zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej, [Rysunek 4.20: Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem, którego długość jest równa polu powierzchni równoległoboku o bokach \$a \rightarrow\$ i \$b \rightarrow\$](#) na stronie 182). Jego wartość wynosi

$$(\text{wzór 367}) c = ab \sin \alpha$$

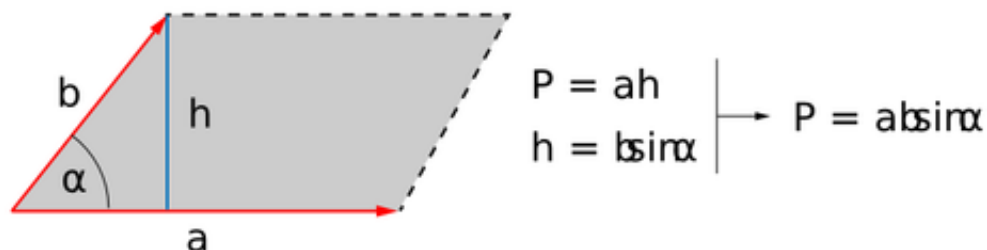


Rysunek 4.20: Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem, którego długość jest równa polu powierzchni równoległoboku o bokach \vec{a} i \vec{b}

Należy zauważyć, że wartość wektora \vec{c} utworzonego z iloczynu wektorowego dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} jest liczbowo równa polu powierzchni równoległoboku o bokach \vec{a} i \vec{b} , gdyż

$$(\text{wzór 368}) c = ab \sin \alpha = a(b \sin \alpha)$$

Wartość wyrażenia w nawiasach jest wysokością h równoległoboku o bokach a i b (*Rysunek 4.21: Podstawa a razy wysokość h , to pole powierzchni równoległoboku* na stronie 183), zatem: podstawa a razy wysokość h , to pole powierzchni tego równoległoboku.



Rysunek 4.21: Podstawa a razy wysokość h , to pole powierzchni równoległoboku

Warto ponadto zauważyć, że iloczyn wektorowy nie podlega prawu przemienności. Dlatego ważna jest kolejność zapisu. Zmiana kolejności powoduje zmianę zwrotu wektora wynikłego z iloczynu wektorowego:

$$(\text{wzór 369}) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad \text{ale} \quad \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$$

Stosując definicję iloczynu wektorowego, możemy napisać wzór wektorowy na *moment siły*:

$$(\text{wzór 370}) \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wzór ten jest lepszy od (*wzór 358* na stronie 180), w tym sensie, że zawiera w sobie informacje nie tylko o wartości momentu siły, ale – jeszcze dodatkowo – o własnościach wektorowych momentu siły i nie wymaga stosowania umowy o jego znaku „ \pm ”.

Warunki równowagi

Moment siły jest podstawową wielkością fizyczną, którą operują inżynierowie przy projektowaniu stropów, mostów i innych budowli. Żeby konstrukcja inżynierska się nie zawaliła, musi nie tylko być wytrzymała, ale także spełniać warunki równowagi. Badaniem warunków równowagi zajmuje się oddzielna dziedzina nauki, zwana *statyką*. My ograniczymy się tutaj do przedstawienia tylko podstawowych zasad.

Aby ciało nie zmieniało swojego stanu spoczynku, muszą być spełnione dwa warunki:

1. Aby ciało nie mogło się przemieszczać ruchem postępowym, to stan równowagi jest osiągnięty, gdy **suma wektorowa wszystkich sił działających na ciało (tzn. ich wypadkowa) jest równa zeru**.

2. Aby ciało nie mogło obracać się wokół określonej osi, to stan równowagi jest osiągnięty, gdy **suma momentów sił, określonych względem osi, jest równa zeru**, czyli

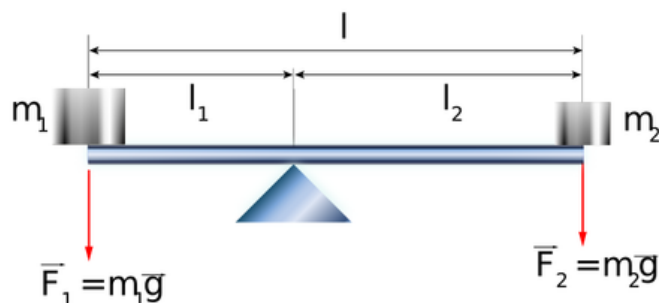
$$(\text{wzór 371}) \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = 0$$

Warunek 1. jest konsekwencją pierwszej zasady dynamiki Newtona.

Warunek 2. wynika z żądania, aby w stanie równowagi suma momentów obracających ciało w jedną stronę była równa sumie momentów obracających ciało w stronę przeciwną.

Przykład 5

Dwa ciężary o masach m_1 i m_2 znajdują się na końcach sztywnego, lekkiego pręta o długości l (Rysunek 4.22: *Należy tak dobrać stosunek l_1 do l_2 , aby pręt się nie przechylał* na stronie 184). Punkt stabilnego podparcia, gdy układ jest w równowadze (czyli pręt się nie przechyla) znajduje się w odległościach l_1 i l_2 , odpowiednio, od końców pręta. Znajdź jaki jest stosunek $\frac{l_1}{l_2}$.



Rysunek 4.22: Należy tak dobrać stosunek l_1 do l_2 , aby pręt się nie przechylał

Odpowiedź: Jeżeli pręt jest podparty tak jak na rysunku, to ramieniem siły F_1 jest odcinek l_1 . Moment tej siły jest ujemny i wynosi $M_1 = -F_1l_1$. Ramieniem siły F_2 jest odcinek l_2 ; moment tej siły jest dodatni, $M_2 = F_2l_2$.

Zgodnie z warunkiem równowagi - pręt nie będzie się przechylał, gdy

$$(\text{wzór 372}) M_1 + M_2 = F_2l_2 - F_1l_1 = m_2gl_2 - m_1gl_1 = 0$$

Stąd

$$(\text{wzór 373}) m_1l_1 = m_2l_2$$

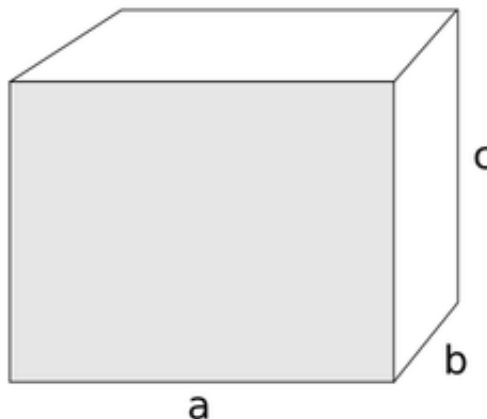
więc

$$(\text{wzór 374}) \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Widzimy, że układ jest w równowadze (pręt się nie przechyla), gdy pręt jest podparty w punkcie, który dzieli odcinek l w stosunku $\frac{l_1}{l_2}$ równym odwrotności stosunku mas $\frac{m_2}{m_1}$ ciężarów. Wzór (wzór 374 na stronie 184) służy nam do wyznaczenia położenia środka ciężkości i środka masy.

Pytania i problemy

1. Zdefiniuj moment siły oraz ramię siły.
2. Siła $F = 100\text{ N}$, działając stycznie do obwodu koła zamachowego wykonanego w postaci obręczy cienkościennej o promieniu $r = 50\text{ cm}$, obraca go względem osi przechodzącej przez środek o kąt 360° . Oblicz wykonaną pracę.
3. Podaj wyrażenie na pracę, którą wykonuje siła obracająca bryłę wokół nieruchomej osi.
4. Podaj jakie warunki muszą być spełnione, aby ciało było w równowadze.
5. Jaką pracę należy wykonać, aby leżący na ziemi jednorodny słupek o długości 10 m i o masie 100 kg postawić pionowo? **Uwaga:** Środek masy jednorodnego słupa leży w jego środku geometrycznym.
6. Jednorodny blok o masie $17\,000\text{ kg}$ w kształcie prostopadłościanu ma wymiary krawędzi: $a = 2\text{ m}$, $b = 1\text{ m}$, $c = 1,5\text{ m}$ (*Rysunek 4.23: Jednorodny blok prostopadłościenny* na stronie 185).
 - a. Oblicz energię potencjalną bloku w przypadku, gdy leży na poziomym podłożu na ścianie bocznej o wymiarach $a \cdot b$.
 - b. Ile pracy wykona dźwig, stawiając blok na ścianie o wymiarach $c \cdot b$ tak, aby krawędź a była pionowa?



Rysunek 4.23: Jednorodny blok prostopadłościenny

Uwaga: Środek masy jednorodnego prostopadłościennego bloku leży w jego środku geometrycznym.

4.5 Środek ciężkości i środek masy

Pojęcie środka masy jest bardzo użyteczne, gdyż – jak się przekonamy – pozwala na znakomite uproszczenie opisu ruchu postępowego układu składającego się z wielu ciał. Zamiast rozpatrywać poszczególne ruchy dużej liczby ciał, wystarczy w wielu przypadkach rozważyć jedynie ruch jednego punktu będącego środkiem masy układu tych ciał. Pojęcie środka masy stosuje się również do bryły sztywnej. Dzięki zastosowaniu tego pojęcia skomplikowany ruch bryły można prosto opisać, jako złożenie ruchu postępowego punktu materialnego i obrotu nieruchomej bryły. Pojęcie środka masy najłatwiej można wyjaśnić rozważając bliskie mu pojęcie środka ciężkości.

Środek ciężkości

W przykładzie *Przykład 5* na stronie 184 wyznaczyliśmy położenie punktu stabilnego podparcia sztywnego pręta, na końcach którego znajdują się dwa ciężary o masach m_1 i m_2 (*Rysunek 4.22: Należy tak dobrać stosunek l_1 do l_2 , aby pręt się nie przechylał* na stronie 184). Warunek równowagi wymaga, aby suma momentów sił ciężkości względem osi przechodzącej przez punkt stabilnego podparcia była równa zero:

$$(\text{wzór 375}) \quad M_1 + M_2 = F_2 l_2 - F_1 l_1 = m_2 g l_2 - m_1 g l_1 = 0$$

Stąd:

$$(\text{wzór 376}) \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Taki warunek równowagi występuje w jednorodnym polu sił ciężkości w dowolnym przypadku dwóch punktowych ciał o masach m_1 i m_2 odległych od siebie o l – *Rysunek 4.24: Środek ciężkości dwóch ciał o masach m_1 i m_2* na stronie 187.

Można wykazać, że punkt zaczepienia wypadkowej sił ciężkości przypada właśnie w punkcie S , który dzieli odcinek l zgodnie z powyższym warunkiem. Dlatego punkt S nazywamy *środkiem ciężkości dwóch ciał*.

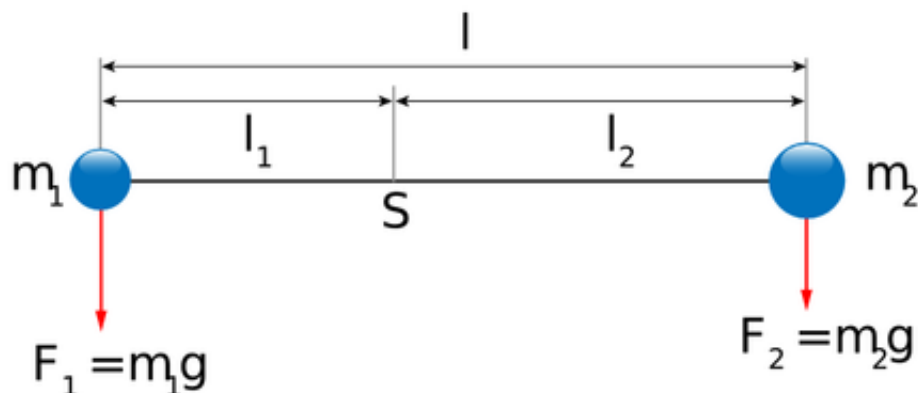
Pojęcie środka ciężkości stosuje się nie tylko do dwóch ciał, ale również do układu wielu ciał i do brył sztywnych. Zatem:



Ważne:

Środek ciężkości - jest to punkt zaczepienia siły wypadkowej wszystkich sił ciężkości elementów układu, lub wszystkich części bryły sztywnej.

W przypadku brył jednorodnych położenie środka ciężkości pokrywa się ze środkiem geometrycznym symetrycznej bryły. Na przykład, dla jednorodnej kuli środek ciężkości znajduje się dokładnie w środku kuli. Podobnie dla jednorodnych ciał w kształcie walca, sześcianu, równoległościanu itp. – ich środki ciężkości pokrywają się ze środkami geometrycznymi.



Znajduje się on w punkcie S , dzielącym odcinek l na dwa odcinki l_1 i l_2 , w stosunku $l_1/l_2 = m_2/m_1$

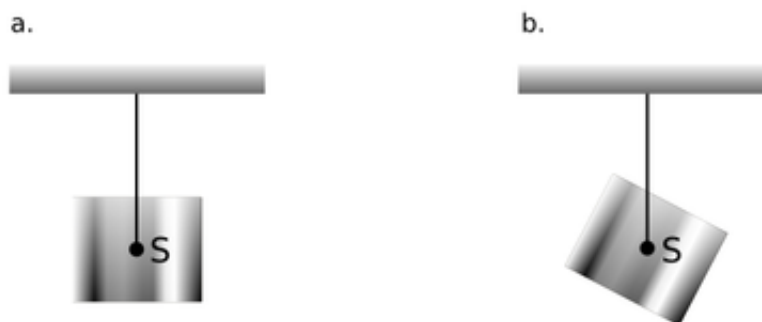
Rysunek 4.24: Środek ciężkości dwóch ciał o masach m_1 i m_2

Rodzaje równowagi

Jak już wspomniano, równowaga bryły będzie utrzymana wtedy, gdy punkt stabilnego podparcia przyłożenia siły przeciwnej do siły grawitacji - równoważącej tę grawitację będzie znajdował się w środku ciężkości - taki punkt nazywaliśmy dotąd punktem stabilnego podparcia. Równowaga może być osiągnięta również w przypadkach, gdy punkt podparcia (lub) ciała będzie znajdował się dokładnie nad, lub pod środkiem ciężkości. W związku z tym rozróżniamy następujące rodzaje równowagi:

1. Równowaga obojętna

Punkt zawieszenia pokrywa się ze środkiem ciężkości (*Rysunek 4.25: Punkt zawieszenia znajduje się w środku ciężkości S* na stronie 187). Obrót ciała nie zmienia położenia środka ciężkości, jego energia potencjalna nie zmienia się. Zatem nie wymaga ono pracy i ciało pozostaje w nowym położeniu równowagi.

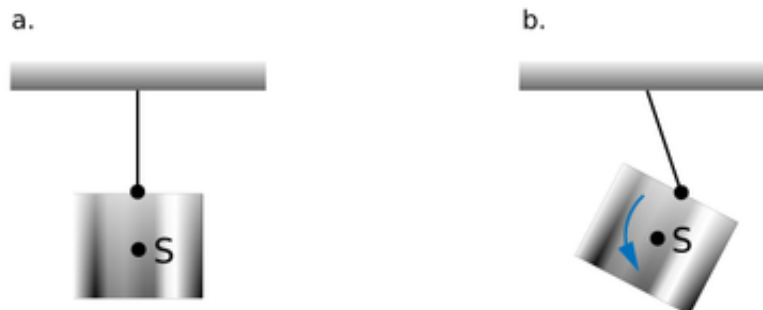


a) Ciało znajduje się w równowadze, b) po wychyleniu ciało w dalszym ciągu znajduje się w równowadze

Rysunek 4.25: Punkt zawieszenia znajduje się w środku ciężkości S

2. Równowaga trwała

Ciało znajduje się w równowadze trwałej, gdy punkt przyłożenia siły (zawieszenia) znajduje się nad środkiem ciężkości (*Rysunek 4.26: Punkt zawieszenia znajduje się nad środkiem ciężkości S* na stronie 188a) na linii pionowej. Wychylenie ciała (*Rysunek 4.26: Punkt zawieszenia znajduje się nad środkiem ciężkości S* na stronie 188b) powoduje wytrącone ze stanu równowagi. Pojawia się moment siły sprowadzający ciało do położenia wyjściowego. Należy zauważyć, że wychylenie ciała podnosi jego środek ciężkości, zatem energia potencjalna ciała wzrasta. Ciało ma najniższą energię potencjalną w położeniu równowagi (*Rysunek 4.26: Punkt zawieszenia znajduje się nad środkiem ciężkości S* na stronie 188a).

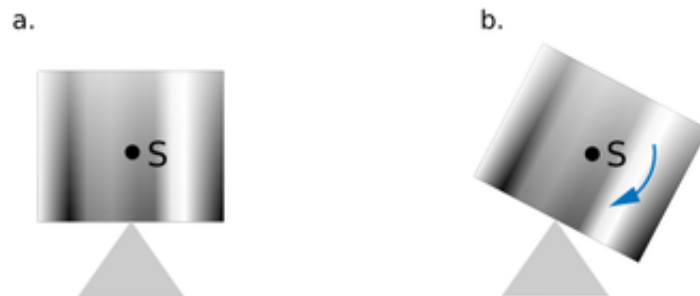


a) Ciało znajduje się w równowadze, b) po wychyleniu ciało powraca do stanu równowagi

Rysunek 4.26: Punkt zawieszenia znajduje się nad środkiem ciężkości S

3. Równowaga chwiejna

Ciało znajduje się w równowadze chwiejnej, gdy punkt przyłożenia siły (podparcia) znajduje się pod środkiem ciężkości (Rysunek 4.27: *Punkt podparcia znajduje się pod środkiem ciężkości S* na stronie 189a) na linii pionowej. Wychylenie ciała (Rysunek 4.27: *Punkt podparcia znajduje się pod środkiem ciężkości S* na stronie 189b) powoduje wytrącenie ze stanu równowagi. Pojawia się moment siły odchylający ciało dalej od położenia wyjściowego. Teraz wychylenie ciała obniża jego środek ciężkości, zatem energia potencjalna ciała maleje. Ciało ma najwyższą energię potencjalną w położeniu pierwotnym (Rysunek 4.27: *Punkt podparcia znajduje się pod środkiem ciężkości S* na stronie 189a).

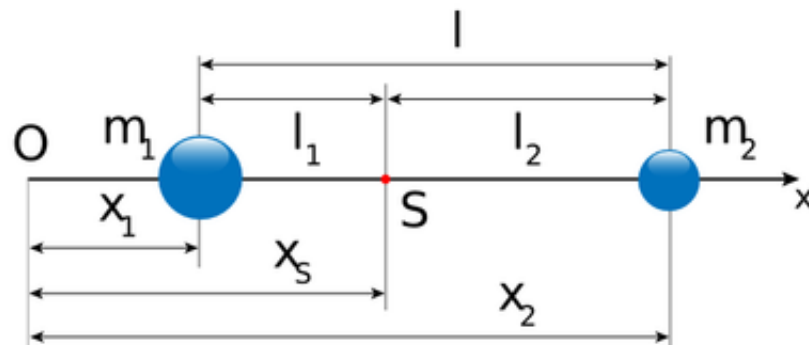


a) Ciało znajduje się w równowadze chwiejnej, b) po wychyleniu ciało wychyla się dalej

Rysunek 4.27: Punkt podparcia znajduje się pod środkiem ciężkości S

Środek masy

Środek masy znajduje się w tym samym miejscu co środek ciężkości. Środek masy jest pojęciem ogólniejszym od środka ciężkości, gdyż ciało ma środek masy zawsze niezależnie od tego, czy znajduje się, czy nie, w polu ciężkości. Położenie środka masy wyznacza się za pomocą wzorów podobnych do wzorów określających położenie środka ciężkości.



Rysunek 4.28: Położenie środka masy między dwoma ciałami

Rozważmy dwa jednorodne ciała o masach m_1 i m_2 położone na osi x w odległości x_1 i x_2 od punktu O , odległe od siebie o $l = x_2 - x_1$ (Rysunek 4.28: *Położenie środka masy między dwoma ciałami* na stronie 190). Punkt S , który dzieli odcinek l w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do mas tych ciał, nazywamy środkiem masy układu dwóch ciał (punktów materialnych). Zatem

$$(\text{wzór 377}) \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

W szczególnym przypadku, gdy masy obydwu ciał są sobie równe, czyli $m_1 = m_2$, ze wzoru (wzór 377 na stronie 190) wynika, że $l_1 = l_2$, to znaczy, że środek masy znajduje się dokładnie w połowie odcinka łączącego obydwie ciała.

Jeżeli przez x_s oznaczymy współrzędną środka masy, to $l_1 = x_s - x_1$, $l_2 = x_2 - x_s$ i po wymnożeniu „na krzyż” równania (wzór 377 na stronie 190) mamy

$$(\text{wzór 378}) \quad m_1(x_s - x_1) = m_2(x_2 - x_s)$$

skąd po prostych przekształceniach otrzymamy wzór na współrzędną środka masy

$$(\text{wzór 379}) \quad x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Wzór ten łatwo daje się uogólnić dla układu wielu, n , punktów materialnych:

$$(\text{wzór 380}) \quad x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

W celu określenia położenia środka masy w przestrzeni należy podać wszystkie trzy współrzędne. Współrzędne y_s i z_s wyrażamy analogicznie do wzoru na x_s .

Pojęcie środka masy stosuje się nie tylko do układu wielu punktów materialnych, ale również do pojedynczych ciał o dowolnym kształcie. Aby znaleźć położenie środka masy, należy w takim przypadku podzielić ciało na małe

części i zastosować wzór analogiczny do (wzór 380 na stronie 190), gdzie masy i współrzędne odnoszą się do poszczególnych części ciała. Dla ciał o kształtach wykazujących dużą symetrię wyznaczenie środka masy jest proste. W przypadku ciał jednorodnych położenie środka masy pokrywa się ze środkiem geometrycznym symetrycznej bryły (co omówiliśmy wyżej rozważając położenie środka ciężkości).

Środek masy może być w spoczynku lub poruszać się podczas ruchu poszczególnych ciał układu. Zapytajmy, jaka jest prędkość środka masy v_s , gdy znane są prędkości i masy ciał układu.

! Wskazówka:

Pisząc równanie (wzór 380 na stronie 190) dla dwóch różnych chwil czasu i odejmując je od siebie stronami, otrzymamy

$$(\text{wzór 381}) \Delta x_s = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Dzieląc obie strony przez $\Delta t = t_2 - t_1$ i uwzględniając, że prędkość środka masy $v_s = \frac{\Delta x_s}{\Delta t}$ oraz że prędkości poszczególnych ciał wynoszą: $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$, $v_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t}$ itd., otrzymamy

$$(\text{wzór 382}) v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Wzór ten jest słuszny również w zapisie wektorowym:

$$(\text{wzór 383}) \vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Widzimy, że w liczniku tego wzoru występuje sumaryczny pęd całego układu, a w mianowniku sumaryczna masa M całego układu, więc

$$(\text{wzór 384}) \vec{v}_s = \frac{\vec{p}}{M}$$

Zatem prędkość środka masy jest zdeterminowana przez pęd całego układu. W przypadku gdy układ jest odosobniony, jego całkowity pęd jest stały i wtedy prędkość środka masy jest również stała co do wartości i co do kierunku, czyli środek masy porusza się ruchem bezwładnym, niezależnie od tego, jak poruszają się części składowe układu. Na układ odosobniony nie działają siły zewnętrzne. Widzimy zatem, że siły wewnętrzne nie wpływają na ruch środka masy.

Jak zachowuje się środek masy, gdy na układ działają siły zewnętrzne? Środek masy uzyskuje wtedy przyspieszenie \vec{a}_s , które można obliczyć z drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$(\text{wzór 385}) \vec{F} = M \vec{a}_s$$

gdzie \vec{F} oznacza sumę (wektorową) zewnętrznych sił działających na wszystkie ciała układu. Zatem, **środek masy układu zachowuje się tak, jak gdyby cała masa układu znajdowała się w punkcie środka masy i jak gdyby wszystkie siły działające na ciała układu były przyłożone do tego punktu**. Treść powyższego stwierdzenia służy do bardziej precyzyjnej definicji środka masy:

! Ważne:

Środek masy - jest to punkt geometryczny bryły lub układu ciał, który zachowuje się tak, jak gdyby cała masa układu (bryły) znajdowała się w tym punkcie i jak gdyby wszystkie siły zewnętrzne działające na elementy układu (bryły) były przyłożone do tego punktu.

W szczególnym przypadku, gdy siły zewnętrzne nie działają na układ, wówczas $\vec{F} = 0$ i przyspieszenie środka masy jest równe zeru ($\vec{a}_s = 0$), czyli $\vec{v}_s = \text{const}$. Jest to przypadek wcześniej omówiony.

! Wskazówka:

Dругa zasada dynamiki Newtona dla środka masy:

$$(\text{wzór 386}) \vec{F} = M \vec{a}_s$$

gdzie \vec{F} wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ, \vec{a}_s - przyspieszenie środka masy, M - całkowita masa układu.

Prawo wyrażone wzorem (wzór 386 na stronie 192) udowodnimy dla układu składającego się z dwóch ciał. Zapišemy dwa równania (wzór 383 na stronie 191) dla dwóch różnych chwil czasu t' i t'' :

$$(\text{wzór 387}) \vec{v}'_s = \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2}$$

$$(\text{wzór 388}) \vec{v}''_s = \frac{m_1 \vec{v}''_1 + m_2 \vec{v}''_2}{m_1 + m_2}$$

odejmując je stronami, otrzymamy

$$(\text{wzór 389}) \vec{v}''_s - \vec{v}'_s = \frac{m_1 \vec{v}''_1 + m_2 \vec{v}''_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (\vec{v}''_1 - \vec{v}'_1) + m_2 (\vec{v}''_2 - \vec{v}'_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \Delta \vec{v}_1 + m_2 \Delta \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Zatem

$$(\text{wzór 390}) \Delta \vec{v}_s = \frac{m_1 \Delta \vec{v}_1 + m_2 \Delta \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Stąd

$$(\text{wzór 391}) (m_1 + m_2) \Delta \vec{v}_s = m_1 \Delta \vec{v}_1 + m_2 \Delta \vec{v}_2$$

Dzieląc obie strony przez $\Delta t = t'' - t'$, otrzymamy

$$(\text{wzór 392}) (m_1 + m_2) \frac{\Delta \vec{v}_s}{\Delta t} = m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

Po prawej stronie tego równania występują wyrażenia:

$$(\text{wzór 393}) m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = m_1 \vec{a}_1$$

(gdzie \vec{a}_1 jest przyspieszeniem ciała „1”) oraz

$$(\text{wzór 394}) m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = m_2 \vec{a}_2$$

(\vec{a}_2 jest przyspieszeniem ciała „2”). Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona iloczyny te są równe wypadkowemu siłom działającym na ciała „1” i „2”. Na każde ciało działają zarówno siły wewnętrzne (\vec{f}_1 i \vec{f}_2), jak i zewnętrzne (\vec{F}_1 i \vec{F}_2), więc

$$(\text{wzór 395}) m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_1 + \vec{F}_1$$

oraz

$$(\text{wzór 396}) m_2 \vec{a}_2 = \vec{f}_2 + \vec{F}_2$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (wzór 392 na stronie 192) oraz uwzględniając, że $\frac{\Delta \vec{v}_s}{\Delta t} = \vec{a}_s$ (gdzie \vec{a}_s oznacza przyspieszenie środka masy), otrzymamy:

$$(\text{wzór 397}) (m_1 + m_2) \vec{a}_s = \vec{f}_1 + \vec{F}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F}_2$$

Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona, siły \vec{f}_1 i \vec{f}_2 są sobie równe, lecz przeciwnie zwrócone, ponieważ są siłami wewnętrznymi wzajemnego oddziaływania ciał A i B , czyli $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = 0$. Ostatecznie otrzymamy:

$$(\text{wzór 398}) (m_1 + m_2) \vec{a}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Wzór ten wyraża zasadę ruchu środka masy dla układu dwóch ciał i łatwo daje się uogólnić; jest on zgodny ze wzorem (wzór 386 na stronie 192). Zatem wykazaliśmy w szczególnym przypadku prawdziwość twierdzenia o środku masy.

Zasada zachowania energii

Rysunek 4.29: Film

Przykład 6

Granat leci poziomo. W pewnej chwili granat wybuchu, odłamki rozlatują się w różnych kierunkach, ale środek masy wszystkich odłamków leci w dalszym ciągu tak, jakby nic się nie wydarzyło. To znaczy tak, jak gdyby granat leciał, nie rozrywając się na części. Dzieje się tak dlatego, że (zaniedbując opór powietrza) w czasie wybuchu na odłamki granatu działają siły wewnętrzne, a siły wewnętrzne nie wpływają na ruch środka masy układu (ich suma wektorowa jest równa zero).



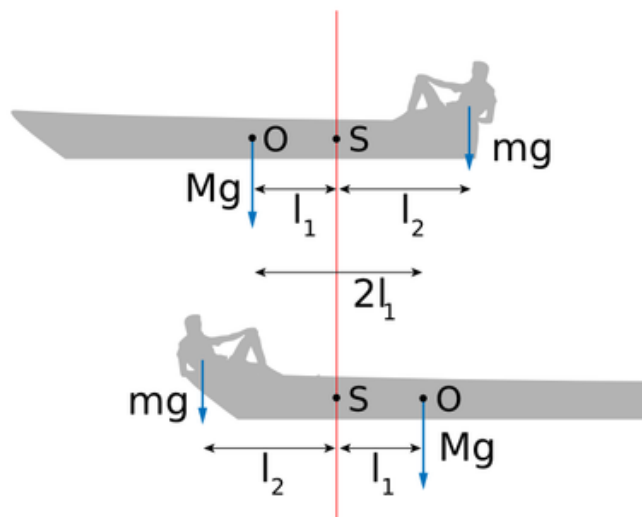
Eksplodujący granat: środek masy porusza się jednakowo mimo eksplozji

Rysunek 4.30: Animacja

Przykład 7

Człowiek przechodzi z rufy łódki na dziób. Na jaką odległość łódka przemieści się na jeziorze? Masa łódki $M = 100\text{ kg}$, a jej długość $l = 5\text{ m}$. Masa człowieka $m = 75\text{ kg}$.

Odpowiedź: Układ łódka–człowiek możemy traktować jako układ odosobniony, ponieważ siły tarcia między łódką a wodą są bardzo małe. Zatem środek masy układu pozostaje w spoczynku, mimo że człowiek i łódka przemieszczają się (*Rysunek 4.31: Środek masy układu łódka–człowiek pozostaje w spoczynku mimo ruchu człowieka* na stronie 194). Środek masy łódki znajduje się w połowie długości łódki, w odległości $l/2$ od rufy i dziubu.



Rysunek 4.31: Środek masy układu łódka–człowiek pozostaje w spoczynku mimo ruchu człowieka

Środek masy S układu dzieli odcinek o długości $l/2$ na dwa odcinki l_1 i l_2 w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do mas M i m . Możemy zatem napisać równania:

$$\text{(wzór 399) } \frac{l_1}{l_2} = \frac{m}{M}, \quad l_1 + l_2 = \frac{l}{2}$$

Stąd po wyeliminowaniu l_2 otrzymujemy

$$\text{(wzór 400) } l_1 = \frac{m}{2(m+M)} l$$

Patrząc na *Rysunek 4.31: Środek masy układu łódka–człowiek pozostaje w spoczynku mimo ruchu człowieka* na stronie 194, widzimy, że przemieszczenie środka masy łódki (punkt O na rysunku) wynosi $2l_1$ i takie samo jest przemieszczenie każdego innego punktu łódki względem jeziora, czyli przemieszczenie łódki wynosi

$$\text{(wzór 401) } x = \frac{m}{m+M} l$$

Zatem

$$\text{(wzór 402) } x = \frac{75\text{ kg}}{100\text{ kg} + 75\text{ kg}} \cdot 5\text{ m} = 2,14\text{ m}$$

Pytania i problemy

1. Podaj wzór na współrzędną x_s środka masy trzech punktów materialnych o masach m_1, m_2, m_3 i współrzędnych x_1, x_2, x_2 .
2. Układ odosobniony składa się z trzech ciał o masach $m_1 = 1\text{ kg}, m_2 = 2\text{ kg}, m_3 = 2\text{ kg}$ i prędkościach $v_1 = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}, v_3 = -1\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ciała te są rozmieszczone na wspólnej prostej i przemieszczają się wzdłuż niej. Oblicz prędkość środka masy tego układu.
3. Opisz zachowanie środka masy układu, na który działa siła zewnętrzna.
4. Po przeczytaniu rozwiązania przykładu 7. (*Przykład 7* na stronie 194), uczeń stwierdził, że jest ono błędne. „Skoro masy człowieka i łódki mają się do siebie jak 3:4” rozumował uczeń, „to przebyte przez człowieka i łódkę drogi - w braku sił zewnętrznych - powinny się mieć do siebie jak 4:3. Człowiek, zgodnie z treścią zadania, przebył drogę równą długości łódki, czyli 5 m, więc łódka powinna się przemieścić o 3,75 m”. Wskaż usterkę w rozumowaniu ucznia.

4.6 Moment pędu i druga zasada dynamiki dla bryły sztywnej

Pojęcie *momentu pędu* należy do podstawowych pojęć fizyki. Poprzednio poznałeś dwie fundamentalne zasady zachowania – zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii. Obecnie zapoznasz się z następną – zasadą zachowania momentu pędu. Pozwala ona na rozwiązywanie wielu problemów fizycznych w sposób łatwy bez konieczności analizowania ruchów indywidualnych cząstek i sił na nie działających.

Zauważyłeś zapewne, że w przypadku opisu ruchu bryły sztywnej korzystaliśmy z wielkości fizycznych analogicznych do pewnych wielkości dla punktu materialnego. Zamiast *masy* korzystaliśmy z *momentu bezwładności*, zamiast *siły* – z *momentu siły*. Podobnie, zamiast *pędu* będziemy korzystać z *momentu pędu*. Żeby się przekonać o konieczności (i wygodzie) stosowania tego pojęcia, rozważmy ciało obracające się wokół nieruchomej osi, na które działa kilka sił. Sumę wszystkich momentów sił oznaczmy przez \vec{M} . Wypadkowy moment powoduje przyrost energii kinetycznej ciała, a więc i prędkości kątowej. Niech w pewnym niedużym odstępnie czasu Δt prędkość kątowa ciała zmienia się od wartości ω_1 do ω_2 . Zatem zmiana energii kinetycznej wynosi

$$(\text{wzór 403}) \quad \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2} = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Wzór ten przekształcimy w następujący sposób:

$$(\text{wzór 404}) \quad \Delta E_k = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{I}{2}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) = (I\omega_2 - I\omega_1)\omega_{\text{sr}}$$

gdzie ω_{sr} oznacza średnią prędkość kątową $\omega_{\text{sr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Zmiana energii kinetycznej jest wywołana pracą wypadkowego momentu siły

$$(\text{wzór 405}) \quad \Delta W = M\Delta\alpha = M\omega_{\text{sr}}\Delta t$$

Przyrównując (*wzór 404* na stronie 195) do (*wzór 405* na stronie 195) po uproszczeniu przez ω_{sr} , otrzymamy:

$$(\text{wzór 406}) \quad M\Delta t = I\omega_2 - I\omega_1$$

Wzór ten przypomina nam swoim kształtem drugą zasadę dynamiki Newtona w ujęciu pędu i popędu (patrz wzór (*wzór 193* na stronie 104)):

$$(\text{wzór 407}) \quad F\Delta t = mv_2 - mv_1$$

Zamiast wartości siły F we wzorze (*wzór 407* na stronie 195) mamy wartość momentu siły M w (*wzór 406* na stronie 195), zamiast masy m – moment bezwładności I , zamiast prędkości liniowej v – prędkość kątową ω . Iloczyn masy i prędkości jest pędem, $\vec{p} = m\vec{v}$. Podobnie dla bryły, **iloczyn momentu bezwładności i prędkości kątowej jest wartością momentu pędu**:

$$(\text{wzór 408}) \quad L = I\omega$$

Jednostką momentu pędu jest $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$.

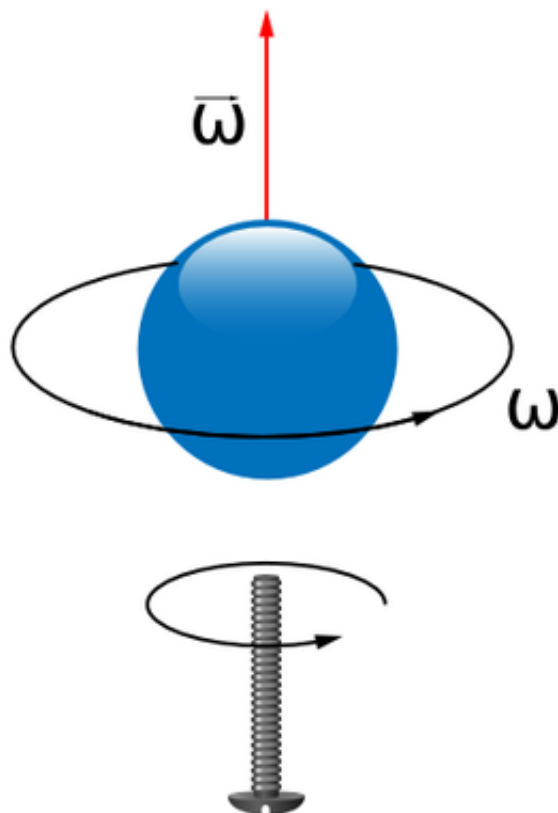
Zwróćmy uwagę na to, że wzór (wzór 408 na stronie 195) jest analogonem wzoru na pęd:

$$(\text{wzór 409}) \vec{p} = m\vec{v}$$

Pęd jest wielkością wektorową, podobnie i moment pędu. Konsekwentnie, wzór (wzór 408 na stronie 195) możemy zapisać wektorowo, jeżeli przyjmiemy, że i prędkość kątowa jest wektorem (moment bezwładności I jest skalarem). Wtedy wzór na moment pędu możemy zapisać w postaci wektorowej:

$$(\text{wzór 410}) \vec{L} = I\vec{\omega}$$

We wzorze tym prędkość kątowa występuje w postaci wektorowej. Jest to wektor, którego długość ma wartość liczbową równą prędkości kątowej, kierunek jest prostopadły do płaszczyzny obrotu i zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej (patrz *Rysunek 4.32: Wektor prędkości kątowej ma kierunek prostopadły do płaszczyzny obrotu i zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej* na stronie 196).



Rysunek 4.32: Wektor prędkości kątowej ma kierunek prostopadły do płaszczyzny obrotu i zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej

Tak zdefiniowany wektor ma własności nieco różne od „zwykłego” wektora i nazywa się wektorem osiowym. Dzięki temu i moment pędu zdefiniowany wzorem (wzór 410 na stronie 196) jest też wektorem osiowym.



Wskazówka:

Wektor osiowy ma tę własność, że przy zamianie układu współrzędnych – z prawoskrętnego na lewoskrętny – nie zmienia swego kierunku i zwrotu. Podczas gdy „zwykły” wektor (zwany wektorem biegunowym) przy tej zamianie układu współrzędnych zachowuje tylko kierunek, a zwrot zmienia się na przeciwny. Własności tych wektorów są szerzej opisane w książce: H. Morgenau i G.M. Murphy, *Matematyka w Fizyce i Chemii*, PWN, Warszawa. Na początek wystarczy następujące intuicyjne rozróżnienie: wektory biegunowe wskazują bezpośrednio kierunek i zwrot wielkości, którą opisują. Natomiast wektory osiowe są prostopadłe do płaszczyzny wyznaczonej przez opisywane zjawisko; wymagają one umownego przypisania im zwrotu - w przypadku prędkości kątowej tą umową jest reguła śruby *prawoskrętnej*.

Oto definicja momentu pędu:

Ⓡ **Zamapiętać:**

Moment pędu wyraża się iloczynem momentu bezwładności I oraz prędkości kątowej $\vec{\omega}$:

$$(\text{wzór 411}) \vec{L} = I\vec{\omega}$$

Zauważmy, że wartość momentu pędu punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu r wynosi $L = mr^2\omega = mrv = rmp$, czyli jest równa iloczynowi pędu i promienia okręgu.

Korzystając z definicji momentu pędu: $L = I\omega$, wzór (wzór 406 na stronie 195) możemy przekształcić następująco: $M \Delta t = L_2 - L_1 = \Delta L$ lub $\vec{M} \Delta t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \Delta \vec{L}$. Zatem

$$(\text{wzór 412}) \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Wzór ten jest wyrazem **drugiej zasady dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej**, która ze względu na swój charakter nosi również nazwę podstawowej **zasady dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej**:

Ⓡ **Zamapiętać:**

II zasada dynamiki bryły sztywnej:

Moment siły \vec{M} jest równy stosunkowi przyrostu momentu pędu $\Delta \vec{L}$ do czasu Δt , w jakim ten przyrost nastąpił, czyli jest równy szybkości zmian momentu pędu

$$(\text{wzór 413}) \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Ponownie zwróćmy uwagę na analogię. Występuje tu analogia z drugą zasadą dynamiki dla punktu materialnego $\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$, gdzie odpowiednikiem momentu siły jest siła, a odpowiednikiem momentu pędu jest pęd.

Równanie (wzór 412 na stronie 197):

$$(\text{wzór 414}) \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

można przedstawić w jeszcze innej postaci. Ponieważ,

$$(\text{wzór 415}) \Delta L = L_2 - L_1 = I\omega_2 - I\omega_1 = I \Delta \omega$$

więc

$$(\text{wzór 416}) \vec{M} = I \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

ale

$$(\text{wzór 417}) \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \vec{\varepsilon}$$

jest przyspieszeniem kątowym (należy zwrócić uwagę na to, że przyspieszenie kątowe definiujemy za pomocą wzoru $\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$, który ma swój odpowiednik w postaci wzoru na przyspieszenie liniowe $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$), zatem

$$(\text{wzór 418}) \quad \vec{M} = I \vec{\varepsilon}$$

Równanie to mówi, że w ruchu obrotowym przyspieszenie kątowe bryły jest proporcjonalne do wypadkowego momentu siły, a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność momentu bezwładności bryły.

Znowu mamy tu analogię z wzorem $\vec{F} = m \vec{a}$ - wyrażającym drugą zasadę dynamiki punktu materialnego.

❗ **Wskazówka:**

Moment pędu w postaci iloczynu wektorowego

Moment pędu punktu materialnego poruszającego się po okręgu, zgodnie ze wzorem (wzór 407 na stronie 195), wynosi $L = I\omega = mr^2\omega = mrv = r mv = rp$.

Zatem moment pędu punktu materialnego poruszającego się po okręgu można zapisać jako $L = rp$, gdzie r jest promieniem okręgu. W przypadku ogólniejszym ruchu krzywoliniowego punktu materialnego (Rysunek 4.32: Wektor prędkości kątowej ma kierunek prostopadły do płaszczyzny obrotu i zwrot zgodny z regułą śruby prawoskrętnej na stronie 196) moment pędu względem wybranej osi wyraża się za pomocą wzoru

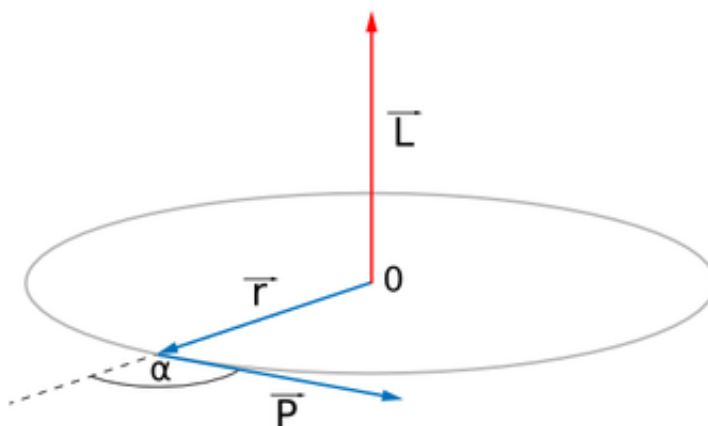
$$(\text{wzór 419}) \quad L = rp \sin \alpha$$

Widzimy, że wzór ten ma postać wartości iloczynu wektorowego (patrz wzór 367 na stronie 182).

Moment pędu można więc zdefiniować za pomocą iloczynu wektorowego:

$$(\text{wzór 420}) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie \vec{r} jest tzw. ramieniem, czyli wektorem odległości osi obrotu do określonego punktu.



Rysunek 4.33: Moment pędu jest wektorem, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Chociaż pokazaliśmy, że wzór ten jest słuszny dla punktu materialnego, to jednak ma on znaczenie ogólne i stosuje się również do bryły sztywnej. Zapis wektorowy podstawowej zasady dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej w postaci (*wzór 410* na stronie 196) ma znaczenie nie tylko czysto formalne, wyraża coś więcej. Mianowicie, mówi nam, że nie tylko szybkość zmiany momentu pędu jest równa wartości momentu siły, ale również kierunek i zwrot zmiany *wektora* momentu pędu $\Delta \vec{L}$ jest taki, jak kierunek i zwrot wektora momentu siły.

To, że moment pędu jest wektorem ma kapitalne znaczenie, gdyż prawo zachowania momentu pędu (które omówimy w następnym podrozdziale) dotyczy nie tylko wartości momentu pędu, ale również własności kierunkowych. Oznacza to na przykład, że nie zmienia się w przestrzeni kierunek osi obrotu bryły odosobnionej – **ma to wielorakie zastosowania i wyjaśnia wiele zjawisk!**

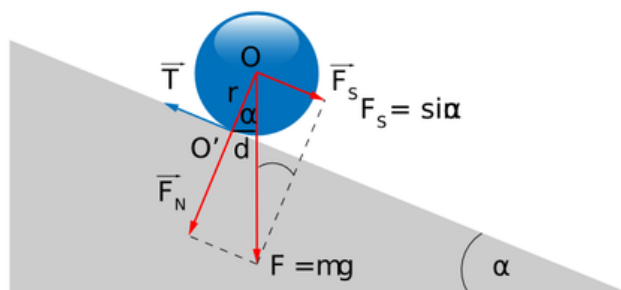
Krażki na równi

Rysunek 4.34: Film

Przykład 8

Jednorodna kulka stacza się bez poślizgu po równi pochylej o kącie nachylenia do poziomu α . Oblicz przyspieszenie kulki i porównaj je z przyspieszeniem klocka zsuwającego się bez tarcia z tej samej równi.

Odpowiedź: Na kulkę wzdłuż równi działają dwie siły: składowa siły ciężkości \vec{F}_s i \vec{T} - siła tarcia (*Rysunek 4.35: Chwilowa oś obrotu znajduje się w miejscu styku kulki z równią. Obrót kulki jest wywołany momentem siły $F \rightarrow s$ na stronie 199*). Ruch kulki można przedstawić jako złożenie dwóch ruchów: obrotowego względem osi O przechodzącej przez jej środek i postępowego. Prostsze jednak rozwiązanie naszego zagadnienia otrzymamy, gdy rozpatrzmy obrotowy ruch kulki względem chwilowej osi O' przechodzącej przez punkt styku kulki z powierzchnią równi.



Rysunek 4.35: Chwilowa oś obrotu znajduje się w miejscu styku kulki z równią. Obrót kulki jest wywołany momentem siły \vec{F}_s

Zastosujemy wzór (*wzór 418* na stronie 198): $M = I\epsilon$. To właśnie siła F_s wywołuje obrót kulki względem tej chwilowej osi obrotu. Ramię siły jest co do wartości równe promieniowi kulki r , zatem $M = F_s r$ lub $M = mgr \sin \alpha$, więc

$$(\text{wzór 421}) mgr \sin \alpha = I\epsilon$$

gdzie I jest momentem bezwładności kulki względem osi O' . Z twierdzenia Steinera:

$$(\text{wzór 422}) I = I_0 + mr^2 = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

(por. [Rysunek 4.16: Moment bezwładności dla wybranych jednorodnych brył I 0 względem osi przechodzącej przez środek masy, zaznaczonej na rysunku](#) na stronie 177). Zatem

$$(\text{wzór 423}) \quad mgr \sin\alpha = \frac{7}{5}mr^2\varepsilon$$

Podstawiając przyspieszenie liniowe $a = \varepsilon r$ (brak poślizgu), po uproszczeniu otrzymamy

$$(\text{wzór 424}) \quad a = \frac{5}{7}g \sin\alpha$$

Klocek zsuwający się z równi bez tarcia ma przyspieszenie $a_k = g \sin\alpha$ (dla klocka $F_s = ma_k$ lub $mg \sin\alpha = ma_k$, zatem $g \sin\alpha = a_k$). Widzimy, że przyspieszenie kulki jest mniejsze od przyspieszenia klocka o czynnik $5/7$.

Podamy jeszcze nieco inne podejście do rozwiązania naszego zagadnienia. Zauważmy, że równanie ([wzór 420](#) na stronie 198) mogliśmy otrzymać bez rozkładu siły ciężkości $F = mg$ na składowe. Na [Rysunek 4.33: Moment pędu jest wektorem, \$L \rightarrow = r \rightarrow \times p \rightarrow\$](#) na stronie 198 widać, że ramię tej siły względem chwilowej osi obrotu O' wynosi $d = r \sin\alpha$, zatem jej moment względem tej osi jest równy $M = mgr \sin\alpha$, ale $M = I\varepsilon$ – stąd równanie ([wzór 420](#) na stronie 198).

Pytania i problemy

1. Zdefiniuj moment pędu. Przedstaw argumenty świadczące, że moment pędu izolowanego układu ciał (izolowanej bryły) jest wielkością stałą w czasie.
2. Sformułuj podstawową zasadę dynamiki bryły sztywnej w ruchu obrotowym. Jaki skutek wywołuje działanie siły, której moment jest niezrównoważony?
3. Na koło o promieniu $r = 0,5\text{ m}$ nawinięto nić i ciągnięto ją stałą siłą $F = 3\text{ N}$, w wyniku czego koło zaczęło się obracać na osi przechodzącej przez jego środek z przyspieszeniem $\varepsilon = 0,25\text{ s}^{-2}$. Ile wynosi moment bezwładności koła?
4. Rozpatrujemy punktowe ciało o masie $m = 1\text{ kg}$, na które nie działają żadne siły. Porusza się ono po linii prostej z prędkością $v = 3\text{ m/s}$. W punkcie O , odległym od prostej o $d = 2\text{ m}$, znajduje się obserwator, który mierzy moment pędu L tego ciała. Wykaż, stosując wyrażenie ([wzór 420](#) na stronie 198), że moment pędu tego ciała nie zależy od jego położenia na prostej i oblicz jego wartość.
5. W ([przykładzie 8](#)) wyprowadziliśmy wzór na przyspieszenie kulki staczającej się z równi pochylej. Wyprowadź ten sam wzór traktując ruch kulki jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego środka masy.

4.7 Prawo zachowania momentu pędu

Poprzednio omawialiśmy dwie fundamentalne zasady zachowania – zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania energii. Obecnie zapoznasz się z następną – zasadą zachowania momentu pędu. Pozwala ona na rozwiązywanie wielu problemów fizycznych w sposób łatwy bez konieczności analizowania ruchów indywidualnych cząstek i sił na nie działających.

Jeżeli wypadkowy moment sił działający na ciało (lub układ ciał) jest równy zeru $\vec{M} = 0$, to ze wzoru:

$$(\text{wzór 425}) \quad \vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

wynika, że

$$(\text{wzór 426}) \quad \Delta \vec{L} = 0 \quad \text{czyli} \quad \vec{L} = \text{const}$$

Całkowity moment pędu ciała (lub układu ciał) jest więc stały. W szczególności, jeżeli mamy do czynienia z układem odosobnionym, to siły zewnętrzne są równe zeru i wypadkowy moment sił jest równy zeru. Wtedy obowiązuje równanie ([wzór 426](#) na stronie 200). Otrzymaliśmy bardzo ważny wynik – prawo zachowania momentu pędu, które brzmi:

Ⓜ Zamapiętać:

Prawo zachowania momentu pędu

Moment pędu układu odosobnionego jest stały w czasie

Prawo zachowania momentu pędu należy do podstawowych praw przyrody i obok prawa zachowania pędu i prawa zachowania energii ma powszechne zastosowanie do zjawisk zarówno w skali makroskopowej, mikroskopowej – na poziomie cząstek elementarnych, jak i w skali kosmicznej – na poziomie układów gwiazdnych i galaktyk.

Prawa zachowania a symetrie czasu i przestrzeni

Prawo zachowania momentu pędu, podobnie jak dwa pozostałe prawa zachowania występujące w mechanice, wynika z podstawowych symetrii przestrzeni i czasu. Jak już wspomniano, prawo zachowania energii wynika z symetrii czasu względem przesunięć (w czasie). Mówimy, że *czas ma cechę jednorodności*. Prawo zachowania pędu wynika z symetrii przestrzeni względem przesunięć. Mówimy, że *przestrzeń ma cechę jednorodności*. Podobnie i prawo zachowania momentu pędu wynika z symetrii przestrzeni względem obrotów (mówiąc popularnie, pusta przestrzeń jest jednakowa w dowolnym kierunku lub – przestrzeń „wygląda tak samo”, jeżeli patrzeć w dowolnym kierunku). Mówimy, że *przestrzeń jest izotropowa*.

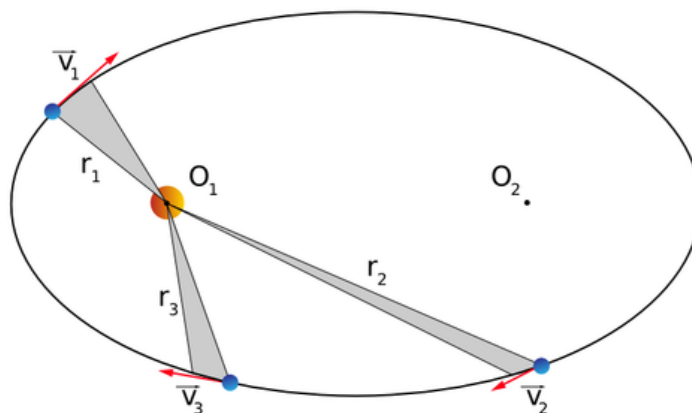
Spróbujmy w sposób uproszczony wyjaśnić, dlaczego istnieje prawo zachowania momentu pędu. Wyobraźmy sobie obracającą się w pustej przestrzeni bryłę sztywną, na którą nie działają inne ciała. Niech bryła ma pewne wybrzuszenie na jej krawędzi. Skoro bryła została raz wprowadzona w ruch obrotowy, to będzie ciągle trwała w tym stanie. Wyobraźmy sobie wektor poprowadzony od osi obrotu bryły do jej wybrzuszenia. W pewnej chwili wektor będzie wskazywał określony kierunek w przestrzeni. Ale przestrzeń jest izotropowa (jest jednakowa w dowolnym kierunku), zatem: żaden kierunek w przestrzeni nie jest w stanie zmienić jej stanu ruchu, tzn. spowolnić ją lub przyspieszyć, ponieważ każdy kierunek jest równoważny (jest „jednakowo dobry”). Po prostu nie ma powodu, dla którego bryła miałaby zmieniać swoją prędkość ruchu obrotowego.

Należy zwrócić uwagę na to, że moment pędu jest wielkością wektorową i prawo zachowania momentu pędu mówi o zachowaniu nie tylko wartości momentu pędu, ale również i o zachowaniu jego zwrotu i kierunku. Zatem, jeżeli odosobniony układ ciał ma określoną oś obrotu, to jej kierunek w przestrzeni się nie zmienia.

Przykład 9

Johannes Kepler w wyniku wieloletnich obserwacji ustalił prawa ruchu planet, zwane prawami Keplera. Przedstawiliśmy je w pierwszej klasie; będziemy je bliżej omawiać przy okazji teorii grawitacji. Każda z planet obiega Słońce po orbicie eliptycznej. W jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce (ściślej zdanie to powinno brzmieć: w jednym z ognisk elipsy znajduje się środek masy układu Słońce-planeta). Z prawa zachowania momentu pędu wynika, że orbitalna prędkość planety nieustannie się zmienia wraz ze zmianami jej odległości od Słońca.

Otóż drugie prawo Keplera mówi, że **promień wodzący \vec{r} poprowadzony ze środka Słońca do środka planety zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu** (*Rysunek 4.36: Promień wodzący zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu* na stronie 202). Wykażemy, że prawo to wynika z zasady zachowania momentu pędu.



Rysunek 4.36: Promień wodzący zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu

Odpowiedź: Możemy przyjąć, że Słońce i planeta tworzą układ odosobniony. Środek masy układu Słońce–planeta pokrywa się prawie ze środkiem Słońca. Abstrahując od ruchów własnych – obrotowych – Słońca i planety, moment pędu tego układu wynosi

$$(\text{wzór 427}) L = mvr = \text{const}$$

gdzie m – masa planety, v – jej prędkość liniowa, r – promień wodzący.

Weźmy pod uwagę mały odstęp czasu Δt . Pole powierzchni zakreślone przez promień wodzący w jednostce czasu wyniesie:

$$(\text{wzór 428}) \Delta S = 1/2 \cdot r \cdot \Delta s$$

gdzie Δs jest cięciwą fragmentu orbity, przebytego przez planetę w czasie Δt . Można przyjąć - tak samo przybliżając - że $\Delta s = r \cdot \Delta t$.

Oznaczmy przez σ stosunek $\Delta s / \Delta t$ (czyli pole powierzchni zakreślone przez promień wodzący w jednostce czasu):

$$(\text{wzór 429}) \sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} vr = \frac{mvr}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const}$$

Jest to właśnie drugie prawo Keplera wyrażone w postaci matematycznej.

Można wykazać, że dla dowolnego punktu (na przykład punktu D na [Rysunek 4.36: Promień wodzący zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu](#) na stronie 202), wartość σ byłaby taka sama, jak w punktach A i P .

Przykład 10

Kometa okrąży Słońce po orbicie eliptycznej w taki sposób, że w jednym ognisku elipsy znajduje się Słońce, zaś stosunek najdalszej do najbliższej odległości komety od Słońca wynosi

$n = \frac{R_2}{R_1} = 100$. Ile razy prędkość liniowa komety jest większa, gdy się znajduje w odległości R_1 (w peryhelium), od jej prędkości liniowej w odległości R_2 (aphelium)?

Odpowiedź: Jeśli zaniedbamy oddziaływanie komety z innymi ciałami niebieskimi i przyjmiemy, że jej masa jest stała, to jej moment pędu jest stały i wynosi $L = mvR = \text{const}$, zatem $mv_1R_1 = mv_2R_2$. Stąd

$$(\text{ wzór 430 }) \frac{v_1}{v_2} = \frac{R_2}{R_1} = 100$$

Prędkość komety w peryhelium jest sto razy większa od jej prędkości w aphelium.

Zasada zachowania momentu pędu

Rysunek 4.37: Animacja

Przykład 11

Dlaczego w helikopterze stosuje się dodatkowe śmigielko na ogonie?

Odpowiedź: W helikopterze wielkie śmigło napędowe (nośne) uzyskuje moment pędu od silnika w kadłubie. Z prawa zachowania momentu pędu wynika, że kadłub uzyskałby taki sam moment pędu, ale przeciwnego znaku. Kadłub obracałby się w przeciwnym kierunku niż śmigło. Aby zapobiec temu niepożądanemu zjawisku umieszcza się dodatkowe śmigło na ogonie (*Rysunek 4.38: Dodatkowe śmigło na ogonie przeciwdziała obracaniu się kadłuba helikoptera* na stronie 203). Obraca się ono, w pionowej płaszczyźnie, w takim kierunku, aby powstał moment pędu kompensujący obrót kadłuba helikoptera.



Rysunek 4.38: Dodatkowe śmigło na ogonie przeciwdziała obracaniu się kadłuba helikoptera

Pytania i problemy

1. Sformułuj prawo zachowania momentu pędu - wyjaśnij je na wybranym przykładzie.
2. Jaka własność przestrzeni powoduje, że obowiązuje prawo zachowania momentu pędu? Opisz tę własność.
3. Tancerka wykonuje piruet. Gdy ma ręce rozłożone, ma moment bezwładności I , natomiast gdy ma ręce blisko ciała, jej moment bezwładności wynosi I' . Stosunek momentów bezwładności $\frac{I}{I'} = \frac{5}{3}$. Ile wynosi stosunek prędkości kątowych tancerki $\frac{\omega}{\omega'}$?

4.8 Analogia między wielkościami ruchu obrotowego a wielkościami ruchu postępowego

Na zakończenie podsumujemy wiadomości, znajdując analogie między wielkościami mechaniki ruchu obrotowego bryły sztywnej a wielkościami mechaniki punktu materialnego – zob. tabela *Rysunek 4.39: Podstawowe wzory ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej* na stronie 204. Widzimy, że wzory dla ruchu obrotowego bryły sztywnej można otrzymać przez proste podstawienie odpowiednich wielkości do wzorów charakteryzujących ruch postępowy. Na przykład, jeżeli zastąpimy masę m momentem bezwładności I , a prędkość liniową v – prędkością kątową ω , to ze wzoru na energię kinetyczną punktu materialnego

$$(\text{wzór 431}) E_k = \frac{mv^2}{2}$$

otrzymujemy wzór na energię ruchu obrotowego bryły

$$(\text{wzór 432}) E_k = \frac{I\omega^2}{2}$$

Mechanika punktu materialnego	Mechanika ruchu obrotowego bryły sztywnej
Przesunięcie Δs	Kąt obrotu $\Delta\alpha$
Prędkość $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Prędkość kątowa $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$
Przyspieszenie $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	Przyspieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
Masa m	Moment bezwładności $I = \sum m_i r_i^2$
Pęd $\vec{p} = m\vec{v}$	Moment pędu $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Siła \vec{F}	Moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Podstawowe prawo dynamiki $\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$	Podstawowe prawo dynamiki $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$
Energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Energia kinetyczna $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Prace elementarna $\Delta W = F\Delta s$	Praca elementarna $\Delta W = M\Delta\alpha$

Rysunek 4.39: Podstawowe wzory ruchu postępowego i obrotowego bryły sztywnej

Pytania i problemy

- Opisz analogię między ruchem postępowym a ruchem obrotowym ciała.
- Wykonując doświadczenie z rozdz. 1.13 *Doświadczenie „Akceleracja”* na stronie 61, wyznaczyliśmy przyspieszenie kulki toczącej się po równi pochyłej. Nie interesowało nas, dlaczego kulka doznaje takiego, a nie innego przyspieszenia. Obecnie, znając równania ruchu kulki (jako bryły sztywnej), oblicz jej przyspieszenie. Sprawdź, czy różnica między wartością obliczoną a wartością wyznaczoną eksperymentalnie mieści się w granicach niepewności pomiarowej.

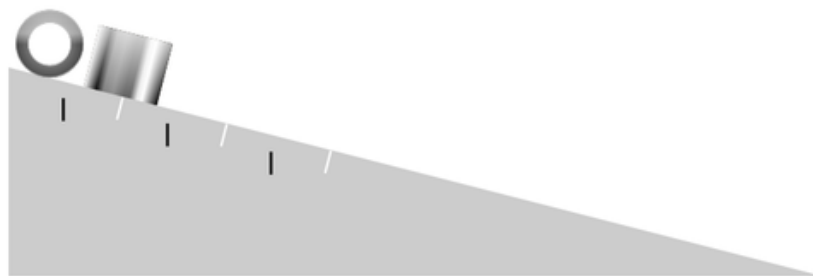
Doświadczenie „Akceleracja BIS”

Wykonując to doświadczenie, przekonamy się, że na równi pochyłej obracające się ciało stacza się wolniej niż ciało ślizgające się po niej. Wyznamy wartość przyspieszenia obręczy staczającej się po równi pochyłej, oraz ślizgającego się klocka. Wykorzystamy tu nabyte wcześniej umiejętności opracowania wyników pomiarów i sposób przekształcenia krzywej na wykresie w linię prostą (patrz rozdz. 1.13 Doświadczenie „Akceleracja” on page 61).

Doświadczenie wykonujemy w następujący sposób:

Ustawiamy na stole równię pochyłą (o długości ok. 1 m) o niewielkim kącie nachylenia do poziomu (*Figure 4.40: Ilustracja doświadczenia* on page 205). Oznaczamy kredą (lub w inny sposób) jednakowe odcinki drogi, na przykład co $l = 10$ cm.

Będziemy badać ruch dwóch ciał: klocka i obręczy (doświadczenie można poszerzyć stosując inne ciała – kula, walec).



Równia pochyła służąca do pomiarów czasów poruszających się ciał

Figure 4.40: Ilustracja doświadczenia

Za pomocą stopera mierzymy czas ruchu obręczy i klocka na coraz dłuższych odcinkach drogi. Mierzymy czas t_1 na drodze $s_1 = l$, t_2 na drodze $s_2 = 2l$, ..., $s_{10} = 10l$. Ciała puszczone za każdym razem z wierzchołka równi. Każdy pomiar powtarzamy trzykrotnie, aby łącznie otrzymać trzy serie pomiarów.

Wpisujemy wyniki pomiarów czasu do odpowiednich rubryk tabelki pomiarów znajdującej się w *sprawozdaniu z doświadczenia*.

Droga s (m)	Czas t (s)			t_{sr} (s)	t^2 (s ²)
	1	2	3		

Figure 4.41: Tabela pomiarów

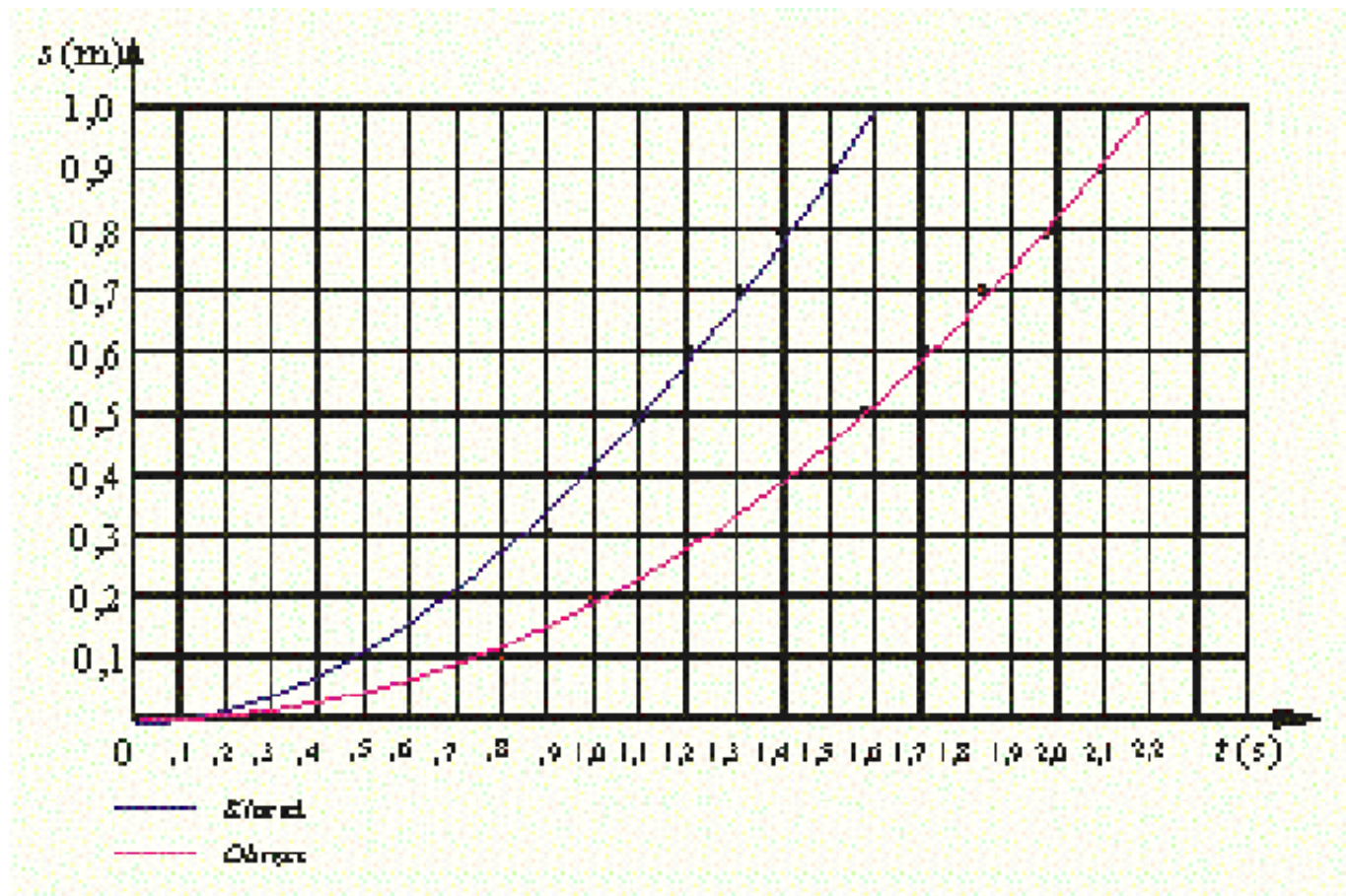
Dla każdej wartości drogi obliczamy średni czas ruchu ciała i wpisujemy go do rubryki t_{sr} . Dzięki temu uzyskujemy dokładniejsze wartości czasów (jak sądzisz – dlaczego?). Obliczamy wartości kwadratów czasów średnich i wpisujemy je w ostatniej rubryce tabelki.

Sporządzamy wykresy zależności drogi od czasu dla wartości uzyskanych podczas pomiaru (krzywe dla obu ciał wykonujemy na wspólnym wykresie). Na osi rzędnych odkładamy drogę s w metrach, a na osi odciętych czas w sekundach. Pamiętajmy o doborze właściwej skali na osiach, aby wykresy były czytelne. Nanosimy punkty doświadczalne i wykreślamy krzywe, prowadząc je między punktami doświadczalnymi (nie należy kreślić linii łamanej od punktu do punktu).

Sprawdzamy, czy otrzymane krzywe przypominają parabole. Teoretyczny wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym (wzór (wzór 24 on page 20)) jest, jak wiemy, kwadratową funkcją czasu, czyli na wykresie przedstawia się jako parabola.

Jeżeli wykreślone krzywe (*Figure 4.42: Wykres zależności drogi od czasu* on page 206) przypominają parabole, to znaczy, że ruch tych ciał jest jednostajnie przyspieszony zgodnie ze wzorem teoretycznym (wzór 433 $s = \frac{at^2}{2}$ on page 206). Jeżeli otrzymaliśmy taki wynik, możemy się cieszyć, jednakże możemy odczuwać pewien niedosyt, gdyż uzyskaliśmy tylko jakościowe („na oko”) potwierdzenie teorii.

Zapisujemy wnioski, jakie wynikają z kształtu otrzymanych krzywych. Odpowiadamy na pytania: Co świadczy o tym, że mamy do czynienia w obu przypadkach z ruchem jednostajnie przyspieszonym? Czy na podstawie tych wyników można wyznaczyć przyspieszenie (liniowe) klocka a_0 i obręczy a_{obr} ?

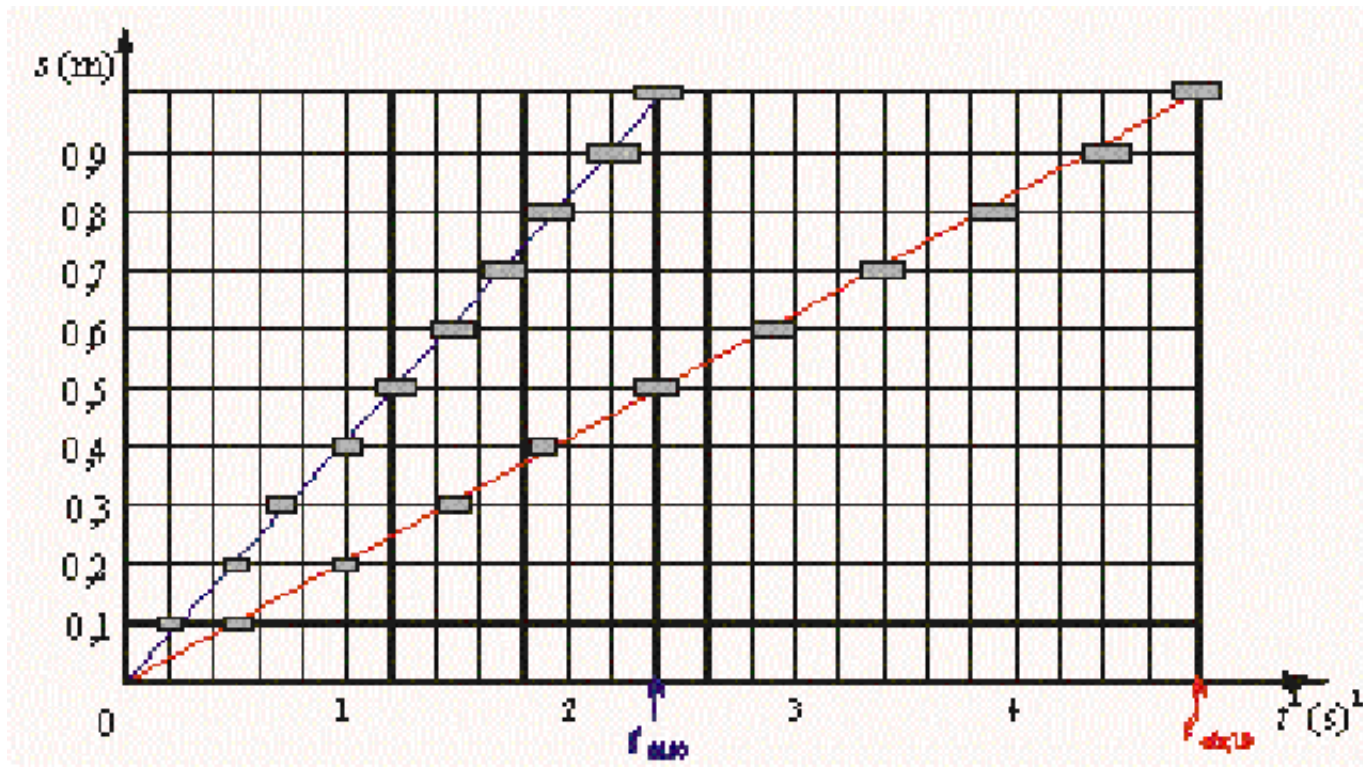


Doświadczalny wykres zależności drogi od czasu dla ciał poruszających się po równi pochyłej

Figure 4.42: Wykres zależności drogi od czasu

Spróbujmy znaleźć potwierdzenie kształtu parabolicznego krzywych - bardziej obiektywne i dokładniejsze. Zastosujemy zatem procedurę „prostowania” paraboli opisaną w 1.13 Doświadczenie „Akceleracja” on page 61. Jeżeli na osi rzędnych będziemy odkładać drogę s , a na osi odciętych, zamiast wartości czasu t , wartości kwadratów czasu t^2 , to powinniśmy otrzymać prostą. Wtedy w równaniu (wzór 433 $s = \frac{at^2}{2}$ on page 206) jako zmienna

niezależną traktujemy nie t , ale t^2 , natomiast s jako zmienną zależną. Otrzymujemy w ten sposób zależność liniową między s a t^2 :



Doświadczalny wykres zależności drogi od kwadratu czasu dla klocka i obręczy staczającej się po równi pochylej

Figure 4.43: Wykres zależności drogi od kwadratu czasu

Teraz wyznaczmy przyspieszenia a . Zgodnie ze wzorem (*wzór 434* $s = \frac{a}{2} (t^2) \equiv (y = \frac{a}{2} x)$ on page 207), tangens kąta nachylenia prostej do osi t^2 (współczynnik kierunkowy prostej) jest liczbowo równy połowie przyspieszenia:

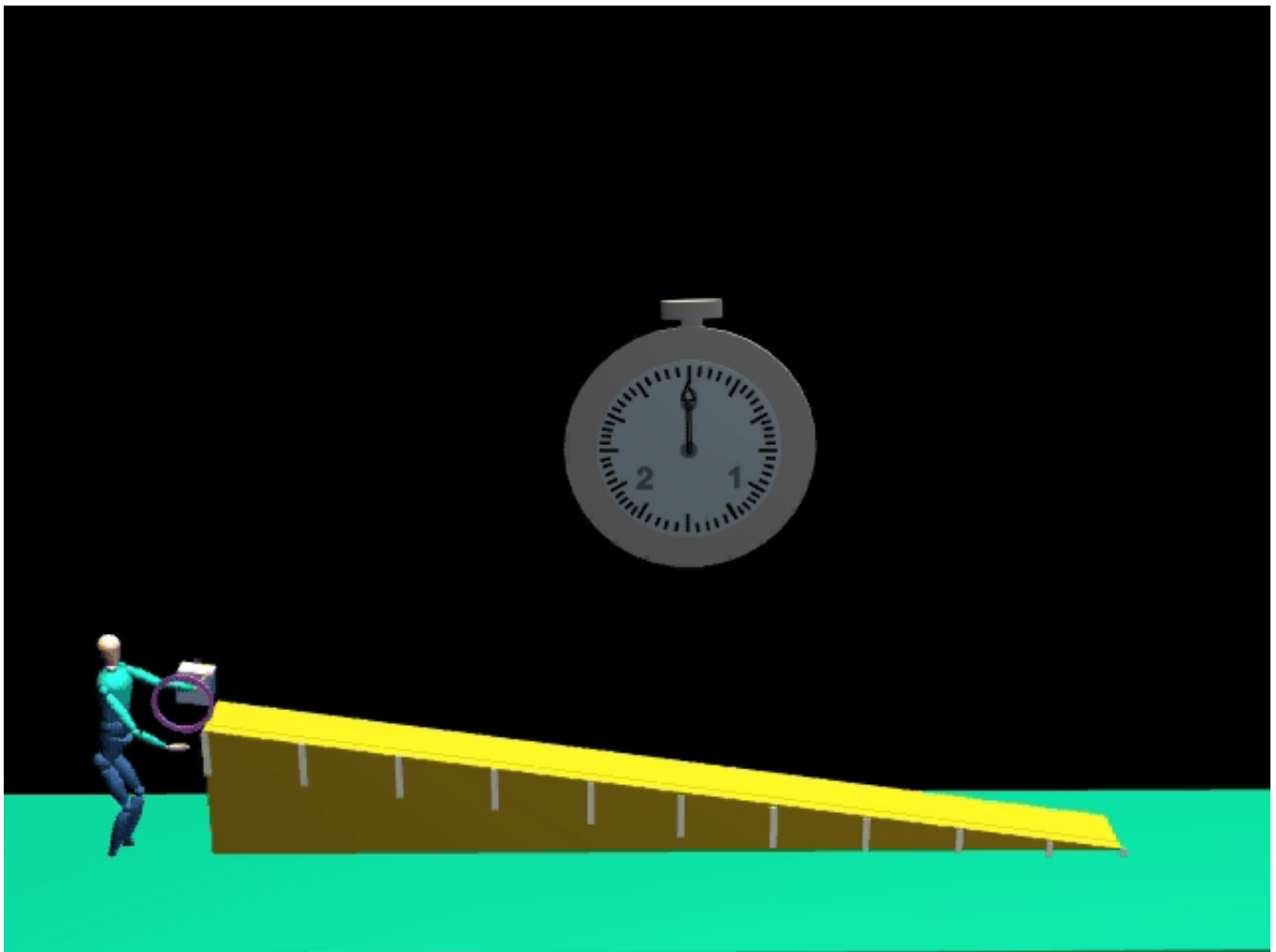
Aby obliczyć wartość tangensa, możemy wziąć z wykresu rzędną i odciętą dowolnego punktu na prostej; najlepiej obrać punkt na końcu prostej. Liczbowo

Dla klocka (prosta niebieska – *Figure 4.43: Wykres zależności drogi od kwadratu czasu* on page 207)

$$\operatorname{tg} \alpha_{kl} = s_{10} / t_{kl,10}$$

Dla obręczy (prosta czerwona – *Figure 4.43: Wykres zależności drogi od kwadratu czasu* on page 207)

$$\operatorname{tg} \alpha_{obr} = s_{10} / t_{obr,10}$$



Wirtualne wykonanie doświadczenia akceleracja bis

Figure 4.44: Animacja

1. Uruchom animację kliknięciem myszy.
Stoper uruchamia się sam w momencie, gdy chłopiec upuszcza ciała — klocek i obręcz na równię pochyłą.
2. Obserwuj ruch klocka i obręczy i zatrzymuj kolejno animację w momentach, gdy ciała mijają kolejne znaczniki.
3. Zanotuj kolejne odczyty stopera i wpisz do tabelki pomiarów w sprawozdaniu.

przyjmij, że cała droga kulki wzdłuż równi wynosi $s = 1$ m. Moment zastopowania animacji zależy od czynników przypadkowych (m.in. - twój refleks). Dlatego, tak jak w „realu” pomiary są obciążone niepewnościami, które powinieneś ocenić i wykorzystać w tzw. „Dyskusji błędów”. Kieruj się wskazówkami zawartymi w ww. opisie doświadczenia realnego.



Note:

Dyskusja niepewności pomiarowych

Liczbowym wynikiem naszego doświadczenia ma być przyspieszenie klocka i obręczy. Wynik pomiaru jest wtedy pełny, gdy podajemy niepewność, z jaką go wyznaczono. Nasz końcowy wynik nie powstaje przez bezpośredni pomiar, lecz przez złożenie pomiarów bezpośrednich. Wobec tego jest on obciążony niepewnościami pomiarów. Zatem, podobnie jak to czyniliśmy w przypadku poprzednich doświadczeń, oceńmy najpierw niepewności pomiarów bezpośrednich.

1. Niepewności pomiarów bezpośrednich

Mamy dwie wielkości mierzone bezpośrednio – drogę s i czas t . Przy ocenie niepewności pomiaru drogi s należy wziąć pod uwagę to, że kreski, którymi zaznaczaliśmy odcinki drogi, mają pewną grubość (kreda),

i że stosowaliśmy podziałkę centymetrową, która ma ograniczoną dokładność. Przyjmijmy więc, że maksymalna niepewność, z jaką mierzyliśmy drogę, wynosi

Czas mierzyliśmy za pomocą stopera, którego dokładność jest wyznaczona przez wartość najmniejszej działki (w podanym przykładzie 0,1 s). Powinniśmy dodać jeszcze czas reakcji przy włączaniu i wyłączaniu stopera w przybliżeniu 0,1 s. Przyjmijmy więc, że maksymalna niepewność pomiaru czasu wynosi

2. Niepewność pomiaru wielkości złożonej

Przekształcając wzór (wzór 433 $s = \frac{at^2}{2}$ on page 206), otrzymujemy

więc przyspieszenie a , będące wynikiem końcowym pomiaru, ma postać iloczynową. Zatem możemy stosować taką samą regułę jak np. w przypadku doświadczenia „Galileusz”. Niepewność względna wyniku końcowego jest sumą niepewności względnych pomiarów bezpośrednich. Niepewności pomiarowe mogą być dodatnie lub ujemne i mogą redukować się nawzajem, jednak przy ocenie niepewności wyniku końcowego uwzględnimy sytuację najbardziej niekorzystną, kiedy niepewności się sumują. Dlatego sumujemy wszystkie niepewności ze znakiem plus, czyli dodajemy ich wartości bezwzględne:

Niepewność względną $\frac{\Delta t}{t}$ wzięliśmy dwukrotnie, ponieważ czas t występuje we wzorze (wzór 439 $a = \frac{2s}{t^2}$ on page 209) na przyspieszenie w drugiej potęgze ($t^2 = t \cdot t$).

Teraz możemy przystąpić do obliczeń szczegółowych. Obliczymy przyspieszenie i niepewność naszego wyniku końcowego. Przede wszystkim poprowadzimy dokładniej linię prostą na wykresie zależności s od t^2 . W tym celu przedstawimy graficznie niepewności Δs i $\Delta(t^2)$. Niepewność Δs oceniliśmy jako równą $\pm 0,5$ cm, natomiast niepewność kwadratu czasu $\Delta(t^2)$ musimy potraktować jako niepewność pomiaru Złożonego $\frac{|\Delta(t^2)|}{t^2} = 2 \frac{|\Delta t|}{t}$, więc

Przyjeliśmy, że $t = \pm 0,3$ s, więc

Dla każdego czasu t obliczamy niepewność $|\Delta(t^2)|$. Obliczone wartości oraz wartości pozostałych niepewności wpisujemy do tabelki niepewności pomiarów.

Każdy punkt doświadczalny na wykresie otoczmy tak zwanym prostokątem niepewności pomiarowych (Figure 4.42: Wykres zależności drogi od czasu on page 206) informującym nas o możliwej pomyłce przy ustalaniu położenia punktu. Prostokąt niepewności ma podstawę równą $2|t^2|$ i wysokość $2|s| = 1$ cm.

Teraz możemy śmiało poprowadzić proste w pobliżu punktów doświadczalnych; nie popełnimy pomyłki, jeżeli proste będą przechodzić przez większość (powyżej 70%) prostokątów niepewności, jak na wykresie – Figure 4.42: Wykres zależności drogi od czasu on page 206. Oto sposób na możliwie najdokładniejsze poprowadzenie linii na wykresie doświadczalnym.

Teraz wyznaczymy dokładne wartości przyspieszeń klocka i obręczy, według wcześniej podanego opisu.

Otrzymaliśmy wartości przyspieszeń. Jednakże nie jest to jeszcze pełny wynik końcowy naszego doświadczenia, ponieważ nie podaliśmy niepewności wyznaczonych wartości przyspieszeń Δa . Aby je wyznaczyć, skorzystamy ze wzoru (wzór 439 $a = \frac{2s}{t^2}$ on page 209) na niepewność względną (oznaczymy ją przez ϵ). Otrzymamy

Niepewność bezwzględna wynosi $a = \epsilon a$.



Note:

Wnioski końcowe

Powinieneś odpowiedzieć sobie na pytanie: dlaczego obręcz uzyskuje mniejsze przyspieszenie, niż klocek?

Wyjaśnienie tego zagadnienia znajdziesz w przykładzie 8, (rozdz. [2.6 Zasada zachowania pędu](#) on page 105). Rozpatrywane tam zagadnienie dotyczy kulki staczającej się po równi pochyłej. Tu mamy do czynienia z ruchem obręczy, ale wzory są podobne.

Moment bezwładności bryły obrotowej można zapisać wzorem

Dla obręczy $k = 1$, dla kuli $k = 2/5$, dla walca $k = 1/2$.

Przeprowadzając rozumowanie podobne do tego z przykładu 8, otrzymujemy, że przyspieszenie bryły staczającej się po równi pochyłej wynosi:

Zaś dla klocka, jak wiemy

Zatem

Sprawdzamy, czy otrzymane doświadczalnie wartości przyspieszenia klocka a i obręczy a_{obr} spełniają relację (wzór [447](#) $a_b = \frac{1}{k+1}a$ on page 210), czyli czy $a_{obr} = 1/2 a$ (bo $k_{obr} = 1/2$).

Rozdział

5

Ciążenie powszechne (grawitacja)

Podrozdziały:

- [5.1 Prawo powszechnego ciążenia](#)
- [5.2 Laboratoryjne potwierdzenie prawa grawitacji](#)
- [5.3 Grawitacja wewnątrz planety - temat nadobowięzkowy](#)
- [5.4 Reguła Titiusa-Bodego - temat nadobowięzkowy](#)
- [5.5 Prawa Keplera ruchu planet](#)
- [5.6 Pole grawitacyjne](#)
- [5.7 Praca w polu grawitacyjnym](#)
- [5.8 Energia potencjalna w polu grawitacyjnym](#)
- [5.9 Prędkości kosmiczne](#)
- [5.D1 Dodatek: Wyprowadzenie wzoru na pracę w polu grawitacyjnym - temat nadobowięzkowy](#)
- [5.D2 Dodatek: Energia potencjalna w polu grawitacyjnym - temat nadobowięzkowy](#)

Rysunek 5.1: Wirtualny nauczyciel

Kopernik w swoim dziele pt. *O obrotach ciał niebieskich* pisał:
"Najwłaściwiej jest postępować za przezorną przyrodą, która najmocniej się strzeżła tworzyć coś zbytecznego lub nieużytecznego, a często jedną rzecz obdarzyła wielorakimi skutkami". Ta "jedna rzecz" to – jak się okazało – siła powszechnego ciążenia; jedyna przyczyna ruchu wszystkich ciał kosmicznych, siła naprawdę obdarzona "wielorakimi skutkami".

5.1 Prawo powszechnego ciężenia

Genialnie proste wyjaśnienie prawa powszechnego ciężenia podał Izaak Newton w 1686 roku. Stwierdził, że ta sama siła, która przyciąga przedmioty znajdujące się w pobliżu Ziemi, musi przyciągać również Księżyc krążący dookoła Ziemi. Newton w swoich rozważaniach poszedł dalej. Stwierdził, że skoro Ziemia krąży wokół Słońca, to znaczy, że Słońce przyciąga Ziemię siłą o tym samym charakterze. To samo dotyczy również i innych planet krążących wokół Słońca. W myśl trzeciej zasady dynamiki, każda z planet musi wzajemnie przyciągać Słońce z taką samą siłą, lecz przeciwnie zwróconą. Ale masa Słońca jest bez porównania wielokrotnie większa od masy jakiegokolwiek z planet, dlatego skutek wzajemnego przyciągania odbija się prawie wyłącznie na planecie: planeta i Słońce krążą wokół wspólnego środka masy, który znajduje się bardzo blisko środka Słońca.

Oto koncepcja Newtona: **wszystkie ciała przyciągają się wzajemnie**. Siła przyciągania wzajemnego ciał nazywa się *siłą powszechnego ciężenia* albo *siłą grawitacji*. Poniżej przedstawiamy skrótowo rozumowanie Newtona.

Newton postawił sobie następane pytanie: Od jakich czynników zależy siła grawitacji? Ziemia przyciąga ciała znajdujące się w jej pobliżu, takie jak np. piłkę oraz odległe od niej – np. Księżyc. Siłę z jaką Ziemia przyciąga piłkę można wyrazić za pomocą przyspieszenia ziemskiego g , wzorem:

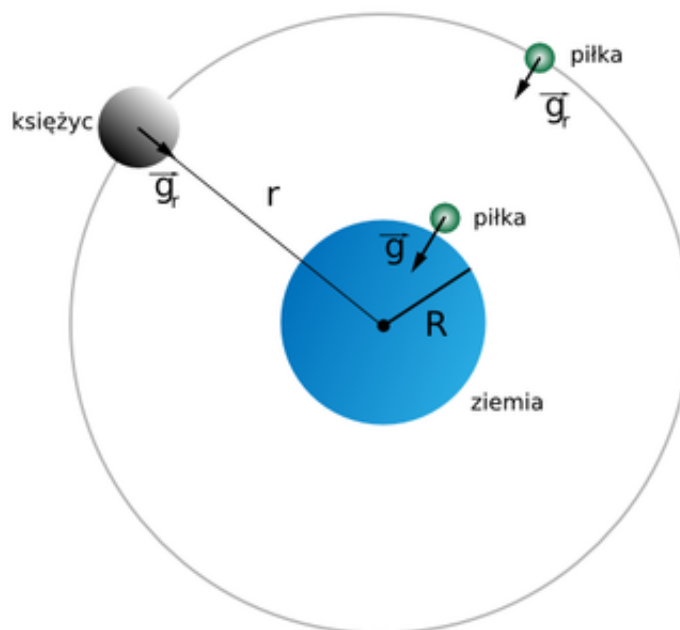
$$(\text{wzór 448}) F = mg$$

gdzie m jest masą piłki, a g jest przyspieszeniem spadającej piłki w pobliżu Ziemi.

Wiadomo, że Ziemia nadaje wszystkim ciałom jednakowe przyspieszenie g , niezależne od ich masy m ,

$$(\text{wzór 449}) g = \frac{F}{m}$$

Tak samo będzie, gdy ciała będą bardziej odległe od Ziemi – ciała te będą miały jednakowe przyspieszenie g_r , - inne (mniejsze) niż g – w pobliżu Ziemi. Gdyby piłka znajdowała się w odległości r takiej samej jak Księżyc od Ziemi, to miałaby przyspieszenie takie samo jakie ma Księżyc (*Rysunek 5.2: Przyspieszenie piłki* na stronie 213), które jest równe przyspieszeniu dośrodkowemu Księżyca w jego ruchu na orbicie kołowej.



Przyspieszenie piłki w pobliżu Ziemi wynosi g , zaś w odległości takiej samej, jak odległość Księżyca od Ziemi, przyspieszenie piłki jest dużo mniejsze; jest ono takie samo, jak przyspieszenie dośrodkowe Księżyca, i wynosi g_r .

Rysunek 5.2: Przyspieszenie piłki

Przyspieszenie dośrodkowe Księżyca zgodnie ze wzorem (wzór 143 na stronie 75) wynosi:

$$(\text{wzór 450}) \quad a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = g_r$$

Mamy następujące dane:

- okres obiegu Księżyca wokół Ziemi $T = 2,36 \cdot 10^6$ s (jest on nieco większy od 27 dni, dokładniej: ma 27,3 dnia),
- orbita Księżyca jest prawie kołowa i jej promień jest równy: $r = 3,845 \cdot 10^8$ m,
- promień Ziemi wynosi $R = 6,37 \cdot 10^6$ m. Zatem promień orbity Księżyca jest prawie dokładnie 60 razy większy od promienia Ziemi.

Podstawiając te dane, otrzymamy $g_r = 2,73 \cdot 10^{-3}$ m/s². Wiemy, że przyspieszenie grawitacyjne dowolnego ciała przy powierzchni Ziemi wynosi $g = 9,81$ m/s². Zatem takie przyspieszenie uzyskują ciała w odległości od środka Ziemi równej jednemu promieniowi R . Natomiast w odległości 60 promieni Ziemi, czyli w odległości równej promieniowi orbity Księżyca, przyspieszenie wynosi tylko $g_r = 2,73 \cdot 10^{-3}$ m/s². Stosunek wartości tych przyspieszeń wynosi

$$(\text{wzór 451}) \quad \frac{2,73 \cdot 10^{-3}}{9,81} = \frac{1}{3\,600}$$

Zatem, jeżeli odległość rośnie 60 razy, to przyspieszenie maleje $3\,600 = 60^2$ razy.

Newton na podstawie tego właśnie obliczenia stwierdził, że przyspieszenie grawitacyjne jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, czyli

$$(\text{wzór 452}) \quad a_r = \frac{F}{m} \sim \frac{1}{r^2}$$

Przekształcając to wyrażenie, otrzymamy

$$(\text{wzór 453}) \quad F \sim \frac{m}{r^2}$$

Zatem siła przyciągania działająca na Księżyc jest proporcjonalna do masy Księżyca. Ale w myśl trzeciej zasady dynamiki, taka sama siła, lecz przeciwnie skierowana działa na Ziemię. Musi być więc proporcjonalna również do masy M Ziemi. Wobec tego

$$(\text{wzór 454}) \quad F \sim \frac{mM}{r^2}$$

Na oznaczenie współczynnika proporcjonalności stosuje się dużą literę G , nazywamy go *stałą grawitacji*. Zatem

$$(\text{wzór 455}) \quad F = G \frac{mM}{r^2}$$

W ten sposób Newton doszedł do wzoru na prawo powszechnego ciężenia. Choć wzór ten został wyprowadzony dla wzajemnego oddziaływania Ziemi i Księżyca, to stosuje się on do dowolnych ciał. Zatem prawo powszechnego ciężenia można wyrazić następująco:

Ⓡ Zamapiętać:

Prawo powszechnego ciężenia

Dwie masy punktowe przyciągają się wzajemnie siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas mM i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu ich wzajemnej odległości r .

$$(\text{wzór 456}) \quad F = G \frac{mM}{r^2}$$

To samo prawo, które tłumaczy spadanie ciał na Ziemię, rządzi ruchem planet i komet w Układzie Słonecznym, jak również ruchem gwiazd w Galaktyce oraz ruchami olbrzymich galaktyk. Prawo grawitacji rządzi więc całą mechaniką nieba.

Przykład 1

Newton musiał podać wartość stałej grawitacji, aby jego prawo było pełne. Do oszacowania stałej G potrzebna mu była gęstość Ziemi. Gęstość jest to stosunek masy do objętości

$$(\text{wzór 457}) \rho = \frac{M}{V}$$

czyli liczbowo jest to masa, jaka jest zawarta w objętości 1 m^3 . Na podstawie znajomości gęstości różnych minerałów występujących na Ziemi przyjął, że gęstość średnia Ziemi wynosi $\rho = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (okazało się później, że oszacowana przez niego gęstość nie różni się więcej niż o 10% od wartości rzeczywistej). Idąc śladem myśli Newtona, oblicz stałą grawitacji, mając dane: oszacowaną wartość gęstości Ziemi, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ oraz promień Ziemi $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Odpowiedź: Siła przyciągania ciała o masie m przez Ziemię, przy jej powierzchni, wynosi $F = mg$. Jest ona równa sile grawitacji wyrażonej wzorem (wzór 455 na stronie 213), zatem

$$(\text{wzór 458}) mg = G \frac{mM}{R^2}$$

Stąd po uproszczeniu masy i po przekształceniu otrzymamy

$$(\text{wzór 459}) G = \frac{gR^2}{M}$$

Masa Ziemi, zgodnie ze wzorem (wzór 457 na stronie 214), wynosi $M = V\rho$. Przyjmując, że Ziemia ma kształt kuli (czyli jej objętość wynosi $V = \frac{4\pi R^3}{3}$) otrzymamy, że masa Ziemi jest równa $M = \frac{4\pi R^3}{3} \rho$. Zatem

$$(\text{wzór 460}) G = \frac{gR^3}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho} = \frac{3g}{4\pi \rho R} = \frac{3 \cdot 9,81}{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^3) \cdot (6,37 \cdot 10^6)} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} = 7,35 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Taką wartość stałej grawitacji otrzymał Newton. Różni się ona od, dzisiaj ogólnie przyjętej wartości

$$(\text{wzór 461}) G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

o około 10%.

Pytania i problemy

1. Podaj, na podstawie jakich obliczeń Newton doszedł do wniosku, że siła grawitacji maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między dwoma ciałami.
2. Podaj wzór i wyraż słowami prawo powszechnego ciężenia.
3. Przedstaw przyspieszenie ziemskie g za pomocą wzoru zawierającego stałą grawitacji G , masę Ziemi M oraz promień Ziemi R .
4. Mając do dyspozycji dane: g – przyspieszenie ziemskie, G – stałą grawitacji oraz R – promień Ziemi, wyprowadź wzór na ρ – średnią gęstość Ziemi. Przyjmij, że Ziemia jest jednorodną kulą.

5.2 Laboratoryjne potwierdzenie prawa grawitacji

Prawo powszechnego ciężenia zostało potwierdzone nie tylko przez obserwacje astronomiczne, ale również w "czterech ścianach" laboratorium. Pomiar H. Cavendisha, Ph. Jolly'ego i innych pozwoliły wyznaczyć stałą grawitacji G z dużą dokładnością. Jaki sens fizyczny ma stała grawitacji? Przyjrzyjmy się wzorowi (wzór 455 na stronie 213):

$$(\text{wzór 462}) F = G \frac{mM}{r^2}$$

jeżeli podstawimy $m = 1 \text{ kg}$, $M = 1 \text{ kg}$ oraz $r = 1 \text{ m}$, to otrzymamy, że liczbowo $F_1 = G$. Czyli stała grawitacji wyraża się liczbowo siłą, z jaką przyciągają się dwa ciała o masie jednego kilograma z odległości jednego metra.

$$(\text{wzór 463}) F_1 = |G|N = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

Jest to niewątpliwie bardzo mała siła, gdyż nigdy na co dzień nie obserwujemy jej działania, nawet gdy mamy do czynienia z wielkimi masami. Na przykład, nikt nie zaobserwował, aby dwa załadowane TIR-y lub dwa wagony kolejowe przyciągały się.

Przykład 2

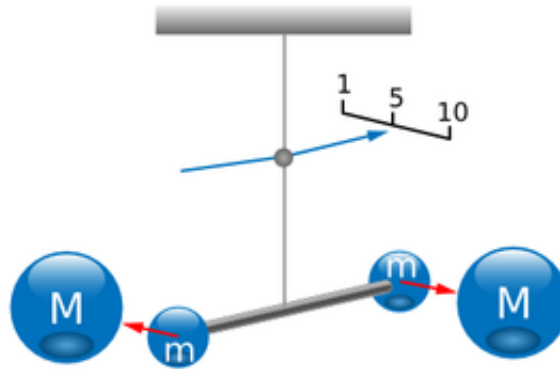
Dwa samochody ciężarowe TIR zaparkowały obok siebie w taki sposób, że ich środki mas znajdują się w odległości $r = 15 \text{ m}$ od siebie. Oblicz, z jaką siłą przyciągają się one, jeżeli wiadomo, że masa każdego z nich wynosi $m = 20 \text{ t} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg}$.

Odpowiedź:

$$(\text{wzór 464}) F = G \frac{m^2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{(2 \cdot 10^4)^2}{15^2} \text{ N} = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

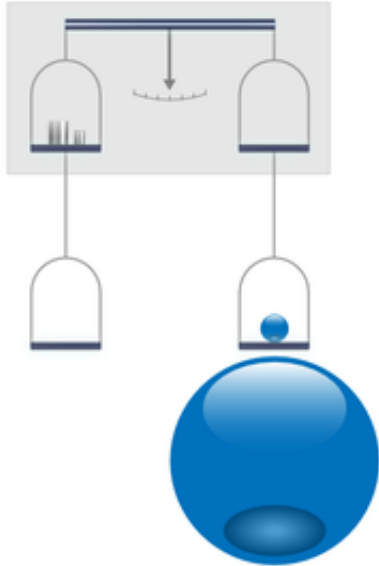
Jest to naprawdę znikomo mała siła.

Widzimy, że pomiar siły grawitacji w warunkach laboratoryjnych wymagał bardzo dużej precyzji. Henry Cavendish przeprowadził takie precyzyjne doświadczenie w 1798 roku. Pomiar przeprowadził za pomocą tzw. "wagi skręceń". Na nici kwarcowej zawiesił pręt z dwiema małymi kulkami na jego końcach. Do kulek tych zbliżał z obu stron dwie duże kule ołowiane (*Rysunek 5.3: Pomiar siły grawitacji za pomocą „wagi skręceń” Cavendisha* na stronie 216). Siły przyciągania skręcały pręt i nić kwarcową o pewien kąt. Kąt skręcenia, mierzył za pomocą promienia odbitego od lusterka zawieszonego na nici kwarcowej. Znając wartość tego kąta, Cavendish mógł obliczyć siły przyciągania się kul. Pomiar wymagał wielkiej ostrożności, dlatego swoją „wagę” umieszczał w zamkniętej skrzyni dla uniknięcia prądów powietrza, zaś odchylenie nici kwarcowej obserwował za pomocą lunety z innego pomieszczenia.



Rysunek 5.3: Pomiar siły grawitacji za pomocą „wagi skręceń” Cavendisha

Pod koniec XIX wieku, w roku 1881, Philipp von Jolly opracował dokładniejszą metodę, stosując do pomiaru siły grawitacji czułą wagę (*Rysunek 5.4: Pomiar siły grawitacji metodą Jolly'ego* na stronie 217).



Rysunek 5.4: Pomiar siły grawitacji metodą Jolly'ego

Pod jej szalkami umieścił jeszcze jedną parę szalek. Na jednej z dolnych szalek umieścił szklaną bańkę napelnioną rtęcią ważącą 5 kg i zrównoważył ją ustawiając odpowiedni odważnik na lewej szalce górnej. Bezpośrednio pod bańką z rtęcią umieścił wielką kulę ołowianą, zbudowaną z oddzielnych sztab, ważącą 5,8 t. Waga wychyliła się, gdyż kula przyciągnęła bańkę z rtęcią. Okazało się, że dla zrównoważenia wagi trzeba było położyć na przeciwległej górnej szalce odważnik o masie zaledwie 0,566 mg. Zatem siła, z jaką kula przyciągnęła bańkę, wynosiła $F = 5,55 \text{ mN}$.

Przekształcając odpowiednio wzór (wzór 455 na stronie 213) i podstawiając dane doświadczalne, otrzymano wartość stałej grawitacji

$$\text{(wzór 465) } G = 6,66 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Współczesne najdokładniejsze pomiary dają następującą wartość stałej grawitacji:

$$\text{(wzór 466) } G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Zwróćmy uwagę, że niepewność pomiarowa stałej G wynosi ok. 0,05%. Jednakże warto wiedzieć, że inne stałe fizyczne są wyznaczane z dużo większą dokładnością.

Ważenie Słońca

Znając prawo grawitacji i stałą grawitacji, możemy wyznaczyć masę Słońca, Ziemi i innych ciał naszego układu planetarnego nie opuszczając domu, w którym się znajdujemy.

W celu wyznaczenia masy Słońca należy najpierw zauważyć, że siła dośrodkowa utrzymująca Ziemię na orbicie wokół Słońca, to siła przyciągania Ziemi do Słońca:

$$(\text{wzór 467}) F = G \frac{mM}{r^2}$$

gdzie m – masa Ziemi, M – masa Słońca, r – odległość Ziemi do Słońca równa promieniowi orbity Ziemi.

Zastosujemy wzór (wzór 234 na stronie 119) na siłę dośrodkową w ruchu po okręgu (przyjmujemy, że kształt orbity Ziemi nie odbiega znacznie od okręgu)

$$(\text{wzór 468}) F_r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

gdzie T - okres obiegu Ziemi (czyli rok).

Jak już wspomniano $F = F_r$, zatem przyrównamy wzory (wzór 467 na stronie 218) i (wzór 468 na stronie 218):

$$(\text{wzór 469}) G \frac{mM}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

Po przekształceniu otrzymamy wzór na masę Słońca

$$(\text{wzór 470}) M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

Wszystkie wartości wielkości znajdujących się po prawej stronie tego wzoru można wyznaczyć doświadczalnie, będąc na Ziemi (bez konieczności wędrowania w Kosmos).

A więc: promień orbity Ziemi wynosi $r = 1,496 \cdot 10^{11}$ m, okres obiegu (czyli rok) $T_Z = 365,25$ dób (jedna doba słoneczna wynosi 24 h = 86 400 s) i stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³/(kg · s²).

Wstawiając te dane do wzoru (wzór 470 na stronie 218) wyznaczmy masę Słońca:

$$(\text{wzór 471}) M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT_Z^2} = \frac{4\pi^2 (1,496 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (365,25 \cdot 86400)^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Porównując masę Słońca z masą Ziemi $m = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, nietrudno obliczyć, że Słońce ma masę ok. 335000 razy większą od masy Ziemi.

Przykład 3

Znając prawo grawitacji (wzór 455 na stronie 213), obliczmy jak wysoko nad Ziemią należy umieścić stacjonarnego satelitę telewizyjnego, oraz promień jego orbity r_s , po której musi poruszać się satelita stacjonarny.

Odpowiedź: Prędkość kątowna ω satelity powinna być taka sama, jak prędkość kątowna Ziemi w jej ruchu wirowym dookoła swojej osi. Zatem przyspieszenie dośrodkowe satelity, zgodnie z wzorem (wzór 141 na stronie 74), wynosi $a = \omega^2 r_s$. Wartość przyspieszenia satelity jest równa wartości przyspieszenia ziemskiego g_s w miejscu gdzie on aktualnie przebywa, $a = g_s$. Jest ono odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości od środka Ziemi. Siła przyciągania ciała o masie m na powierzchni Ziemi wynosi: $F = mg = \frac{GmM}{R^2}$. Siła w odległości r_s wynosi: $F_s = mg_s = \frac{GmM}{r_s^2}$.

Dzieląc stronami te dwa równania, otrzymamy $g_s = g \frac{R^2}{r_s^2}$. Zatem przyspieszenie satelity:

$$(\text{wzór 472}) g_s = g \frac{R^2}{r_s^2}$$

Stąd

$$(\text{wzór 473}) r_s^3 = \frac{gR^2}{\omega^2}$$

Korzystając ze wzoru $\omega = \frac{2\pi}{T}$ otrzymamy

$$(\text{wzór 474}) r_s^3 = \frac{gR^2T^2}{4\pi^2}$$

Podstawiając dane (promień Ziemi $R = 6,387 \cdot 10^6$ m, okres obrotu Ziemi $T = 86\,164$ s = doba gwiazdowa) otrzymujemy, że $r_s = 42,182 \cdot 10^6$ m. Satelita znajduje się nad powierzchnią Ziemi na wysokości $h = r_s - R$, która wynosi:

$$(\text{wzór 475}) h = 35\,797 \text{ km}$$



Załadowywany na pokład rosyjskiego samolotu transportowego Antonow AN-124 na lotnisku Moffett Field w Kalifornii (Stany Zjednoczone). Źródło: Loral

Rysunek 5.5: Satelita iPSTAR-1



Rysunek 5.6: Ilustracja przedstawia komercyjnego satelitę telekomunikacyjnego iPSTAR-1.
Źródło: Loral

Pytania i problemy

1. Korzystając z prawa grawitacji, wyraż sens fizyczny stałej grawitacji.
2. Dlaczego nie obserwuje się, aby dwa ciała, takie jak na przykład dwa autobusy, przyciągały się wzajemnie siłą grawitacji? Przecież siła wzajemnego przyciągania dotyczy absolutnie wszystkich ciał. Odpowiedź uzasadnij liczbowo.
3. Narysuj schemat wagi skręceń Cavendisha.
4. Dlaczego Cavendish, mierząc stałą grawitacji na swojej wadze skręceń, wykonywał pomiary z pewnej odległości, z sąsiedniego pokoju?
5. Dlaczego Jolly dla zrównoważenia swojej wagi kładł ciężarki na górnej przeciwległej szalce, a nie na dolnej?

5.3 Grawitacja wewnątrz planety - temat nadobowiązkowy

Wzór na siłę grawitacji wewnątrz planety

Jak wiadomo, wzór na siłę grawitacji

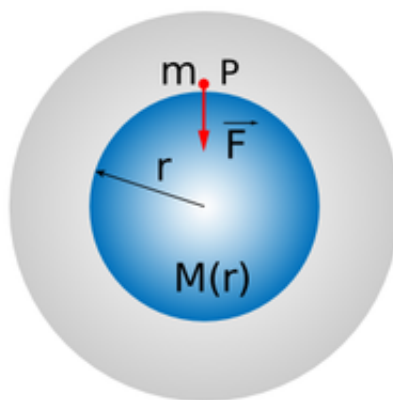
$$(\text{wzór 476}) F = G \frac{mM}{r^2}$$

pozwała obliczyć siłę przyciągania ciała o masie m przez inne ciało kuliste o masie M w przypadku, gdy ciało m znajduje się **na zewnątrz** ciała M , np. na zewnątrz Ziemi. Natomiast, jeżeli małe ciało m znajduje się **wewnątrz**

dużej jednorodnej kuli o masie M w odległości r od jej środka, to wypadkowa siła grawitacji działająca na ciało m jest skierowana do środka kuli i wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 477}) F_w = G \frac{mM(r)}{r^2}$$

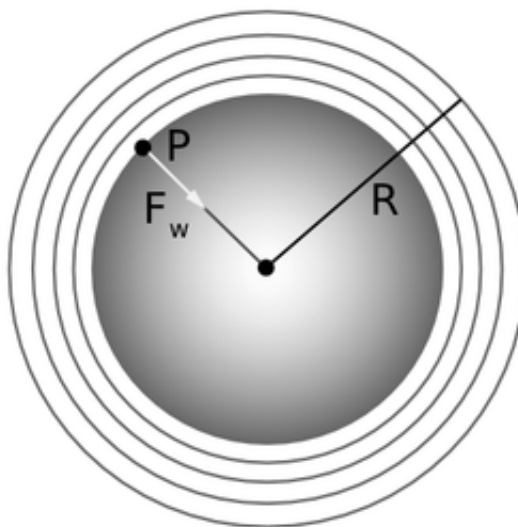
gdzie $M(r)$ oznacza masę rdzenia kuli o promieniu r .



Rysunek 5.7: Wypadkowa siła grawitacji F działająca na ciało m wewnątrz kulistej planety jest skierowana do środka kuli

Wyprowadzimy wzór (*wzór 477* na stronie 221) na siłę grawitacji działającą na ciało m wewnątrz kuli o gęstości ρ w zależności od odległości od środka kuli r w zakresie $0 < r < R$.

Podzielimy w myśli kulę na koncentryczne cienkie warstwy. Umieścimy ciało próbne o masie m w punkcie P (*Rysunek 5.8: a) Podział zewnętrznej warstwy na koncentryczne cienkie warstwy, b) „stożki” wycinające przeciwległe fragmenty pól S_1 i S_2* na stronie 222a). Ciało w punkcie P wewnątrz kuli o promieniu R jest przyciągane do środka kuli przez jej część kulistą o promieniu r . Pokażemy teraz, że wypadkowa siła grawitacji pochodząca od skrajnych wewnętrznych warstw, usytuowanych na zewnątrz punktu P , wynosi zero.



Rysunek 5.8: a) Podział zewnętrznej warstwy na koncentryczne cienkie warstwy, b) „stożki” wycinające przeciwległe fragmenty pól S_1 i S_2

Najpierw rozważymy siłę pochodzącą od **jednej** tak usytuowanej warstwy (*Rysunek 5.8: a) Podział zewnętrznej warstwy na koncentryczne cienkie warstwy, b) „stożki” wycinające przeciwległe fragmenty pól S_1 i S_2* na stronie 222b). Na ciało P będą działać siły przyciągania pochodzące od wszystkich fragmentów tej warstwy. Rozważmy siłę F_1 pochodzącą od jednego małego fragmentu o powierzchni S_1 . Siła ta jest proporcjonalna do masy tego

fragmentu, a więc i do pola jego powierzchni, i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r_1 , tzn. $F_1 \sim \frac{S_1}{r_1^2}$.

Jeżeli z punktu P poprowadzimy stożek do fragmentu warstwy o polu S_1 , to po drugiej stronie w odległości r_2 powstanie stożek wycinający z warstwy fragment o polu S_2 . Siła pochodząca od tego fragmentu będzie skierowana przeciwnie do siły F_1 i wyrazi się podobną zależnością $F_2 \sim \frac{S_2}{r_2^2}$.

Stosunek tych sił będzie równy $\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$. Ponieważ te dwa stożki (o wspólnym wierzchołku w punkcie P) są do siebie podobne, więc łatwo można wykazać, że

$$(\text{ wzór 478 }) \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Zatem

$$(\text{ wzór 479 }) \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1$$

Widzimy więc, że siły pochodzące od fragmentów warstwy o polach S_1 i S_2 znoszą się wzajemnie. Każdy element warstwy ma swój odpowiednik „na antypodach”, a ponieważ można w ten sposób podzielić całą powierzchnię

warstwy, więc wypadkowa sił grawitacji części działających na ciało próbne umieszczone w dowolnym punkcie wewnątrz niej będzie równa zero.

A co z pozostałymi warstwami?

Łatwo można wykazać w podobny sposób, że od każdej z pozostałych warstw wypadkowa siła grawitacji jest równa zero. Stąd wynik: tylko część wewnętrzna kuli o promieniu r przyciąga ciało próbne, czyli wewnątrz Ziemi siła ciężkości wyrazi się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 480}) F_w = G \frac{mM(r)}{r^2}$$

gdzie $M(r)$ oznacza masę części wewnętrznej kuli o promieniu r .

Wykres zależności siły grawitacji F od odległości r od środka planety kulistej

Zgodnie ze wzorem podanym ([wzór 480](#) na stronie 223) wypadkowa siła działająca na ciało próbne pochodzi tylko od tej wewnętrznej kuli o promieniu r . $M(r)$ - masę kuli o promieniu r można wyrazić za pomocą gęstości ρ planety:

$$(\text{wzór 481}) M(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

Wstawiając ten wzór do ([wzór 480](#) na stronie 223) otrzymamy:

$$(\text{wzór 482}) F = G \frac{\frac{4\pi r^3 \rho}{3} m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$$

Zauważmy, że siła grawitacji wewnątrz jednorodnej planety rośnie liniowo wraz z odległością r od środka planety:

$$(\text{wzór 483}) F = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$$

i w środku planety jest równa zero.

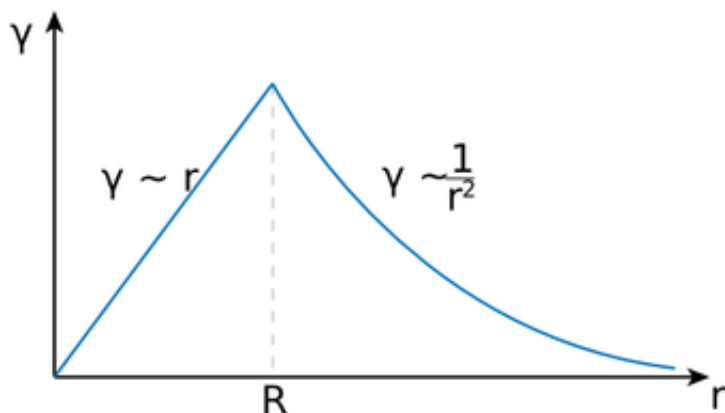
Wzór ([wzór 483](#) na stronie 223) można zapisać jako:

$$(\text{wzór 484}) F = Kr$$

gdzie K ma stałą wartość:

$$(\text{wzór 485}) K = \frac{4}{3} \pi G \rho m$$

Widzimy, więc że wykresem siły F wewnątrz planety jest linia prosta. Na zewnątrz obowiązuje wzór $F = G \frac{mM}{r^2}$ przedstawiający zależność odwrotnie proporcjonalną siły F od kwadratu odległości r od środka planety. Pełny wykres siły grawitacji, wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli, w zależności od odległości od jej środka, jest przedstawiony na [Rysunek 5.9: Wykres zależności siły grawitacji \$F\$ działającej wewnątrz kulistej planety oraz na zewnątrz planety \(w zależności od odległości \$r\$, liczonej od środka planety\)](#) na stronie 224.



Rysunek 5.9: Wykres zależności siły grawitacji F działającej wewnątrz kulistej planety oraz na zewnątrz planety (w zależności od odległości r , liczonej od środka planety)

Praca przemieszczenia ciała wewnątrz jednorodnej planety

Z punktu środkowego jednorodnej planety o masie M i promieniu R przeniesiono ciało o masie m , na odległość r . Jaką pracę wykonano?

Podczas wykonywania tej pracy należy działać siłą przeciwnie skierowaną do siły grawitacji ([wzór 488](#) na stronie 224) i równą jej wartości $F = Kr$. Siła ta zmienia się liniowo wraz ze wzrostem r – przesunięcia ciała. Wartość średnia tej siły na drodze r wynosi

$$(\text{wzór 486}) F_{\text{sr}} = \frac{1}{2} Kr$$

Praca W przesunięcia ciała na tej drodze wynosi $W = F_{\text{sr}}r$. Zatem

$$(\text{wzór 487}) W = \frac{1}{2} Kr^2$$

Podstawiając stałą K wg wzoru ([wzór 485](#) na stronie 223) otrzymamy, że

$$(\text{wzór 488}) W = \frac{4}{6} \pi G \rho m r^2$$

W przypadku, gdy ciało zostanie przeniesione z punktu środkowego planety na jej powierzchnię, to droga przesunięcia ciała wyniesie $r = R$, a siła grawitacji wzrośnie od zera, w środku planety, do wartości

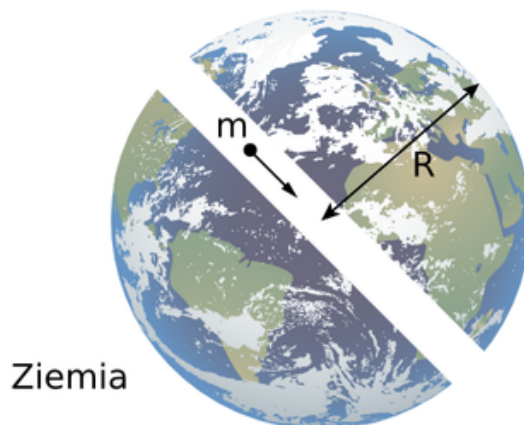
$$(\text{wzór 489}) F = G \frac{mM}{R^2}$$

Zatem średnia siła na drodze od $r = 0$ do $r = R$ wyniesie $F_{\text{sr}} = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R^2}$. Zaś praca $W = F_{\text{sr}}R$, lub

$$(\text{wzór 490}) W = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R}$$

Przykład 4 - „Pociąg przyszłości”

Pociągiem przyszłości nazwijmy pojazd, który mógłby się poruszać tylko pod wpływem siły grawitacji (przy zaniechaniu oporu powietrza — bez dodatkowego napędu) w tunelu przewierconym na wylot w Ziemi (*Rysunek 5.10: W tunelu przewierconym na wylot w Ziemi mógłby kursować „pociąg przyszłości”* na stronie 225). Pojazd ten mógłby poruszać się wahadłowo, osiągając przeciwległy punkt Ziemi. Oblicz prędkość v_0 , jaką osiągnąłby pojazd w środku Ziemi, oraz prędkość v_k na drugim końcu tunelu. Przyjmij, że Ziemia jest jednorodną kulą, wszędzie o jednakowej gęstości ρ , i zaniebaj opór powietrza.



Rysunek 5.10: W tunelu przewierconym na wylot w Ziemi mógłby kursować „pociąg przyszłości”

Odpowiedź: Pojazd w tunelu nabywa prędkości i energii kinetycznej dzięki pracy siły grawitacji. Praca W siły grawitacji wewnątrz Ziemi (na drodze od powierzchni Ziemi do jej środka – wzór (wzór 490 na stronie 224)) jest równa energii kinetycznej ciała m w punkcie środkowym Ziemi:

$$(\text{wzór 491}) \quad W = \frac{1}{2} G \frac{mM}{R} = \frac{mv_0^2}{2}$$

Stąd

$$(\text{wzór 492}) \quad v_0 = \sqrt{G \frac{M}{R}}$$

Wzór ten może przybrać prostszą postać, gdy wykorzystamy równanie siły grawitacji na powierzchni Ziemi:

$$(\text{wzór 493}) \quad mg = G \frac{mM}{R^2}$$

Więc

$$(\text{wzór 494}) \quad g = G \frac{M}{R^2}$$

Zatem wstawiając ten wynik do wzoru (wzór 492 na stronie 225) ostatecznie otrzymamy prędkość pojazdu w tunelu w środku Ziemi

$$(\text{wzór 495}) v_0 = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s}$$

Oczywiście, prędkość v_k na drugim końcu tunelu wynosi zero, ponieważ praca W siły grawitacji wewnątrz Ziemi (na drodze od środka do powierzchni Ziemi) zredukuje całkowicie energię kinetyczną ciała w punkcie środkowym Ziemi. Zatem prędkość końcowa v_k stanie się równa zero.

Pytania i problemy

1. Czy na ciało znajdujące się wewnątrz planety działa siła grawitacji? Odpowiedź uzasadnij w kilku słowach.
2. Dlaczego nie obserwuje się, aby na ciało znajdujące się wewnątrz planety działała wypadkowa siła grawitacji równa zero, jeżeli jest ono w pewnej odległości od środka planety?
3. Jak działają siły grawitacji na ciało znajdujące się dokładnie w środku kulistej jednorodnej planety?
4. Podaj wzór na wypadkową siłę grawitacji działającą na małe ciało m wewnątrz dużej jednorodnej kuli o masie M w odległości r od jej środka. Objaśnij znaczenie symboli w tym wzorze.
5. Dlaczego pojazd umieszczony w tunelu przewierconym na wylot Ziemi (nazwany pociągiem przyszłości) mógłby jeździć bez napędu i osiągać stację znajdującą się na antypodach Ziemi?

5.4 Reguła Titiusa-Bodego - temat nadobowiązkowy

Johann Titius, fizyk urodzony (w XVIII w.) w Chojnicach na Pomorzu, wydedukował, korzystając z prawa grawitacji, że średnie odległości R planet od Słońca (wyrażone w AU - jednostkach astronomicznych) dla Merkurego i kolejnych planet, aż do Saturna włącznie, spełniają warunek:

$$(\text{wzór 496}) R = 0,4 + 0,3 \cdot m$$

gdzie m przybiera wartości 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32 (reguła ta jest zwana *regułą Titiusa-Bodego*). Warto zauważyć, że z wyjątkiem zera wszystkie pozostałe liczby są potęgami liczby 2, i tak

$$(\text{wzór 497}) 1 = 2^0, \quad 2 = 2^1, \quad 4 = 2^2, \quad 8 = 2^3, \quad 16 = 2^4, \quad 32 = 2^5$$

Titius sprawdził swoją formułę tylko dla planet, które w owym czasie były znane — patrz tabela [Rysunek 5.11: Tabela 1](#) na stronie 226.

n	Planeta	m	R - wartość teoretyczna wg reguły Titiusa-Bodego	R - wartość doświadczalna
1	Merkury	0	0,4	0,39
2	Wenus	1	0,7	0,72
3	Ziemia	2	1,0	1,00
4	Mars	4	1,6	1,52
5	–	8	2,8	–
6	Jowisz	16	5,2	5,20
7	Saturn	32	10,0	9,54

Średnie odległości R wyrażone są w jednostkach astronomicznych

Rysunek 5.11: Tabela 1

Okazało się, że formuła ta jest prawdziwą z zupełnie przyzwoitą dokładnością, dla wszystkich znanych w owym czasie planet. Brakowało jednak planety odpowiadającej liczbie $m = 8$, planety, której orbita powinna się znajdować między orbitami Marsa i Jowisza w odległości 2,8 AU od Słońca. Dopiero w XIX i XX wieku odkryto wielką liczbę drobnych ciał, tzw. planetoid, mających właśnie orbity o średnich promieniach zbliżonych do wartości 2,8 AU. Wiele obecnych danych obserwacyjnych świadczy o tym, że planetoidy te są prawdopodobnie pozostałością po rozbitej planecie, która miała tam swoją orbitę.

A co z pozostałymi planetami, które odkryto później, Uranem Neptunem i Plutonem?

Uzupełnimy tabelę, korzystając z następujących liczb dla:

Urana $m = 2^8 = 64$

Plutona $m = 2^9 = 128$

(nie uwzględniamy Neptuna, który ma nietypową orbitę).

n	Planeta	m	R - wartość teoretyczna wg reguły Titiusa-Bodego	R - wartość doświadczalna
8	Uran	64	19,6	19,2
–	Neptun	–	–	30,1
9	Pluton	128	38,8	39,5

Rysunek 5.12: Tabela 2

Zgodnie ze wzorem (wzór 496 na stronie 226) promień orbity **Urana** wynosi

$$(\text{wzór 498}) R = 0,4 + 0,3 \cdot 64 = 19,6 \text{ AU}$$

zaś promień orbity **Plutona** wynosi

$$(\text{wzór 499}) R = 0,4 + 0,3 \cdot 128 = 38,8 \text{ AU}$$

Widzimy, że te planety, z wyjątkiem Neptuna, również poruszają się realnie po orbitach odpowiadających formule Titiusa-Bodego.

Obecne poglądy na temat teoretycznego uzasadnienia reguły Titiusa-Bodego opierają się na modelach powstawania pierwotnych układów planetarnych i nadal stanowią przedmiot dociekań współczesnych astronomów. Więcej informacji na ten temat znajdziesz w Internecie.

Pytania i problemy

1. Podaj wzór Titiusa-Bodego na średnie odległości planet od Słońca i objaśnij znaczenie symboli w tym wzorze.
2. Jak wiadomo formuła Titiusa-Bodego sprawdziła się z dobrą dokładnością dla wszystkich znanych w owym czasie planet z wyjątkiem planety odpowiadającej liczbie $m = 8$, której orbita powinna się znajdować między orbitami Marsa i Jowisza. Jakie odkrycie uzasadniło prawdziwość tej formuły dla tej liczby?
3. Czy formuła Titiusa-Bodego sprawdza się również dla planet nieznanych w ich czasach? Podaj nazwy tych planet oraz ich numerację zgodną z tą formułą.

5.5 Prawa Keplera ruchu planet

Johannes Kepler wnikliwie przeanalizował dane dotyczące ruchu planet uzyskane przez Tychona de Brahe. Na tej podstawie wykazał, że planety poruszają się według określonych praw zgodnych z teorią Kopernika; prawa te umożliwiły Newtonowi odkrycie prawa powszechnego ciężenia.

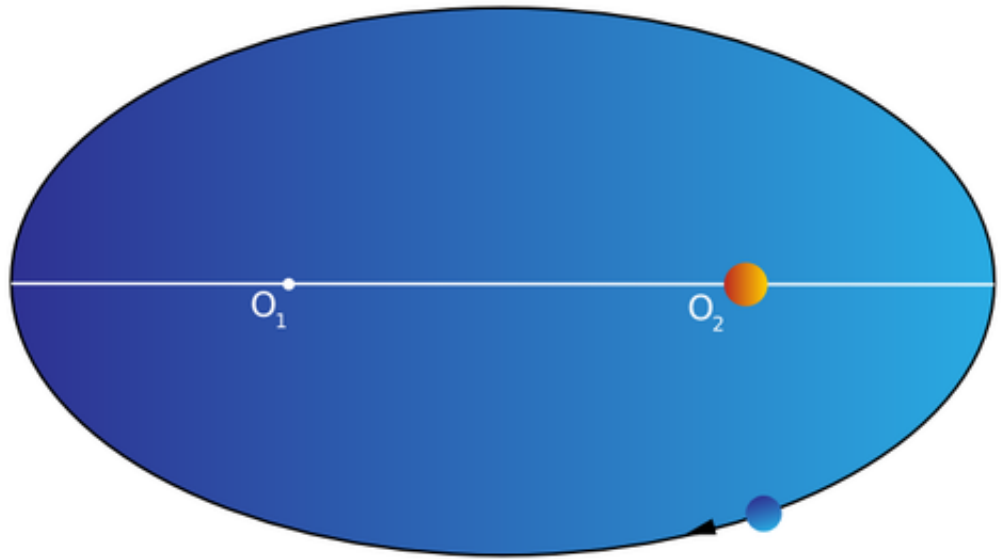
Kepler stwierdził że ruchem planet rządzą trzy proste prawa (prawa Keplera stosują się również do ruchu satelitów okrążających dowolną planetę).

Oto treść praw Keplera:

Ⓡ Zamapiętać:

Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta krąży po orbicie eliptycznej a Słońce znajduje się w jednym z dwóch ognisk elipsy (*Rysunek 5.13: Planeta krąży po orbicie eliptycznej a Słońce znajduje się w jednym z dwóch ognisk elipsy* na stronie 228).



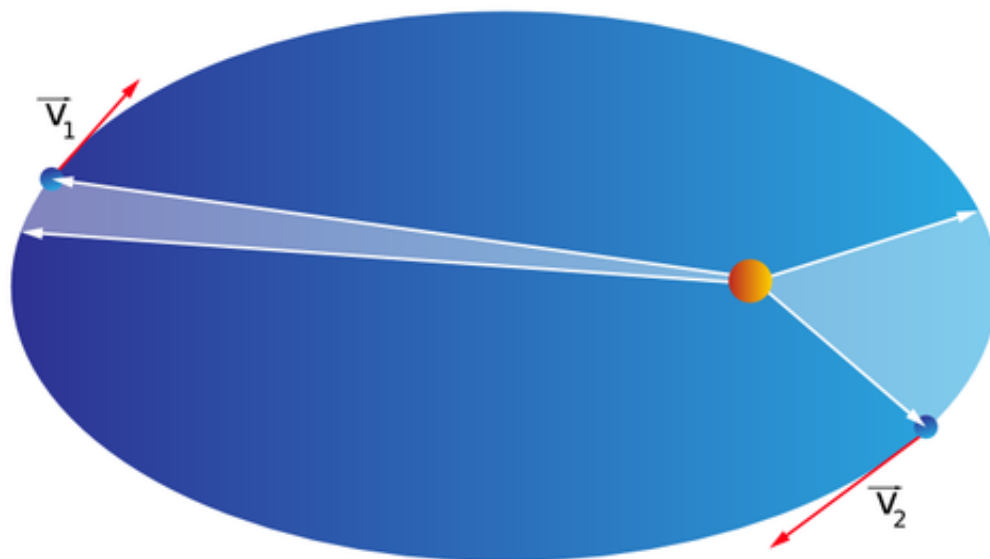
Rysunek 5.13: Planeta krąży po orbicie eliptycznej a Słońce znajduje się w jednym z dwóch ognisk elipsy



Zamknięta:

Drugie prawo Keplera

Promień wodzący poprowadzony ze środka Słońca do środka planety zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu (*Rysunek 5.14: Promień wodzący poprowadzony ze środka Słońca do środka planety zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu* na stronie 229).



Rysunek 5.14: Promień wodzący poprowadzony ze środka Słońca do środka planety zakreśla równe pola powierzchni w równych odstępach czasu

Ⓜ Zamapiętać:

Trzecie prawo Keplera

Sześciany wielkich półosi orbit jakichkolwiek dwóch planet mają się tak do siebie, jak kwadraty ich okresów obiegu. W przypadku orbit kołowych (okrąg jest szczególnym przypadkiem elipsy):

$$(\text{ wzór 500 }) \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$$

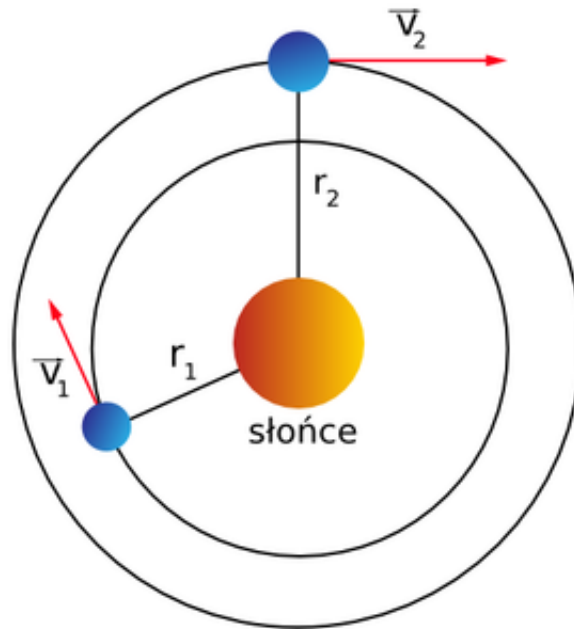
Prawa Keplera

Rysunek 5.15: Obejrzyj film

Newton udowodnił, że prawa Keplera są podrzędne wobec prawa powszechnego ciężenia. My udowodnimy trzecie prawo Keplera w przypadku dwóch planet krążących po orbitach kołowych. Drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu i zostało omówione w podrozdziale zatytułowanym [4.7 Prawo zachowania momentu pędu](#) na stronie 200 (patrz [przykład 9](#)).

Pierwsze prawo Keplera wynika z faktu, iż siła grawitacji jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości, jednak dowód tego wykracza poza zakres licealny (dowód tego faktu można znaleźć w licznych podręcznikach akademickich z dziedziny mechaniki i astronomii, na przykład E. Rybka „Astronomia ogólna”).

Niech planeta „1” ma masę m_1 i promień orbity r_1 ([Rysunek 5.16: Dwie planety krążące po orbitach kołowych](#) na stronie 230).



Rysunek 5.16: Dwie planety krążące po orbitach kołowych

Siła z jaką Słońce (o masie M) przyciąga planetę wynosi

$$(\text{wzór 501}) F_1 = G \frac{m_1 M}{r_1^2}$$

Jest to siła dośrodkowa i zgodnie z wzorem (wzór 234 na stronie 119) wynosi $\frac{4\pi^2 r_1 m_1}{T_1^2}$. Stąd otrzymujemy równanie

$$(\text{wzór 502}) F_1 = G \frac{m_1 M}{r_1^2} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{T_1^2}$$

a następnie

$$(\text{wzór 503}) G \frac{M}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{T_1^2}$$

Takie samo równanie otrzymamy dla planety „2”:

$$(\text{wzór 504}) G \frac{M}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{T_2^2}$$

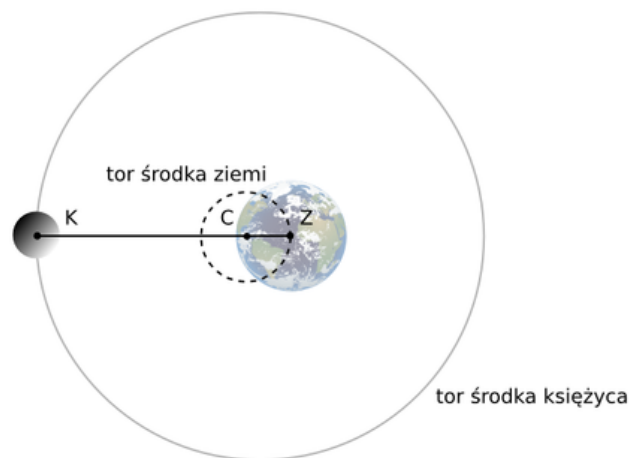
Dzieląc stronami równanie (wzór 504 na stronie 230) przez (wzór 503 na stronie 230), otrzymamy równanie (wzór 500 na stronie 229), czyli trzecie prawo Keplera dla orbit kołowych.

Przykład 6

Zarówno na Ziemi, jak i na Księżyc działa Słońce siłą przyciągania. Dlatego układ Ziemia–Księżyc krąży naokoło Słońca po torze prawie kołowym. Ściśle mówiąc, środek masy układu Ziemia–Księżyc krąży po tym torze. Z drugiej strony, jeżeli mówimy, że Księżyc krąży naokoło Ziemi, to nie należy tego rozumieć, że Księżyc krąży naokoło środka Ziemi. Tak nie jest, ponieważ

Ziemia jest przyciągana przez Księżyc taką samą siłą, z jaką Księżyc przyciąga Ziemię (tylko przeciwnie skierowaną), zgodnie z trzecią zasadą dynamiki Newtona. Dlatego Ziemia i Księżyc obracają się dookoła wspólnego punktu będącego środkiem masy tego układu (patrz *Rysunek 5.17: Środek masy układu Ziemia-Księżyc* na stronie 231).

Pomiary astronomiczne dostarczają następujących informacji: średnia odległość Ziemia–Księżyc jest równa 60,27 promieni ziemskich, $ZK = 60,27 R$, natomiast odległość środka masy układu od środka Ziemi wynosi $ZC = 0,73 R$. Oblicz masę Księżyca m , znając masę Ziemi $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg.



Ziemia i Księżyc poruszają się dookoła wspólnego środka masy C odległego od środka Ziemi o $0,73$ promienia Ziemi, $ZC = 0,73 R$

Rysunek 5.17: Środek masy układu Ziemia-Księżyc

Odpowiedź: Środek masy omówiliśmy w podrozdziale 4.5 *Środek ciężkości i środek masy* na stronie 185, gdzie podaliśmy wzór (wzór 377 na stronie 190), z którego wynika, że środek masy dzieli odcinek łączący dwa ciała na odcinki odwrotnie proporcjonalne do ich mas. Zatem stosunek odcinków ZC / KC (*Rysunek 5.17: Środek masy układu Ziemia-Księżyc* na stronie 231) jest równy stosunkowi mas m / M . Stąd otrzymujemy wzór na masę Księżyca:

$$(\text{wzór 505}) m = \frac{ZC}{KC} M$$

Odcinek KC jest równy $(60,27 - 0,73) R = 59,54 R$, zatem masa Księżyca wynosi $m = (0,73 / 59,54) M = 0,0123 M = 0,0123 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}$ kg = $7,34 \cdot 10^{22}$ kg.

Pytania i problemy

1. Podaj treść pierwszego prawa Keplera. Czy popełnimy duży błąd, gdy powiemy, że Ziemia krąży po orbicie kołowej dookoła Słońca? Odpowiedź uzasadnij.
2. Podaj treść drugiego prawa Keplera. Czy możesz powiedzieć, że środek Ziemi porusza się ruchem jednostajnym naokoło Słońca, wiedząc, że Ziemia krąży naokoło Słońca po orbicie eliptycznej? Odpowiedź uzasadnij.
3. Podaj treść trzeciego prawa Keplera. Oblicz ile wynosi promień orbity Marsa (w przybliżeniu kołowej), znając okres obiegu Marsa naokoło Słońca - rok marsjański $T_M = 686,98$ dni (ziemskich), promień orbity Ziemi (w przybliżeniu kołowej) $r_Z = 149,6 \cdot 10^6$ km, oraz rok ziemski $T_Z = 365,25$ dni (tutaj: jedna doba = 23 h 56 min 4 s = 86 164 s).
4. Newton wykazał, że prawa Keplera wynikają z prawa powszechnej grawitacji. Wykaż, że trzecie prawo Keplera dla szczególnego przypadku orbit kołowych wynika z prawa grawitacji Newtona.

5.6 Pole grawitacyjne

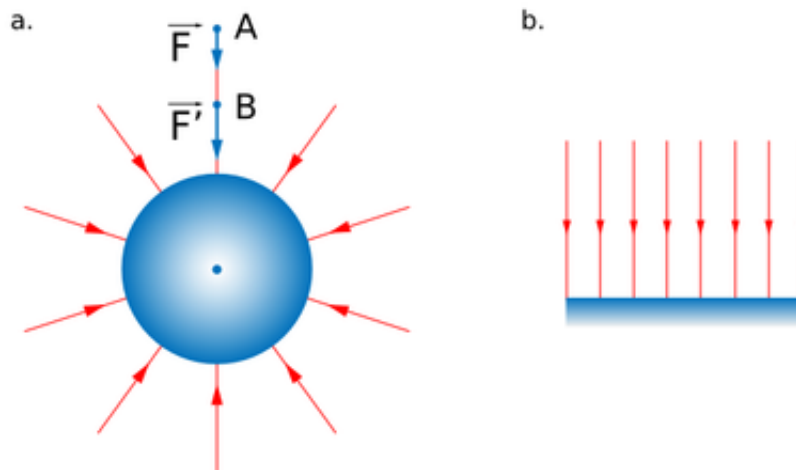
Zgodnie ze współczesnym poglądem na podstawowe oddziaływania w przyrodzie, pośrednikiem i zarazem nośnikiem oddziaływań jest *pole sił*.

W dotychczasowych naszych rozważaniach nie mówiliśmy nic o mechanizmie oddziaływania grawitacyjnego. Przyjmowaliśmy milcząco, że wystarczy, aby dwa ciała znalazły się w pewnej odległości od siebie, aby wystąpiło między nimi oddziaływanie grawitacyjne. Taki sposób podejścia do oddziaływań między ciałami nazywamy *oddziaływaniem na odległość*. Ten pogląd utrzymał się w fizyce aż do drugiej połowy XIX wieku. Współczesny pogląd na podstawowe oddziaływania w przyrodzie przyjmuje, że pośrednikiem i zarazem nośnikiem oddziaływań jest *pole sił*. W koncepcji oddziaływania na odległość ciała oddziałują nawet wtedy, gdy nie stykają się ze sobą. Natomiast koncepcja polowa przyjmuje, że ciało będące źródłem oddziaływania wprowadza modyfikację otaczającej go przestrzeni, tworząc pole oddziaływań, które z kolei działa na ciała znajdujące się w tym polu. Ciało posiadające masę wytwarza wokół siebie *pole grawitacyjne*. Jeżeli w polu tym znajdzie się inne ciało o określonej masie, to na ciało będzie działać siła grawitacji pochodząca od pola grawitacyjnego.

⚠ **Ważne:** *Pole grawitacyjne* - to przestrzeń, w której na ciała obdarzone masą działają siły grawitacji.

Ważnym pojęciem w koncepcji polowej są *linie sił*. Wyobraźmy sobie ciało o masie M w kształcie kuli (może to być np. jakaś planeta) – *Rysunek 5.18: Linie sił pola grawitacyjnego*: na stronie 232a. Umieścimy w jej pobliżu w punkcie A odległym o r od jej środka jakieś małe ciało o masie $m \ll M$, które będziemy nazywać „ciałem próbnym”. Na ciało próbne działa siła ciężkości

$$(\text{ wzór 506 }) F = G \frac{mM}{r^2}$$



a) w pobliżu kuli – pole centralne, b) w pobliżu płaskiej powierzchni, np. w pobliżu powierzchni Ziemi na niedużym obszarze – pole jednorodne

Rysunek 5.18: Linie sił pola grawitacyjnego:

Jeżeli ciało próbne przesuniemy do punktu B , to będzie na nie działać większa siła F' , ale jej kierunek się nie zmieni. We wszystkich punktach prostej AB kierunek siły grawitacji jest taki sam. Linia ta nazywa się „*linią sił*”. W ogólnym

przypadku linii sił nazywamy linię, wzdłuż której (lub stycznie do której) na ciało próbne działają siły. Takich linii w otoczeniu kuli możemy wykreślić bardzo dużo. Linie sił w otoczeniu kuli rozmieszczone są promieniście (*Rysunek 5.18: Linie sił pola grawitacyjnego*: na stronie 232a). Pole o liniach sił rozmieszczonych promieniście nazywamy *polem centralnym*. Gdy mamy do czynienia z niedużymi obszarami w pobliżu powierzchni Ziemi, można przyjąć, że linie sił są równoległe do siebie i prostopadłe do powierzchni Ziemi (*Rysunek 5.18: Linie sił pola grawitacyjnego*: na stronie 232b). Takie pole, w którym linie sił są równoległe i ma wszędzie taką samą wartość, nazywamy *połem jednorodnym*.

Natężenie pola grawitacyjnego

Aby móc porównywać pola grawitacyjne, stosujemy wielkość zwaną *natężeniem pola*, które definiujemy jako stosunek siły grawitacyjnej \vec{F} działającej na ciało próbne w danym punkcie pola do masy m tego ciała

$$(\text{ wzór 507 }) \vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Natężenie pola grawitacyjnego jest wielkością wektorową, której kierunek i zwrot w zadanym punkcie jest tożsamy z kierunkiem i zwrotem siły grawitacji działającej na ciało próbne umieszczone w tym punkcie.

Jeżeli teraz skorzystamy ze wzoru (*wzór 506* na stronie 232) dla wyznaczenia wartości ilorazu $\frac{\vec{F}}{m}$, to otrzymamy wzór na wartość natężenia pola pochodzącego od ciała kulistego:

$$(\text{ wzór 508 }) \gamma = G \frac{M}{r^2}$$

Widzimy, że γ nie zależy od masy m ciała próbnego, zależy natomiast od masy M ciała wytwarzającego pole oraz od odległości r danego punktu pola od środka ciała wytwarzającego pole. Zatem wielkość (*wzór 507* na stronie 233) charakteryzuje nam pole, niezależnie od tego, jakim ciałem próbnym się posługujemy. Natężenie pola ma wymiar N/kg jest to jednocześnie jednostka przyspieszenia ($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Zwróćmy uwagę na to, że przyspieszenie grawitacyjne (choć inaczej definiowane) jest równocześnie natężeniem pola grawitacyjnego, ponieważ

$$(\text{ wzór 509 }) \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

(porównaj ze wzorem (*wzór 507* na stronie 233)).

i Wskazówka: Ta zbieżność jest m.in. odzwierciedleniem faktu, że obecność pola grawitacyjnego jest równoważna ruchowi przyspieszonemu nieinercjalnych układów odniesienia - przypomnij sobie *przykład „Rakieta”* (Tom 1. rozdz. *1.6 Siły bezwładności*), w którym omówiono problematykę wytwarzania „sztucznej grawitacji”.

Wzór (*wzór 507* na stronie 233) mówi nam, że natężenie pola grawitacyjnego jest tym większe, im większa jest masa M ciała wytwarzającego pole i że natężenie pola centralnego słabnie z kwadratem odległości od źródła r .

Zauważmy, że tam, gdzie pole jest słabsze, tam linie sił są rzadziej rozmieszczone (patrz *Rysunek 5.18: Linie sił pola grawitacyjnego*: na stronie 232a).

Przykład 7 (nadobowiązkowy)

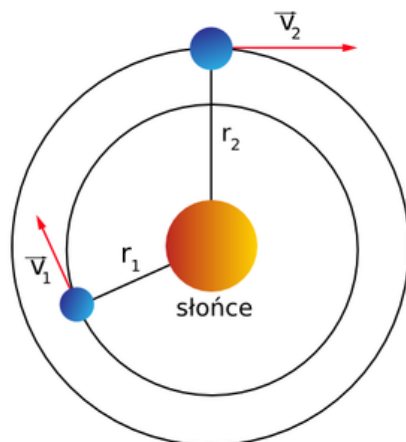
Natężenie pola grawitacyjnego na zewnątrz ciała kulistego, np. na zewnątrz Ziemi, jest dane wzorem (*wzór 508* na stronie 233). Jak zmienia się natężenie pola grawitacyjnego, wewnątrz kuli, wraz z odległością od jej środka? Przyjmijemy, że kula jest jednorodna, tzn. ma wszędzie jednakową gęstość ρ .

Odpowiedź: Zgodnie z treścią rozdziału *5.3 Grawitacja wewnątrz planety – temat nadobowiązkowy* na stronie 220 - jeżeli małe ciało m znajduje się w punkcie P wewnątrz dużej jednorodnej kuli o masie M w odległości r od jej środka (*Rysunek 5.18: Linie sił pola*

grawitacyjnego: na stronie 232), to wypadkowa siła grawitacji działająca na ciało m jest skierowana do środka kuli i wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 510}) F_w = G \frac{mM(r)}{r^2}$$

gdzie $M(r)$ jest masą rdzenia kuli o promieniu r .



Rysunek 5.19: Punkt materialny P wewnątrz kuli jest przyciągany do środka kuli tylko przez jej część kulistą o promieniu r

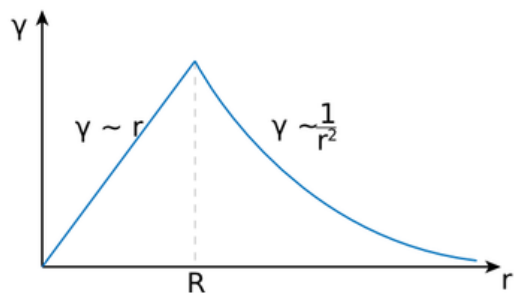
Można ją wyrazić za pomocą gęstości ρ : $M(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$ zatem

$$(\text{wzór 511}) F = G \frac{\frac{4\pi r^3 \rho}{3} m}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$$

Zgodnie ze wzorem (*wzór 508* na stronie 233) natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz planety

$$(\text{wzór 512}) \gamma(r) = \frac{4}{3} \pi G \rho r$$

Widzimy, że natężenie pola grawitacyjnego wewnątrz kuli (jak również i siła grawitacji) rośnie liniowo wraz z odległością r od środka kuli. Wykres natężenia pola grawitacyjnego, wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli, w zależności od odległości od jej środka, jest przedstawiony na *Rysunek 5.20: Wykres natężenia pola grawitacyjnego wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli* na stronie 235.



Rysunek 5.20: Wykres natężenia pola grawitacyjnego wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli

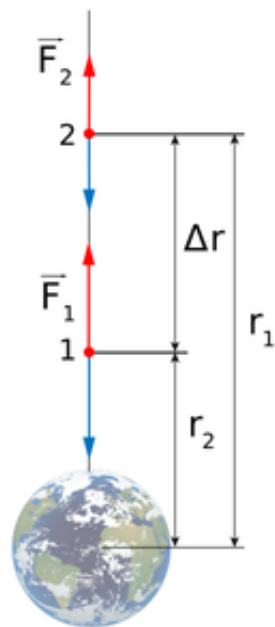
Pytania i problemy

1. Co to jest pole grawitacyjne? Podaj definicję pola grawitacyjnego.
2. Co to jest natężenie pola grawitacyjnego? Podaj jego definicję. O czym informuje nas wartość natężenia pola grawitacyjnego?
3. Wiadomo, że masa Słońca jest 335 000 razy większa od masy Ziemi. W jakiej odległości r od środka Słońca (na zewnątrz od niego) natężenie pola grawitacyjnego Słońca jest równe natężeniu ziemskiego pola grawitacyjnego na powierzchni Ziemi. Promień Ziemi wynosi $R_Z = 6\,371$ km. Porównaj tę odległość z promieniem Słońca wynoszącym około 109 promieni Ziemi oraz z odległością Ziemia–Słońce, która wynosi około $R_{Z-S} \approx 1,5 \cdot 10^8$ km.
4. Rakieta porusza się ruchem prostoliniowym ze stałym przyspieszeniem, wskutek czego w rakiecie występują siły bezwładności. Wykreśl linie sił pola grawitacyjnego równoważnego polu sił bezwładności w rakiecie.
5. Rakieta porusza się ruchem jednostajnym po okręgu wokół Ziemi. Wykreśl linie sił pola grawitacyjnego Ziemi oraz linie sił bezwładności w rakiecie.

5.7 Praca w polu grawitacyjnym

W rozdziale [3.2 Energia potencjalna](#) na stronie 136 wyznaczaliśmy pracę w polu grawitacyjnym w pobliżu Ziemi – w polu jednorodnym – i otrzymaliśmy wzór $W = mgh$. Obecnie wyznaczymy pracę przemieszczenia ciała w dowolnej odległości od Ziemi oraz w polu grawitacyjnym innych kulistych ciał niebieskich.

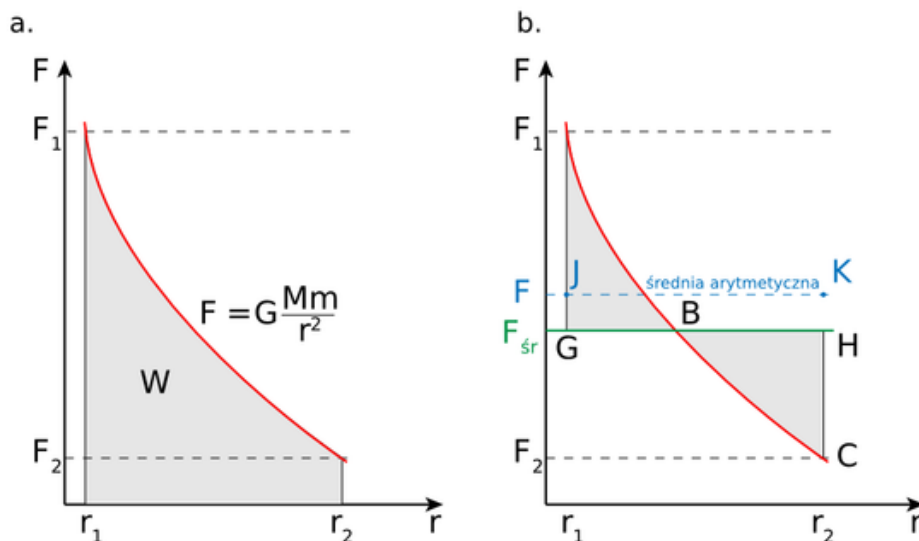
Ile wynosi praca siły zewnętrznej \vec{F} równej co do wartości sile grawitacji, lecz przeciwnie skierowanej, działającej na ciało próbne o masie m w polu grawitacyjnym na drodze $s = r_1 - r_2$ wzdłuż linii siły pola, jak na [Rysunek 5.21: Siła zewnętrzna przesuwa ciało próbne wzdłuż linii siły pola grawitacyjnego](#) na stronie 236?



Rysunek 5.21: Siła zewnętrzna przesuwa ciało próbne wzdłuż linii siły pola grawitacyjnego

Na drodze od punktu 1 do 2 siła \vec{F} zmienia swoją wartość według wzoru $F = GMm/r^2$. Wiemy już, że praca na wykresie zależności siły od przesunięcia jest równa polu powierzchni pod linią siły (podrozdział 3.1 Praca na stronie 132). Praca jest równa zakolorowanemu polu przypominającemu trapez (*Rysunek 5.22: Praca siły w polu grawitacyjnym* na stronie 237a). Zatem w celu wyznaczenia pracy należy obliczyć wartość powierzchni tego pola. Tu napotykamy na pewien problem – jak obliczyć pole powierzchni takiej figury geometrycznej? Można obliczyć pole prostokąta równoważnego tej figurze. W przypadku trapezu równoważny mu prostokąt wyznaczony jest przez linię odpowiadającą średniej arytmetycznej \bar{F} z sił F_1 i F_2 .

Jednakże w naszym przypadku nie jest to zwykły trapez. Dlatego średnia arytmetyczna \bar{F} nie reprezentuje odpowiedniej średniej siły na tej drodze. Pole powierzchni prostokąta $EJKD$ (*Rysunek 5.22: Praca siły w polu grawitacyjnym* na stronie 237b) pod linią średniej arytmetycznej siły byłoby dużo większe niż pole $ABCDE$ odpowiadające pracy wykonanej przez siłę F .



a) pole powierzchni pod krzywą jest miarą pracy wykonanej przez siłę zewnętrzną na drodze od r_1 do r_2 , b) pole $ABCDE$ jest równe polu powierzchni prostokąta $EGHD$; pole powierzchni tego prostokąta jest miarą pracy wykonanej przez siłę będącą średnią geometryczną sił F_1 i F_2 : $F_{sr} = \sqrt{F_1 F_2}$

Rysunek 5.22: Praca siły w polu grawitacyjnym

Okazuje się, że właściwą średnią siłą jest średnia geometryczna. W matematyce przyjmuje się następującą definicję średniej geometrycznej a_{sr} dwóch liczb a_1 i a_2

$$(\text{wzór 513}) \quad a_{sr} = \sqrt{a_1 a_2}$$

Zatem w naszym przypadku średnia geometryczna sił F_1 i F_2 wynosi

$$(\text{wzór 514}) \quad F_{sr} = \sqrt{F_1 F_2} = \sqrt{G \frac{Mm}{r_1^2} G \frac{Mm}{r_2^2}} = G \frac{Mm}{r_1 r_2}$$

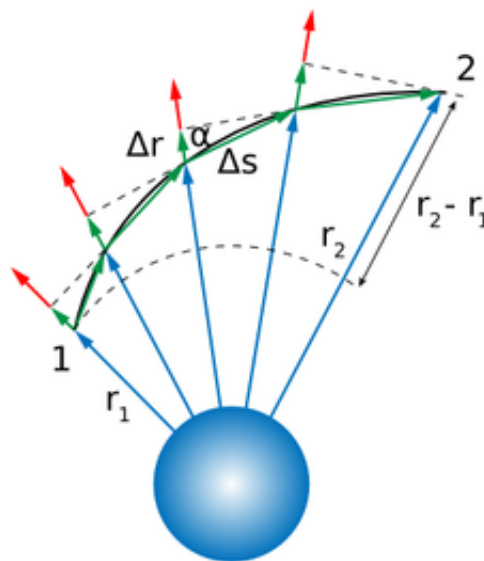
Pole prostokąta (pod linią tej średniej siły) - $EGHD$ na [Rysunek 5.22: Praca siły w polu grawitacyjnym](#) na stronie 237b jest właśnie równe polu pod krzywą siły F ($EACD$).

Zatem praca siły zewnętrznej przesunięcia masy próbnej m w polu grawitacyjnym pochodzącym od ciała kulistego o masie M wyrazi się wzorem $W_{12} = F_{sr}(r_2 - r_1)$ i po podstawieniu ([wzór 514](#) na stronie 237) otrzymamy

$$(\text{wzór 515}) \quad W_{12} = G \frac{Mm}{r_1 r_2} (r_2 - r_1)$$

Po rozbiciu tego wzoru na dwa składniki i po uproszczeniu otrzymujemy ostatecznie ładny symetryczny wzór

$$(\text{wzór 516}) \quad W_{12} = G \frac{Mm}{r_1} - G \frac{Mm}{r_2}$$



Rysunek 5.23: Praca przemieszczenia ciała po drodze krzywoliniowej w polu grawitacyjnym

Obliczmy teraz pracę przesunięcia ciała próbnego o masie m w polu grawitacyjnym wzdłuż dowolnej drogi krzywoliniowej – *Rysunek 5.23: Praca przemieszczenia ciała po drodze krzywoliniowej w polu grawitacyjnym* na stronie 238. Całą drogę podzielimy na małe odcinki Δs , tak małe, aby można było je traktować jako odcinki proste. Elementarna praca na pojedynczym odcinku drogi jest równa

$$\text{(wzór 517) } \Delta W = F \Delta s \cos \alpha = F \Delta r$$

gdyż, jak pokazano na *Rysunek 5.23: Praca przemieszczenia ciała po drodze krzywoliniowej w polu grawitacyjnym* na stronie 238, $\Delta s \cos \alpha = \Delta r$

Widzimy, że ta elementarna praca jest równa elementarnej pracy wzdłuż linii siły pola grawitacyjnego i nie zależy od kąta nachylenia elementu drogi do linii siły. Cała praca będzie równać się sumie prac ΔW (z dowolnie małym błędem zależnym od wielkości odcinków, na które podzieliśmy całą drogę) wzdłuż jednej linii siły pola na odcinku .

Zatem, **praca siły zewnętrznej w polu grawitacyjnym nie zależy od kształtu toru, po którym porusza się ciało, a zależy tylko od położenia punktów końcowych toru.**

Pytania i problemy

1. Dlaczego zastosowanie średniej arytmetycznej siły grawitacji na odcinku drogi od r_1 do r_2 nie prowadzi do prawdziwej wartości pracy pola grawitacyjnego? Jaką średnią należy zastosować w tym przypadku?
2. Przewożono dwie jednakowe skrzynie z parteru domu handlowego do sklepu położonego na pierwszym piętrze – jedną przewożono windą, a drugą za pomocą schodów ruchomych. Czy wykonana praca przemieszczenia skrzyń (abstrahując od czynników ubocznych) w obu przypadkach jest taka sama, czy różna? Odpowiedź uzasadnij.
3. Oblicz pracę potrzebną do przemieszczenia ruchem jednostajnym ciała o masie $m = 1$ kg z powierzchni Ziemi na wysokość $h = 2R$ nad nią. Przyjmij, że promień Ziemi wynosi $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, a przyspieszenie ziemskie na powierzchni Ziemi wynosi $g = 9,81$ m/s².

5.8 Energia potencjalna w polu grawitacyjnym

Wiemy już, że praca jaką trzeba wykonać, aby podnieść ciało o masie m na wysokość h w pobliżu powierzchni Ziemi wynosi

$$(\text{wzór 518}) W = mgh$$

Zatem ciało znajdujące się na wysokości h ma energię potencjalną

$$(\text{wzór 519}) E_p = mgh$$

Dla niedużych różnic wysokości nad Ziemią przyspieszenie g praktycznie nie zmienia się i siła ciężkości działająca na ciało pozostaje stała na całej drodze h . Dlatego wzór (wzór 519 na stronie 239) na energię potencjalną ciała można stosować tylko dla małych wysokości h w porównaniu z promieniem Ziemi. Należy zaznaczyć, że wzór ten jest bardzo użyteczny, gdyż jest prosty i często przy rozwiązywaniu konkretnych zadań mamy do czynienia właśnie z niedużymi wysokościami w stosunku do rozmiarów Ziemi.

Dokładny wzór na energię potencjalną ciała znajdującego się na dowolnej wysokości w polu grawitacyjnym otrzymamy z wyrażenia (wzór 517 na stronie 238) na pracę w polu grawitacyjnym.

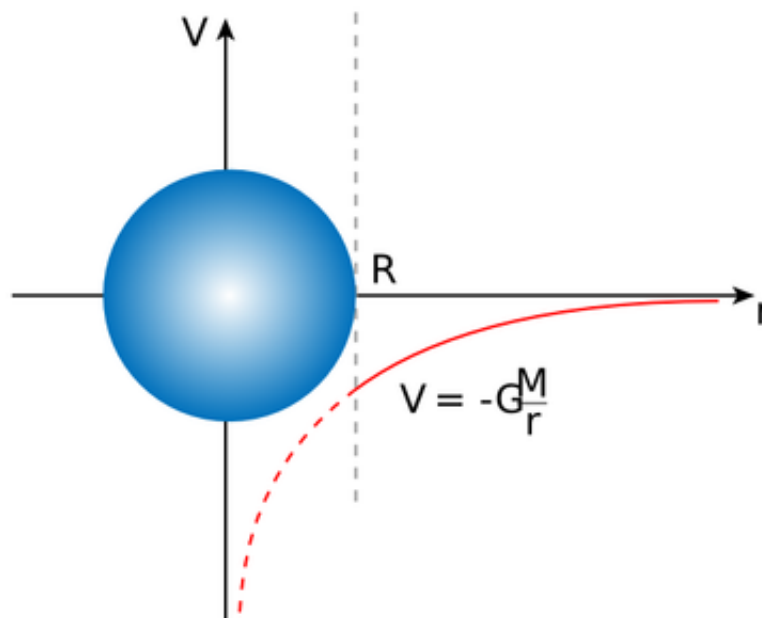
$$(\text{wzór 520}) W_{12} = G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2}$$

Wzór ten wyraża pracę siły zewnętrznej przy przeniesieniu ciała, które początkowo znajdowało się w odległości r_1 od środka Ziemi i zostało przeniesione na dalszą odległość r_2 . Tyle właśnie energii potencjalnej nabyło ciało w stosunku do jego położenia początkowego. Ciało bliżej Ziemi ma mniejszą energię potencjalną, niż wtedy, gdy znajduje się w dalszej od niej odległości. Praca ta jest równa różnicy energii potencjalnej $E_{p2} - E_{p1}$ (energia potencjalna w punkcie 2 minus energia potencjalna w punkcie 1). Zatem wzór (wzór 520 na stronie 239) należy zapisać następująco:

$$(\text{wzór 521}) W_{12} = E_{p2} - E_{p1} = -G\frac{Mm}{r_2} - \left(-G\frac{Mm}{r_1} \right)$$

Zakładając, że $r_2 > r_1$ możemy powiedzieć, że ciało ma mniejszą energię potencjalną w miejscu wyznaczonym przez promień r_1 w stosunku do miejsca wyznaczonego przez r_2 . Powszechnie przyjmuje się konwencję, aby mierzyć energię potencjalną ciała w polu grawitacyjnym w stosunku do punktu oddalonego do nieskończoności. Oznacza to, że gdy $r_2 = \infty$, to $E_{p2} = 0$. Przyjmując we wzorze (wzór 521 na stronie 239) $r_1 = r$ i $r_2 = \infty$, otrzymamy następujący wzór na energię potencjalną ciała w polu grawitacyjnym:

$$(\text{wzór 522}) E_p = -G\frac{Mm}{r}$$



Zwróć uwagę, że linią przerywaną zaznaczono matematyczne przedłużenie linii ciągłej. W rzeczywistości przebieg energii wewnątrz Ziemi jest inny (patrz rysunek w przykładzie *Przykład 9* na stronie 243)

Rysunek 5.24: Wykres zależności energii potencjalnej ciała od odległości r od środka Ziemi, dla $r \geq R$

Przyjęcie określonego poziomu odniesienia za zerowy jest dowolne i zależy od konkretnego problemu fizycznego, ale gdy raz obierzemy jakiś poziom zerowy, to energię każdego ciała musimy wyznaczać względem tego jednego wspólnego poziomu. Tylko wtedy możemy porównywać energię potencjalną różnych ciał.

Innym skutkiem przyjęcia takiego poziomu odniesienia jest pojawienie się ujemnych wartości energii potencjalnej (znak minus we wzorze (*wzór 522* na stronie 239)). Istotne jest, że w miarę oddalania się od Ziemi energia potencjalna ciała rośnie, co jest zgodne z koniecznością wykonywania pracy, jeśli chcemy oddalić ciało od źródła pola grawitacyjnego. Choć wzór (*wzór 522* na stronie 239) wydaje się niepodobny do wzoru (*wzór 519* na stronie 239), to można wykazać (pokażemy to w ostatnim paragrafie tego rozdziału), że przybliżony wzór (*wzór 519* na stronie 239) wynika z dokładnego wzoru (*wzór 522* na stronie 239). Tam też pokażemy, że przyjmowanie przez energię potencjalną wartości ujemnych jest mało ważne.

Przykład 8

W jakim zakresie wysokości h nad powierzchnią Ziemi możemy stosować wzór przybliżony na energię potencjalną (*wzór 519* na stronie 239), aby nie popełnić błędu większego niż 1%?

Odpowiedź: Błąd bezwzględny wyraża się przez różnicę między wartością przybliżoną $(E_p)_{przybl} = mgh$ a wartością dokładną $(E_p)_{dokl}$ wyznaczoną ze wzoru (*wzór 522* na stronie 239). Natomiast błąd względny obliczymy ze wzoru

$$(\text{wzór 523}) \quad \frac{(E_p)_{przybl} - (E_p)_{dokl}}{(E_p)_{dokl}}$$

Powinien być zatem spełniony warunek

$$(\text{wzór 524}) \frac{(E_p)_{\text{przybl}} - (E_p)_{\text{dokł}}}{(E_p)_{\text{dokł}}} = \frac{(E_p)_{\text{przybl}}}{(E_p)_{\text{dokł}}} - 1 < 0,01$$

Podstawiając tu wyrażenia ([wzór 522](#) na stronie 239) i ([wzór 519](#) na stronie 239), otrzymujemy

$$(\text{wzór 525}) \frac{R+h}{R} - 1 = \frac{h}{R} \leq 0,01$$

Widzimy więc, że aż do wysokości $h = 0,01 R = 0,01 \cdot 6371 \text{ km} \approx 64 \text{ km}$ przybliżony wzór ([wzór 519](#) na stronie 239) wyraża energię potencjalną z błędem nie większym niż 1%.

Pojęcie energii potencjalnej jest pojęciem ogólnym, które stosuje się do wielu przypadków, nie tylko do pola grawitacyjnego. Stosuje się je do wszystkich przypadków, gdzie występują *siły zachowawcze*. Przypomnijmy sobie (rozdział [3.2 Energia potencjalna](#) na stronie 136), co to jest siła zachowawcza? Przykładem siły zachowawczej jest siła grawitacji. Jeżeli podniesiemy ciało na pewną wysokość, to praca wykonana przez siłę równą sile ciężkości, lecz przeciwnie skierowaną, nie ginie, ale odnajdujemy ją w energii potencjalnej, którą możemy znów wykorzystać do wykonania pracy. Mówimy, że praca wykonana przeciwko sile ciężkości została „zachowana”. W poprzednim podrozdziale stwierdziliśmy, że praca przeciwko siłom grawitacyjnym nie zależy od drogi, ale od współrzędnych początku i końca toru. Ta właśnie cecha siły została wykorzystana do definicji siły zachowawczej. Zatem, **jeżeli praca jakiejś siły nie zależy od drogi, ale tylko od położenia punktów początkowego i końcowego toru, to siła ta jest siłą zachowawczą**.

Z tej cechy siły zachowawczej wynika twierdzenie, że praca wykonana przez siłę zachowawczą na drodze zamkniętej jest równa zero. Dowód jest prosty i pozostawiamy go czytelnikowi, jako ćwiczenie. Z twierdzenia tego wynika, że nie możemy zyskiwać (ani tracić) energii przez wielokrotne obieganie tego samego toru, gdy mamy do czynienia z siłą zachowawczą.

Tarcie należy do sił niezachowawczych. Związane jest to z tym, że przy działaniu siły tarcia energia się rozprasza i jest przekazywana otoczeniu przez ciepło. Nie można jej odzyskać w prosty sposób. Jeżeli przesuwamy ciało po poziomej podstawie ruchem jednostajnym, działając siłą F przeciwko sile tarcia T , to praca wykonana przy przesunięciu ciała nie zwiększa energii potencjalnej ciała. Pracy tej nie można odzyskać, gdyż nie została zachowana w postaci energii mechanicznej – została ona zmarnowana dla nas bezpowrotnie. Dlatego tarcie zaliczamy do „**sił niezachowawczych**”.

Wszystkie cztery podstawowe oddziaływania należą do kategorii sił zachowawczych. Zatem, podstawowe siły działające między cząstkami elementarnymi należą do sił zachowawczych. Również dotyczy to sił, które można w prosty sposób zredukować do sił podstawowych. Przykładem może być tu siła sprężystości sprężyny. Podczas rozciągania sprężyny atomy zostają nieco od siebie odsunięte i elektrostatyczne przyciąganie między nimi, sumując się, daje makroskopowy efekt w postaci siły sprężystej sprężyny.

W przypadku ciała kosmicznego znajdującego się w polu grawitacyjnym innego ciała przyjmuje się, że jego energia potencjalna jest równa zero w nieskończoności (patrz wzór ([wzór 522](#) na stronie 239)).

Potencjał pola grawitacyjnego

Pole grawitacyjne opisywaliśmy dotychczas za pomocą natężenia pola. Natężenie informuje nas o tym, jak silne jest pole, to znaczy jak dużą siłą działa pole na ciało próbne o jednostkowej masie. Natężenie jest wektorem. Obecnie mamy możliwość opisanie pola za pomocą wielkości skalarnej, jaką jest energia potencjalna. Zdefiniowanie potencjału pozwala na uproszczenie wielu rachunków, a w nauce o elektryczności jest podstawowym pojęciem umożliwiającym zrozumienie wielu zjawisk, co będzie jednym z tematów następnych rozdziałów.

Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym wyrażona wzorem jest zależna zarówno od masy M źródła pola, od miejsca w przestrzeni wyznaczonego przez odległość r , jak i od masy m ciała próbnego znajdującego się w polu. Zatem zawiera wielkości charakteryzujące zarówno pole, jak i ciało próbne przypadkowo znajdujące się w polu. Aby otrzymać wielkość, która określałaby samo pole, trzeba tak zmienić wzór, aby zawierał tylko wielkości charakteryzujące pole. Jeżeli podzielimy energię potencjalną przez masę m ciała próbnego, to tak powstała wielkość

nie będzie zawierać przypadkowej masy próbnej i będzie charakteryzować pole w dowolnym miejscu. Wielkość ta nazywa się potencjałem pola grawitacyjnego. Oznaczamy go symbolem V , zatem

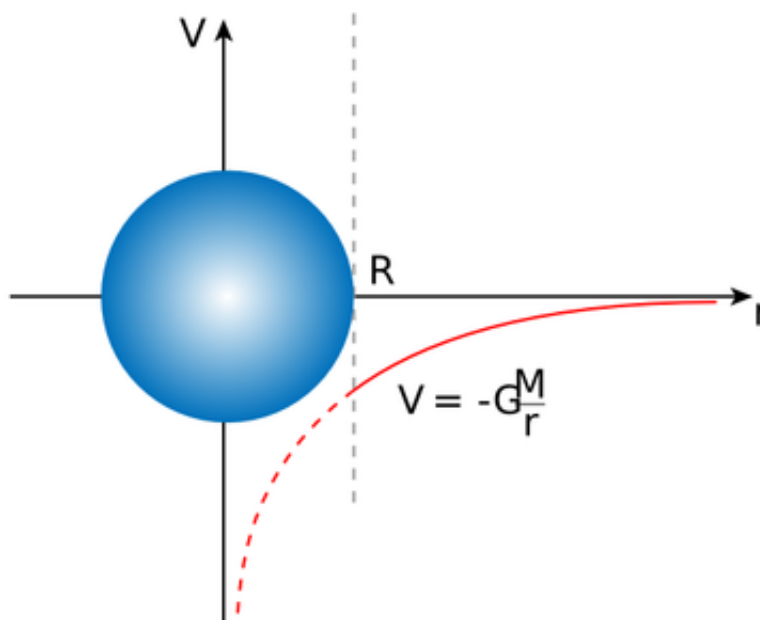
$$(\text{wzór 526}) V = \frac{E_p}{m}$$

⚠ **Ważne:** Wartość liczbowa *potencjału* jest równa wartości liczbowej energii potencjalnej ciała próbnego o jednostkowej masie ($m = 1 \text{ kg}$) znajdującego się w danym punkcie pola. Zgodnie definicją potencjału – wzorem (wzór 526 na stronie 242) – jego jednostką jest 1 J/kg .

Podstawiając tu wyrażenie (wzór 522 na stronie 239) na energię potencjalną E_p otrzymamy następujący wzór na potencjał pola grawitacyjnego wytworzonego przez źródło punktowe (lub kuliste):

$$(\text{wzór 527}) V = -G\frac{M}{r}$$

Przyglądając się wzorowi (wzór 527 na stronie 242), zauważamy, że potencjał zależy odwrotnie proporcjonalnie od r (tzn. od odległości od środka masy kulistej będącej źródłem pola, na przykład od środka Ziemi). Krzywa obrazująca tę zależność jest hiperbolą (patrz rys. *Rysunek 5.25: Potencjał grawitacyjny* na stronie 242). Taka zależność potencjału dotyczy tylko punktów położonych na zewnątrz kulistego ciała wytwarzającego pole. Wewnątrz kuli obowiązuje inna zależność potencjału od odległości od środka. Zagadnienie to rozważymy jako przykład (patrz *Przykład 9* na stronie 243).



Wykres potencjału grawitacyjnego $V(r)$ w funkcji odległości od środka kuli (dla $r > R$) przedstawia hiperbolę. Zwróć uwagę, że linią przerywaną zaznaczono matematyczne przedłużenie linii ciągłej. W rzeczywistości przebieg potencjału wewnątrz Ziemi jest inny (patrz rysunek w *Przykład 9* na stronie 243)

Rysunek 5.25: Potencjał grawitacyjny

Zgodnie ze wzorem (wzór 527 na stronie 242) potencjał przybiera jednakową wartość dla wszystkich punktów jednakowo odległych (o r) od środka. Miejscem geometrycznym tych punktów jest powierzchnia kuli o promieniu r . Jest to powierzchnia jednakowego potencjału. Powierzchnie, na których potencjał pola ma jednakową wartość, nazywamy *powierzchniami ekwipotencjalnymi*. Widzimy zatem, że pole grawitacyjne (i nie tylko pole grawitacyjne, ale i inne pola, np. pole elektrostatyczne) możemy graficznie przedstawiać nie tylko za pomocą linii sił, ale również

za pomocą powierzchni ekwipotencjalnych. W przypadku pola grawitacyjnego, którego źródłem jest ciało kuliste, linie sił rozchodzą się promieniście, a powierzchnie ekwipotencjalne są koncentrycznymi powierzchniami kulistymi.

Zauważmy jeszcze, że wzór (wzór 520 na stronie 239) na pracę przesunięcia ciała w polu grawitacyjnym można wyrazić za pomocą różnicy potencjałów. Mamy bowiem

$$(\text{wzór 528}) W_{12} = G \frac{Mm}{r_1} - G \frac{Mm}{r_2} = m \left[\left(-G \frac{M}{r_2} \right) - \left(-G \frac{M}{r_1} \right) \right] = m (V_2 - V_1)$$

Zatem, praca przesunięcia W_{12} ciała między dwoma punktami w polu grawitacyjnym jest równa iloczynowi masy ciała i różnicy potencjałów między tymi punktami:

$$(\text{wzór 529}) W_{12} = m (V_2 - V_1)$$

Praca ta jest jednocześnie równa różnicy energii potencjalnej ciała.

Przykład 9

Jakim wzorem wyraża się potencjał pola grawitacyjnego wewnątrz jednorodnej kuli o promieniu R ?

Odpowiedź: Najpierw wyprowadzimy wzór na pracę przesunięcia masy próbnej m wewnątrz kuli od jej środka do punktu odległego o r . Na tej drodze siła grawitacji zmienia liniowo swoją wartość (wzór (wzór 483 na stronie 223)):

$$(\text{wzór 530}) F = \frac{4}{3} \pi G \rho m r$$

W punkcie środkowym kuli (dla $r = 0$) siła ta jest równa zero, zatem średnia siła na drodze r wynosi

$$(\text{wzór 531}) F_{\text{sr}} = \frac{F}{2} = \frac{2}{3} \pi G \rho m r$$

Praca siły zewnętrznej równej sile grawitacji na tej drodze wyniesie

$$(\text{wzór 532}) W_{0,r} = F_{\text{sr}} r = \frac{F}{2} r = \frac{2}{3} \pi G \rho m r^2$$

Tyle wzrośnie energia potencjalna ciała próbnego (w stosunku do środka kuli)

$$(\text{wzór 533}) W_{0,r} = \Delta E_p = E_{pr} - E_{p0} = \frac{2}{3} \pi G \rho m \cdot r^2$$

Praca przesunięcia $W_{0,r}$ ciała między dwoma punktami w polu grawitacyjnym jest równa iloczynowi masy ciała i różnicy potencjałów między tymi punktami (patrz wzór (wzór 529 na stronie 243)), więc

$$(\text{wzór 534}) W_{0,r} = m \Delta V = m (V_r - V_0) = \frac{2}{3} \pi G \rho m \cdot r^2$$

Stąd, po przekształceniu, otrzymujemy wzór na potencjał pola grawitacyjnego wewnątrz kuli:

$$(\text{wzór 535}) V_r = V_0 + \frac{2}{3} \pi G \rho \cdot r^2$$

Podstawiając tu masę kuli,

$$(\text{wzór 536}) M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

otrzymamy

$$(\text{wzór 537}) V_r = V_0 + \frac{1}{2} G \frac{M}{R^3} \cdot r^2$$

Widzimy, że zależność V_r od r jest funkcją kwadratową.

Ile wynosi potencjał V_0 w punkcie środkowym kuli? W celu odpowiedzi na to pytanie zauważmy, że gdy $r = R$, to potencjał

$$\text{(wzór 538) } V_R = V_0 + \frac{1}{2} G \frac{M}{R}$$

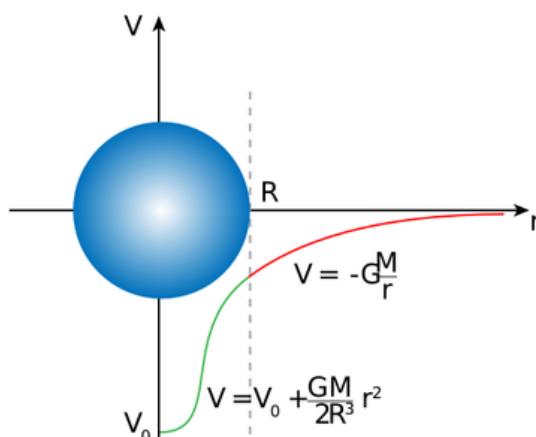
jest równy potencjałowi na powierzchni kuli, który zgodnie ze wzorem (wzór 527 na stronie 242) wynosi $V = -GM/R$. Wstawiając to wyrażenie do przekształconego wzoru (wzór 538 na stronie 244), otrzymamy

$$\text{(wzór 539) } -G \frac{M}{R} = V_0 + \frac{1}{2} G \frac{M}{R} \rightarrow V_0 = -\frac{3}{2} G \frac{M}{R}$$

Po podstawieniu otrzymanego wyrażenia na V_0 do wzoru (wzór 535 na stronie 243) otrzymujemy następujący wzór na potencjał pola grawitacyjnego wewnątrz kuli:


$$\text{(wzór 540) } V_r = \frac{GM}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right)$$

Teraz możemy wykonać pełny wykres potencjału w zależności od odległości od środka kuli w całej przestrzeni, zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz kuli – *Rysunek 5.26: Wykres potencjału w zależności od odległości od środka kuli, wewnątrz i na zewnątrz kuli* na stronie 244.



Rysunek 5.26: Wykres potencjału w zależności od odległości od środka kuli, wewnątrz i na zewnątrz kuli

Pytania i problemy

1. Dlaczego wzór na energię potencjalną $E_p = mgh$ jest wzorem przybliżonym? Podaj dokładny wzór na energię potencjalną w polu grawitacyjnym Ziemi.
2. Co to jest potencjał pola grawitacyjnego? Podaj definicję tej wielkości.
3. Jaka krzywa obrazuje potencjał pola na zewnątrz kuli ziemskiej – na wykresie w układzie współrzędnych (r, V) ? Narysuj tę krzywą.
4. Jaki jest związek pracy z potencjałem pola grawitacyjnego?
5. Z powierzchni jednorodnej planety w kształcie kuli o promieniu R i masie M wystrzelono pionowo w górę raketę z prędkością v_0 . W jakiej odległości r_k raketa się zatrzyma?
6.  **Wskazówka:** Przedyskutuj wzór końcowy z pytania 5., z punktu widzenia wartości v_0 . Czy uzyskany wynik jest stosowalny w całej dopuszczalnej dziedzinie prędkości początkowych?

5.9 Prędkości kosmiczne

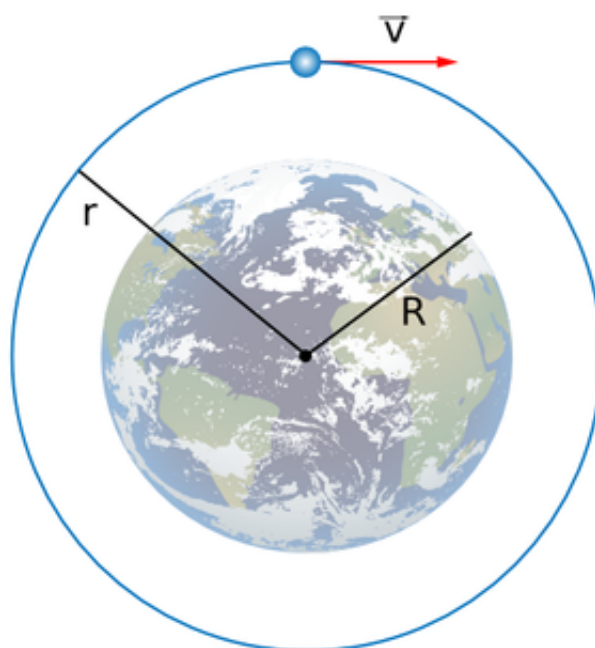
Zasada zachowania energii umożliwia obliczenie prędkości, jaką należy nadać ciału, aby mogło polecieć w Kosmos.

Mamy trzy szczególne możliwości:

1. ciało opuszcza Ziemię, ale krąży po orbicie wokół Ziemi,
2. ciało wylatuje poza zasięg pola grawitacyjnego Ziemi,
3. ciało opuszcza Układ Słoneczny i oddala się poza zasięg pola grawitacyjnego Słońca. W tym przypadku chodzi nam o prędkość ciała względem Ziemi (*Uwaga: temat nadobowiazkowy*).

Rozważymy tutaj szczegółowo tylko przypadek 3. Dwa pierwsze były omawiane w klasie pierwszej – tutaj tylko przypomnimy je oraz nieco pogłębimy naszą wiedzę na ten temat.

Ad 1. Przypomnijmy, jaką prędkość należy nadać ciału, aby mogło stać się sztucznym satelitą.



Rysunek 5.27: Przy odpowiednio dużej prędkości ciało okrąży Ziemię, stając się jej sztucznym satelitą

Współczesne rakiety startują z powierzchni Ziemi, wylatują poza obszar atmosfery otaczającej Ziemię i tam, na wysokości ponad 160 km, umieszczają satelity. Chodzi o to, aby opór powietrza nie zmniejszał prędkości satelity, co nieuchronnie spowodowałoby jego upadek. Rakieta nie od razu nabywa odpowiedniej prędkości, lecz rozpędza się na określonej drodze, pokonując zarówno przyciąganie ziemskie, jak i opór powietrza. Rachunki w takim przypadku są skomplikowane. Jednakże, jeżeli nas interesuje tylko prędkość na orbicie, to zagadnienie jest proste. Wystarczy przyrównać siłę dośrodkową z siłą grawitacji satelity na orbicie wokółziemskiej.

Przyjmijmy, że promień orbity wynosi r , zaś promień Ziemi R . Prędkość satelity na orbicie oznaczmy przez v . Ponieważ na orbicie działa na satelitę siła dośrodkowa równa sile grawitacji, więc

$$(\text{wzór 541}) F = \frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

Po przekształceniu równania (wzór 541 na stronie 245) otrzymujemy wzór na prędkość satelity na orbicie kołowej:

$$(\text{wzór 542}) v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Jeżeli satelita ma orbitę bliską Ziemi, to promień orbity r tylko nieznacznie różni się od promienia Ziemi R , wtedy we wzorze (wzór 542 na stronie 246) możemy podstawić $R = r$ i otrzymać wzór na tak zwaną *pierwszą prędkość kosmiczną*:

$$(\text{wzór 543}) v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}$$

Wykorzystaliśmy tu wzór (wzór 508 na stronie 233) dla małych wysokości, więc $g = \frac{GM}{R^2}$

$$(\text{wzór 544}) v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = 7,92 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Zatem pierwsza prędkość kosmiczna wynosi około 8 km/s (czyli jest prawie 9 razy większa od prędkości kuli karabinowej).



Rysunek 5.28: Takie rakiety służą do umieszczania satelitów na orbicie

Przykład 10

Prędkość satelity krążącego na orbicie na wysokości $h = 160$ km nieznacznie różni się od pierwszej prędkości kosmicznej ($v_1 = 8$ km/s). Łatwo się o tym przekonamy przeprowadzając następujące rozumowanie.

Promień orbity satelity wynosi $r = R + h$

Zgodnie z wzorem (wzór 542 na stronie 246) - prędkość satelity wyraża się wzorem

$$(\text{wzór 545}) v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

Przekształcimy ten wzór w ten sposób, aby pojawiła się w nim prędkość v_1

$$(\text{wzór 546}) v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM R^2}{R^2(R+h)}} = \sqrt{gR \frac{R}{R+h}} = v_1 \sqrt{\frac{R}{R+h}}$$

Skorzystaliśmy tu z wzoru (wzór 543 na stronie 246). Podstawiając dane: $h = 160$ km i $R = 6\,400$ km otrzymujemy, że

$$(\text{wzór 547}) v = 0,988 v_1$$

Oznacza to, że prędkość satelity na wysokości 160 km jest mniejsza tylko o 1,2% od obliczonej poprzednio pierwszej prędkości kosmicznej v_1 .

Pokażemy teraz ciekawą prawidłowość występującą w przypadkach ruchu ciała w polu centralnym (oto przykłady - kulista planeta wytwarza centralne pole grawitacyjne, ładunek punktowy wytwarza centralne pole elektrostatyczne).

Przyjrzyjmy się równaniu (wzór 541 na stronie 245):

$$(\text{wzór 548}) \frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

Po prostym przekształceniu równanie przybiera postać

$$(\text{wzór 549}) mv^2 = G \frac{Mm}{r}$$

Widzimy, że lewa strona tego równania odpowiada podwojonej energii kinetycznej satelity na orbicie, a prawa – jest równa wartości bezwzględnej energii potencjalnej satelity na orbicie. Widzimy więc, że występuje następująca prawidłowość: energia kinetyczna jest dwa razy mniejsza od bezwzględnej wartości energii potencjalnej. Zatem energia całkowita na orbicie jest równa

$$(\text{wzór 550}) E = E_k + E_p = G \frac{Mm}{2r} - G \frac{Mm}{r} = -G \frac{Mm}{2r} = \frac{E_p}{2} = -E_k$$

czyli **energia całkowita jest równa połowie energii potencjalnej oraz jest równa energii kinetycznej, ale z przeciwnym znakiem.**

Ta prawidłowość energetyczna występująca na orbicie w polu grawitacyjnym ma miejsce również dla elektronu krążącego po orbicie w atomie wodoru, według modelu Bohra.

Ad 2. Prędkość jaką należy nadać ciału na Ziemi, aby mogło uciec z pola grawitacyjnego Ziemi nazywamy *drugą prędkością kosmiczną* lub *prędkością ucieczki*. Oznaczmy ją przez v_2 .

Zmiana energii potencjalnej ciała przy jego oddalaniu się do nieskończoności nastąpi kosztem energii kinetycznej. Zatem

$$(\text{wzór 551}) \frac{mv_2^2}{2} = G \frac{mM}{R}$$

$$(\text{wzór 552}) \Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

$$(\text{wzór 553}) 0 - \frac{mv_2^2}{2} = - \left(0 - \left(-G \frac{mM}{R} \right) \right)$$

(przyjmujemy tu, że ciało po oddaleniu się do nieskończoności zatrzyma się, więc końcowa energia kinetyczna wynosi zero; energia potencjalna w nieskończoności także wynosi zero).

Stąd

$$(\text{wzór 554}) v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_1 \sqrt{2} = 7,92 \cdot 1,414 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Widzimy, że druga prędkość kosmiczna jest o $\sqrt{2}$ czyli około półtora razy większa od pierwszej prędkości kosmicznej. Należy zaznaczyć, że w naszych rozważaniach nie uwzględniliśmy pola grawitacyjnego Słońca. Dlatego v_2 jest prędkością, jaką należy nadać ciału, aby oddaliło się poza obszar przyciągania Ziemi, ale nie poza obszar grawitacji Słońca. Zatem ciało stanie się sztuczną planetoidą.

Ad 3. Najpierw obliczymy prędkość v_{2S} – prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego Słońca. Niech ciało znajduje się samotnie w odległości r_0 od Słońca równej promieniowi orbity Ziemi. Zatem energia kinetyczna ciała powinna być równa bezwzględnej wartości energii potencjalnej pochodzącej od Słońca:

$$(\text{wzór 555}) \frac{mv_{2S}^2}{2} = G \frac{M_S m}{r_0}$$

gdzie: M_S – masa Słońca. Stąd, stosując rozumowanie analogiczne do tego, które nas doprowadziło do wyznaczenia drugiej prędkości kosmicznej, otrzymujemy:

$$(\text{wzór 556}) v_{2S}^2 = 2G \frac{M_S}{r_0}$$

Łatwo możemy wykazać, że wyrażenie GM_S/r_0 jest równe v_0^2 – kwadratowi prędkości orbitalnej Ziemi, ponieważ Ziemia na orbicie wokółsłonecznej doznaje siły dośrodkowej równej sile przyciągania Ziemia–Słońce:

$$(\text{wzór 557}) \frac{Mv_0^2}{r_0} = G \frac{MM_S}{r_0^2}$$

Po uproszczeniu widzimy, że $v_0^2 = GM_S/r_0$. Wykorzystując ten wzór i (wzór 556 na stronie 248), otrzymamy

$$(\text{wzór 558}) v_{2S}^2 = 2G \frac{M_S}{r_0} = 2v_0^2 \quad \text{czyli} \quad v_{2S} = v_0 \sqrt{2}$$

W celu obliczenia prędkości v_3 jaką powinno mieć ciało wyrzucone z Ziemi, aby mogło uciec z Układu Słonecznego, napiszemy równanie energii, wykorzystując fakt, że ciało na Ziemi ma już prędkość v_0 i dla pokonania pola grawitacyjnego Słońca potrzebna mu tylko prędkość równa $v_{2S} - v_0$ (zakładamy tutaj, że prędkość wyrzutu, v_3 , jest równoległa do prędkości orbitalnej Ziemi v_0). Zatem

$$(\text{wzór 559}) \frac{mv_3^2}{2} = \frac{m(v_{2S} - v_0)^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2}$$

Lewa strona tego równania jest równa całkowitej energii kinetycznej ciała startującego z Ziemi. Pierwszy wyraz prawej strony to energia kinetyczna potrzebna do ucieczki z pola grawitacyjnego Słońca, drugi wyraz to energia

kinetyczna potrzebna do ucieczki z pola grawitacyjnego Ziemi. Stąd i z (wzór 558 na stronie 248) otrzymujemy ostatecznie

$$(\text{wzór 560}) \quad v_3 = \sqrt{v_0^2(\sqrt{2}-1)^2 + v_2^2}$$

Podstawiając tu $v_0 = 30 \text{ km/s}$ oraz $v_2 = 11,2 \text{ km/s}$, otrzymujemy, że trzecia prędkość kosmiczna wynosi

$$(\text{wzór 561}) \quad v_3 = 16,7 \text{ km/s}$$

Podkreślmy raz jeszcze, że jest to prędkość względem Ziemi, a nie względem Słońca.

Pytania i problemy

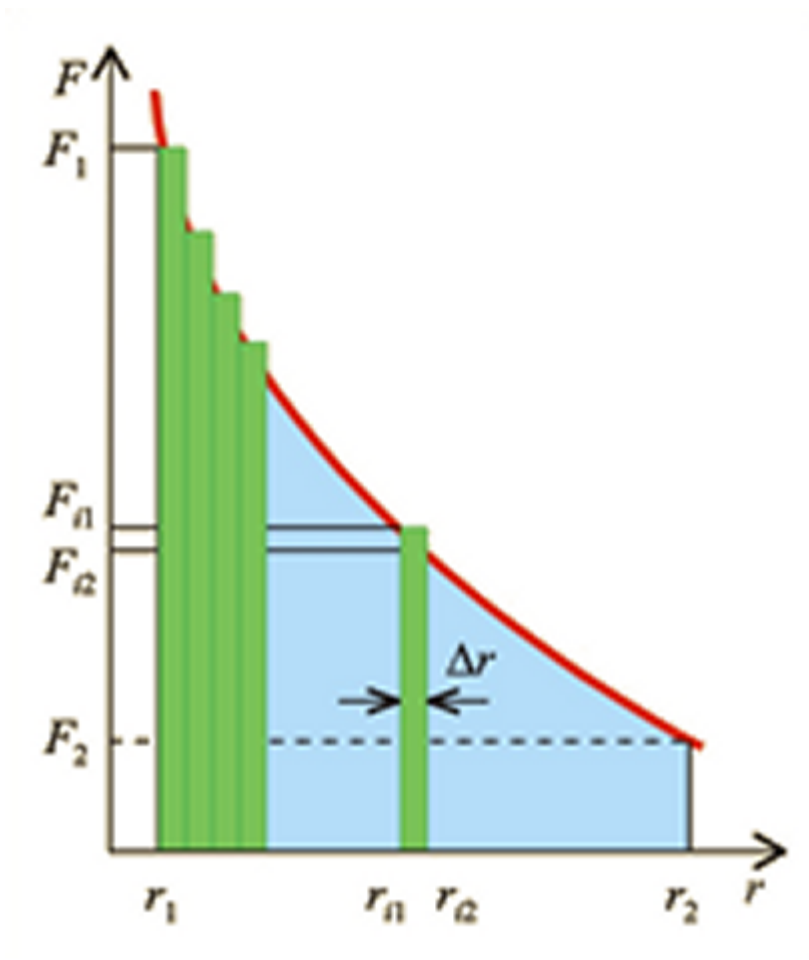
1. Co to jest pierwsza prędkość kosmiczna? Wyprowadź wzór na pierwszą prędkość kosmiczną, wychodząc z równości siły dośrodkowej z siłą grawitacji.
2. Co to jest druga prędkość kosmiczna? Z jaką energią należy porównać energię kinetyczną ciała, aby była ona wystarczająca dla uzyskania drugiej prędkości kosmicznej?
3. Czy umiałbyś wyprowadzić wzór na drugą prędkość kosmiczną korzystając z wyniku zadania 6. z rozdziału 5.8 *Energia potencjalna w polu grawitacyjnym* na stronie 239?
4. Co to jest trzecia prędkość kosmiczna? Z jaką energią należy porównać energię kinetyczną ciała, aby była ona wystarczająca dla uzyskania trzeciej prędkości kosmicznej?
5. Wzór (wzór 554 na stronie 248) można przekształcić do postaci:

$$(\text{wzór 562}) \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Jak byś zinterpretował ten wzór? **Wskazówka:** porównaj wzór (wzór 562 na stronie 249) ze wzorem (wzór 543 na stronie 246) i (wzór 542 na stronie 246).

5.D1 Dodatek: Wyprowadzenie wzoru na pracę w polu grawitacyjnym - temat nadobowiązkowy

Przedstawimy tutaj dowód na prawdziwość wzoru (wzór 516 na stronie 237). W celu obliczenia pola powierzchni $ACDE$ (Rysunek 5.22: *Praca siły w polu grawitacyjnym* na stronie 237b), będącego miarą pracy W_{12} , pokryjemy całą powierzchnię wąskimi paskami, jak na Rysunek 5.29: *Suma pól powierzchni wąskich pasków jest równa polu całej powierzchni pod krzywą* na stronie 250. Suma pól powierzchni tych pasków jest równa polu pod krzywą z tym większą dokładnością, im węższe paski weźmiemy pod uwagę. Ponieważ paski mogą być dowolnie małej szerokości Δr , więc sumowanie ich daje możliwość obliczenia pola całej powierzchni z dowolnie dużą dokładnością.



Cała praca siły F na drodze od r_1 do r_2 jest równa sumie prac na odcinkach drogi Δr

Rysunek 5.29: Suma pól powierzchni wąskich pasków jest równa polu całej powierzchni pod krzywą

Praca ΔW_i siły F_{i_1} na drodze Δr , na wykresie jest przedstawiona jako pole powierzchni pojedynczego prostokątnego paska (o kolejnym numerze i). Zatem

$$\text{(wzór 563) } \Delta W_i = F_{i_1} \Delta r$$

Podstawiając tu wyrażenie na siłę grawitacji $F_{i_1} = \frac{GMm}{r_{i_1}^2}$, otrzymamy

$$\text{(wzór 564) } \Delta W_i = GMm \frac{\Delta r}{r_{i_1}^2}$$

Wykażemy teraz, że dla małych wartości Δr słuszny jest wzór:

$$\text{(wzór 565) } \frac{\Delta r}{r_{i_1}^2} \approx \frac{1}{r_{i_1}} - \frac{1}{r_{i_2}}$$

Na rysunku *Rysunek 5.29*: Suma pól powierzchni wąskich pasków jest równa polu całej powierzchni pod krzywą na stronie 250 widzimy, że $r_{i_2} = r_{i_1} + \Delta r$, zatem

$$\text{(wzór 566) } \frac{1}{r_{i_1}} - \frac{1}{r_{i_2}} = \frac{1}{r_{i_1}} - \frac{1}{r_{i_1} + \Delta r} = \frac{r_{i_1} + \Delta r - r_{i_1}}{r_{i_1}(r_{i_1} + \Delta r)} = \frac{\Delta r}{r_{i_1}(r_{i_1} + \Delta r)} = \frac{\Delta r}{r_{i_1}^2 \left(1 + \frac{\Delta r}{r_{i_1}}\right)}$$

Ponieważ Δr jest małe (czyli $\frac{\Delta r}{r_{i1}} \approx 0$), więc mianownik tego wzoru jest w przybliżeniu równy r_{i1}^2 , zatem jest słuszny wzór (wzór 565 na stronie 250).

Pracę ΔW_i wyrażoną za pomocą wzoru (wzór 564 na stronie 250) możemy, korzystając ze wzoru (wzór 565 na stronie 250), przedstawić następująco

$$(\text{wzór 567}) \quad \Delta W_i \approx GMm \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right)$$

Obecnie sumowanie wszystkich małych prac ΔW_i nie sprawi nam żadnych trudności. Cała praca siły grawitacji na drodze od r_1 do r_2 jest równa

$$\begin{aligned} W_{12} &\approx \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots + \Delta W_i + \dots + \Delta W_n = \\ (\text{wzór 568}) \quad &= GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) + GMm \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right) + GMm \left(\frac{1}{r_{31}} - \frac{1}{r_{32}} \right) + \dots + \\ &+ GMm \left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right) + \dots + GMm \left(\frac{1}{r_{n1}} - \frac{1}{r_{n2}} \right) \end{aligned}$$

Wyciągając wspólny czynnik GMm przed nawias, zauważymy, że wszystkie pośrednie wartości postaci $\frac{1}{r_{i1}}$ i $\frac{1}{r_{i2}}$ zredukują się (ponieważ $r_{(i-1)2} = r_{i1}$) i pozostaną tylko skrajne $\frac{1}{r_1}$ i $\frac{1}{r_2}$:

$$(\text{wzór 569}) \quad W_{12} \approx GMm \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right) + \left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}} \right) + \left(\frac{1}{r_{31}} - \frac{1}{r_{32}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_{n1}} - \frac{1}{r_{n2}} \right) \right] = GMm \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ponieważ liczba pasków n może być dowolnie duża, więc suma ta przybliży nam pracę W_{12} z dowolnie dużą dokładnością. W ten sposób udowodniliśmy słuszność wzoru (wzór 516 na stronie 237).

5.D2 Dodatek: Energia potencjalna w polu grawitacyjnym - temat nadobowiązkowy

Wykażemy, że przybliżony wzór (wzór 519 na stronie 239) na energię potencjalną ciała znajdującego się na wysokości h nad Ziemią wynika z dokładnego wzoru (wzór 522 na stronie 239). Ciało o masie m znajdujące się na powierzchni Ziemi ma energię potencjalną E_{pR} , która zgodnie ze wzorem (wzór 522 na stronie 239) wynosi

$$(\text{wzór 570}) \quad E_{pR} = -G \frac{Mm}{R}$$

gdzie R jest promieniem Ziemi. Natomiast jeśli znajduje się na wysokości h nad powierzchnią Ziemi, czyli w odległości $R+h$ od środka Ziemi, to jego energia potencjalna wynosi

$$(\text{wzór 571}) \quad E_{p(R+h)} = -G \frac{Mm}{R+h}$$

Energia E_p jest równa różnicy tych dwóch energii: $E_p = E_{p(R+h)} - E_{pR}$ czyli

$$(\text{wzór 572}) \quad E_p = -G \frac{Mm}{R+h} + G \frac{Mm}{R} = G \frac{Mmh}{R(R+h)} = G \frac{Mmh}{R^2 \left(1 + \frac{h}{R} \right)}$$

Jeżeli wysokość h jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi, to możemy przyjąć, że

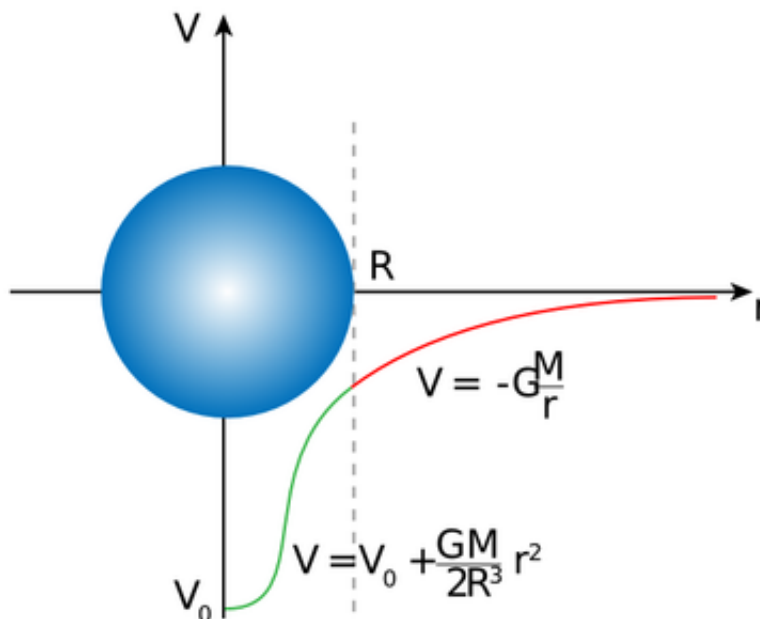
$$(\text{wzór 573}) \quad 1 + \frac{h}{R} \approx 1$$

Korzystając ze wzoru wynikającego z przyrównania siły ciężkości, mg , na powierzchni Ziemi z siłą grawitacji $mg = G \frac{mM}{R^2}$ otrzymujemy, że $g = G \frac{M}{R^2}$. Zatem zgodnie z (wzór 572 na stronie 251) mamy

$$(\text{wzór 574}) \quad E_p \approx G \frac{Mmh}{R^2} = mgh$$

Wykazaliśmy, że wzór $E_p = mgh$ wynika z dokładnego wzoru (wzór 522 na stronie 239).

Na rysunku *Rysunek 5.30: Ilustracja przybliżenia wzorów na energię potencjalną* na stronie 252 kolorem czarnym pokazano krzywą odpowiadającą wzorowi (wzór 564 na stronie 250). Kolorem niebieskim pokazano krzywą, która obrazuje przebieg energii potencjalnej (w zależności od r), gdy punkt odniesienia znajduje się na powierzchni Ziemi. Natomiast kolorem zielonym oznaczono linię wyrażającą zależność (wzór 563 na stronie 250). Widać, że dla małych h linia zielona prawie pokrywa się z krzywą niebieską, co ilustruje nasze przybliżenie.



Rysunek 5.30: Ilustracja przybliżenia wzorów na energię potencjalną

Rozdział

6

Termodynamika I. Parametry termodynamiczne i teoria kinetyczna materii

Podrozdziały:

- [6.1 Ciśnienie i hydrostatyka](#)
- [6.2 Temperatura](#)
- [6.3 Równanie Clapeyrona](#)
- [6.4 Izoprocesy gazu doskonałego](#)
- [6.5 Doświadczenie „Izobara”](#)
- [6.6 Rozszerzalność cieplna płynów i ciał stałych](#)
- [6.7 Podstawowe pojęcia teorii kinetycznej gazów](#)
- [6.8 Podstawowe równanie teorii kinetycznej gazów a równanie Clapeyrona](#)
- [6.9 Wymiana ciepła](#)

Rysunek 6.1: Wirtualny nauczyciel

W dotychczasowych naszych rozważaniach zajmowaliśmy się ciałami makroskopowymi, nie uwzględniając własności wynikających z ich budowy wewnętrznej. Jednakże ciało makroskopowe, na przykład 1 cm^3 gazu, zawiera olbrzymią liczbę cząsteczek. Byłoby bardzo trudno opisywać zachowanie się gazu, śledząc ruch pojedynczych cząsteczek. Dlatego wprowadza się takie wielkości makroskopowe, jak ciśnienie, gęstość, temperatura, ciepło i energia wewnętrzna. Wielkości te nazywają się *wielkościami termodynamicznymi*. Nauka badająca wzajemne związki między tymi wielkościami nazywa się *termodynamiką*.

Przekonasz się, że wielkości makroskopowe: ciśnienie, gęstość, temperatura, ciepło i energia wewnętrzna są wielkościami statystycznymi charakteryzującymi cały zbiór cząsteczek. W rozdziale tym poznasz, w jaki sposób mechanika newtonowska zastosowana do układów dużej liczby cząsteczek wyjaśnia pojęcia termodynamiczne i w jaki sposób prawa termodynamiki można wyprowadzić z mechaniki Newtona. Mikroskopowe, cząsteczkowe podejście do termodynamiki nazywamy *teorią kinetyczno-molekularną*.

Termodynamika jest podstawą wielu dziedzin techniki zajmujących się przede wszystkim wykorzystaniem materiałów. Stanowi ona podstawę budowy wielu typów silników cieplnych oraz urządzeń chłodniczych.

6.1 Ciśnienie i hydrostatyka

Podstawowe zagadnienia dotyczące hydrostatyki były omawiane w gimnazjum. Przypomnijmy je.

Do podstawowych pojęć w hydrostatyce zalicza się *ciśnienie*. Pojęcie ciśnienia stosuje się przede wszystkim do płynów, to znaczy do cieczy i gazów. Ciśnienie p jest to wielkość skalarna, która jest równa wartości siły działającej na jednostkę powierzchni prostopadle do tej powierzchni

$$(\text{wzór 575}) \quad p = \frac{F}{\Delta S}$$

gdzie F oznacza wartość siły działającej na powierzchnię ΔS , prostopadle do tej powierzchni. Jednostką ciśnienia jest paskal (Pa).

$$(\text{wzór 576}) \quad 1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2}$$

Jednostką większą jest bar (bar). $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Należy zaznaczyć, że ciśnienie jest wielkością skalarną (we wzorze ([wzór 575](#) na stronie 254) występuje wartość siły, a nie siła jako wektor).

Ⓡ **Zamapiętać:**

Ciśnienie gazu

Ciśnienie p gazu jest to wielkość skalarna, która jest równa wartości siły F działającej na jednostkę powierzchni prostopadle do tej powierzchni.

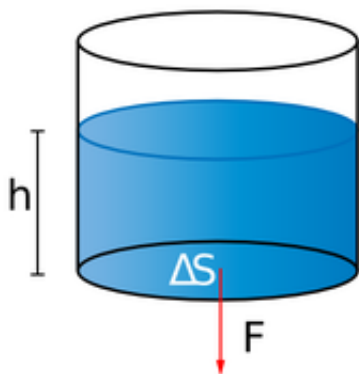
$$(\text{wzór 577}) \quad p = \frac{F}{\Delta S}$$

gdzie F oznacza wartość siły działającej na powierzchnię ΔS , prostopadle do tej powierzchni.

Na [Rysunek 6.2: Słup cieczy o wysokości \$h\$ wywiera parcie \$F\$ na dno naczynia](#) na stronie 255 przedstawiony jest słup cieczy o wysokości h w zamkniętym naczyniu cylindrycznym o powierzchni podstawy ΔS . Załóżmy, że ciecz ma gęstość ρ . Siła F wywierana na dno naczynia (tzw. *parcie*) jest równa ciężarowi słupa cieczy o wysokości h , więc $F = mg$, gdzie m jest jego masą $m = \rho V$ (ρ - gęstość cieczy, V - objętość słupa cieczy). $V = h \Delta S$ (patrz [Rysunek 6.2: Słup cieczy o wysokości \$h\$ wywiera parcie \$F\$ na dno naczynia](#) na stronie 255), więc $m = \rho V = \rho h \Delta S$. Zatem siła $F = mg = \rho h \Delta S g$ i zgodnie ze wzorem ([wzór 575](#) na stronie 254) na dno naczynia wywierane jest ciśnienie

$$(\text{wzór 578}) \quad p = \rho g h$$

zwane *ciśnieniem hydrostatycznym*.



Rysunek 6.2: Słup cieczy o wysokości h wywiera parcie F na dno naczynia

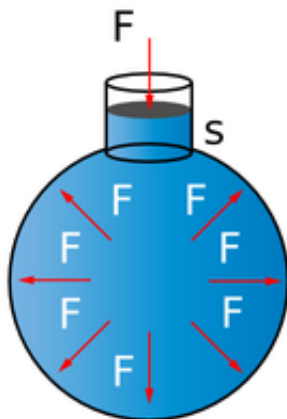
Weźmy pod uwagę zamknięty w naczyniu płyn, na który wywierane jest ciśnienie zewnętrzne (np. wywierane za pomocą tłoka - [Rysunek 6.3: Ciśnienie zewnętrzne w płynie zamkniętym w naczyniu jest przekazywane jednakowo na ścianki naczynia](#) na stronie 256). Płyn wywiera ciśnienie na ścianki naczynia, ale można mówić również o ciśnieniu wewnątrz płynu.

Pomijając siłę ciężkości, możemy sformułować treść prawa Pascala:

Ⓡ Zamapiętać:

Prawo Pascala

Ciśnienie zewnętrzne w płynie zamkniętym w naczyniu jest przekazywane jednakowo na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia (bez żadnych strat).



Rysunek 6.3: Ciśnienie zewnętrzne w płynie zamkniętym w naczyniu jest przekazywane jednakowo na ścianki naczynia

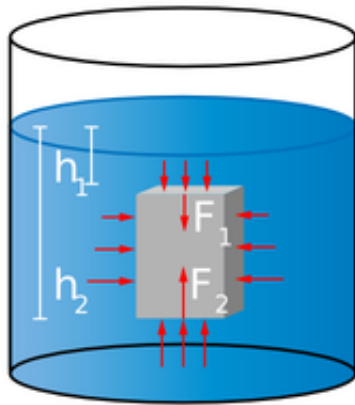
Powyzsze sformułowanie prawa Pascala nie uwzględnia ciśnienia hydrostatycznego.

W przypadku, gdy na ciecz nie jest wywierane ciśnienie zewnętrzne, to i tak w cieczy panuje ciśnienie hydrostatyczne. Niżej położone warstwy cieczy doznają ciśnienia hydrostatycznego wywieranego przez warstwy położone wyżej.

Wyobraźmy sobie ciało w kształcie prostopadłościanu zanurzonego w cieczy (*Rysunek 6.4: Siły parcia cieczy na jednostkowe powierzchnie ciała zanurzonego w cieczy* na stronie 257). Zastosujemy teraz prawo Pascala uwzględniające ciśnienie hydrostatyczne. Zatem - na górną ściankę prostopadłościanu wywierane jest ciśnienie hydrostatyczne $p_1 = \rho gh_1$ i siła zwrócona w dół

$F_1 = p_1 S$ (S - pole powierzchni ścianki górnej i dolnej). Na dolną ściankę działa ciśnienie hydrostatyczne $p_2 = \rho gh_2$ i siła $F_2 = p_2 S$ zwrócona do góry. Siły działające na boczne ścianki równoważą się. Siła F_2 jest większa od siły F_1 , zatem siła wypadkowa jest zwrócona do góry,

$$(\text{wzór 579}) F_w = F_2 - F_1$$



Cienkie strzałki oznaczają siły parcia cieczy na jednostkowe powierzchnie ciała zanurzonego w cieczy. Na górną ściankę działa siła F_1 , na dolną ściankę działa siła F_2 , $F_2 > F_1$. Siły działające na boczne ścianki równoważą się

Rysunek 6.4: Siły parcia cieczy na jednostkowe powierzchnie ciała zanurzonego w cieczy

Ta wypadkowa siła nosi nazwę *siły wyporu*.

Zgodnie ze wzorami ([wzór 575](#) na stronie 254) - ([wzór 579](#) na stronie 256):

$$(\text{wzór 580}) F_w = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g (h_2 - h_1) S = \rho V g$$

(iloczyn $(h_2 - h_1)S$ wyraża objętość V ciała zanurzonego w cieczy).

$\rho V = m_c$ oznacza masę wypartej cieczy (czyli - masę cieczy, która mogła by się zmieścić w objętości V). Zatem siła wyporu wyrazi się wzorem

$$(\text{wzór 581}) F_w = m_c g$$

siła wyporu działająca na ciało zanurzone w cieczy jest równa ciężarowi wypartej cieczy. To stwierdzenie jest treścią *prawa Archimedesesa*.

Jest ono nieodzowną konsekwencją prawa Pascala. Dotyczy zarówno cieczy, jak i gazów, i w ogólnej postaci brzmi:

® **Zamapiętać:**

Prawo Archimedesesa

ciało zanurzone w płynie jest wypychane w górę siłą równą ciężarowi wypartego płynu. Stąd wynika, że ciało wypiera ilość cieczy ważącą tyle co ciało, gdy ciało pływa swobodnie na powierzchni cieczy.

Definicja ciśnienia (*wzór 575* na stronie 254) stosuje się nie tylko do cieczy, ale również do gazów. Jeżeli mamy gaz zamknięty w pewnej objętości, na przykład w baloniku, to gaz ten wywiera ciśnienie na powierzchnię balonika. Jeżeli wewnątrz balonika umieścilibyśmy jakiś mały przedmiot, to gaz wywierałby na wszystkie ścianki tego przedmiotu jednakowe ciśnienie. Powietrze atmosferyczne wywiera ciśnienie na powierzchnię Ziemi, jak również na wszystkie ciała. To ciśnienie nazywamy *ciśnieniem atmosferycznym*.

Gazy, w przeciwieństwie do cieczy, są ściśliwe, to znaczy, że pod wpływem ciśnienia zmieniają swoją objętość. Gęstość cieczy nie zależy od ciśnienia, ponieważ ta sama ilość cieczy zajmuje (w stałej temperaturze) zawsze tę samą objętość. Natomiast gęstość gazu nie jest stała i zależy od ciśnienia. Dlatego powietrze ma różną gęstość na różnych wysokościach. Do ciśnienia atmosferycznego możemy zastosować wzór (*wzór 578* na stronie 254) $p = \rho gh$ pod warunkiem, że weźmiemy średnią gęstość atmosfery. Atmosfera ziemską rozciąga się nad powierzchnią Ziemi na wysokość ponad 100 km. Słup powietrza wywiera na powierzchnię Ziemi ciśnienie, które ulega wahaniom zależnym od warunków atmosferycznych. Jako wartość średnią ciśnienia atmosferycznego panującego na poziomie morza przyjęto

$$(\text{wzór 582}) p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Tę wartość ciśnienia nazwano 1 atmosferą (1 atm), $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Atmosfera jest często stosowana, jednakże zarządzenie GUM z dnia 17.01.1994 roku (Dz. Urzędu Miar i Probiernictwa nr 2 z dnia 25.02.94) nie zaleca stosowania tej jednostki. Dopuszcza natomiast stosowanie jednostki pod nazwą bar: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. Jest to wielkość zbliżona do 1 atm.

Pytania i problemy

1. Podaj definicję ciśnienia (wzór i jednostkę). Do jakich wielkości – skalarnych, czy wektorowych – zaliczamy ciśnienie?
2. Zdefiniuj ciśnienie hydrostatyczne. Podaj wzór.
3. Sformułuj prawo Pascala. Na wybranym przykładzie wyjaśnij zastosowanie tego prawa.
4. Wiadomo, że atmosfera ziemską rozciąga się do wysokości około 100 km. Jaka wysokość miałaby warstwa atmosfery, gdyby jej gęstość była stała i równa obecnej na poziomie morza w warunkach normalnych:
 $\rho_{pow} = 1,255 \text{ kg/m}^3$, przy obecnym normalnym ciśnieniu atmosferycznym $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$?
5. Podaj treść prawa Archimidesa.
6. Woda ma gęstość równą 1 g/cm^3 . Lód ma gęstość równą $0,9 \text{ g/cm}^3$. Na rzece płynie kora o grubości $0,5 \text{ m}$. Ile centymetrów kry wystaje nad powierzchnią wody?
7. Wyjaśnij, dlaczego ołów (mający gęstość $11,5 \text{ g/cm}^3$) tonie w wodzie. Czy ołów wrzucony do rtęci będzie również tonął (rtęć ma gęstość $13,6 \text{ g/cm}^3$)?

6.2 Temperatura

Z pojęciem temperatury spotykamy się na co dzień. Każdy z nas ma odczucie, że coś jest „cieple” lub „zimne”. Jednakże te odczucia są subiektywne i zawodne, ponieważ zależą od stanu otaczającego nas środowiska. Oto typowe doświadczenie wykazujące nieobiektywność naszych odczuć temperatury. Postaw obok siebie trzy miski. Do miski z lewej strony nalej wody zimnej, do miski z prawej strony nalej wody gorącej (ale nie za bardzo, by można było tam bezpiecznie włożyć rękę!), a do środkowej miski nalej w równych ilościach wody zimnej i gorącej. Wtedy w środkowej misce będzie woda letnia, o temperaturze pośredniej. Włóż teraz rękę lewą do wody zimnej, a prawą do gorącej i potrzymaj je przez pewien czas. Następnie włóż obie ręce do miski z letnią wodą. Przekonasz się, że dla ręki lewej ta sama woda będzie ciepła, podczas gdy dla ręki prawej – będzie zimna.



Rysunek 6.5: a) Włóż lewą rękę do wody zimnej, a prawą do gorącej i potrzymaj je przez pewien czas; b) następnie włóż obie ręce do miski z wodą letnią



Konieczne jest zatem jakieś obiektywne kryterium w celu określenia pojęcia temperatury. To właśnie *pomiar* pozwala na ustanowienie takiego obiektywnego kryterium.

Początkowo posługiwano się jakościowym pojęciem temperatury – mówiono o temperaturze wyższej lub niższej, bez podawania miary lub liczby. Próby obiektywnego pomiaru i ilościowego ujęcia temperatury miały miejsce w XVII wieku (Galileusz - Galileo Galilei, Evangelista Torricelli, Otto v. Guericke i in). W XVIII wieku Gabriel Fahrenheit oraz Anders Celsius przyjęli, że zmiana temperatury jest proporcjonalna do zmiany objętości cieczy (rtęci, alkoholu), która zachodzi z powodu zjawiska zwanego rozszerzalnością termiczną ciał, o którym będziemy mówić w rozdziale [6.6 Rozszerzalność cieplna płynów i ciał stałych](#) na stronie 277. Wskazania termometrów zbudowanych na tej zasadzie są zbliżone do naszego sensorycznego wrażenia temperatury.

Na podstawie wielu doświadczeń stwierdzono, że najlepszą obiektywną miarą temperatury jest ta zdefiniowana w teorii kinetycznej gazów doskonałych. Zagadnienie to opiszemy w rozdziale [6.7 Podstawowe pojęcia teorii kinetycznej gazów](#) na stronie 284.

Bezwzględna i praktyczna skala temperatury, Kelwin i stopień Celsjusza

W praktyce życia codziennego temperaturę podaje się zwykle w skali Celsjusza. Temperatura $t = 0^{\circ}\text{C}$ odpowiada punktowi zamarzania, zaś $t = 100^{\circ}\text{C}$ – punktowi wrzenia wody destylowanej pod normalnym ciśnieniem $1\text{ atm} = 101\ 325\ \text{Pa}$.

Kelwin (K), jednostka temperatury w skali bezwzględnej, jest równy stopniowi Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$), gdy mowa jest o **przyrostach** temperatury. Natomiast punkty zerowania obu skal są różne. W skali bezwzględnej nie ma temperatur ujemnych. Zero jest najniższą temperaturą. Dla odróżnienia skal temperaturę oznacza się przez t w skali Celsjusza, a przez T w skali Kelvina.

® **Zamapiętać:**

Skale temperatury, Kelwin i stopień Celsjusza

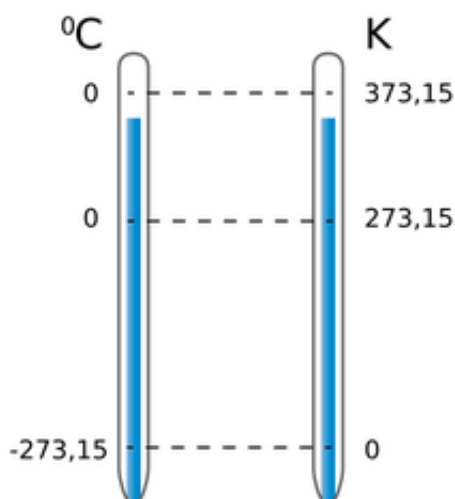
Temperaturę w skali Kelvina wyraża się wzorem

$$(\text{wzór 583}) T = 273,15 + t$$

gdzie t oznacza temperaturę w skali Celsjusza

Jeden Kelvin (K) jest równy jednemu stopniowi Celsjusza ($^{\circ}\text{C}$)

Temperatura krzepnięcia wody (topnienia lodu) w bezwzględnej skali temperatur wynosi 273,15 K. Zatem zero bezwzględne odpowiada $-273,15^{\circ}\text{C}$. Temperatura wrzenia wody (przy normalnym ciśnieniu) wynosi, odpowiednio, 373,15 K. Punkty służące do skalowania temperatury, takie jak punkt topnienia lodu i punkt wrzenia wody, nazywamy punktami charakterystycznymi. Oprócz wymienionych wyżej dwóch punktów charakterystycznych można ustalić jeszcze wiele innych. Jednym z nich jest tzw. punkt potrójny wody, przy którym trzy stany skupienia wody – lód, ciecz i para są w równowadze. Punkt ten odgrywa ważną rolę, ponieważ daje się ustalić z dużą dokładnością. Zagadnienie to omówimy bliżej, gdy będziemy rozważać przemiany fazowe różnych substancji w rozdziale [8.3 Przemiany fazowe](#) na stronie 357.



Rysunek 6.6: Porównanie skal temperatur Celsjusza i Kelvina

Po wyznaczeniu punktów charakterystycznych można porównać obydwie skale temperatur ([Rysunek 6.6: Porównanie skal temperatur Celsjusza i Kelvina](#) na stronie 261). Zależność między liczbowymi wartościami temperatury w obydwu skalach jest następująca:

$$(\text{wzór 584}) T = 273,15 + t$$

Bardzo niskie i bardzo wysokie temperatury

Najniższą temperaturą jest zero bezwzględne. W żadnym eksperymencie nie udało się uzyskać tej temperatury. Dotychczas, przy zastosowaniu specjalnych, bardzo skomplikowanych metod (stosując technikę laserową), osiągnięto temperaturę różniącą się od zera bezwzględnego tylko o $2,4 \cdot 10^{-11}$ K.

W temperaturze zera bezwzględnego powinien ustać wszelki ruch cząsteczek. Jednakże, według mechaniki kwantowej (teorii powstałej w XX wieku, odnoszącej się głównie do mikroświata i różniącej się zasadniczo od mechaniki Newtona), najniższa energia w tej temperaturze nie odpowiada bezruchowi, lecz wykonywaniu przez cząsteczki tak zwanych *drgań zerowych*. Nie istnieje żaden sposób na odebranie cząsteczkom energii drgań zerowych. Obecność drgań zerowych potwierdzono doświadczalnie. Prawo gazów doskonałych, które omówimy dalej, można stosować dla temperatur dostatecznie odległych od zera bezwzględnego.

Materiały w skrajnych warunkach, tzn. w warunkach bardzo niskich i bardzo wysokich temperatur, skrajnie wysokich ciśnieni itp., wykazują ciekawe własności (przez bardzo niskie temperatury rozumiemy temperatury poniżej kilku kelwinów).

W temperaturze mało różniącej się od zera bezwzględnego wszystkie substancje (z wyjątkiem helu) znajdują się w stanie stałym, nawet takie jak tlen czy wodór, w przypadku których jesteśmy przyzwyczajeni, że zawsze są gazami. Natomiast ciekły hel uzyskuje niezwykłą właściwość – *nadpłynność*, polegającą na tym, że przepływa przez wąskie szczeliny, nie wykazując tarcia wewnętrznego, czyli tak zwanej lepkości.

Wiele ciał stałych w bardzo niskich temperaturach wykazuje *nadprzewodnictwo elektryczne*, polegające na zaniku oporności elektrycznej dla prądu stałego. Istnienie tego zjawiska stwarza nowe, niezwykle możliwości dla techniki, np. wytwarzanie pól magnetycznych o dużej gęstości energii oraz wytworzenie doskonałej pamięci w urządzeniach liczących (prąd raz wprowadzony do kołowego nadprzewodnika może krążyć w nim praktycznie wiecznie). W wyniku intensywnych badań w tej dziedzinie osiągnięto ostatnio znaczne podniesienie *temperatury krytycznej*, poniżej której występuje nadprzewodnictwo. Istnieją stopy, dla których temperatura ta wynosi 20 K, a nawet znacznie więcej.

Na drugim krańcu skali znajdują się temperatury wysokie. Temperatury rzędu dziesiątków tysięcy i milionów kelwinów występują podczas wybuchów jądrowych i termojądrowych, jak również we wnętrzu gwiazd. Wysokie temperatury można uzyskać w wiązce lasera o dużej energii. Materia w tych temperaturach występuje pod postacią nowego stanu materii – *plazmy*. Plazma charakteryzuje się wieloma ciekawymi własnościami, do których należy zaliczyć silne oddziaływanie z polem elektrycznym i magnetycznym, gdyż cząstki plazmy nie są obojętne elektrycznie i mają ładunki. Oddziaływanie między cząstkami naładowanymi w plazmie powoduje, że staje się ona swego rodzaju ośrodkiem sprężystym, w którym łatwo powstają i rozchodzą się różne fale, bardziej różnorodne niż w zwykłym gazie składającym się z cząsteczek nienaładowanych elektrycznie.

Pytania i problemy

1. Jaka cecha rtęci jest wykorzystywana do pomiaru temperatury w termometrach rtęciowych?
2. Czym są punkty charakterystyczne na skali temperatury? Przedstaw przynajmniej dwa takie punkty.
3. Opisz sposób postępowania w celu przeliczenia skali Celsjusza na skalę Kelvina. Ilu stopniom Celsjusza odpowiada zero Kelvina?
4. Co nazywamy nadprzewodnictwem i nadciekłością? W jakich temperaturach te zjawiska występują?
5. Co to jest plazma? Jakie temperatury są konieczne do osiągnięcia stanu plazmy?

6.3 Równanie Clapeyrona

Przedstawimy teraz ważne równanie, jedno z podstawowych praw termodynamiki opisujące zachowanie się gazu – *równanie Clapeyrona*. Jednakże, najpierw przypomnimy (z lekcji chemii) dwa pojęcia: *mol* i *liczba Avogadra*.

Mol i liczba Avogadra

W celu odważania jednakowej liczby atomów lub cząsteczek określonego pierwiastka chemicznego wprowadzono pojęcie tzw. liczby Avogadra N_A . Jest to, z dość dobrym przybliżeniem, liczba atomów wodoru zawarta w 1g tego

pierwiastka. Jest to olbrzymia liczba, bo wiadomo, że masa jednego atomu wodoru to tylko $1,67 \cdot 10^{-24}$ g. Zatem liczba ta wynosi $1 \text{ g} / 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 6 \cdot 10^{23}$. Taką wartość w przybliżeniu ma liczba Avogadra N_A . Dokładniej:

Liczba Avogadra jest to liczba drobin zawartych w jednym molu jakiegokolwiek substancji:

$$(\text{ wzór 585 }) N_A = (6,02252 \pm 0,00028) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 6,02252 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

! **Ważne:** *Drobina* to specyficzny element strukturalny danej substancji - obiekt uznany za elementarny (atom, cząsteczka itp.).

i **Wskazówka:**

Liczba Avogadra

Dlaczego przyjęto tak dziwną, trudną do zapamiętania liczbę: $6,00252 \cdot 10^{23}$ jako jednostkę liczebności substancji; dlaczego nie przyjęto jakiejś okrągłej liczby, np. 10^{20} ?

W przybliżeniu liczba Avogadra jest równa liczbie atomów w jednym gramie najlżejszego pierwiastka wodoru. Dokładnie tyle atomów znajduje się w 12 gramach 12 razy cięższych atomów izotopu węgla ^{12}C .

Widzimy więc, że wybór liczby Avogadra wynika ze względów praktycznych, gdyż łatwiej jest odmierzać tak dużą liczbę atomów, czy cząsteczek mierząc ich łączną masę, niż licząc je, co by było bardzo trudne.

Zauważmy, że jednostką liczby Avogadra jest mol^{-1} co oznacza, że ta liczba drobin (atomów, czy cząsteczek) mieści się w jednym molu dowolnej substancji. Łatwiej zrozumieć tę jednostkę, gdy pomyśli się o niej jako o „sztuk (atomów czy cząsteczek) na mol”.

Mol jest jednostką podstawową *liczebności substancji*. Przez liczebność substancji należy rozumieć porcję substancji zawierającą ustaloną liczbę drobin, z których składa się ta substancja.

! **Ważne:**

Jednostka liczebności substancji – 1 mol jest to taka liczebność danej substancji, która zawiera tyle samo drobin, ile atomów zawartych jest w masie 0,012 kg izotopu węgla ^{12}C

Oprócz mola stosuje się jednostki krotne, w szczególności *kilomol* (kmol):

$$(\text{ wzór 586 }) 1 \text{ kmol} = 10^3 \text{ mol}$$

Masa jednego mola substancji nazywa się *masą molową* tej substancji. Liczbowo jest równa masie cząsteczkowej (drobinowej). Masę cząsteczkową można wyrazić wzorem:

$$(\text{ wzór 587 }) \mu = m_0 N_A$$

gdzie m_0 – masa cząsteczki (ogólnie - masa pojedynczego elementu strukturalnego, np. – atomu, danej substancji).

Przykładowo:

- wódór H_2 - masa molowa = 2 g/mol (pojedynczy element strukturalny: cząsteczka dwuatomowa),
- helu He - masa molowa = 4 g/mol (pojedynczy element strukturalny: atom),
- węgiel ^{12}C - masa molowa = 12 g/mol (pojedynczy element strukturalny: atom)

(zatem w porcji 12g węgla ^{12}C mieści się tyle samo atomów co w 4 g helu i tyle samo atomów węgla co cząsteczek w 2 g wodoru).

Liczbę moli n określonej porcji substancji o masie m można wyrazić następująco:

$$(\text{ wzór 588 }) n = \frac{N}{N_A}$$

Ponieważ $\mu = m_0 N_A$ oraz $m = m_0 N$ (gdzie N – liczba cząsteczek), więc n wyraża się również jako

$$(\text{ wzór 589 }) n = \frac{m}{\mu}$$

Teraz, dzięki znajomości tych wzorów, możemy bliżej opisać równanie stanu gazu doskonałego – tzw. równanie Clapeyrona.

Równanie Clapeyrona

$$(\text{wzór 590}) pV = nRT$$

Równanie to wiąże ze sobą ciśnienie p i objętość V z temperaturą T gazu, gdzie: n – liczba moli, R – uniwersalna stała gazowa:

$$(\text{wzór 591}) R = (8,31430 \pm 0,00012) \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol}) = 8,3143 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{kmol})$$

Równanie to nazywa się równaniem stanu gazu doskonałego. Stosuje się ono do większości gazów i zgadza się dobrze z doświadczeniem dla warunków niezbyt odbiegających od warunków normalnych (ciśnienie w granicach do kilku barów, temperatura od minus kilkudziesięciu do plus kilkuset stopni Celsjusza).

Ⓡ **Zamapiętać:**

Równanie Clapeyrona

$$(\text{wzór 592}) pV = nRT$$

gdzie:

p – ciśnienie gazu

n – liczba moli gazu w objętości

V - objętość

T – temperatura (w Kelvinach)

R – stała gazowa

$$(\text{wzór 593}) R = 8,3143 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{kmol})$$

Równanie Clapeyrona jest szczególnie użyteczne w różnych zadaniach praktycznych, gdy gaz zmienia swoją objętość, ciśnienie lub temperaturę. Pozwala ono obliczać te wielkości fizyczne w różnych przemianach gazowych. Można je stosować do różnych gazów, które spełniają warunki gazów doskonałych.

Rysunek 6.7: Gaz doskonały

Przykład 1

Jak wyrazić punkt zerowy na skali Kelvina za pomocą skali Celsjusza?

Odpowiedź: Ponieważ jednostki temperatury w skali Celsjusza i Kelvina są sobie równe, więc i różnica temperatury między punktem wrzenia wody a punktem topnienia lodu w obu skalach jest jednakowa i wynosi 100 jednostek, zatem

$$(\text{wzór 594}) T_w - T_t = 100 \text{ K}$$

Z drugiej strony, korzystając z termometru gazowego o stałej objętości V_0 , wyznaczono doświadczalnie, że dla tych punktów (wrzenia wody i topnienia lodu) stosunek ciśnień wynosi

$$(\text{wzór 595}) \frac{p_w}{p_t} = 1,3661$$

Z równania (wzór 590 na stronie 264) mamy

$$(\text{wzór 596}) p_w V_0 = nRT_w$$

$$(\text{wzór 597}) p_t V_0 = nRT_t$$

Dzieląc stronami te równania, otrzymamy:

$$(\text{wzór 598}) \frac{p_w}{p_t} = \frac{T_w}{T_t}$$

więc

$$(\text{wzór 599}) \frac{T_w}{T_t} = 1,3661$$

Rozwiązując układ równań ([wzór 594](#) na stronie 264) i ([wzór 599](#) na stronie 265), otrzymamy

$$(\text{wzór 600}) T_t = 273,15 \text{ K}$$

$$(\text{wzór 601}) T_w = 373,15 \text{ K}$$

czyli temperatura topnienia lodu w skali Kelwina wynosi $T_t = 273,15 \text{ K}$, zaś temperatura wrzenia wody $T_w = 373,15 \text{ K}$. Ten pierwszy wynik oznacza, że punkt zerowy skali Kelwina odpowiada temperaturze $t = -273,15^\circ \text{C}$ w skali Celsjusza.

Przykład 2

Powietrze otaczające nas spełnia dobrze warunki gazu doskonałego. Jaką objętość zajmuje 1 mol powietrza w warunkach normalnych - tzn. przy $p = 1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ oraz $T = 0^\circ \text{C} = 273 \text{ K}$?

Odpowiedź: Zgodnie ze wzorem ([wzór 590](#) na stronie 264) dla $n = 1$ mamy

$$(\text{wzór 602}) V = \frac{RT}{p} = 0,0224 \text{ m}^3 = 22,4 \text{ dm}^3$$

Jest to fakt dobrze znany z lekcji chemii - nie tylko powietrze, ale wiele gazów ma tę właściwość, że jeden mol gazu zajmuje w warunkach normalnych objętość $22,4 \text{ dm}^3$.

Pytania i problemy

1. W jakim celu utworzono pojęcie tzw. liczby Avogadra. Podaj jej definicję.
2. W jakim celu definiuje się jednostkę „mol”. Jaki jest związek tej jednostki z liczbą Avogadra?
3. Przedstaw równanie Clapeyrona i podaj znaczenie zastosowanych symboli.
4. Co trzeba znać, aby móc wyznaczyć punkt zerowy na skali Kelwina?

6.4 Izoprocesy gazu doskonałego

Jeżeli mamy dane dwa parametry określające stan gazu o określonej liczności, to trzeci zawsze możemy obliczyć; np. gdy dana jest objętość i temperatura gazu, trzeci parametr – ciśnienie – możemy obliczyć z równania ([wzór 590](#) na stronie 264). Zatem dowolny stan gazu doskonałego wyznaczają tylko dwa niezależne parametry termodynamiczne. Dzięki temu stan gazu możemy przedstawić jako punkt na płaszczyźnie. Przejścia między dwoma stanami – początkowym i końcowym – na wykresie można przedstawić za pomocą krzywych.

W celu wygodnego przedstawienia procesów gazowych przekształcimy równanie Clapeyrona do postaci:

$$(\text{wzór 603}) \frac{pV}{T} = nR$$

W przypadku gdy gaz jest zamknięty w pojemniku, to liczba moli n nie zmienia się podczas zmiany parametrów p , V , T i prawa strona równania ([wzór 603](#) na stronie 265) ma stałą wartość (const). Zatem

$$(\text{wzór 604}) \frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{const}$$

gdzie: p_0 , V_0 i T_0 parametry początkowe

Termodynamika - Przemiana izochoryczna

Rysunek 6.8: Animacja

Przemiana izochoryczna

Proces izochoryczny, inaczej zwany *przemianą izochoryczną*, występuje wtedy, gdy objętość gazu pozostaje stała, $V = V_0 = \text{const}$. Wtedy

$$(\text{ wzór 605 }) \frac{pV}{T} = \frac{pV_0}{T}$$

i

$$(\text{ wzór 606 }) \frac{pV_0}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$$

więc:

$$(\text{ wzór 607 }) \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = \text{const}$$

Czyli stosunek ciśnienia do temperatury gazu jest stały

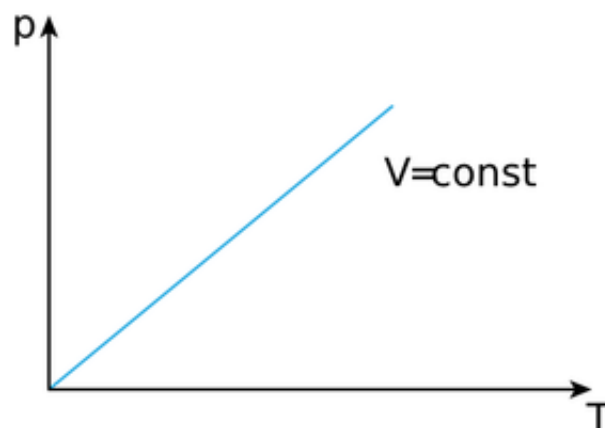
$$(\text{ wzór 608 }) \frac{p}{T} = \text{const}$$

Równanie to nosi nazwę *prawa Charlesa*.

Równanie ([wzór 608](#) na stronie 266) możemy przepisać w postaci

$$(\text{ wzór 609 }) p = cT$$

gdzie c oznacza stały (*const*) współczynnik. Wraz ze wzrostem temperatury rośnie proporcjonalnie ciśnienie gazu. Jak widzimy zależność ciśnienia od temperatury jest liniowa i celuje w punkt (0 K; 0 Pa). Wykres tej zależności jest przedstawiony na [Rysunek 6.9: W procesie izochorycznym ciśnienie gazu zmienia się liniowo wraz z temperaturą](#) na stronie 267.



W bardzo niskich temperaturach proces nie zachodzi wg. linii prostej, gdyż gaz przestaje zachowywać się jak gaz doskonały. Objawia się to np. w procesie kondensacji, dochodzą jeszcze efekty kwantowe. Dlatego też w tym miejscu mamy linię przerywaną, która obrazuje jedynie przedłużenie izochory w kierunku punktu (0,0). Natomiast w bardzo wysokich temperaturach gaz także przestaje zachowywać się jak gaz doskonały, m.in. dochodzi do stanu plazmy

Rysunek 6.9: W procesie izochorycznym ciśnienie gazu zmienia się liniowo wraz z temperaturą

Ⓡ Zamąpiętać:

Proces izochoryczny występuje wtedy, gdy objętość gazu pozostaje stała $V = \text{const}$. Obowiązuje prawo Charlesa:

$$(\text{wzór 610}) \frac{p}{T} = \text{const}$$

Przykład 3

Do jakiej temperatury t należy ogrzać gaz znajdujący się w butelce, aby korek o powierzchni przekroju $S = 3 \text{ cm}^2$ wyskoczył z niej? Siła tarcia utrzymująca korek w butelce wynosi $F = 12 \text{ N}$. Na początku temperatura gazu w butelce wynosiła $t_0 = -3^\circ \text{C}$, a ciśnienie było równe ciśnieniu zewnętrznemu powietrza $p_0 = 1\,000 \text{ hPa}$.

Odpowiedź: Korek wyskoczy z butelki przy różnicy ciśnień

$$(\text{wzór 611}) \Delta p = \frac{F}{S}$$

Zatem ciśnienie gazu w butelce musi być równe

$$(\text{wzór 612}) p = p_0 + \Delta p = p_0 + \frac{F}{S}$$

Takie ciśnienie osiągnie gaz przy temperaturze T wynikającej z równania ([wzór 608](#) na stronie 266), więc:

$$(\text{wzór 613}) \frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}$$

Zatem

$$(\text{wzór 614}) T = \frac{T_0}{p_0} p = \frac{T_0}{p_0} \left(p_0 + \frac{F}{S} \right) = T_0 + \frac{T_0 F}{p_0 S}$$

Wyrażając temperaturę w stopniach Celsjusza, po zastosowaniu wzorów: $T = 273 + t$ i $T_0 = 273 + t_0$ otrzymamy:

$$(\text{wzór 615}) t = t_0 + \frac{273 + t_0}{p_0} \frac{F}{S}$$

Podstawiając dane otrzymamy:

$$(\text{wzór 616}) t = t_0 + \frac{273 + t_0}{p_0} \frac{F}{S} = -3^\circ \text{C} + \frac{270^\circ \text{C}}{10^5 \text{ Pa}} \frac{12 \text{ N}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 105^\circ \text{C}$$

Widzimy, że gaz znajdujący się w butelce, należy ogrzać do temperatury $t = 105^\circ \text{C}$, aby korek wyskoczył.

Termodynamika - Przemiana izobaryczna

Rysunek 6.10: Animacja

Przemiana izobaryczna

Proces izobaryczny inaczej zwany *przemianą izobaryczną* występuje wtedy, gdy ciśnienie jest stałe, $p = \text{const}$. Wówczas $p = p_0 = \text{const}$, i z równania stanu gazu doskonałego ([wzór 604](#) na stronie 265) mamy:

$$(\text{wzór 617}) \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

i

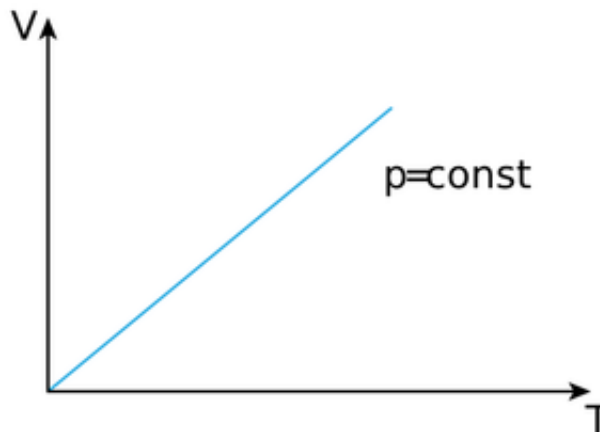
$$(\text{wzór 618}) \frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

więc stosunek objętości do temperatury gazu jest stały:

$$(\text{wzór 619}) \frac{V}{T} = \text{const}$$

Jest to tzw. *prawo Gay-Lussaca*.

Podobnie, jak w przypadku procesu izochorycznego, linie przerywane obrazują obszar temperatur, w którym zachodzą istotne odstępstwa od modelu gazu



doskonałego

Rysunek 6.11: W procesie izobarycznym objętość gazu zmienia się liniowo wraz z temperaturą

® Zamapiętać:

Proces izobaryczny występuje wtedy, gdy ciśnienie gazu jest stałe $p = \text{const}$. Obowiązuje prawo Gay-Lussaca:

$$(\text{wzór 620}) \quad \frac{V}{T} = \text{const}$$

Termodynamika - Przemiana izotermiczna

Rysunek 6.12: Animacja

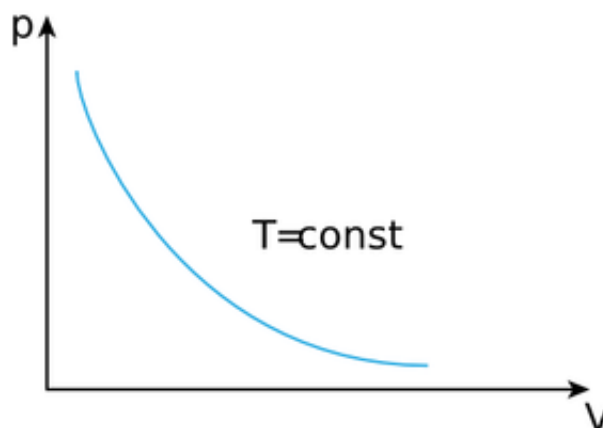
Przemiana izotermiczna

Proces izotermiczny inaczej zwany *przemianą izotermiczną* występuje wtedy, gdy temperatura gazu jest stała.

$T = T_0 = \text{const}$. Wtedy równanie (wzór 604 na stronie 265) przyjmie postać $\frac{pV}{T_0} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$, lub $pV = p_0 V_0$, więc

$$(\text{wzór 621}) \quad pV = \text{const}$$

Jest to równanie znane jako *prawo Boyle'a-Mariotte'a*. Na wykresie w układzie (V, p) proces izotermiczny wyobrażony jest w postaci hiperboli (*Rysunek 6.13: Wykres zależności ciśnienia od objętości w procesie izotermicznym* na stronie 270).



Rysunek 6.13: Wykres zależności ciśnienia od objętości w procesie izotermicznym

Ⓡ **Zamąpiętać:**

Proces izotermiczny występuje wtedy, gdy temperatura gazu jest stała, $T = \text{const}$. Obowiązuje prawo Boyle'a-Mariotte'a:

$$(\text{wzór 622}) \quad pV = \text{const}$$

Przykład 4

Ile wynosi gęstość powietrza w oponie samochodu napompowanego w temperaturze $t_0 = 0^\circ \text{C}$, do ciśnienia przewyższającego ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ o $\Delta p = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Gęstość powietrza w warunkach normalnych wynosi $\rho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$.

Odpowiedź: Gęstość powietrza w oponie wynosi $\rho = \frac{m}{V}$ gdzie m jest masą a V objętością powietrza w oponie. Powietrze to na zewnątrz opony pod ciśnieniem atmosferycznym p_0 zajmowałoby objętość V_0 i miałoby gęstość

$$(\text{wzór 623}) \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

Dzieląc stronami te dwa równania otrzymamy

$$(\text{wzór 624}) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V}$$

Wiemy, że przy stałej temperaturze $pV = p_0V_0$. Czyli

$$(\text{wzór 625}) \quad \frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0}$$

Korzystając z równania (wzór 624 na stronie 270) widzimy, że

$$(\text{wzór 626}) \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

Stąd otrzymujemy:

$$(\text{wzór 627}) \rho = \frac{p}{p_0} \rho_0$$

Ciśnienie p w oponie wynosi $p = p_0 + \Delta p = 3 \cdot 10^5$ Pa. Podstawiając tę wartość oraz pozostałe dane do wzoru otrzymujemy:

$$(\text{wzór 628}) \rho = \frac{p}{p_0} \rho_0 = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \cdot 1,293 \text{ kg/m}^3$$

Gęstość powietrza w oponie wynosi $3,879 \text{ kg/m}^3$.

EXE PDF Prawo gazowe

Pytania i problemy

1. Korzystając z równania Clapeyrona, wyznacz temperaturę T gazu, gdy dana jest objętość V i ciśnienie p gazu.
2. Przedstaw związek między parametrami gazu w procesie izochorycznym opisany przez tzw. prawo Charlesa. Czy i jak wynika on z równania Clapeyrona?
3. Na podstawie równania Clapeyrona wyraż „const” z równania (wzór 608 na stronie 266) za pomocą wielkości V , n oraz R . Następnie we współrzędnych (T, p) narysuj przebieg dwóch przemian izochorycznych tego samego gazu, przeprowadzonych w objętościach V_1 i V_2 , t. że $V_1 < V_2$.
4. Narysuj wykres procesu izochorycznego we współrzędnych (p, V) .
5. Sformułuj związek między parametrami gazu w procesie izobarycznym opisany przez tzw. prawo Gay-Lussaca. Czy i jak wynika ono z równania Clapeyrona?
6. Na podstawie równania Clapeyrona wyraż „const” z równania (wzór 619 na stronie 268) za pomocą wielkości p , n oraz R . Następnie we współrzędnych (T, V) narysuj przebieg dwóch przemian izobarycznych tego samego gazu, przeprowadzonych w ciśnieniach p_1 i p_2 , t. że $p_1 < p_2$.
7. Narysuj wykres zależności p od V w procesie izobarycznym.
8. Opisz związek między ciśnieniem a objętością w procesie izotermicznym gazu doskonałego, przy założeniu, że jego masa nie ulega zmianie (tzw. prawo Boyle’a-Mariotte’a).
9. Na podstawie równania Clapeyrona wyraż „const” z równania (wzór 621 na stronie 269) za pomocą wielkości T , n oraz R . Następnie we współrzędnych (V, p) narysuj przebieg dwóch przemian izotermicznych tego samego gazu, przeprowadzonych w temperaturach T_1 i T_2 , t. że $T_1 < T_2$.
10. Przedstaw izotermę w postaci krzywej w układzie współrzędnych (p, V) . Jak w matematyce nazywa się taka krzywa?
11. W przemianie przy stałej temperaturze masa gazu zmniejszyła się. Wyjaśnij, czy w takim przypadku pozostaje w mocy prawo Boyle’a-Mariotte’a.
12. W każdym z procesów: izochorycznym, izobarycznym i izotermicznym zmieniają się tylko dwa parametry. Podaj te parametry dla każdego procesu.

6.5 Doświadczenie „Izobara”

Poniżej podajemy opis doświadczenia, które możemy wykonać realnie, lub wirtualnie.

Doświadczenie wirtualne wykonujemy uruchamiając animację, która symuluje rzeczywisty przebieg doświadczenia, podczas którego wzrasta objętości gazu zamkniętego w rurce Meldego. Ten wzrost objętości gazu spowodowany jest wzrostem temperatury. Notujemy wskazania termometru oraz odpowiednie wysokości słupka gazu w rurce. Wyniki

tych „pomiarów” wpisujemy do tabelki pomiarów i opracowujemy sprawozdanie z doświadczenia według wzoru takiego jak w przypadku doświadczenia wykonanego realnie.

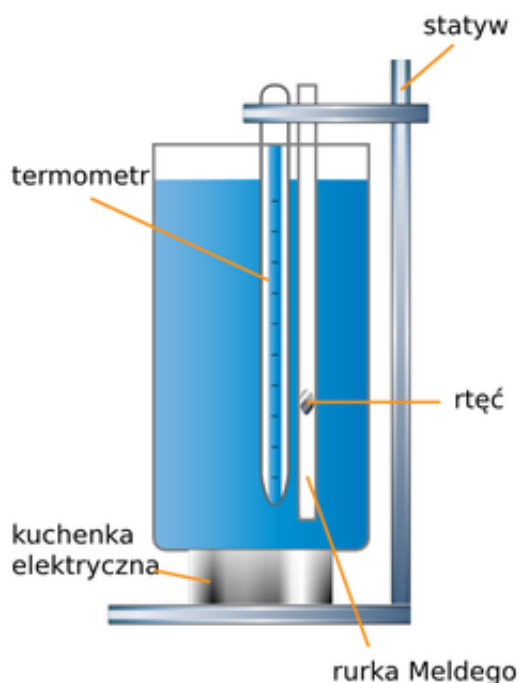
Najpierw należy zapoznać się z poniższym opisem doświadczenia, a następnie zgodnie z poleceniem nauczyciela wykonać doświadczenie realnie, lub wirtualnie.

Opis doświadczenia

Uwaga: W realnym doświadczeniu stosujemy rtęć, którą trudno jest zastąpić jakąś inną dostępną substancją. Ze względów BHP wymaga to szczególnej ostrożności, a w niektórych szkołach może być wręcz zakazane. Wobec tego proponujemy wykonać to doświadczenie wirtualnie – według załączonej animacji.

Potrzebna będzie rurka szklana o długości ok. 50 cm i średnicy ok. 6-8 mm zamknięta z jednego końca. Dobrze by było, gdyby rurka miała narysowaną skalę milimetrową. Do rurki wprowadzimy nieco rtęci w taki sposób, aby utworzył się koreczek rtęciowy o długości ok. 2 do 3 cm. Koreczek zamknie część powietrza w dolnej części rurki. Taka rurka nosi nazwę rurki Meldego.

Rurkę Meldego oraz termometr umieszczamy w statywie i oba przyrządy zanurzamy w pojemniku z wodą, który będziemy podgrzewać na kuchence elektrycznej (*Rysunek 6.14: Zestaw do doświadczenia „Izobara”* na stronie 272). Takie same przyrządy znajdują się w doświadczeniu wirtualnym.



Rysunek 6.14: Zestaw do doświadczenia „Izobara”

Naszym zadaniem jest doświadczalnie sprawdzić zależność objętości od temperatury danej za pomocą wzoru **Gay-Lussaca** ([wzór 619](#) na stronie 268):

$$(\text{wzór 629}) \quad \frac{V}{T} = \text{const}$$

Oznaczmy wartość stałej występującej po prawej stronie przez a ($a = \text{const}$) oraz przekształćmy wzór następująco:

$$(\text{wzór 630}) \quad V = a \cdot T$$

Widzimy, że teoria procesu izobarycznego daje zależność proporcjonalną objętości od temperatury. Właśnie tę cechę procesu izobarycznego chcemy sprawdzić doświadczalnie.

Podstawowy warunek dla procesu izobarycznego, $p = \text{const}$, jest w naszym układzie doświadczalnym zachowany. Powietrze zamknięte w rurce znajduje się pod stałym ciśnieniem, gdyż w każdej temperaturze jest ono równoważone przez stałe ciśnienie hydrostatyczne rtęci (siła ciężkości skierowana w dół) oraz przez stałe ciśnienie powietrza znajdującego się na zewnątrz.

Najpierw zmierzmy średnicę wewnętrzną rurki d . Następnie będziemy mierzyć temperaturę t i długość l części rurki z zamkniętym powietrzem. Pierwszy pomiar temperatury t_1 i długości l_1 wykonamy przy wyłączonym podgrzewaniu. Następne pomiary wykonamy przy włączonym podgrzewaniu kolejno co 10°C .

W przypadku doświadczenia wirtualnego przyjmujemy, że średnica wewnętrzna rurki Meldego wynosi $d = 0,6 \text{ cm}$.

Termodynamika - Proces izobaryczny. Doświadczenie wirtualne

Rysunek 6.15: Animacja

Wyniki pomiarów wpisujemy do tabelki pomiarów według wzoru:

L_p	$t(^{\circ}\text{C})$	$T(\text{K})$	$l(\text{cm})$	$d(\text{cm})$	$S(\text{cm}^2)$	$V(\text{cm}^3)$
1	2	3	4	5	6	7

Rysunek 6.16: Tabela pomiarów

Dane w tabelce uzupełniamy w następujący sposób:

- w kolumnie 3 obliczamy wartości temperatury w kelwinach według wzoru

$$(\text{wzór 631}) \quad T = 273 + t$$

- w kolumnie 6 obliczamy wartość powierzchni przekroju poprzecznego rurki według wzoru

$$(\text{wzór 632}) \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

- w kolumnie 7 obliczamy wartości objętości powietrza zamkniętego w rurce według wzoru

$$(\text{wzór 633}) \quad V = lS$$

Wyniki pomiarów uzyskane w jednej ze szkół pokazano w tabeli [Rysunek 6.17: Przykładowe pomiary](#) na stronie 274.

Lp.	$t(^{\circ}\text{C})$	$T(\text{K})$	$l(\text{cm})$	$d(\text{cm})$	$S(\text{cm}^2)$	$V(\text{cm}^3)$
1	2	3	4	5	6	7
1	22	295	12,2	0,6	0,28	3,45
2	30	303	12,5			3,53
3	40	313	12,9			3,65
4	50	323	13,4			3,79
5	60	333	13,7			3,87
6	70	343	14,2			4,01
7	80	353	14,6			4,13
8	90	363	15,0			4,24

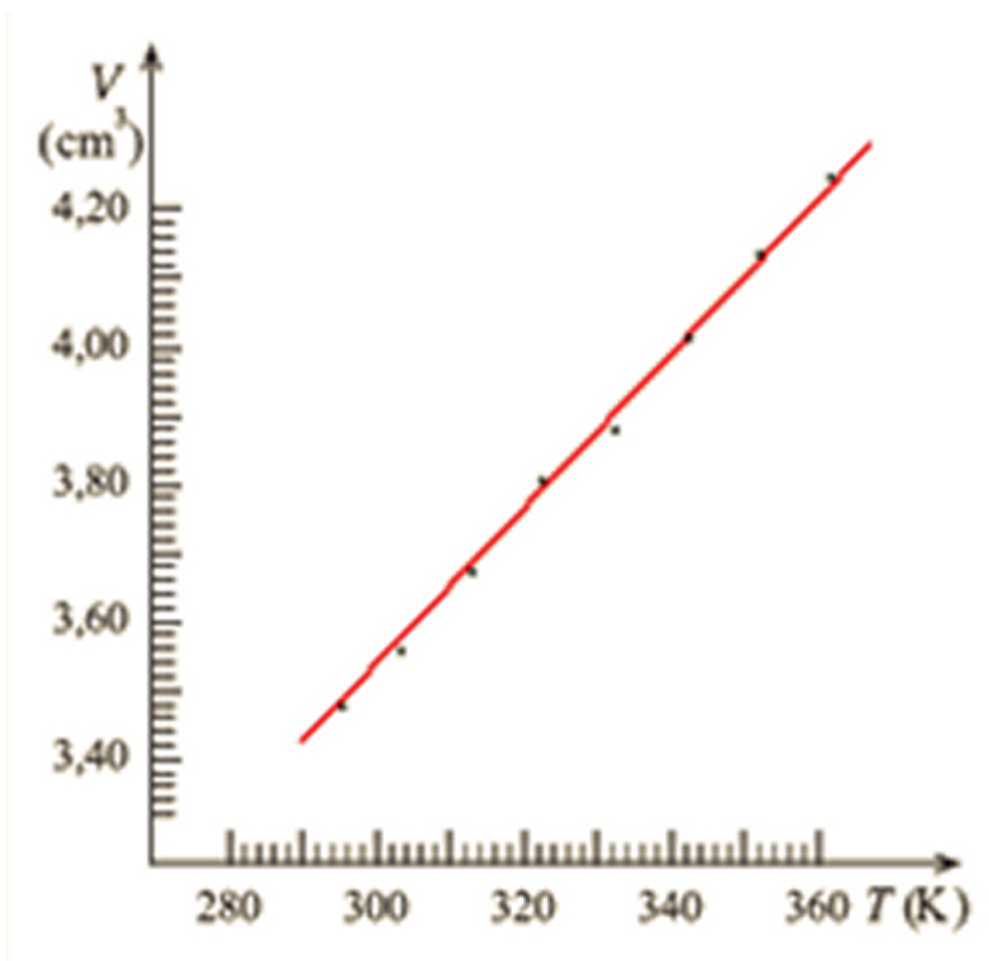
Rysunek 6.17: Przykładowe pomiary

Przystępujemy do opracowania wyników doświadczenia.

[Formularz sprawozdania](#) - kliknij na linku aby otworzyć formularz sprawozdania z doświadczenia.

Na podstawie danych z tabelki, (rubryki 3 i 7), nanosimy punkty doświadczalne na wykres zależności V od T .

Cieszymy się, jeżeli punkty doświadczalne układają się w pobliżu linii prostej. Oznacza to, że nasze doświadczenie potwierdza prawo Gay-Lussaca wyrażone za pomocą wzoru ([wzór 619](#) na stronie 268). Na rysunku [Rysunek 6.18: Wykres zależności \$V\$ od \$T\$ zgodny z danymi przykładowymi](#) na stronie 275 przedstawiono przykładowy wykres zgodny z danymi z tabeli [Rysunek 6.17: Przykładowe pomiary](#) na stronie 274.



Rysunek 6.18: Wykres zależności V od T zgodny z danymi przykładowymi

Oceniamy niepewności pomiarowe i nanosimy je na wykres, tworząc prostokąty niepewności pomiarowych. W przykładowym doświadczeniu oceniono niepewność pomiaru temperatury jako $\Delta T = 1$ K; wynika to z najmniejszej podziałki na użytym termometrze. Niepewność pomiaru długości $\Delta l = 1$ mm, co wynika z podziałki na rurce oraz niepewność pomiaru średnicy rurki $\Delta d = 0,1$ mm. W celu obliczenia niepewności pomiaru objętości ΔV należy skorzystać ze wzoru na niepewność względną (patrz: e-Fizyka, tom 1).

$$\text{(wzór 634) } \varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta d}{d}$$

Następnie obliczamy wartość bezwzględną niepewności pomiaru objętości według wzoru

$$\text{(wzór 635) } \Delta V = \varepsilon \cdot V$$

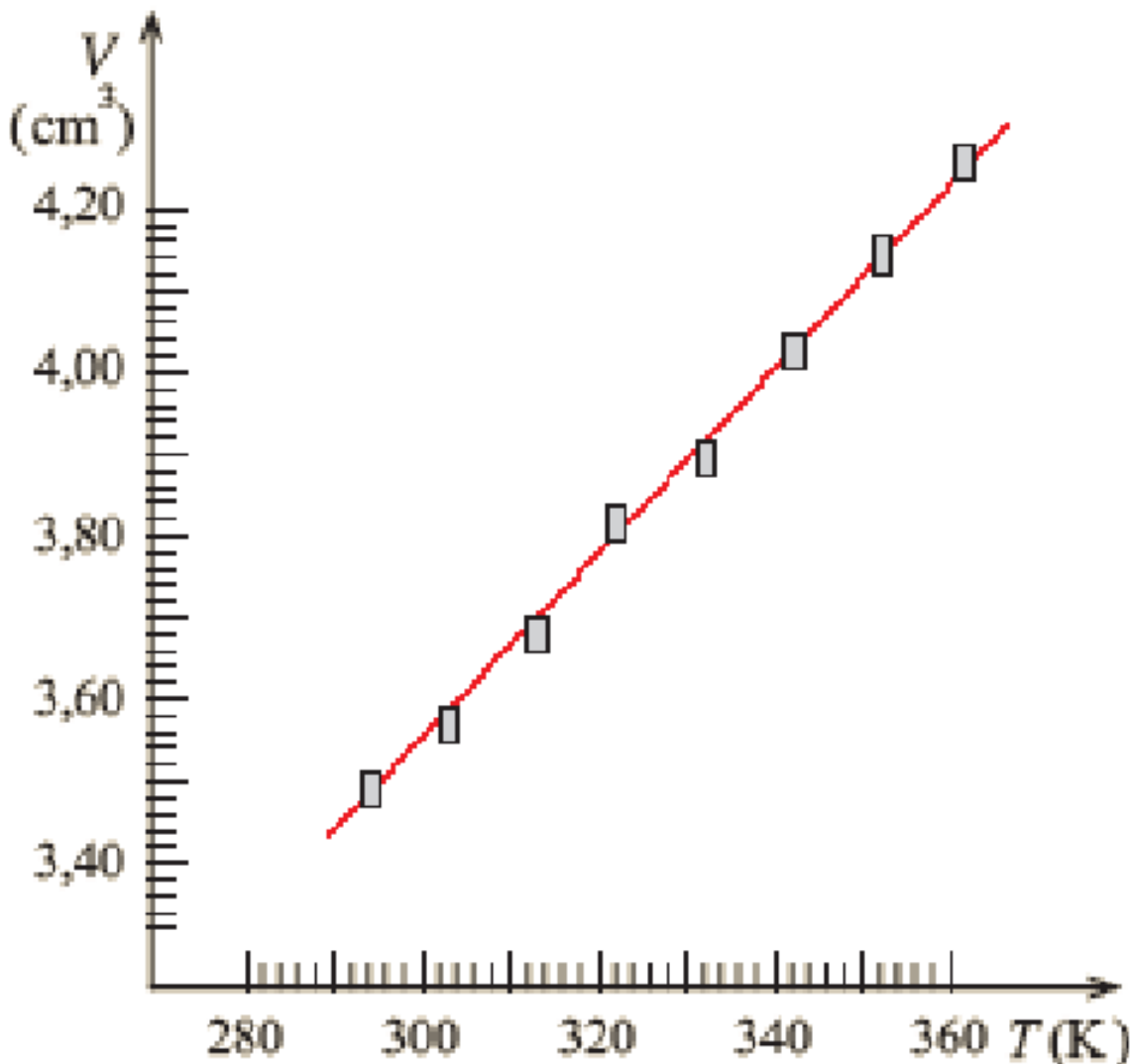
Przyglądając się wzorowi ([wzór 630](#) na stronie 273), widzimy, że przy ustalonej niepewności Δl oraz Δd niepewność względna ε jest tym mniejsza, im większa jest długość l rurki (przy ustalonej średnicy). Dlatego korzystne jest zastosowanie w naszym doświadczeniu długich rurek. W celu obliczenia niepewności ΔV w naszym przykładzie wystarczy przyjąć wartość średnią l . Otrzymamy niepewność względną

$$\text{(wzór 636) } \varepsilon = \left| \frac{\Delta l}{l} \right| + 2 \left| \frac{\Delta d}{d} \right| = \frac{0,1}{13,6} + 2 \cdot \frac{0,1}{6} = 0,0407$$

oraz niepewność wyznaczenia objętości

$$\text{(wzór 637) } \Delta V = \varepsilon V = 0,0407 \cdot 3,85 \text{ cm}^3 \approx 0,16 \text{ cm}^3$$

Po obliczeniu niepewności pomiarowych możemy uściślić przebieg naszej prostej optymalnej na wykresie tak, aby przechodziła możliwie blisko wszystkich punktów oraz by przecinała wszystkie prostokąty niepewności pomiarowej (*Rysunek 6.19: Wykres zależności V od T z naniesionymi prostokątami niepewności pomiarowych* na stronie 276).



Rysunek 6.19: Wykres zależności V od T z naniesionymi prostokątami niepewności pomiarowych

Uzyskane wyniki oraz wykres (*Rysunek 6.19: Wykres zależności V od T z naniesionymi prostokątami niepewności pomiarowych* na stronie 276) świadczą, że zależność $V(T)$ jest liniowa.

Możemy to sprawdzić, na przykład, prowadząc to przedłużenie (linią przerywaną) do przecięcia się z osią T . Powinno ono trafić blisko punktu $(0,0)$.

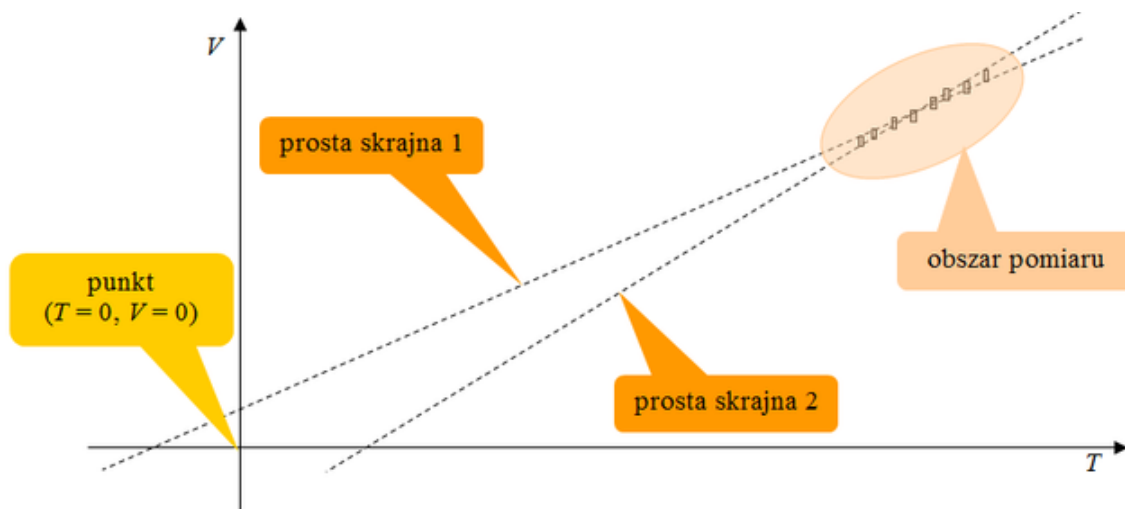
R **Zamknięta:** Bardziej precyzyjnie możemy określić dopuszczalne odstępstwo tego przecięcia od punktu $(0,0)$ za pomocą poniższej procedury, którą dedykujemy uczniom dociekliwym. Wykonując tę procedurę samodzielnie możesz wyznaczyć **temperaturę zera bezwzględnego**.

! **Wskazówka:**

Zwróćmy uwagę, że osie T oraz V na wykresach *Rysunek 6.18: Wykres zależności V od T zgodny z danymi przykładowymi* na stronie 275 i *Rysunek 6.19: Wykres zależności V od T z naniesionymi prostokątami niepewności pomiarowych* na stronie 276 zostały wyskalowane w taki sposób, by przede wszystkim pokazać obszar temperatur, w którym przeprowadzono doświadczenie. Skutkiem tego, wykresy te nie

pokazują obszaru w okolicach $T = 0$ i nie pozwalają stwierdzić, czy uzyskana przez nas prosta optymalna przechodzi przez punkt $(T = 0, V = 0)$.

Oczywiście nie oczekujemy, że prosta przejdzie **dokładnie** przez ten punkt, lecz w jego pobliżu, w ramach dopuszczalnej niepewności pomiarowej. By pokazać zakres tej niepewności rozszerzymy i uzupełnimy wykres (*Rysunek 6.19: Wykres zależności V od T z naniesionymi prostokątami niepewności pomiarowych* na stronie 276). Wyskalujemy oś T od zera do 360 K zaś oś V od zera do 4,2 cm³. Punkty pomiarowe zajmą wtedy stosunkowo niewielką część w prawym górnym rogu układu współrzędnych (*Rysunek 6.20: Wyniki doświadczenia z naniesionymi prostymi skrajnymi* na stronie 277). Nanosimy na wykres dwie proste „skrajne”. Pierwsza ma możliwie małe nachylenie, zapewniające jednak jej przechodzenie przez wszystkie prostokąty niepewności; analogicznie, druga ma możliwie duże nachylenie, ale także przechodzi przez wszystkie prostokąty. Dla zwiększenia czytelności wykresu nie nanosimy prostej optymalnej.



Rysunek 6.20: Wyniki doświadczenia z naniesionymi prostymi skrajnymi

Stwierdzamy, że punkt $(T = 0, V = 0)$ mieści się pomiędzy punktami przecięcia tych prostych z osią T . Pozwala to stwierdzić, że prosta optymalna trafia w ten punkt z dokładnością do niepewności pomiarowej, dopuszczalnej w tym doświadczeniu. Oznacza to, że uzyskane przez nas wyniki są w pełni zgodne z przewidywaniami prawa Gay-Lussaca.

Oznacza to również, że przyjęta przez nas do analizy wartość $T_0 = 273\text{K}$ znalazła potwierdzenie w tym doświadczeniu. Gdybyśmy bowiem we wzorze (*wzór 584* na stronie 261) przyjęli inną temperaturę punktu zamarzania wody (inny przelicznik skali Celsjusza na skalę Kelwina), to nasza prosta optymalna nie trafiłaby w punkt $(0,0)$.

6.6 Rozszerzalność cieplna płynów i ciał stałych

Korzystając z równania stanu gazów doskonałych (*wzór 603* na stronie 265), możemy znaleźć zależność objętości gazu od temperatury przy stałym ciśnieniu $p = p_c = \text{const}$. Załóżmy, że w temperaturze zera stopni Celsjusza T_0 ($T_0 = 273,15\text{ K} = 0^\circ\text{C}$) gaz ma objętość V_0 . Wtedy

$$\text{(wzór 638) } p_c V_0 = NkT_0$$

natomiast przy innej temperaturze T gaz zajmuje objętość V , zatem

$$\text{(wzór 639) } p_c V = NkT$$

Dzieląc równanie (*wzór 639* na stronie 277) przez (*wzór 638* na stronie 277), otrzymamy

$$\text{(wzór 640) } \frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}$$

lub

$$(\text{wzór 641}) V = V_0 \frac{T}{T_0}$$

Korzystając ze wzoru ([wzór 584](#) na stronie 261): $T = 273,15 + t = T_0 + t$, przechodzimy do skali Celsjusza. Zatem

$$(\text{wzór 642}) V = V_0 \frac{T_0 + t}{T_0} = V_0 \left(1 + \frac{1}{T_0} t \right)$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie

$$(\text{wzór 643}) \alpha = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

to ostatecznie otrzymamy

$$(\text{wzór 644}) V = V_0 (1 + \alpha t)$$

Wzór w tej postaci określa rozszerzalność objętościową gazów przy stałym ciśnieniu. Współczynnik α nazywa się *współczynnikiem rozszerzalności objętościowej* i dla gazów doskonałych przy stałym ciśnieniu jego wartość wynosi

$$(\text{wzór 645}) \frac{1}{273,15 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Dlaczego gaz zwiększa swoją objętość przy stałym ciśnieniu podczas podwyższania temperatury? Wzrost temperatury gazu jest równoznaczny ze zwiększeniem średniej energii kinetycznej cząsteczek, a więc i prędkości cząsteczek. Zatem cząsteczki uderzają w ścianki naczynia z większymi prędkościami przy każdym odbiciu doznają większej zmiany pędu, oddziałują więc na ścianki naczynia w sumie z coraz większą siłą. Jeżeli ciśnienie ma być stałe a naczynie nie ulega odkształceniu, to objętość gazu musi się zwiększyć, gdyż wtedy zwiększy się pole powierzchni ścianek. Wówczas zwiększona siła działa na większą powierzchnię i ciśnienie będące stosunkiem siły do pola powierzchni, $p = \frac{F}{S}$, może utrzymać się na stałym poziomie.

Dotychczasowe doświadczenia wykazują, że wzór ([wzór 644](#) na stronie 278) obowiązuje, z niezłą dokładnością, również dla cieczy i ciał stałych. Współczynnik rozszerzalności objętościowej definiuje się, zgodnie z tym wzorem, jako

$$(\text{wzór 646}) \alpha = \frac{V - V_0}{V_0 (t - t_0)}$$

Widzimy, że

$$(\text{wzór 647}) \alpha = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t}$$

ma znaczenie względnej zmiany objętości przy zmianie temperatury o jeden stopień.

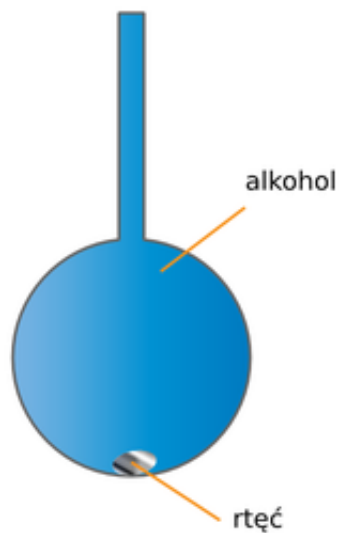
Wartość współczynnika rozszerzalności objętościowej zależy od rodzaju substancji (patrz [Rysunek 6.21: Wartości współczynników rozszerzalności objętościowej](#) na stronie 279). Ciała stałe mają najmniejszy współczynnik rozszerzalności objętościowej. Współczynnik ten dla cieczy jest zwykle wielokrotnie większy. Gazy mają największą rozszerzalność objętościową.

Ciała stałe	$\alpha(^{\circ}\text{C}^{-1}) \cdot 10^{-5}$	Płyny	$\alpha(^{\circ}\text{C}^{-1}) \cdot 10^{-5}$
glin	7	aceton	143
inwar	0,2	alkohol etylowy	110
lód	15	Alkohol metylowy	119
miedź	5	Benzen	107
stal	3,3	Nafta	92
szkło	2,7	Rtęć	18
		Woda (średnio)	21
		gaz doskonały $p=\text{const}$	366

Rysunek 6.21: Wartości współczynników rozszerzalności objętościowej

Przykład 5

Na [Rysunek 6.22: Piknometr z kroplą rtęci napełniony alkoholem](#) na stronie 280 przedstawiono naczynie szklane do pomiaru gęstości cieczy zwane piknometrem. Do piknomtru nalano nieco rtęci w takiej ilości, aby wzrost objętości rtęci pod wpływem wzrostu temperatury kompensował wzrost objętości piknomtru. Dzięki temu pojemność pozostałej części piknomtru V_p jest stała w każdej temperaturze. Piknometr napełniono alkoholem o temperaturze $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$. Po zważeniu stwierdzono, że masa alkoholu wynosi $m_0 = 40$ g. Następnie piknometr z alkoholem wstawiono do zlewki z wodą o temperaturze $t = 50^{\circ}\text{C}$. Na skutek rozszerzalności cieplnej trochę alkoholu wylało się. Po ponownym zważeniu stwierdzono, że masa pozostałego w piknometrze alkoholu wynosi $m = 37,9$ g. Oblicz współczynnik rozszerzalności objętościowej alkoholu.



Rysunek 6.22: Piknometr z kroplą rtęci napełniony alkoholem

Odpowiedź: Najpierw wyprowadzimy wzór na zależność gęstości ρ cieczy od temperatury. Wiemy, że

$$(\text{wzór 648}) \quad \rho = \frac{m}{V}$$

i że objętość V substancji zmienia się wraz z temperaturą t według wzoru ([wzór 644](#) na stronie 278), przy niezminiającej się masie m , więc

$$(\text{wzór 649}) \quad \rho = \frac{m}{V_0(1+\alpha t)}$$

Ponieważ $\frac{m}{V_0} = \rho_0$ gdzie ρ_0 oznacza gęstość cieczy w temperaturze 0°C , więc

$$(\text{wzór 650}) \quad \rho = \frac{\rho_0}{1+\alpha t}$$

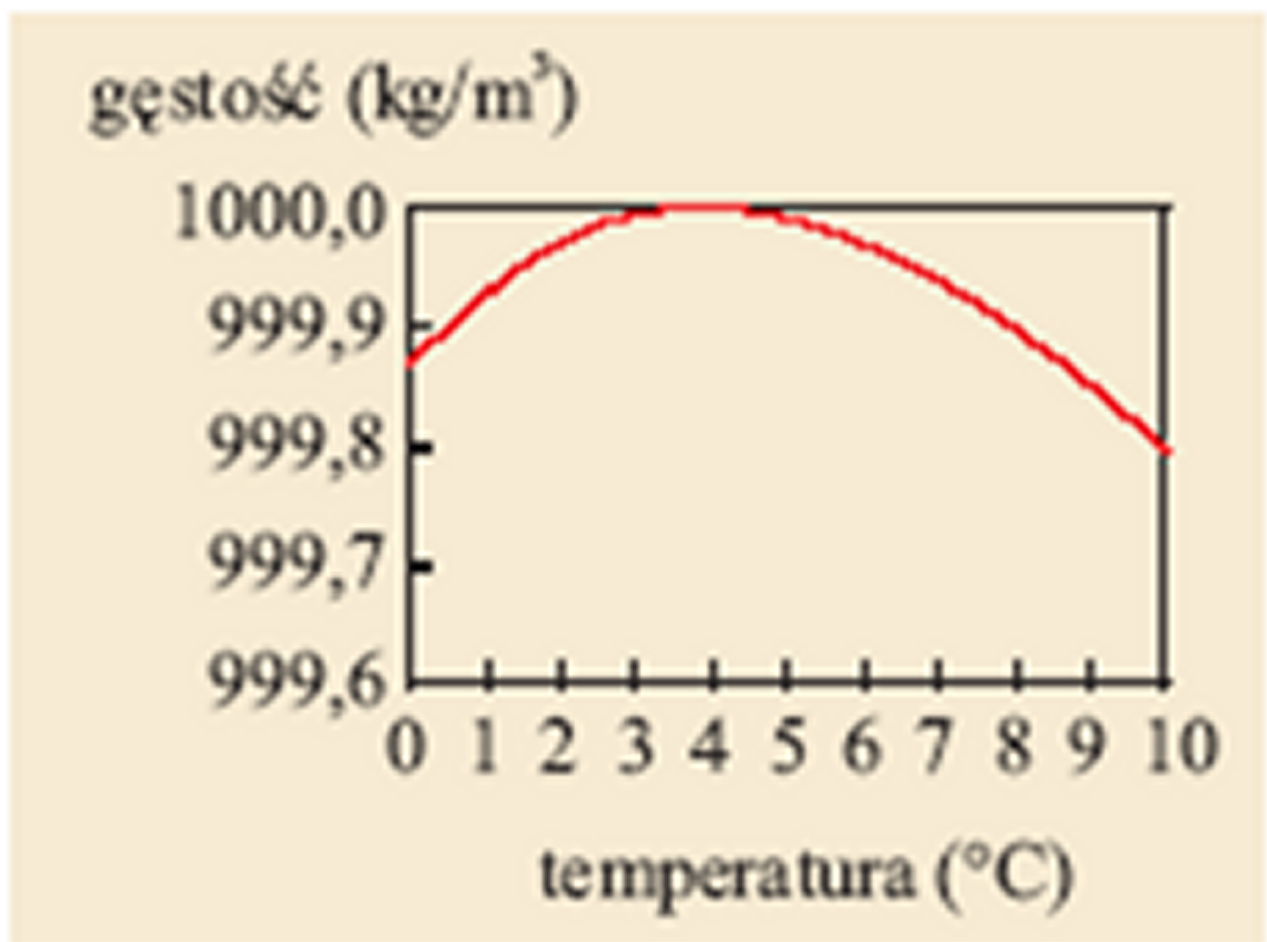
W naszym przypadku $\rho = \frac{m}{V_p}$ oraz $\rho_0 = \frac{m_0}{V_p}$. Podstawiając to do wzoru (wzór 650 na stronie 280), otrzymamy $m = \frac{m_0}{1+\alpha t}$. Stąd po przekształceniu

$$(\text{wzór 651}) \alpha = \frac{m_0 - m}{m \cdot t} = \frac{40 - 37,9}{37,9 \cdot 50} \frac{1}{^\circ\text{C}} \approx 110,8 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$

Jest to wynik, który różni się od tablicowego (*Rysunek 6.21: Wartości współczynników rozszerzalności objętościowej* na stronie 279) o mniej niż 1%.

Współczynnik rozszerzalności objętościowej dla rzeczywistych substancji jest stały tylko w przybliżeniu, dla niedużych zakresów temperatury. Dokładne pomiary wykazują, że współczynnik α określony wzorem (wzór 639 na stronie 277) zależy od zakresu temperatury, w którym go wyznaczono. Zatem zależność (wzór 644 na stronie 278) objętości od temperatury dla cieczy i ciał stałych jest liniowa tylko w przybliżeniu.

Istnieją wyjątkowe substancje, które wykazują anomalną rozszerzalność cieplną. Wśród nich na szczególną uwagę zasługuje woda. Żadna inna ciecz pospolita nie zachowuje się anomalnie. Woda natomiast w zakresie temperatury od 0 do 4 °C ma ujemny współczynnik rozszerzalności cieplnej, w temperaturze 4 °C ma największą gęstość (patrz wykres - *Rysunek 6.23: Wykres gęstości wody (pod stałym ciśnieniem) w zależności od temperatury* na stronie 281), a dopiero od tej temperatury wartość współczynnika α jest dodatnia i wraz ze wzrostem temperatury gęstość wody maleje. Dzięki tej własności wody zamarzanie stawów, jezior i rzek zaczyna się od ich powierzchni. Pozwala to przetrwać zimę rybam i innym organizmom żyjącym w wodzie.



Rysunek 6.23: Wykres gęstości wody (pod stałym ciśnieniem) w zależności od temperatury

Wzór (wzór 644 na stronie 278), jak już wspomniano, stosuje się również dla ciał stałych. W praktyce bardzo często mamy do czynienia z ciałami stałymi, których jeden wymiar (najczęściej długość) jest znacznie większy od

pozostałych, np. prety, taśmy, druty czy belki. Wtedy bezwzględny przyrost długości pod wpływem temperatury jest znacznie większy od przyrostu wymiarów poprzecznych. Dlatego wprowadza się *współczynnik rozszerzalności liniowej* λ , który definiuje się za pomocą wzoru analogicznego do (wzór 646 na stronie 278):

$$(\text{wzór 652}) \lambda = \frac{l - l_0}{l_0(t - t_0)}$$

gdzie l i l_0 są długościami ciała, odpowiednio, w temperaturze t i $t_0 = 0^\circ \text{C}$. Współczynnik rozszerzalności liniowej jest liczbowo równy względnemu przyrostowi długości ciała przypadającemu na jeden stopień.

Ze wzoru (wzór 652 na stronie 282) po przekształceniu i uwzględnieniu $t_0 = 0^\circ \text{C}$ otrzymujemy

$$(\text{wzór 653}) l = l_0(1 + \lambda t)$$

Łatwo możemy teraz wykazać, że zachodzi następujący związek między współczynnikami rozszerzalności objętościowej i liniowej:

$$(\text{wzór 654}) \alpha \approx 3\lambda$$

Przyjmijmy, że $V = l^3$. Po podniesieniu równania (wzór 653 na stronie 282) do trzeciej potęgi i skorzystaniu ze wzoru (wzór 654 na stronie 282) otrzymamy

$$(\text{wzór 655}) l_0^3 = (1 + \lambda t)^3 = l^3 = V = V_0(1 + \alpha t)$$

Po uwzględnieniu, że $V_0 = l_0^3$ i uproszczeniu otrzymamy

$$(\text{wzór 656}) 3\lambda + 3\lambda^2 t + \lambda^3 t^2 = \alpha$$

Dla ciał stałych współczynnik rozszerzalności liniowej jest bardzo mały, ma wartość rzędu $10^{-5} \div 10^{-6} (\text{ }^\circ \text{C})^{-1}$, dlatego w wyrażeniu po lewej stronie można zaniedbać wszystkie wyrazy zawierające λ^2 i λ^3 (dla małych zakresów temperatury $t < 100^\circ \text{C}$). Wtedy właśnie otrzymamy relację (wzór 654 na stronie 282).

Przykład 6

Stalowe przęsło mostu (w postaci belki) ma długość $l_0 = 50$ m w temperaturze 0°C . O ile wydłuży się to przęsło latem, gdy nagrzej się na słońcu do temperatury $t = 40^\circ \text{C}$?

Odpowiedź: Z tabeli na *Rysunek 6.21: Wartości współczynników rozszerzalności objętościowej* na stronie 279 odczytujemy wartość współczynnika rozszerzalności objętościowej stali

$\alpha = 3,3 \cdot 10^{-5} (\text{ }^\circ \text{C})^{-1}$. Dzieląc tę wartość przez 3, otrzymujemy współczynnik rozszerzalności liniowej stali $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-5} (\text{ }^\circ \text{C})^{-1}$. Zatem długość przęsła l w temperaturze $t = 40^\circ \text{C}$ wynosi

$$(\text{wzór 657}) l = l_0(1 + \lambda t) = 50 \cdot (1 + 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 40) \text{ m} = 50,022 \text{ m}$$

Oznacza to, że przęsło wydłuży się o 2,2 cm. Takie wydłużenie musi być w jakiś sposób kompensowane, gdyż w konstrukcji mogą powstać niebezpieczne naprężenia.

Na zakończenie omawiania rozszerzalności cieplnej cieczy i ciał stałych zastanowimy się nad przyczynami tego zjawiska. Wiemy, że ciała stałe i ciecze należą do fazy skondensowanej i – w przeciwieństwie do gazów – odległości między cząsteczkami w tej fazie są bardzo małe. Cząsteczki i atomy w cieczach i ciałach stałych prawie stykają się ze sobą. Dlatego nie można zaniedbać sił wzajemnego oddziaływania cząsteczek.

Ciecze różnią się od ciał stałych przede wszystkim tym, że cząsteczki w cieczach mają większą swobodę ruchu. Większość ciał stałych ma strukturę krystaliczną, a to oznacza, że atomy w tych ciałach stałych mogą w zasadzie wykonywać tylko ruchy drgające wokół uporządkowanych punktów w przestrzeni, tworzących sieci krystaliczne. W cieczach natomiast powstają grupy atomów i cząsteczek mających pewne lokalne uporządkowanie i mogących

wykonywać drgania. Ponadto grupy te oraz pojedyncze atomy i cząsteczki mogą zmieniać stopniowo swoje położenia i ciecz jako całość nie ma krystalicznej sieci uporządkowanych punktów.

Obecność struktury krystalicznej lub jej brak odgrywa jednak małą rolę w wyjaśnieniu rozszerzalności cieplnej. Dlatego w rozważaniach naszych zaniedbamy różnice w strukturze i własnościach cieczy i ciał stałych. Skupimy się natomiast na podstawowej własności fazy skondensowanej wynikającej z tego, że cząsteczki cieczy i ciał stałych znajdują się w bezpośredniej bliskości i mogą wykonywać drgania wokół swoich położenia równowagi.

Wzajemne odległości drgających cząsteczek średnio rosną wraz ze wzrostem temperatury. Suma odległości między cząsteczkami stanowi wymiar przestrzenny całego ciała. Skoro te odległości rosną, to rosną również wymiary przestrzenne całego ciała wraz ze wzrostem temperatury.

Ⓡ Zamapiętać:

Mikroskopowy obraz ciała stałego, cieczy i gazu

Wszystkie ciała makroskopowe są zbiorem dużej liczby małych cząsteczek lub atomów

- *Gaz*: odległości między cząsteczkami są znaczne - wielokrotnie przewyższające ich rozmiary. Cząsteczki mają dużą swobodę ruchu. Wykonują ruchy chaotyczne i żaden kierunek ich ruchu nie jest wyróżniony. Oddziaływanie międzycząsteczkowe jest pomijalne.
- *Ciecz*: odległości między cząsteczkami w cieczy są bardzo małe – porównywalne z tymi w ciele stałym. Ciecze różnią się od ciał stałych przede wszystkim tym, że cząsteczki w cieczach mają większą swobodę ruchu. W cieczy cząsteczki nie są ułożone w sieci krystalicznej. Jednakże tworzą się grupy atomów i cząsteczek mających pewne lokalne uporządkowanie.
- *Ciało stałe*: atomy w ciałach stałych znajdują się blisko siebie, prawie stykają się ze sobą. Atomy mogą w zasadzie wykonywać tylko ruchy drgające wokół uporządkowanych punktów w przestrzeni, które w większości ciał stałych tworzą sieć krystaliczną.

To, co powiedziano tutaj, tłumaczy jakościowo normalną rozszerzalność cieplną. A co z wodą? Dlaczego woda w zakresie od zera do czterech stopni zamiast się rozszerzać – kurczy? Otóż wpływ na wyjątkową, anomalną rozszerzalność wody mają akurat te zjawiska, które w naszych rozważaniach pominęliśmy, jako drugorzędne. Mianowicie, główny wpływ na pojawienie się ujemnego współczynnika rozszerzalności wody ma właśnie zmiana struktury pod wpływem wzrastającej temperatury w niedużym przedziale temperatur, powyżej punktu topnienia lodu. W lodzie atomy są ułożone luźniej niż w wodzie, dlatego lód ma mniejszą gęstość od wody. Woda, która dopiero co powstała z lodu, mająca temperaturę bliską zeru stopni, częściowo zachowuje jeszcze luźniejsze ułożenie atomów charakterystyczne dla lodu. Wraz ze wzrostem temperatury ułożenia te stopniowo giną, a zaczynają przeważać ułożenia gęstsze, charakterystyczne dla stanu ciekłego wody. Równoległe działa mechanizm normalnej rozszerzalności omówiony wyżej, którego efekt jest tłumiony przez zmiany struktury wody. Początkowo zagęszczanie struktury dominuje nad normalnym mechanizmem rozszerzalności cieplnej i dlatego mamy zgęszczanie wody. Dopiero począwszy od temperatury czterech stopni Celsjusza mechanizm normalnej rozszerzalności zdobywa przewagę i dla wyższych temperatur woda zachowuje się już normalnie.

Pytania i problemy

1. Zdefiniuj współczynnik rozszerzalności objętościowej. Podaj wartość tego współczynnika dla gazu doskonałego, przy stałym ciśnieniu.
2. Opisz zależność objętości gazu doskonałego od temperatury. Czy zależność ta odnosi się tylko do jednego stanu skupienia materii?
3. Podaj wzór na wzrost wymiarów liniowych ciała pod wpływem wzrostu temperatury. Udowodnij, że wartość współczynnika rozszerzalności objętościowej jest około trzy razy większa od wartości współczynnika rozszerzalności liniowej ciała.
4. Jakie są przyczyny mikroskopowe rozszerzalności termicznej ciał?
5. Na czym polega anomalna rozszerzalność cieplna wody? Wyjaśnij, dlaczego woda zachowuje się inaczej niż typowe ciecze.

6.7 Podstawowe pojęcia teorii kinetycznej gazów

Kinetyczna teoria gazów została zapoczątkowana przez niemieckiego fizyka Rudolfa Clausiusa w drugiej połowie dziewiętnastego wieku. To właśnie Clausius stwierdził, że ciepło jest związane z energią kinetyczną chaotycznego (brownowskiego) ruchu cieplnego cząsteczek gazu. Następnie inni fizycy kontynuowali dzieło Clausiusa. Największe zasługi miał fizyk austriacki Ludwik Boltzmann, który rozwinął teorię kinetyczną, formułując wiele podstawowych praw. Należy stwierdzić, że poważny wkład w rozwój teorii kinetycznej wniósł polski fizyk o niezwykłym talencie – Marian Smoluchowski.

Należy wszakże zaznaczyć, że prace dziewiętnastowiecznych uczonych były poprzedzone pracami rosyjskiego uczonego Michała Łomonosowa (1711–1765).

Warunki normalne cząsteczek w powietrzu

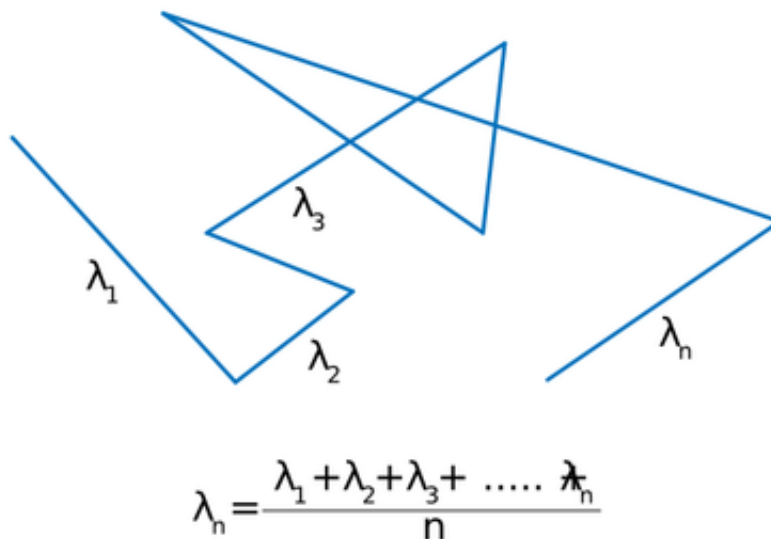
Już w gimnazjum dowiedziałeś się, że gaz jest zbiorem olbrzymiej liczby bardzo małych cząsteczek (niewidocznych nawet pod mikroskopem) będących w nieustannym ruchu. Na przykład w 1 cm^3 tlenu w warunkach normalnych (przy ciśnieniu równym 1 atm i temperaturze 18°C) znajduje się $2,7 \cdot 10^{19}$ cząsteczek. Stwierdzono, że cząsteczki typowego gazu mają rozmiary około $4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Wskazówka: Cząsteczki typowego gazu mają rozmiary ok. $4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Są one tak małe, że nie można ich zobaczyć, nawet pod najdoskonalszym mikroskopem.

Mimo że liczba cząsteczek gazu w $1 \text{ centymetrze sześciennym}$ jest bardzo duża, średnie odległości między nimi są znaczne w porównaniu z ich – bardzo małymi – rozmiarami. Zasięg sił międzycząsteczkowych jest mały, porównywalny z rozmiarami cząsteczek, więc podczas swojego ruchu cząsteczki w zasadzie nie oddziałują na siebie – oddziałują tylko w bardzo krótkim czasie zderzenia, gdy znajdują się w bliskiej odległości. Dlatego możemy przyjąć, że między zderzeniami cząsteczki poruszają się swobodnie ruchem jednostajnym, prostoliniowym. Kierunek ruchu poszczególnej cząsteczki przy każdym zderzeniu ulega zmianie, zatem jej tor ma kształt linii łamanej (*Rysunek 6.24: „Zygzakowaty” tor ruchu cząsteczki w gazie* na stronie 285).

Odcinek toru cząsteczki między dwoma sąsiednimi zderzeniami nazywamy drogą swobodną. Długość drogi swobodnej w trakcie ruchu cząsteczki ulega nieustannym zmianom, dlatego dla opisu ruchu cząsteczek w gazie stosujemy pojęcie *średniej drogi swobodnej* $\bar{\lambda}$. Średnia droga swobodna cząsteczek powietrza w warunkach normalnych wynosi około $7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Średnia prędkość cząsteczek powietrza w tych warunkach wynosi około 500 m/s . Łatwo można stąd obliczyć, że cząsteczka w ciągu sekundy doznaje około 10^{10} zderzeń.

Odcinki prostej łamanej mają przypadkowe długości. Cząsteczka poruszająca się swobodnie między sąsiednimi zderzeniami pokonuje drogi o długości $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Średnia droga swobodna oznaczona jest symbolem $\bar{\lambda}$



Rysunek 6.24: „Zygzakowaty” tor ruchu cząsteczki w gazie

Model gazu doskonałego (idealnego)

Opisane wyżej warunki ruchu cząsteczek w gazie pozwalają na założenie pewnych uproszczeń i na utworzenie w ten sposób modelu gazu doskonałego. Model ten jest podstawą do wyprowadzania zależności matematycznych opisujących zachowanie się gazu. Przykładem takiej zależności jest poznane już prawo Clapeyrona ([wzór 590](#) na stronie 264).

Przez *model gazu doskonałego* będziemy rozumieli zbiór cząsteczek, których rozmiary sprowadzimy do punktów materialnych. Wszystkie cząsteczki będziemy uważać za identyczne. Przyjmujemy, że podlegają one tym samym prawom mechaniki Newtona co ciała makroskopowe. Przyjmujemy, że cząsteczki w zasadzie nie oddziałują na siebie – oddziałują tylko w bardzo krótkim czasie zderzenia, gdy znajdują się w bliskiej odległości. Zderzenia cząsteczek między sobą i ze ściankami naczynia przyjmujemy za doskonale sprężyste. Cząsteczki wykonują ruchy chaotyczne i żaden kierunek nie jest wyróżniony; tzn. średnio w każdym kierunku porusza się jednakowa liczba cząsteczek. Średnio w jednostce objętości w warunkach równowagi znajduje się jednakowa liczba cząsteczek.

Zachowanie się większości gazów rzeczywistych w warunkach nie odbiegających znacznie od warunków normalnych jest zgodne z modelem gazu idealnego.

Ⓡ Zamknięcie:

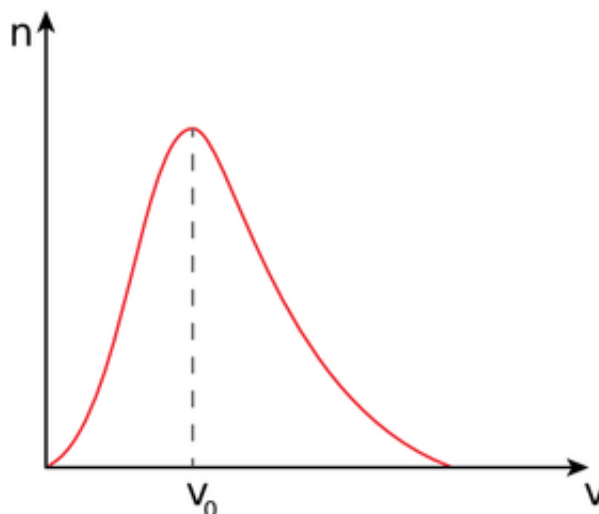
Podstawowe założenia modelu gazu doskonałego (idealnego)

- Gaz jest zbiorem bardzo dużej liczby identycznych drobin; mogą to być pojedyncze atomy lub cząsteczki związków chemicznych.
- Cząsteczki wykonują ruchy chaotyczne i żaden kierunek ich ruchu nie jest wyróżniony.
- Rozmiary cząsteczek są tak małe, że sprowadzamy je do punktów materialnych.
- Średnie odległości między cząsteczkami są na tyle duże, że oddziaływania między nimi można pominąć, z wyjątkiem silnego odpychania podczas krótkotrwałych zderzeń.

- Cząsteczki podlegają prawom mechaniki Newtona. Zderzenia cząsteczek między sobą i ze ściankami naczynia przyjmujemy za doskonale sprężyste.

Prędkości cząsteczek gazu

Z jak dużymi prędkościami poruszają się cząsteczki w typowym gazie np. w powietrzu, w przeciętnych warunkach? Jak wspomniano wcześniej, w powietrzu średnia prędkość cząsteczek wynosi ok. 500 m/s. Jest to prędkość kuli pistoletowej.



Rysunek 6.25: Wykres funkcji Maxwella statystycznego rozkładu prędkości cząsteczek gazu

Różne cząsteczki gazu poruszają się z różnymi przypadkowymi prędkościami. Pojedyncza cząsteczka przypadkowo wybrana, może mieć dowolną przypadkową prędkość, choć „wylosowanie” takiej czy innej prędkości nie jest jednakowo prawdopodobne. Tak więc jeżeli będziemy badać prędkości dużej liczby cząsteczek, to zauważymy pewną prawidłowość statystyczną. Stosunkowo niewiele z nich będzie miało skrajne wartości prędkości, tzn. prędkości bliskie zera jak i prędkości bardzo duże. Najwięcej cząsteczek będzie miało prędkości zbliżone do tzw. prędkości najbardziej prawdopodobnej v_p (która jest zbliżona do średniej wartości prędkości). Krzywa przedstawiająca rozkład statystyczny prędkości cząsteczek nazywa się krzywą *rozkładu Maxwella* (Rysunek 6.25: *Wykres funkcji Maxwella statystycznego rozkładu prędkości cząsteczek gazu* na stronie 286). W uproszczony sposób można ją interpretować jako prawdopodobieństwo znalezienia cząstki o zadanej prędkości v .

Maksimum krzywej rozkładu Maxwella przypada dla prędkości najbardziej prawdopodobnej v_p . Wraz ze wzrostem temperatury gazu cząsteczki uzyskują średnio większe prędkości, maksimum krzywej przesuwa się w kierunku większych prędkości i krzywa obejmuje większy zakres prędkości dużych.

Widzimy więc, że temperatura jest związana ze średnią prędkością cząsteczek. Im wyższa temperatura gazu, tym jego cząsteczki szybciej się poruszają. Ściśle: średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek jest proporcjonalna do temperatury T gazu (w skali Kelvina). Do zagadnienia tego wrócimy w następnym rozdziale.

Pytania i problemy

1. Podaj najważniejsze założenia modelu gazu doskonałego.

2. Co nazywamy średnią drogą swobodną?
3. Jak dużą prędkość mają cząsteczki powietrza znajdującego się w warunkach normalnych. Porównaj ją ze znaną Ci prędkością jakiegoś ciała.
4. Oblicz, ile razy cząsteczka powietrza doznaje zderzeń w ciągu sekundy wiedząc, że średnia droga swobodna wynosi $7 \cdot 10^{-8}$ m, zaś średnia prędkość wynosi 500 m/s.

6.8 Podstawowe równanie teorii kinetycznej gazów a równanie Clapeyrona

W rozdziale 6.3 *Równanie Clapeyrona* na stronie 262 omawialiśmy związek pomiędzy podstawowymi parametrami gazu:

$$(\text{wzór 658}) pV = nRT$$

gdzie przyjęto oznaczenia: p – ciśnienie, V – objętość gazu i T – temperatura gazu, zaś n – liczba moli i R – uniwersalna stała gazowa.

Równanie to można doprowadzić do następującej postaci:

$$(\text{wzór 659}) pV = Nk_B T$$

gdzie: N – liczba cząsteczek gazu w objętości V , k_B – pewna stała, tak zwana *stała Boltzmanna*.

Łatwo zauważyć, że ten wzór wynika z równania (*wzór 658* na stronie 287). Należy uwzględnić, że liczbę moli n można wyrazić za pomocą stosunku liczby cząsteczek gazu N do liczby cząsteczek w jednym molu N_A , $n = N / N_A$, oraz przyjmując następującą definicję k_B :

$$(\text{wzór 660}) k_B = \frac{R}{N_A}$$

R Zamąpiętać:

Stala Boltzmanna k_B

W teorii kinetycznej występuje stała k_B , której wartość wynosi

$$(\text{wzór 661}) k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Wartość stałej k_B jest $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ razy mniejsza od stałej gazowej R ,

$$(\text{wzór 662}) k_B = \frac{R}{N_A}$$

Wtedy zgodnie z wzorem (*wzór 658* na stronie 287)

$$(\text{wzór 663}) pV = nRT = \frac{N}{N_A} RT = N \frac{R}{N_A} T = Nk_B T$$

Wzór (*wzór 658* na stronie 287) chociaż pochodzi z doświadczenia, to można go wyprowadzić z teorii kinetycznej gazów. Wyprowadzimy teraz ten wzór korzystając z założeń modelu gazu doskonałego. Najpierw zastanowimy się nad tym, co to jest ciśnienie według teorii kinetycznej. Zapytajmy: jak to się dzieje, że gaz jako zbiór mikroskopijnych cząsteczek wywiera ciśnienie na ścianki naczynia? Zgodnie z definicją, *ciśnienie gazu* wyraża się siłą, jaką gaz działa na jednostkową powierzchnię ścianki naczynia. Skąd pochodzi ta siła?

Otóż każda cząsteczka, która zderza się ze ścianką naczynia, przy odbiciu doznaje zmiany pędu $\Delta \vec{P}$ w bardzo krótkim czasie Δt (wyjątkowo w tym rozdziale dla pędu używa się symbolu P , żeby nie mylić z symbolem ciśnienia p). Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona wyrażoną za pomocą pędu masy i popędu siły $\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{P}$ ścianka naczynia w czasie zderzenia działa na cząsteczkę siłą \vec{F} . Siła ta jest równa co do wartości sile, z jaką cząsteczka działa na ściankę. Zmiana pędu wszystkich cząsteczek zderzających się ze ścianką w jednostce czasu

określa całkowitą siłę, z jaką gaz działa na ściankę. Stosunek wartości tej siły do powierzchni ścianki S jest właśnie ciśnieniem gazu

$$(\text{wzór 664}) \quad p = \frac{F}{S}$$

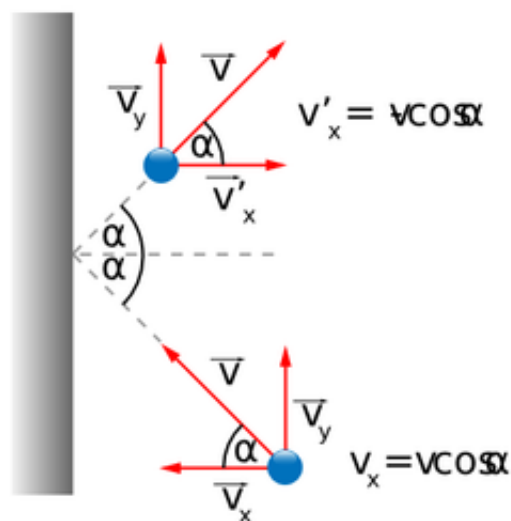
Podany mikroskopowy opis ciśnienia gazu wskazuje na sposób obliczenia tego ciśnienia. Obliczmy najpierw zmianę pędu jednej cząsteczki o masie m zderzającej się ze ścianką naczynia. Przypuśćmy, że cząsteczka ma chwilową prędkość \vec{v} (Rysunek 6.26: Zderzenie cząsteczki ze ścianą na stronie 288). Możemy przyjąć, że masa ścianki jest nieskończenie duża w stosunku do masy cząsteczki.

Ⓡ Zamapiętać:

Mikroskopowy opis ciśnienia gazu

Każda cząsteczka gazu zderzając się ze ścianką działa na nią siłą. Suma sił wszystkich cząsteczek określa całkowitą siłę, z jaką gaz działa na ściankę. Stosunek tej siły do pola powierzchni S ścianki jest właśnie ciśnieniem gazu $p = F/S$.

Dzięki temu możemy uznać, że ścianka nie nabywa żadnej prędkości przy uderzeniu w nią cząsteczki (patrz podrozdział 3.6 Zderzenia na stronie 152) i energia kinetyczna cząsteczki nie zmienia się. Zatem wartość prędkości cząsteczki również nie zmienia się, chociaż kierunek prędkości po zderzeniu ulegnie zmianie. W kierunku równoległym do ścianki pęd nie ulega zmianie, więc składowa prędkości w tym kierunku także. Całkowita wartość prędkości nie zmienia się, gdyż jej składowa w kierunku prostopadłym do ścianki zmienia tylko znak bez zmiany wartości. Dlatego kąt padania cząsteczki jest równy kątowi jej odbicia od ścianki.



Przy zderzeniu cząsteczki ze ścianką składowa v_y prędkości równoległa do ścianki nie zmienia się; składowa prostopadła v_x zmienia tylko zwrot na przeciwny

Rysunek 6.26: Zderzenie cząsteczki ze ścianą

Zatem całkowita zmiana pędu cząsteczki przy zderzeniu ze ścianką wynosi:

$$(\text{wzór 665}) \quad \Delta P = mv'_x - mv_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x = -2mv \cos \alpha$$

przy czym wektor zmiany pędu ma kierunek prostopadły do ścianki. Całkowity pęd udzielony ściance wynosi więc $2mv_x = 2mv \cos \alpha$.

Rozważmy teraz gaz zawarty w kulistym naczyniu o promieniu r i objętości $V = \frac{4\pi r^3}{3}$. Dla uproszczenia przyjmiemy, że gaz jest na tyle rozrzedzony, że możemy zaniedbać zderzenia cząsteczek między sobą. Przy każdym zderzeniu cząsteczka będzie uderzać w ściankę pod tym samym kątem α , a między zderzeniami za każdym razem będzie przebywać jednakową drogę o długości $l = 2r \cos \alpha$ (Rysunek 6.27: *Odcinki drogi l cząsteczki zderzającej się ze ściankami kulistego naczynia są jednakowe* na stronie 289). Zatem w czasie Δt cząsteczka przebędzie w sumie drogę równą $v \Delta t$ i ścianka dozna $\frac{v \Delta t}{l}$ zderzeń. Pęd przekazany ściance w tym czasie przez jedną cząsteczkę wyniesie:

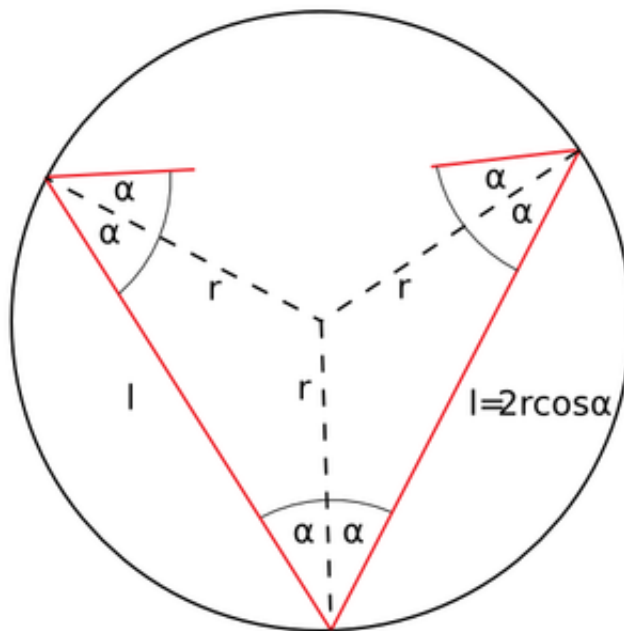
$$(\text{ wzór 666 }) \Delta P_1 = \frac{v \Delta t}{2r \cos \alpha} 2mv \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} \Delta t$$

Średnia siła, z jaką działa jedna cząsteczka na ściankę naczynia, wynosi więc

$$(\text{ wzór 667 }) F_1 = \frac{\Delta P_1}{\Delta t} = \frac{mv^2}{r}$$

Sumaryczna siła działająca na ściankę (przyjmujemy, że gaz składa się z jednakowych cząsteczek, każda o masie m) naczynia przez wszystkie cząsteczki wynosi:

$$(\text{ wzór 668 }) F = \frac{mv_1^2}{r} + \frac{mv_2^2}{r} + \dots = \frac{m}{r} (v_1^2 + v_2^2 + \dots)$$



Rysunek 6.27: Odcinki drogi l cząsteczki zderzającej się ze ściankami kulistego naczynia są jednakowe

Wzór ten znacznie się uprości, jeżeli wprowadzimy średni kwadrat prędkości dla N cząsteczek znajdujących się w naczyniu. Średni kwadrat prędkości zdefiniowany jest następująco:

$$(\text{wzór 669}) \overline{v^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$$

Zatem:

$$(\text{wzór 670}) F = N \frac{m\overline{v^2}}{r}$$

Dzieląc wartość siły F przez powierzchnię kulistego naczynia $S = 4\pi r^2$, otrzymamy ciśnienie

$$(\text{wzór 671}) p = \frac{N m \overline{v^2}}{4\pi r^3}$$

ale $4\pi r^3 = 3V$ (V jest objętością kulistego naczynia), więc $p = \frac{N m \overline{v^2}}{3V}$. Model gazu doskonałego prowadzi więc do wzoru na ciśnienie gazu

$$(\text{wzór 672}) p = \frac{N m \overline{v^2}}{3V}$$

Wzór ten po przekształceniu przybierze postać

$$(\text{wzór 673}) pV = \frac{2}{3} N \frac{m \overline{v^2}}{2}$$

Wzór ([wzór 673](#) na stronie 290) możemy zapisać również w postaci

$$(\text{wzór 674}) pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k}$$

Jest to podstawowy **wzór teorii kinetycznej gazów, który mówi, że iloczyn ciśnienia i objętości gazu zależy tylko od średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek i od liczby cząsteczek gazu.**

Wzór ten wiąże ze sobą makroskopowe parametry termodynamiczne (ciśnienie p , objętość V) z wielkościami mikroskopowymi (średnia energia kinetyczna cząsteczki $\overline{E_k} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$, liczba cząsteczek N).

Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie: co to jest temperatura z punktu widzenia mikroskopowego, czyli teorii kinetycznej gazów? By udzielić odpowiedzi, spójrzmy jeszcze raz na wzór ([wzór 673](#) na stronie 290) wynikający z tej teorii:

$$(\text{wzór 675}) pV = \frac{2}{3} N \frac{m\overline{v^2}}{2}$$

i porównajmy go z równaniem Clapeyrona stanu gazów doskonałych w postaci ([wzór 659](#) na stronie 287):

$$(\text{wzór 676}) pV = N k_B T$$

Widzimy, że lewe strony tych dwóch równań są sobie równe. Porównując prawe strony, mamy

$$(\text{wzór 677}) \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k_B T$$

Otrzymaliśmy bardzo ważny wynik: średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczek jest proporcjonalna do temperatury (dotychczasowe doświadczenia w pełni potwierdzają ten wniosek). Wzór ten można traktować jako mikroskopową definicję temperatury w modelu gazu doskonałego. Widzimy zatem, że temperatura bezwzględna jest wielkością fizyczną charakteryzującą średnią energię kinetyczną ruchu postępowego cząsteczek gazu.

Współczynnikiem proporcjonalności jest czynnik $\frac{3k_B}{2}$.

Zamknięcie:

Statystyczny sens temperatury

Mikroskopowa definicja temperatury w modelu gazu doskonałego dana jest za pomocą wzoru $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$, którego interpretacja jest następująca: temperatura T to wielkość fizyczna proporcjonalna do średniej energii ruchu postępowego cząsteczek gazu, czyli jest to "miara" wartości średniej energii ruchu cieplnego cząsteczki.

Przykład 7

W powietrzu najwięcej jest cząsteczek azotu N_2 . Ile wynosi średnia prędkość cząsteczek azotu w zimie, gdy temperatura wynosi $t_1 = -13^\circ\text{C}$, a ile w lecie przy temperaturze $t_2 = +27^\circ\text{C}$? Masa cząsteczkowa azotu N_2 wynosi $\mu = 30\text{ g}$.

Odpowiedź: Przekształcając wzór (wzór 677 na stronie 290) otrzymamy wzór na średnią wartość kwadratu prędkości pojedynczej cząsteczki:

$$(\text{wzór 678}) \quad \overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$$

gdzie m jest masą jednej cząsteczki azotu. Pierwiastek kwadratowy z tak obliczonej wartości różni się niewiele od szukanej prędkości średniej (jest od niej większy o około 8%); możemy więc przyjąć, że

$$\bar{v} \approx \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Wartość m znajdziemy dzieląc masę jednego mola azotu $\mu = 30\text{ g}$ przez liczbę cząsteczek w jednym molu $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, czyli $m = \mu / N_A = 5 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 5 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Podstawiając tę wartość i pozostałe wartości do wzoru na prędkość średnią otrzymamy, że prędkość średnia cząsteczek azotu w temperaturze $t_1 = -13^\circ\text{C} = 260\text{ K}$ wynosi:

$$(\text{wzór 679}) \quad \bar{v}_1 = 464 \text{ m/s}$$

a w temperaturze $t_2 = 27^\circ\text{C} = 300\text{ K}$ wynosi:

$$(\text{wzór 680}) \quad \bar{v}_2 = 498 \text{ m/s}$$

Taką prędkość mają pociski pistoletowe lub karabinowe.

Przykład 8

Jądrowe reakcje syntezy (łączenia jąder) ze względu na wysoką temperaturę potrzebną do ich wystąpienia noszą nazwę termonuklearnych. Jaka temperatura jest konieczna, aby zaszła reakcja syntezy dwóch jąder deuteru?

Odpowiedź: Aby dwa deuterony mogły się połączyć, muszą się zbliżyć na odległość działania krótkozasięgowych sił jądrowych, czyli na odległość $r = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Jednakże zbliżenie jąder do siebie wymaga pracy, gdyż zbliżające się do siebie jądra mają ładunki elektryczne jednoimienne i dlatego odpychają się tym większą siłą im bardziej się zbliżą. Aby pokonać te siły muszą mieć odpowiednio duże prędkości v i odpowiednio duże energie kinetyczne $\frac{mv^2}{2}$. Zatem zgodnie z wzorem (wzór 677 na stronie 290): $\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$ gaz deuteronowy musi charakteryzować się również wysoką temperaturą.

Energię potrzebną do pokonania bariery elektrostatycznego odpychania można obliczyć (patrz e-fizyka 3 – rozdz 1.5). Wynosi ona $U = 0,48 \text{ MeV}$. Zatem deuterony muszą mieć taką, co najmniej, energię kinetyczną. Możemy obliczyć temperaturę T potrzebną do wystąpienia syntezy deuteronów

wiedząc, że średnia energia kinetyczna (termiczna) deuteronu wynosi $\frac{3k_B T}{2}$

$$(\text{wzór 681}) \quad \frac{3k_B T}{2} = U$$

Stąd:

$$(\text{wzór 682}) T = \frac{2U}{3k_B} = \frac{2 \cdot 7,68 \cdot 10^{14} \text{ J}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}} = 3,8 \cdot 10^9 \text{ K}$$


Temperatura ta wynosi około $3,8 \cdot 10^9 \text{ K}$ i jest znacznie większa od temperatury panującej wewnątrz Słońca, którą oceniamy na ok. $1,3 \cdot 10^7 \text{ K}$. Jednakże wewnątrz Słońca zachodzą reakcje termonuklearne, mimo że temperatura jest dużo niższa od $3,8 \cdot 10^9 \text{ K}$. Spowodowane jest to m.in. tym, że na skutek rozkładu statystycznego prędkości cząstek dla określonej temperatury T zawsze istnieje określona liczba jąder mających prędkości i energie większe od średniej (patrz rozdz. 6.7 *Podstawowe pojęcia teorii kinetycznej gazów* na stronie 284, *Rysunek 6.25: Wykres funkcji Maxwella statystycznego rozkładu prędkości cząsteczek gazu* na stronie 286). Obliczono, że w ciągu roku jednemu jądru na milion udaje się wziąć udział w reakcji łączenia. Wystarcza to do ciągłej „pracy” Słońca.

Pytania i problemy

1. Zastosuj drugą zasadą dynamiki Newtona wyrażoną za pomocą pędu i popędu w celu wyrażenia ciśnienia gazu w naczyniu za pomocą pędu cząsteczek gazu.
2. Czy zmiana pędu udzielona ściance przez cząsteczkę w nią uderzającą zależy od kąta padania cząsteczki na ściankę? Podaj wzór na tę zmianę pędu.
3. Co to jest średnia prędkość kwadratowa cząsteczki? Podaj wzór.
4. Podaj podstawowy wzór teorii kinetycznej gazów.
5. Jaki jest związek między podstawowym równaniem teorii kinetycznej gazów a równaniem Clapeyrona?
6. Podaj wzór który pozwala zdefiniować temperaturę w modelu gazu doskonałego.

6.9 Wymiana ciepła

Zmiana energii wewnętrznej ciała może zachodzić bez wykonywania pracy sił makroskopowych. Jeżeli jakieś ciało wstawimy do rozgrzanego pieca, to jego temperatura wzrośnie, a zatem wzrośnie jego energia wewnętrzna. Schładzając rozgrzane ciało w zimnej wodzie, stwierdzimy, że jego temperatura znowu zmieni się, co związane jest ze zmianą jego energii wewnętrznej, mimo, że nie została wykonana żadna praca. Nie było tu widocznego działania sił zewnętrznych.

 **Ważne:** Proces przekazywania energii wewnętrznej z jednego ciała do drugiego bez udziału pracy sił makroskopowych nazywa się *wymianą ciepła*.

Rozróżniamy trzy rodzaje procesu wymiany ciepła:

1. *Przewodnictwo cieplne* – proces wymiany ciepła między ciałami będącymi w bezpośrednim kontakcie.
2. *Promieniowanie* - proces wymiany ciepła zachodzący poprzez promieniowanie elektromagnetyczne widzialne jak i niewidzialne.
3. *Konwekcja* (unoszenie) – proces wymiany ciepła zachodzący poprzez ruch strumieni płynów – cieczy lub gazów.

Przewodnictwo ciepłe

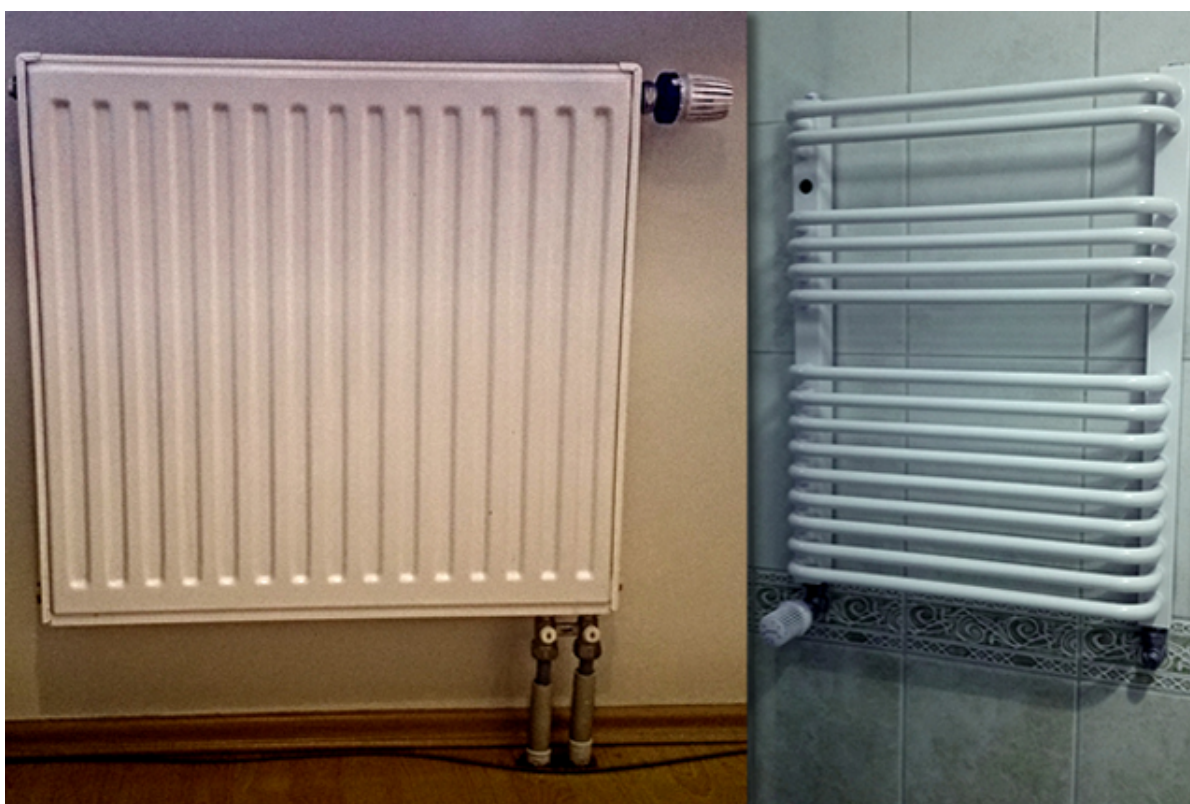
Ciała będące w bezpośrednim kontakcie przekazują sobie energię wewnętrzną. Zmiana energii wewnętrznej ciała zachodzi na skutek przekazywania energii kinetycznej cząsteczek. W ciele rozgrzanym cząsteczki poruszają się z dużymi prędkościami w chłodnym (tego samego materiału) – z małymi. Przy zetknięciu tych ciał cząsteczki ciała rozgrzanego o dużej prędkości zderzając się z cząsteczkami ciała chłodniejszego przekazują część swojej energii cząsteczkom poruszającym się wolniej w ciele chłodniejszym.

Wykorzystuje się tu zjawisko przewodnictwa ciepłego Energy_recovery ze sprężarek z wtryskiem oleju; Free Software Foundation Wikimedia Commons: <http://en.wikipedia.org/wiki/>



pl:Free_Software_Foundation

Rysunek 6.28: Moduł odzysku energii



Rysunek 6.29: Domowe kaloryfery wykorzystują zjawisko przewodnictwa ciepłego i konwekcji;
Free Software Foundation Wikimedia Commons

Promieniowanie

Wymiana ciepła zachodząca poprzez promieniowanie jest powszechnym zjawiskiem, gdyż każde ciało wysyła fale elektromagnetyczne w zakresie podczerwieni a przy temperaturach wyższych od około 500°C także i światło widzialne. Występuje również zjawisko odwrotne – pochłanianie tego promieniowania. Ciało może zyskiwać energię i ogrzewać się, gdy więcej promieniowania pochłania, niż wysyła. Tak się dzieje, gdy w pobliżu znajduje się ciało o wyższej temperaturze.

Doświadczenie

Ustaw na statywie rozgrzane żelazko. Ustaw swoją rękę pod żelazkiem dłońią do góry, w odległości 10 – 30 cm. Poczujesz wyraźnie jak ręka się ogrzewa.

Wniosek: przekaz ciepła do ręki nie może być konwekcją, gdyż strumień ogrzanego powietrza unosi się do góry – a nie opada w dół. Przewodnictwo cieplne odgrywa tu małą rolę, gdyż jest ono w powietrzu (jak również i w innych gazach, przy ciśnieniu normalnym) bardzo małe.

Należy zaznaczyć, że wymiana ciepła przez promieniowanie może zachodzić w próżni; w przeciwieństwie do dwóch pozostałych rodzajów przekazu ciepła – przez przewodnictwo i przez konwekcję.

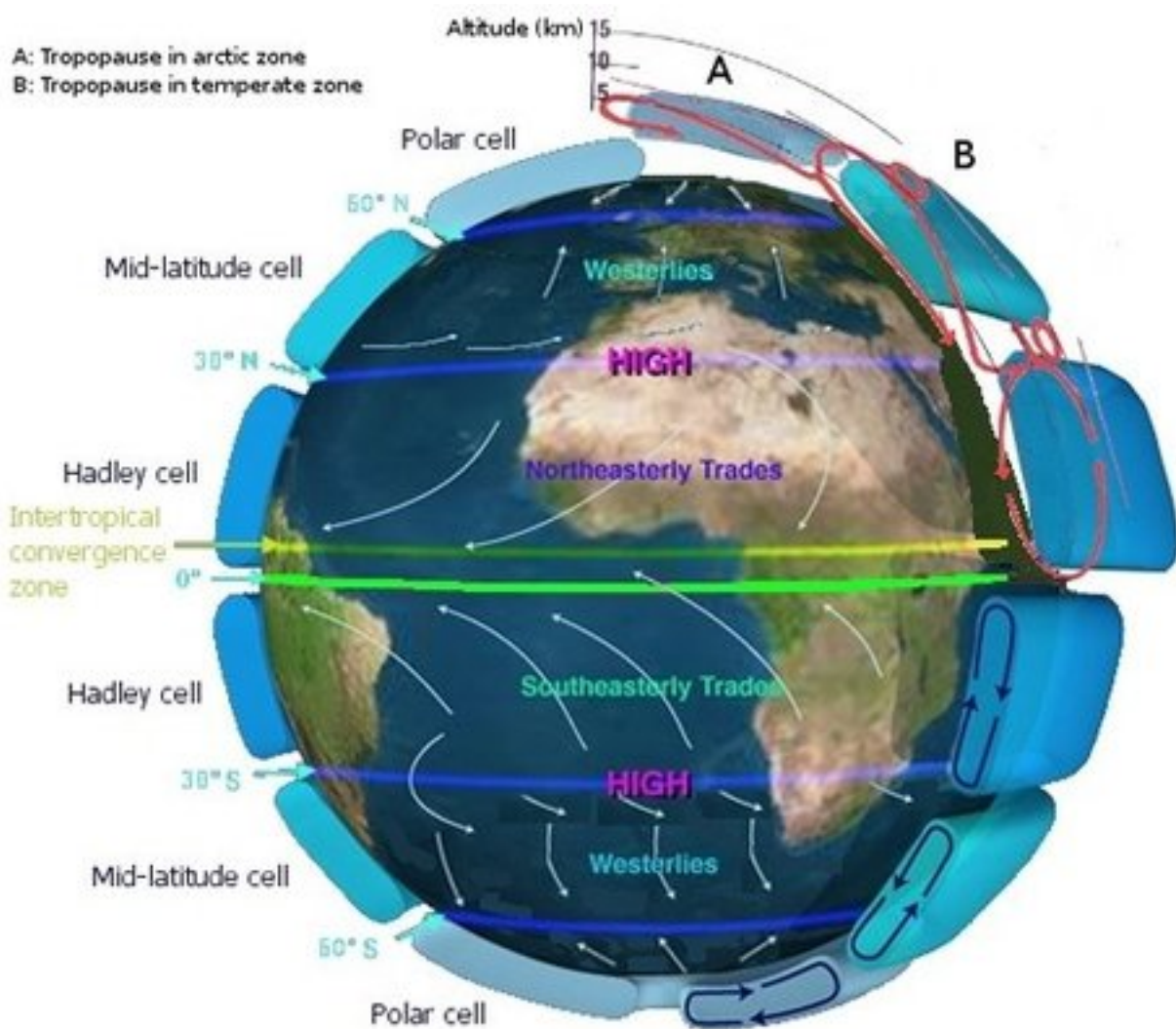
Tak właśnie ogrzewa się Ziemia od Słońca. Promieniowanie słoneczne dociera do Ziemi przez przestrzeń kosmiczną, gdzie, jak wiadomo, panuje wysoka próżnia.



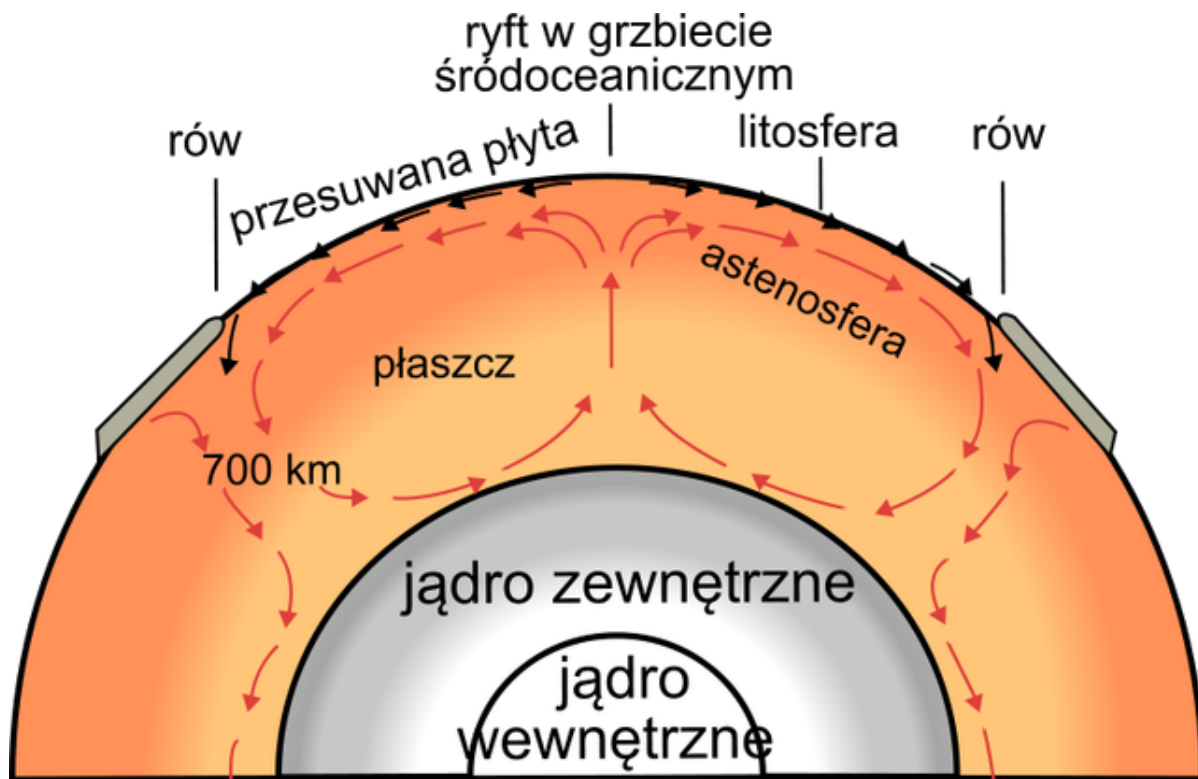
Rysunek 6.30: W pirometrach optycznych, służących do zdalnego pomiaru temperatury ciał wykorzystuje się zjawisko przekazu energii przez promieniowanie; Free Software Foundation Wikimedia Commons

Konwekcja

Konwekcja to proces wymiany ciepła zachodzący poprzez ruch strumieni płynów – cieczy lub gazów. W płynie (w cieczy lub gazie) obszary o podwyższonej temperaturze są lżejsze (mają obniżoną gęstość ρ) i zgodnie z prawem Archimedesesa są unoszone w górę przenosząc jednocześnie swoją energię wewnętrzną. Tworzą się strumienie, prądy płynu przenoszące ciepło. Często ustala się dynamiczny stan równowagowy, w którym materia krąży po zamkniętych torach tworząc komórkę konwekcyjną. Podgrzewa się ona w jednym obszarze, zaś oziębia w innym. [Rysunek 6.31: Strumienie i komórki konwekcyjne w atmosferze ziemskiej powodują powstanie wiatrów przy powierzchni planety; Free Software Foundation Wikimedia Commons](#) na stronie 295 i [Rysunek 6.32: Przemieszczenia mas magmy wewnątrz Ziemi powoduje przesuwanie płyt tektonicznych w litosferze; Free Software Foundation Wikimedia Commons](#) na stronie 296 pokazują komórki konwekcyjne powietrza w atmosferze Ziemi oraz magmy w ziemskim płaszczu.



Rysunek 6.31: Strumienie i komórki konwekcyjne w atmosferze ziemskiej powodują powstanie wiatrów przy powierzchni planety; Free Software Foundation Wikimedia Commons



Rysunek 6.32: Przemieszczenia mas magmy wewnątrz Ziemi powoduje przesuwanie płyt tektonicznych w litosferze; Free Software Foundation Wikimedia Commons

Pytania i problemy

1. Przedstaw trzy najważniejsze sposoby przekazu ciepła.
2. Opisz na czym polega przewodnictwo cieplne i podaj przykłady, gdzie ono występuje.
3. Opisz na czym polega konwekcyjny przekaz ciepła i podaj przykłady.
4. Opisz na czym polega przekaz ciepła przez promieniowanie i podaj przykłady.
5. Wykonaj doświadczenie opisane w tym podrozdziale. We wnioskach napisz dlaczego w tym doświadczeniu ogrzewanie ręki nie zachodzi poprzez przewodnictwo ani przez konwekcję.
6. Znany sposób rozgrzania rąk jest szybkie potarcie jednej dłoni o drugą. Rozstrzygnij, odpowiednio uzasadniając, czy rozgrzanie to jest skutkiem przewodnictwa cieplnego, promieniowania, konwekcji czy innego zjawiska niebędącego wymianą ciepła.

Rozdział

7

Energia wewnętrzna, ciepło i praca

Podrozdziały:

- [7.1 Pierwsza zasada termodynamiki](#)
- [7.2 Pierwsza zasada termodynamiki w odniesieniu do izoprocesów gazu doskonałego - część pierwsza](#)
- [7.3 Pierwsza zasada termodynamiki w odniesieniu do izoprocesów gazu doskonałego - część druga](#)
- [7.4 Druga zasada termodynamiki. Nieodwracalność realnych procesów cieplnych](#)
- [7.5 Procesy kotłowe i silniki cieplne](#)
- [7.6 Cykl Carnota](#)
- [7.D1 Dodatek: Energia wewnętrzna gazu - zasada ekwipartycji energii \(temat nadobowiązkowy\)](#)
- [7.D2 Dodatek: Entropia \(temat nadobowiązkowy\)](#)
- [7.D3 Dodatek: Chaos i porządek w przyrodzie \(temat nadobowiązkowy\)](#)

Rysunek 7.1: Wirtualny nauczyciel

Energia wewnętrzna

Czym jest *energia wewnętrzna* ciała lub układu termodynamicznego? W rozdziale *Praca i energia* na stronie 131 podaliśmy, że energię ciała można wyrazić przez sumę energii kinetycznej i potencjalnej. Energia kinetyczna i potencjalna ciała zależą od ruchu i od położenia ciała względem innych ciał w wybranym układzie odniesienia. Natomiast energia, która zależy od procesów zachodzących wewnątrz ciała nazywa się energią wewnętrzną. Wiemy, że cząsteczki są w bezustannym ruchu oraz oddziałują ze sobą, a więc mają energie kinetyczne i potencjalne pochodzące od sił wzajemnego oddziaływania. Ponadto występują tu również energie powłok elektronowych i jąder atomów. Suma tych wszystkich rodzajów energii nazywa się energią wewnętrzną układu, oznaczamy ją symbolem U .



Ważne:

Energia wewnętrzna to ta część energii układu, która zależy od jego stanu wewnętrznego. Energia wewnętrzna to suma energii kinetycznych i oddziaływań cząsteczek oraz wewnątrzcząsteczkowych.

Zwykle, w procesach termodynamicznych większość z tych rodzajów energii nie ulega zmianie. Nas interesuje tylko zmiana energii wewnętrznej ΔU . Położenie zera na skali energii wewnętrznej nie ma istotnego znaczenia w procesach termodynamicznych. Podobnie w mechanice interesuje nas zwykle przyrost energii potencjalnej liczonej od określonego poziomu odniesienia. W wielu przypadkach przyjmuje się, że energia wewnętrzna jest równa zeru ($U = 0$) w temperaturze zera bezwzględnego $T = 0$ K. Podobnie postąpimy i my przy obliczeniu energii wewnętrznej gazu doskonałego.

Napiszemy wzór ogólny na energię wewnętrzną gazu doskonałego przy założeniu, że składa się na nią tylko energia kinetyczna N cząsteczek gazu. Średnia energia kinetyczna jednej cząsteczki (dla gazów składających się z cząsteczek jednoatomowych, które można uznać jako punkty materialne; nie uwzględniamy tu energii ruchu obrotowego cząsteczek, ani energii ich drgań) wynosi

$$\text{(wzór 683) } E_k = \frac{3}{2}kT$$

Zatem energia wewnętrzna gazu, tj. energia kinetyczna wszystkich N cząsteczek wynosi $U = NE_k$ lub

$$\text{(wzór 684) } U = N\frac{3}{2}kT$$

Ciepło

Jeżeli dwa ciała mają różne temperatury, to przy zetknięciu energia kinetyczna cząsteczek ciała o wyższej temperaturze, tzn. ciała cieplejszego, jest przekazywana cząsteczkom ciała zimniejszego. Przekazywanie energii zachodzi podczas zderzeń cząsteczek. Proces ten trwa do chwili wyrównania temperatur obu ciał. Przekaz energii wywołany różnicą temperatury nazywamy *cieplem* i oznaczamy symbolem Q .



Ważne:

Cieplem nazywamy przekaz energii wywołany różnicą temperatury. Ciepło pobrane przez ciało o masie m przy wzroście temperatury o ΔT wynosi:

$$(\text{wzór 685}) \Delta Q = m c \Delta T$$

gdzie c – ciepło właściwe – wielkość charakterystyczna dla określonej substancji.

Ponieważ ciepło jest przekazem (określonej porcji) energii, więc ciepło mierzymy tymi samymi jednostkami co energię. Zatem jednostką ciepła jest dżul (J). Poprzednio stosowano jednostkę specjalnie określoną dla ciepła - *kalorię* (cal),

$$(\text{wzór 686}) 1 \text{ cal} = 4,185 \text{ J}$$

Obecnie coraz rzadziej stosuje się tę jednostkę w praktyce.

Czasami używa się terminu "energia cieplna". Otóż w myśl podanej definicji ciepła termin ten jest niewłaściwy, ponieważ ciepło nie jest postacią energii, lecz jedynie określonym sposobem jej przekazywania. Terminu "energia cieplna" możemy używać, z tym zastrzeżeniem że chodzi nam o przepływ energii (przekazywanie energii wewnętrznej na sposób cieplny, czyli przez chaotyczny ruch cząsteczek), a nie o zasób energii. Gdyby ciepło było zapasem energii, to nie można byłoby z określonego ciała czerpać praktycznie dowolnie dużo ciepła, np. przy przekształcaniu tarcia w ciepło.

Ilość ciepła potrzebną do ogrzania 1 kg danej substancji o 1 K nazywamy *cieplem właściwym*, czyli

$$(\text{wzór 687}) c = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Cieplem właściwym nazywamy więc stosunek pobranego ciepła do iloczynu masy ciała i przyrostu jego temperatury. Jednostką ciepła właściwego jest $\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$. W podobny sposób definiuje się *molowe ciepło właściwe* lub – krótko – *ciepło molowe*: jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania 1 mola danej substancji o 1 kelwin. Oznaczamy je symbolem C :

$$(\text{wzór 688}) C = \frac{1}{n} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

gdzie n jest liczbą moli danej substancji. Jednostką ciepła molowego jest $\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

Ciepło właściwe nie jest uniwersalną stałą, gdyż jego wartość zależy od procesu, w trakcie którego układ pobiera ciepło. Dla zaznaczenia, o jaki proces chodzi, stawia się odpowiedni indeks przy symbolu c . Dla procesu zachodzącego przy stałej objętości, tzw. procesu izochorycznego, jest to V , czyli $c = c_V$ (jest to ciepło właściwe przy stałej objętości), zaś dla procesu

izobarycznego – przy stałym ciśnieniu: $c = c_p$ (jest to ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu).

Znając ciepło właściwe c można obliczyć Q ciepło pobrane przez układ przy wzroście temperatury o ΔT . Przekształcając wzór (wzór 687 na stronie 298) otrzymamy:

$$(\text{wzór 689}) \quad Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

Przykład 1

Ile ciepła trzeba dostarczyć, aby zagotować 1 litr wody mającej początkowo temperaturę 20°C ? Ciepło właściwe wody wynosi $c = 4185 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$.

Odpowiedź: W 1 litrze zawarta jest masa $m = 1 \text{ kg}$ wody a temperatura wody ma wzrosnąć o 80 K , zatem

$$(\text{wzór 690}) \quad Q = mc \Delta T = 1 \cdot 4185 \cdot 80 \text{ J} = 334800 \text{ J}$$

Odpowiada to energii, jaką trzeba by zużyć, aby podnieść kamień o masie 1 kg na wysokość 341 m .

Wiemy, że ciało może zmieniać swoją temperaturę na skutek wymiany ciepła z innym ciałem. Rozważmy to zagadnienie nieco bliżej.

Kawałek żelaza położony na gorącym piecyku rozgrzewa się. Wzrost temperatury ciała oznacza wzrost średniej energii ruchu cząsteczek, a zatem i wzrost energii wewnętrznej ciała. Zostaje on wywołany przepływem energii z piecyka do kawałka żelaza. Po umieszczeniu rozgrzanego żelaza w zimnej wodzie jego temperatura spadnie, zatem zmaleje jego energia wewnętrzna, ponieważ część energii przejdzie do wody. Podczas tych procesów wymiany energii nie została wykonana żadna praca, gdyż nie występowało widoczne przemieszczenie ciała (lub jego części) pod wpływem jakichkolwiek sił (zaniedbujemy tu nieznaczne zmiany objętości ciała na skutek rozszerzalności cieplnej). Energię wewnętrzną przekazywaną ciału przy zmianie jego temperatury, bez udziału pracy, nazywamy *cieplem*.

Mieliśmy tu do czynienia ze zmianą energii wewnętrznej ciała na skutek zderzeń cząsteczek. W ciele o wysokiej temperaturze cząsteczki poruszają się szybciej niż w ciele chłodnym. Przy zetknięciu takich ciał ich cząsteczki zderzają się wzajemnie. Cząsteczka poruszająca się szybciej podczas zderzenia przekazuje cząsteczce wolniejszej część swojej energii kinetycznej, przez co cząsteczki ciała cieplejszego zaczynają się poruszać wolniej, a cząsteczki ciała zimniejszego szybciej. Zatem zachodzą zmiany temperatury obu ciał. Skutkiem tego występuje przepływ energii wewnętrznej od ciała cieplejszego do zimniejszego bez wykonywania pracy, czyli przekaz ciepła. Proces wymiany ciepła między stykającymi się ciałami nazywamy *przewodnictwem cieplnym*.

Wymiana ciepła może zachodzić też za pomocą tzw. *konwekcji* oraz *promieniowania*. *Konwekcja* zachodzi przy ruchu strumieni płynu (cieczy lub gazu). Warstwy płynu, nagrzewając się, na skutek rozszerzalności cieplnej zmniejszają swoją gęstość i zgodnie z prawem Archimedesusa unoszą w górę, a chłodniejsze (o większej gęstości) opadają w dół, zajmując ich miejsce.



Nagrzane powietrze wraz z parą wodną jest unoszone z silosów elektrowni (zdjęcie pochodzi ze strony: http://pl.wikipedia.org/wiki/Elektrownia_j%C4%85drowa)

Rysunek 7.2: Przykład przenoszenia ciepła na zasadzie konwekcji (unoszenia)

Z kolei *promieniowanie* ciała powoduje przepływ energii. Każde ciało wysyła promienie podczerwone, a w wyższych temperaturach, powyżej 500°C , też światło widzialne. Aby zaobserwować zjawisko wymiany ciepła przez promieniowanie, możemy wykonać proste doświadczenie. Umieścimy rękę w odległości około 15 cm poniżej rozgrzanego żelazka. Poczujemy, że żelazko przekazuje nam energię (ręka nagrzewa się). Proces ten nie zachodzi na skutek konwekcji (ręka jest poniżej żelazka!), lecz tylko promieniowania. Możemy się łatwo przekonać, że zachodzi tu ten rodzaj wymiany ciepła, umieszczając między żelazkiem i ręką kawałek blachy. Poczujemy wyraźne osłabienie ogrzewania ręki, gdyż blacha nie przepuszcza promieniowania elektromagnetycznego. Warto dodać, że o ile do wymiany ciepła za pomocą konwekcji i przewodnictwa potrzebny jest ośrodek materialny, to wymiana ciepła za pomocą promieniowania może zachodzić także w próżni. W ten właśnie sposób Słońce przekazuje nam energię poprzez przestrzeń kosmiczną.

Praca

Praca, podobnie jak ciepło, nie jest postacią energii, ale jest tylko sposobem przekazywania energii. W mechanice określiliśmy pracę jako iloczyn siły i drogi. Obecnie podamy ogólniejszą definicję pracy: *pracą* nazywamy każdy proces przekazywania energii, z wyjątkiem procesu występującego na skutek różnicy temperatur.

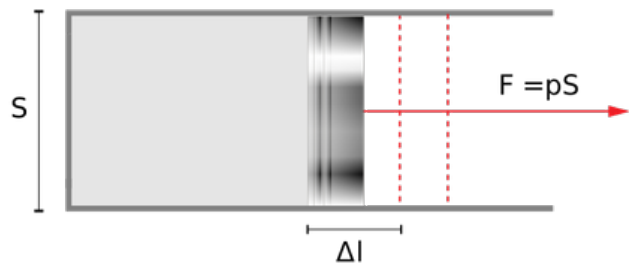


Ważne:

Praca to każdy proces przekazywania energii, z wyjątkiem procesu występującego na skutek różnicy temperatury.

Rozważmy gaz w cylindrze z ruchomym tłokiem (*Rysunek 7.3: Cylinder z ruchomym tłokiem. Gaz wykonuje pracę przesuując tłok o Δl* na stronie 301). Jeżeli ciśnienie gazu wynosi p , a powierzchnia tłoka S , to gaz będzie działał na tłok siłą $F = pS$ i jeżeli przemieści tłok na odległość bardzo małą Δl , to wykona pracę $W = F \Delta l = pS \Delta l$. Ale $S \Delta l$ jest równe przyrostowi objętości ΔV , więc ostatecznie:

$$(\text{wzór 691}) \quad \Delta W = p \Delta V$$



Rysunek 7.3: Cylinder z ruchomym tłokiem. Gaz wykonuje pracę przesuując tłok o Δl

Pytania i problemy

1. Czym jest ciepło? Dlaczego nie powinno się używać terminu „energia cieplna”?
2. Zdefiniuj ciepło właściwe. Podaj jednostkę.
3. Zdefiniuj ciepło molowe. Podaj jednostkę.
4. Opisz przewodnictwo cieplne.
5. Na czym polega wymiana ciepła za pomocą tzw. konwekcji?
6. Na czym polega wymiana ciepła za pomocą promieniowania?
7. Za pomocą jakiego procesu fizycznego zachodzi transport ciepła ze Słońca na Ziemię?
8. Podaj, w jaki sposób definiuje się pracę w termodynamice.

7.1 Pierwsza zasada termodynamiki

W poprzednim rozdziale określiliśmy, co to jest energia wewnętrzna. Stwierdziliśmy, że jest to suma wszystkich rodzajów energii cząsteczek składowych. Stwierdziliśmy ponadto, że zasób energii wewnętrznej gazu zależy od temperatury gazu (jak i dowolnego ciała). Podczas różnych procesów temperatura, więc i energia wewnętrzna może ulegać zmianie. Podczas przekazywania ciepła zachodzi zmiana energii wewnętrznej. Oprócz tego, podczas wykonywania pracy również może zachodzić zmiana energii wewnętrznej. Zatem, podczas różnych procesów te trzy wielkości fizyczne, ciepło, praca i energia wewnętrzna, mogą ulegać zmianie. Jednakże, zgodnie z zasadą zachowania energii muszą się one bilansować. Ten bilans energetyczny możemy zapisać w postaci wzoru

$$(\text{wzór 692}) \quad \Delta U = Q + W$$

Przy czym należy stosować właściwą konwencję dotyczącą znaku ciepła i pracy: Jeżeli ciepło jest dostarczane do ciała (układu ciała), to jest liczone ze znakiem plus – jest dodatnie.

Jeżeli praca jest wykonywana nad ciałem (układem ciała) przez siły zewnętrzne, to jest liczona ze znakiem plus – jest dodatnia.

Jeżeli ciepło jest odbierane od ciała (układu ciała), to jest liczone ze znakiem minus – jest ujemne.

Jeżeli pracę wykonuje ciało (układ ciała), to jest liczona ze znakiem minus – jest ujemna. Związek ([wzór 692](#) na stronie 302) nosi nazwę *pierwszej zasady termodynamiki*, która słowami wyraża się następująco:

Zmiana energii wewnętrznej ciała lub układu ciała jest równa ciepłu dostarczonemu oraz pracy wykonanej nad ciałem (układem ciała).

Pierwsza zasada termodynamiki jest prawem zachowania energii w odniesieniu do procesów termodynamicznych. Treść tej zasady zwraca uwagę na specyficzną formę przekazywania energii za pomocą ciepła. Zasada ta jest ogólniejsza od zasady zachowania energii mechanicznej.

Zamapiętać:

Pierwsza zasada termodynamiki

Zmiana energii wewnętrznej ΔU ciała lub układu ciała jest równa ciepłu Q dostarczonemu oraz pracy W wykonanej nad ciałem (układem ciała).

$$(\text{wzór 693}) \quad \Delta U = Q + W$$

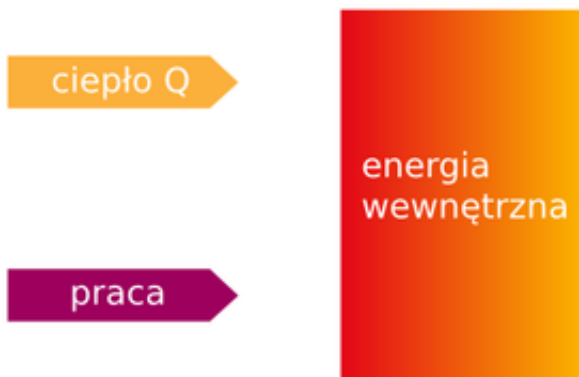
Konwencja dotycząca znaków:

Q : „+” – ciepło dostarczone do układu

„-” – ciepło odebrane

W : „+” – praca wykonana przez siły zewnętrzne na układzie - dostarczona

„-” – praca wykonana przez układ - odebrana



Energia wewnętrzna rośnie na skutek dostarczonego ciepła do układu i (lub) pracy wykonanej nad układem

Rysunek 7.4: Ilustracja I zasady termodynamiki

Należy tutaj zaznaczyć, że chociaż praca i ciepło zależą od procesu termodynamicznego, to przyrost energii wewnętrznej nie zależy od konkretnego procesu, a tylko od stanu początkowego i końcowego układu termodynamicznego. Między tymi stanami mogą zachodzić różne procesy, ale zmiana energii wewnętrznej zawsze będzie jednakowa. Dzieje się tak dlatego, że energia wewnętrzna jest jednoznacznie funkcją stanu układu. Wrócimy jeszcze do tego zagadnienia przy omawianiu przemiany izochorycznej gazów.

Pierwsza zasada termodynamiki jest prawem zachowania energii w odniesieniu do procesów termodynamicznych. Treść tej zasady zwraca uwagę na specyficzną formę przekazywania energii za pomocą ciepła. Wobec tego zasada ta jest ogólniejsza od zasady zachowania energii mechanicznej.

Dla spełnienia zasady zachowania energii mechanicznej należy wziąć pod uwagę *układ odosobniony*, czyli taki układ, w którym można zaniedbać działanie sił zewnętrznych w porównaniu z siłami działającymi wewnątrz układu.

Dla spełnienia zasady zachowania energii, przy uwzględnieniu możliwości wymiany energii za pomocą ciepła, należy zażądać jeszcze, aby układ był izolowany termicznie, tzn. aby nie zachodziła wymiana ciepła z otoczeniem. Układ taki nazywa się *adiabatywnie izolowanym*.

W rzeczywistości idealnie izolowanych adiabatywnie układów nie da się w pełni zrealizować. Można jednak przybliżyć warunki tak, aby uzyskać izolację adiabatywną układu z dużą dokładnością.

Przykładem dobrej izolacji adiabatywniej może być izolacja cieplna uzyskana w termosie. Główna część termosu nazywa się *naczyniem Dewara* (*Rysunek 7.5: Naczynie Dewara, główna część termosu* na stronie 304). Jest to naczynie o podwójnych ściankach, między którymi panuje wysoka próżnia, wykonane zwykle z cienkiego szkła. Próżnia jest dobrym izolatorem, gdyż przez próżnię nie może zachodzić przepływ ciepła w postaci konwekcji ani przewodzenia. Ponadto, dla zminimalizowania utraty ciepła przez promieniowanie, wewnętrzną ściankę posrebrza się. Uzyskuje się w ten sposób powierzchnię lustrzaną odbijającą promieniowanie.



Płyn w naczyniu jest izolowany adiabatycznie

Rysunek 7.5: Naczynie Dewara, główna część termosu

Należy też zwrócić uwagę na to, że przepływ ciepła nie zachodzi natychmiast. Do przepływu ciepła potrzebny jest pewien czas, zwykle dużo większy niż do przekazywania energii za pomocą innych procesów. Dlatego w krótkich przedziałach czasu w przypadku szybkich procesów typu wybuch lub uderzenie układ możemy traktować jako izolowany adiabatycznie.

Dzięki wprowadzeniu pojęcia układu izolowanego adiabatycznie możemy sformułować zasadę zachowania energii w ogólnej postaci:

Ⓜ Zamknięta:

Zasada zachowania energii w ogólnej postaci

Całkowita energia układu odosobnionego izolowanego adiabatycznie jest wielkością stałą.

Oczywiście, rozumiemy, że prawo zachowania energii dotyczy energii całkowitej układu i wcale nie żąda, aby energia każdego z ciał należących do układu była stała – między ciałami układu mogą zachodzić różne procesy wymiany energii, ale całkowita energia układu pozostaje stała.

Pytania i problemy

1. Jeżeli przeprowadzamy gaz z jednego określonego stanu do drugiego, to niezależnie od przeprowadzonego procesu, przyrost energii wewnętrznej gazu będzie zawsze taki sam. Czy w każdym przypadku zużyte zostanie tyle samo ciepła?

2. Czy praca zużyta w dwóch różnych procesach gazowych zaczynających się i kończących tymi samymi stanami będzie jednakowa? Odpowiedź uzasadnij.
3. Sformułuj pierwszą zasadę termodynamiki. Zastosuj tę zasadę do przedstawienia sposobów zmiany energii wewnętrznej gazu.
4. Jaki jest związek pierwszej zasady termodynamiki z zasadą zachowania energii?
5. Jaki warunek musi być spełniony, by układ można było uznać za adiabatycznie izolowany?
6. Sformułuj zasadę zachowania energii w postaci ogólniejszej niż w mechanice.

7.2 Pierwsza zasada termodynamiki w odniesieniu do izoprocessów gazu doskonałego - część pierwsza

Przed rozpatrzeniem konkretnych izoprocessów napiszemy jeszcze pierwszą zasadę termodynamiki w postaci szczególnie dogodnej dla rozważenia przemian gazowych. W tym celu do wyrażenia ogólnego pierwszej zasady termodynamiki (wzór 692 na stronie 302) podstawmy wzór (wzór 691 na stronie 301) na pracę wykonaną przez gaz przy małej zmianie objętości ΔV oraz wzór (wzór 689 na stronie 299) na przekaz ciepła przy małej zmianie temperatury gazu ΔT , (pamiętając konwencję dotyczącą znaku ciepła i pracy) a w efekcie otrzymamy

$$(\text{wzór 694}) \quad \Delta U = mc \Delta T - p \Delta V$$

Przemiana izochoryczna



Rysunek 7.6: Wykres procesu izochorycznego w układzie (V, p)

W procesie izochorycznym przyrost objętości jest oczywiście równy zero ($\Delta V = 0$), czyli zgodnie ze wzorem (wzór 691 na stronie 301) $W = 0$, tzn. gaz nie wykonuje pracy. Zatem relacja (wzór 694 na stronie 305), wyrażająca pierwszą zasadę termodynamiki, dla procesu izochorycznego przybiera postać

$$(\text{wzór 695}) \quad \Delta U = mc_V \Delta T$$

gdzie c_V oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości.

Wzór (wzór 695 na stronie 305) wyraża zmianę energii wewnętrznej pod wpływem przyrostu temperatury gazu o ΔT w procesie izochorycznym. Ale przyrost energii wewnętrznej gazu doskonałego nie zależy od procesu, zależy tylko od temperatury stanu początkowego i końcowego zatem wzór (wzór 695 na stronie 305) będzie słuszny dla dowolnego procesu, w którym temperatura rośnie o ΔT . Uwzględniając wzór (wzór 695 na stronie 305), pierwszą zasadę termodynamiki dla gazów zapiszemy w postaci:

$$(\text{wzór 696}) \quad mc_V \Delta T = mc \Delta T - p \Delta V$$

Przemiana izobaryczna

W procesie izobarycznym ciśnienie jest stałe, $p = \text{const}$, (Rysunek 7.7: Wykres procesu izobarycznego w układzie (V, p) na stronie 306).



Rysunek 7.7: Wykres procesu izobarycznego w układzie (V, p)

Gaz podczas podgrzewania rozpręża się i wykonuje pracę. Jednocześnie zwiększa się jego energia wewnętrzna, ponieważ rośnie temperatura gazu. Ciepło dostarczone w tym procesie wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 697}) \quad \Delta Q = mc_p \Delta T$$

gdzie c_p oznacza ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Równanie Mayera

Wiemy, że ciepło dostarczone w procesie izobarycznym wyraża się za pomocą wzoru

$$(\text{wzór 698}) \quad \Delta Q = mc_p \Delta T$$

gdzie c_p oznacza ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki (relacja (wzór 696 na stronie 306)) możemy napisać

$$(\text{wzór 699}) \quad mc_V \Delta T = mc_p \Delta T - p \Delta V$$

lub

$$(\text{wzór 700}) m(c_p - c_V) \Delta T = p \Delta V$$

Wyraz z prawej strony tego równania można przedstawić w innej postaci. Jeżeli gaz zwiększa swoją objętość od V_1 do V_2 przy stałym ciśnieniu, to z równania Clapeyrona ([wzór 590](#) na stronie 264) otrzymamy $pV_1 = nRT_1$ i $pV_2 = nRT_2$. Po odjęciu stronami tych dwóch równań otrzymamy

$$(\text{wzór 701}) p \Delta V = nR \Delta T$$

gdzie $\Delta V = V_2 - V_1$, $\Delta T = T_2 - T_1$. Podstawiając ten wynik do wzoru ([wzór 700](#) na stronie 307), otrzymamy

$$(\text{wzór 702}) m(c_p - c_V) = nR$$

Ponieważ liczba moli n jest równa stosunkowi masy gazu do masy jednego mola gazu, czyli do masy molowej, $n = \frac{m}{\mu}$, więc równanie ([wzór 702](#) na stronie 307) uproszczy się do postaci

$$(\text{wzór 703}) c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$$

lub

$$(\text{wzór 704}) \mu c_p - \mu c_V = R$$

ale

$$(\text{wzór 705}) \mu c = C$$

oznacza ciepło molowe, zatem

$$(\text{wzór 706}) C_p - C_V = R$$

Powyższy związek jest znany jako *równanie Mayera*. Widzimy, że dla każdego gazu różnica ciepła molowego przy stałym ciśnieniu i ciepła molowego przy stałej objętości jest równa uniwersalnej stałej gazowej. Wynika stąd, że zawsze C_p jest większe od C_V , tzn. że dla jednakowego ogrzania gazu (o jednakową ilość kelwinów) trzeba zużyć więcej ciepła w procesie izobarycznym niż w procesie izochorycznym. Jest to intuicyjnie zrozumiałe, ponieważ przy podgrzaniu gazu przy stałym ciśnieniu część dostarczonej energii zostaje zużyta na podniesienie energii wewnętrznej gazu, a część na pracę rozprężania gazu; w procesie izochorycznym ($V = \text{const}$) praca nie jest wykonywana i całe dostarczone ciepło powoduje tylko wzrost energii wewnętrznej.

Stosunek c_p do c_V jest charakterystyczny dla określonego gazu. Oznaczamy go grecką literą κ (kappa) – nosi on nazwę *współczynnika Poissona* lub *współczynnika adiabaty*

$$(\text{wzór 707}) \kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}$$

Pytania i problemy

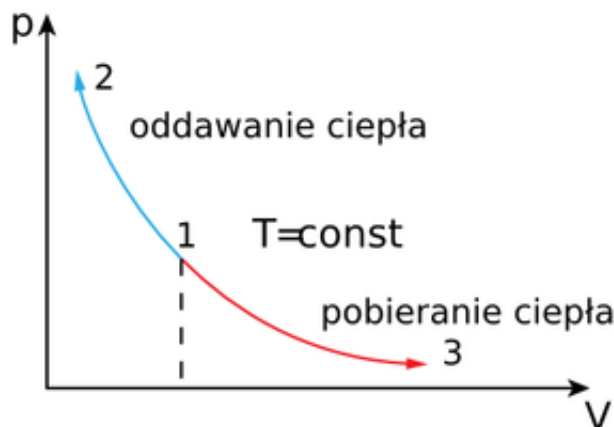
1. Narysuj wykres procesu izochorycznego jako zależność p od V . W jaki sposób zaznaczysz na wykresie, że został on sporządzony dla rosnącej temperatury gazu?
2. W pewnym procesie temperatura gazu wzrosła o ΔT , co oznacza, że zmieniła się energia wewnętrzna gazu. Podaj związek między przyrostem energii wewnętrznej i przyrostem temperatury gazu.
3. Wyjaśnij, czy w procesie izochorycznym gaz wykonuje pracę. Czy jest wymieniane ciepło z otoczeniem?
4. Narysuj wykres procesu izobarycznego jako zależność p od V . W jaki sposób zaznaczysz na wykresie, że został on sporządzony dla rosnącej temperatury gazu?
5. Wyjaśnij, czy w procesie izobarycznym gaz wykonuje pracę i napisz odpowiedni wzór. Czy jest wymieniane ciepło z otoczeniem?
6. Pokaż, że między ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu a ciepłem molowym przy stałej objętości zachodzi związek opisany równaniem Mayera.

7. Ile wynosi ciepło molowe przy stałym ciśnieniu gazu – argonu? Wiemy, że ciepło molowe przy stałej objętości argonu wynosi $2,5 R$, gdzie R – stała gazowa, $R = 8,3143 \cdot 10^3 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{kmol})$.

7.3 Pierwsza zasada termodynamiki w odniesieniu do izoproców gazu doskonałego - część druga

Przemiana izotermiczna

W procesie izotermicznym temperatura gazu jest stała, $T = \text{const}$. Proces izotermiczny można zrealizować tylko wtedy, gdy zostanie zapewniony dobry kontakt gazu ze zbiornikiem ciepła. Podczas rozprężania gazu dla zapewnienia stałej temperatury musi być stale dostarczane ciepło, kosztem którego zostaje wykonana praca bez zmiany energii wewnętrznej gazu.



Rysunek 7.8: Wykres procesu izotermicznego

Na wykresie (*Rysunek 7.8: Wykres procesu izotermicznego* na stronie 308) proces taki zobrazowano jako fragment krzywej (hiperboli) od stanu początkowego oznaczonego 1 do stanu końcowego oznaczonego 3. W przypadku sprężania izotermicznego praca jest wykonana nad gazem siłami zewnętrznymi i dla utrzymania stałej temperatury gaz musi oddać ciepło. Na wykresie proces ten zobrazowany jest fragmentem hiperboli od stanu początkowego 1 do stanu końcowego 2.

Stałość energii wewnętrznej w procesie izotermicznym wynika z relacji (*wzór 695* na stronie 305), $\Delta U = mc_V \Delta T$. Gdy $T = \text{const}$, wtedy oczywiście $\Delta T = 0$, co pociąga za sobą $\Delta U = 0$, więc $U = \text{const}$. Wówczas pierwsza zasada termodynamiki (*wzór 692* na stronie 302) przyjmuje postać:

$$(\text{wzór 708}) \quad Q = -W$$

Zatem ciepło w procesie izotermicznym zostaje zamienione na pracę. Tylko wtedy temperatura gazu może pozostać stała, gdy energia wewnętrzna nie będzie się zmieniać, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy całe dostarczone ciepło zamieni się na pracę wykonaną przez gaz lub gdy gaz odda tyle samo ciepła, ile pracy nad gazem wykonają siły

zewnątrzne. W procesie izotermicznym, mimo że gaz pobiera skończoną ilość ciepła, jego temperatura nie ulega zmianie. Zatem $\Delta T = 0$, co oznacza, że ciepło właściwe w procesie izotermicznym jest nieskończenie duże, gdyż dla ΔT bliskiego zera mianownik we wzorze $c = \frac{1}{m} \frac{Q}{\Delta T}$ (wzór 687 na stronie 298), definiującym ciepło właściwe dąży do zera.

Przemiana adiabatyczna

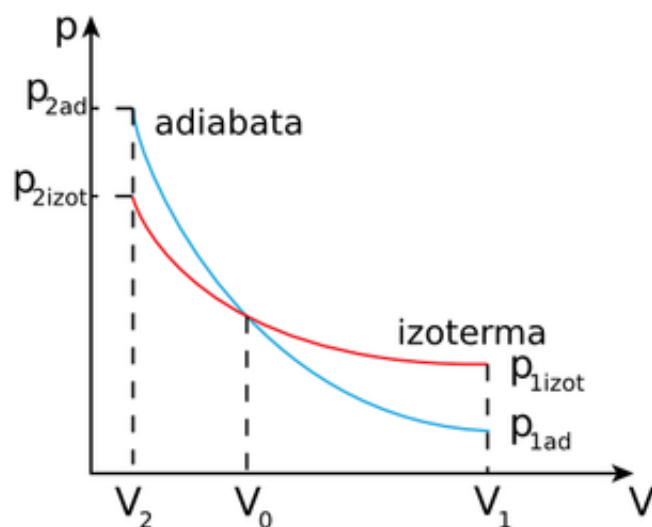
Proces adiabatyczny zachodzi wtedy, gdy nie ma wymiany ciepła z otoczeniem, czyli $Q = 0$. Taka przemiana może zachodzić tylko wtedy, gdy układ jest bardzo dobrze izolowany termicznie od otoczenia. W przypadku, gdy układ nie jest dobrze izolowany, ale przemiana zachodzi szybko, to również w przybliżeniu możemy uważać ją za adiabatyczną, gdyż nie zdąży wystąpić wymiana ciepła z otoczeniem. Pierwsza zasada termodynamiki (wzór 692 na stronie 302) dla tego procesu przyjmuje postać:

$$(\text{wzór 709}) \quad \Delta U = W$$

To znaczy że jeżeli gaz wykonuje pracę, to energia wewnętrzna gazu musi maleć (wtedy zgodnie z konwencją, praca jest ujemna) - praca jest wykonywana kosztem energii wewnętrznej. I na odwrót, gdy nad gazem zostaje wykonana praca (wtedy zgodnie z konwencją, praca jest dodatnia), to energia wewnętrzna gazu musi wzrosnąć (wtedy $\Delta U > 0$). Ponieważ energia wewnętrzna gazu doskonałego jest określona jednoznacznie przez temperaturę, więc przy wykonywaniu pracy przez gaz, czyli przy rozprężaniu adiabatycznym gazu, jego temperatura maleje, natomiast przy sprężaniu adiabatycznym gazu jego temperatura rośnie.

Na pewno zauważyłeś pompując ręczną pompką rower, że pompka wyraźnie się nagrzewa. Podczas sprężania powietrza praca wykonana przez ciebie powoduje wzrost energii wewnętrznej powietrza w pompce. Energia ta nie zdąży uciec na zewnątrz jako ciepło.

Łatwo można zauważyć (patrz [przykład 2](#)), że podczas sprężania adiabatycznego, na skutek wzrostu temperatury, ciśnienie gazu musi wzrastać szybciej niż w procesie z izotermicznym. Podczas rozprężania adiabatycznego – na odwrót – temperatura maleje i gaz obniża swoje ciśnienie bardziej niż w przemianie izotermicznej. Dlatego na wykresie zależności p od V krzywa dla procesu adiabatycznego (adiabata) jest bardziej stromo nachylona do osi odciętych, niż krzywa dla procesu izotermicznego - izoterma ([Rysunek 7.9: Przebieg izotermy i adiabaty](#) na stronie 310).



Rysunek 7.9: Przebieg izotermy i adiabaty

Przykład 2

Założmy, że w dwóch identycznych cylindrach z tłokami znajdują się jednakowe ilości gazu o parametrach p_0 , V_0 i T_0 . Niech w obu cylindrach gaz doznaje rozprężania do objętości końcowej V_1 - w jednym, za pomocą procesu izotermicznego, a w drugim, adiabatycznego. W pierwszym cylindrze podczas procesu izotermicznego temperatura jest oczywiście stała i po rozprężeniu wynosi T_0 . W drugim cylindrze podczas procesu adiabatycznego temperatura maleje i po rozprężeniu wynosi T_1 , przy czym $T_1 < T_0$. Jak zmniejszy się ciśnienie w drugim cylindrze w stosunku do pierwszego?

Odpowiedź: W procesie izotermicznym (zgodnie z równaniem (wzór 701 na stronie 307) ciśnienie wyniesie

$$(\text{wzór 710}) p_{1 \text{ izot}} = \frac{p_0 V_0}{V_1}$$

Przy rozprężaniu adiabatycznym ciśnienie zmaleje bardziej, gdyż maleje również temperatura. Ciśnienie to obliczymy z równania stanu gazu doskonałego (6.?), więc $p_1 V_1 / T_1 = p_0 V_0 / T_0$ stąd:

$$(\text{wzór 711}) p_{1 \text{ izot}} = \frac{p_0 V_0 T_1}{V_1 T_0}$$

Korzystając ze wzoru (wzór 710 na stronie 310) otrzymamy:

$$(\text{wzór 712}) p_{1 \text{ izot}} = p_{1 \text{ izot}} \frac{T_1}{T_0}$$

Widzimy, że ciśnienie gazu po rozprężeniu adiabatycznym musi być niższe niż po rozprężeniu izotermicznym, gdyż $T_1 < T_0$. Zatem przy rozprężaniu gazu wykres adiabaty (Rysunek 7.9: Przebieg izotermy i adiabaty na stronie 310) musi przebiegać poniżej wykresu izotermy.

Identyczny wzór do (wzór 712 na stronie 310) obowiązuje w przypadku sprężania gazu. Wtedy temperatura końcowa w procesie adiabatycznym jest wyższa niż w izotermicznym, $T_1 > T_0$. Zatem przy sprężaniu gazu wykres adiabaty (*Rysunek 7.9: Przebieg izotermii i adiabaty* na stronie 310) musi przebiegać powyżej wykresu izotermii.

Związek między ciśnieniem a objętością gazu doskonałego w procesie adiabatycznym nazywa się *równaniem adiabaty* lub *równaniem Poissona*. Równania tego nie da się wyprowadzić elementarnym sposobem, dlatego podajemy je tutaj bez wyprowadzenia:

$$(\text{wzór 713}) \quad pV^\kappa = \text{const}$$

Zależność ta jest formalnie podobna do zależności $pV = \text{const}$ obowiązującej w procesie izotermicznym. W przypadku procesu adiabatycznego objętość V jest podniesiona do potęgi κ , której wartość jest zawsze większa od jedności, ponieważ ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu jest zawsze większe od ciepła właściwego przy stałej objętości (patrz wzór (wzór 707 na stronie 307)). Z tego faktu też wynika, że na wykresie zależności p od V krzywa dla procesu adiabatycznego (adiabata) jest bardziej stromo nachylona do osi odciętych niż krzywa dla procesu izotermicznego – izoterma (*Rysunek 7.9: Przebieg izotermii i adiabaty* na stronie 310).

W procesie adiabatycznym wszystkie trzy parametry p , V i T ulegają zmianie. Zatem oprócz zależności p od V występują jeszcze dwie zależności: p od T i V od T . Dla wyprowadzenia zależności p od T skorzystamy z równania stanu gazu doskonałego:

$$(\text{wzór 714}) \quad V = Nk \frac{T}{p}$$

i wprowadzimy je do równania (wzór 713 na stronie 311). Otrzymamy

$$(\text{wzór 715}) \quad p \left(\frac{T}{p} \right)^\kappa (Nk)^\kappa = \text{const}$$

lub po przekształceniach:

$$(\text{wzór 716}) \quad \frac{p}{T^{\kappa-1}} = \text{const}$$

gdzie stałą $(Nk)^\kappa$ wielkość wprowadziliśmy do stałej const. W podobny sposób można wyprowadzić następną zależność:

$$(\text{wzór 717}) \quad \frac{V^{1-\kappa}}{T} = \text{const}$$

W wielu zagadnieniach termodynamicznych konieczna jest znajomość wzoru na pracę w procesie adiabatycznym (**Uwaga:** Wyprowadzenie tego wzoru znajduje się w dodatku *7.D1 Dodatek: Energia wewnętrzna gazu – zasada ekwipartycji energii (temat nadobowiązkowy)* na stronie 330 do rozdz. Termodynamika):

$$(\text{wzór 718}) \quad \Delta W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\kappa - 1}$$

Przykład 3

Jednocylindrowy silnik benzynowy motocykla ma stopień sprężania 6 do 1, tzn. stosunek objętości wtrysniętej mieszanki do sprężonej w cylindrze pod tłokiem wynosi $\frac{V_2}{V_1} = 6$. Maksymalna pojemność skokowa silnika wynosi $V_2 = 200 \text{ cm}^3$. Oblicz:

1. o ile oziębi się mieszanka wybuchowa po wykonaniu suwu pracy, przy założeniu, że rozprężanie gazu zachodzi tak szybko, iż gaz nie zdąży utracić ciepła i proces możemy traktować jako adiabatyczny;
2. jaką pracę wykona silnik podczas jednego suwu roboczego (adiabatycznego), jeżeli wiadomo, że ciśnienie wybuchającej mieszanki wynosi $p_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ (20 atm);

3. jaką moc średnio dostarcza silnik, gdy pracuje z częstością 2 400 obrotów na minutę.

Odpowiedź:

Ad. 1. Zgodnie z równaniem (wzór 718 na stronie 311) możemy napisać

$$(\text{wzór 719}) \frac{V_1^{1-\kappa}}{T_1} = \frac{V_2^{1-\kappa}}{T_2}$$

lub

$$(\text{wzór 720}) \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2^{1-\kappa}}{V_1^{1-\kappa}}$$

Możemy przyjąć, że $\kappa = 1,4$, ponieważ w mieszance paliwowej mamy do czynienia głównie z powietrzem, które jest gazem dwuatomowym (patrz Dodatek 7.1 do rozdz.7 - tabela D7.1), zatem

$$(\text{wzór 721}) \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{0,4} = 0,488$$

Widzimy, że temperatura spalin przy wydechu zmniejszy się nieco więcej niż dwa razy.

Ad. 2. Do obliczenia pracy wykorzystamy wzór (wzór 718 na stronie 311), który przedstawimy w postaci:

$$(\text{wzór 722}) \Delta W = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} \right)$$

Przekształcimy teraz drugi wyraz w nawiasie:

$$(\text{wzór 723}) \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \frac{p_2 V_2^\kappa V_1^\kappa}{p_1 V_2^\kappa V_1^\kappa} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \frac{p_2 V_2^\kappa V_1^\kappa}{p_1 V_1^\kappa V_2^\kappa} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1}$$

Po wykorzystaniu wzoru (wzór 713 na stronie 311) wyrażenie to redukuje się do $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ i wzór na pracę w procesie adiabatycznym przyjmuje postać

$$(\text{wzór 724}) \Delta W = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} \right]$$

Podstawiając dane, otrzymujemy

$$(\text{wzór 725}) \Delta W = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 33,3 \cdot 10^{-6}}{0,4} \left[1 - \left(\frac{1}{6} \right)^{0,4} \right] \text{ J} = 85,2 \text{ J}$$

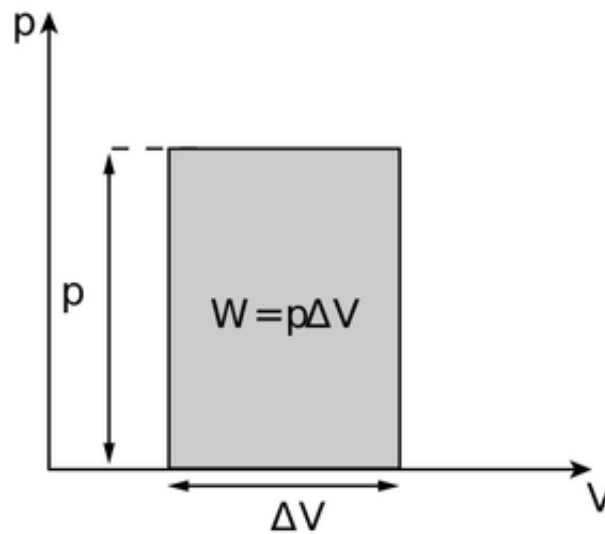
Silnik podczas jednego suwu roboczego wykona pracę równą 85,2 J.

Ad. 3. Częstość 2 400 obrotów na minutę jest równa 40 obrotów na sekundę. Zatem średnia moc silnika (bez uwzględnienia mocy traconej) wynosi

$$(\text{wzór 726}) P = 85,2 \cdot 40 \frac{\text{J}}{\text{s}} \approx 3,4 \cdot 10^3 \text{ W} \approx 4,6 \text{ KM}$$

Graficzne przedstawienie pracy w procesach termodynamicznych

Zgodnie ze wzorem (wzór 691 na stronie 301) praca zależy od ciśnienia i przyrostu objętości gazu. W przypadku, gdy podczas rozprężania gazu ciśnienie jest stałe, to na wykresie zależności ciśnienia od objętości praca $\Delta W = p \Delta V$ jest przedstawiona za pomocą pola powierzchni prostokąta o podstawie ΔV i wysokości p (Rysunek 7.10: Rozprężanie gazu przy stałym ciśnieniu na stronie 313).

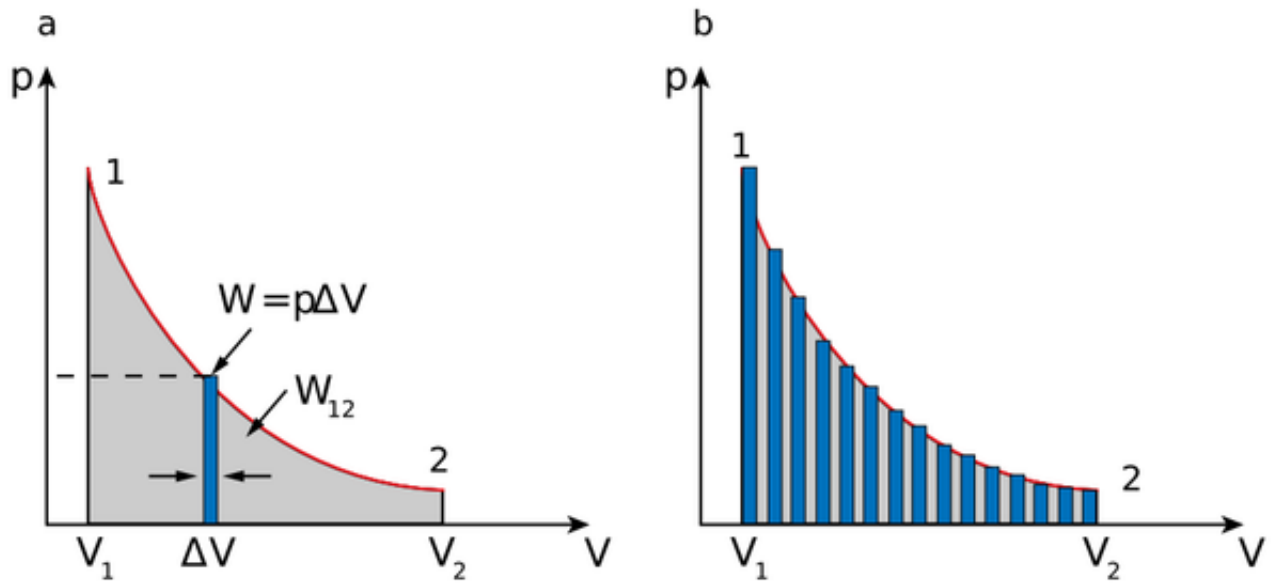


Podczas rozprężania gazu przy stałym ciśnieniu wykonywana jest praca $\Delta W = p \Delta V$, równa liczbowo polu powierzchni prostokąta

Rysunek 7.10: Rozprężanie gazu przy stałym ciśnieniu

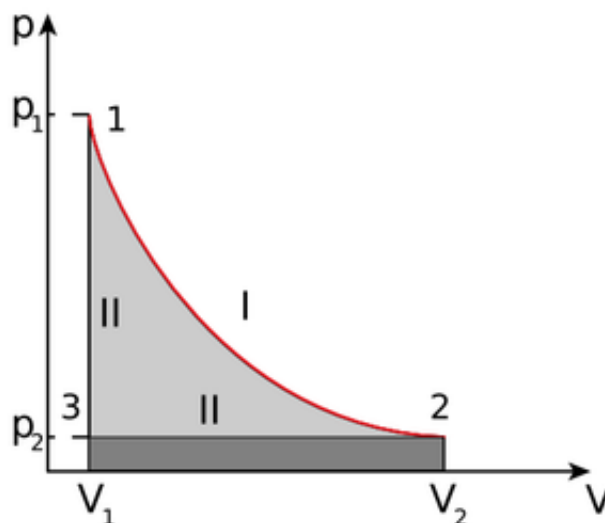
W dowolnym przypadku, gdy $p \neq \text{const}$, całkowitą pracę można podzielić na małe elementy składowe. Każdy element składowy pracy ΔW można przedstawić za pomocą pola powierzchni wąskiego paska o podstawie ΔV i wysokości p (Rysunek 7.11: *Podział pracy na elementy - wąskie paski* na stronie 314a). Jeżeli gaz rozpręży się od objętości V_1 do objętości końcowej V_2 , to całkowitą pracę W wykonaną przez gaz można wyrazić za pomocą pola powierzchni pod krzywą zależności ciśnienia od objętości. Widzimy z Rysunek 7.11: *Podział pracy na elementy - wąskie paski* na stronie 314b, że suma pól wąskich pasków przedstawiających elementarne prace ΔW jest równa całemu polu pod krzywą $p(V)$ z tym większą dokładnością, im węższe paski były brane pod uwagę. Ponieważ możemy brać pod uwagę dowolnie małe elementarne prace, więc i dowolnie wąskie paski, zatem suma tych pasków przybliży nam całą powierzchnię z dowolnie dużą dokładnością.

a) Element pracy ΔW jest przedstawiony za pomocą pola powierzchni wąskiego paska, b) pola wąskich pasków przedstawiających elementarne prace ΔW pokrywają całe pole pod krzywą $p(V)$



Rysunek 7.11: Podział pracy na elementy - wąskie paski

Pola powierzchni ograniczone krzywymi *I* i *II* są niejednakowe, mimo że obie linie zaczynają się i kończą wspólnymi punktami 1 i 2



Rysunek 7.12: Praca związana z przejściem ze stanu 1 do 2 zależy od „drogi”

Na *Rysunek 7.12: Praca związana z przejściem ze stanu 1 do 2 zależy od „drogi”* na stronie 315 przedstawiono pracę wykonaną przy przejściu ze stanu 1 do stanu 2 podczas różnych procesów. Widać na nim, że przejście ze stanu 1 do stanu 2 wzdłuż krzywej *I* jest związane z wykonaniem określonej pracy w procesie *I* (zaznaczonej przez zakreskowane pole powierzchni ograniczone krzywą *I*). Pole powierzchni ograniczone linią *II* (przechodzącą przez stan pośredni 3) jest dużo mniejsze, co oznacza mniejszą pracę związaną z procesem *II*. Mimo że w obydwu przypadkach stan początkowy i końcowy gazu jest taki sam, praca wyraźnie różni się w obu procesach. Widzimy zatem, że praca (podobnie i ciepło) zależy od procesu przekazywania energii i, co za tym idzie, nie jest jednoznaczna funkcją różnicy stanu początkowego i końcowego (innymi słowy: pracy nie da się wyrazić tylko za pomocą różnicy parametrów obu stanów).

Termodynamika - Przemiana adiabatyczna

Rysunek 7.13: Animacja

Pytania i problemy

1. Opisz związek między ciśnieniem a objętością w procesie izotermicznym gazu doskonałego, przy założeniu, że jego masa nie ulega zmianie (tzw. prawo Boyle’a-Mariotte’a).
2. W układzie współrzędnych (V , p) przedstaw izotermę. Jak w matematyce nazywa się taka krzywa?
3. Zastosuj pierwszą zasadę termodynamiki do procesu izotermicznego.
4. W przemianie izotermicznej masa gazu zmniejszyła się. Wyjaśnij, czy w takim przypadku pozostaje w mocy prawo Boyle’a-Mariotte’a.
5. W każdym z procesów: izochorycznym, izobarycznym i izotermicznym zmieniają się tylko dwa parametry. Podaj, jakie to parametry.
6. W jakich warunkach zachodzi proces adiabatyczny? Zinterpretuj związek między ciśnieniem a objętością gazu, opisany równaniem Poissona.
7. Zastosuj pierwszą zasadę termodynamiki do procesu adiabatycznego.

8. W układzie współrzędnych V - p narysuj krzywą obrazującą proces adiabatyczny na tle izotermy.
9. Uzasadnij, dlaczego na wykresie w układzie współrzędnych (V, p) adiabata przebiega bardziej stromo od izotermy.
10. Wyprowadź równanie opisujące zależność objętości od temperatury w procesie adiabatycznym. Posłuż się równaniem Poissona i równaniem Clapeyrona.
11. W jaki sposób graficznie przedstawia się pracę na wykresie zależności p od V ?

7.4 Druga zasada termodynamiki. Nieodwracalność realnych procesów cieplnych

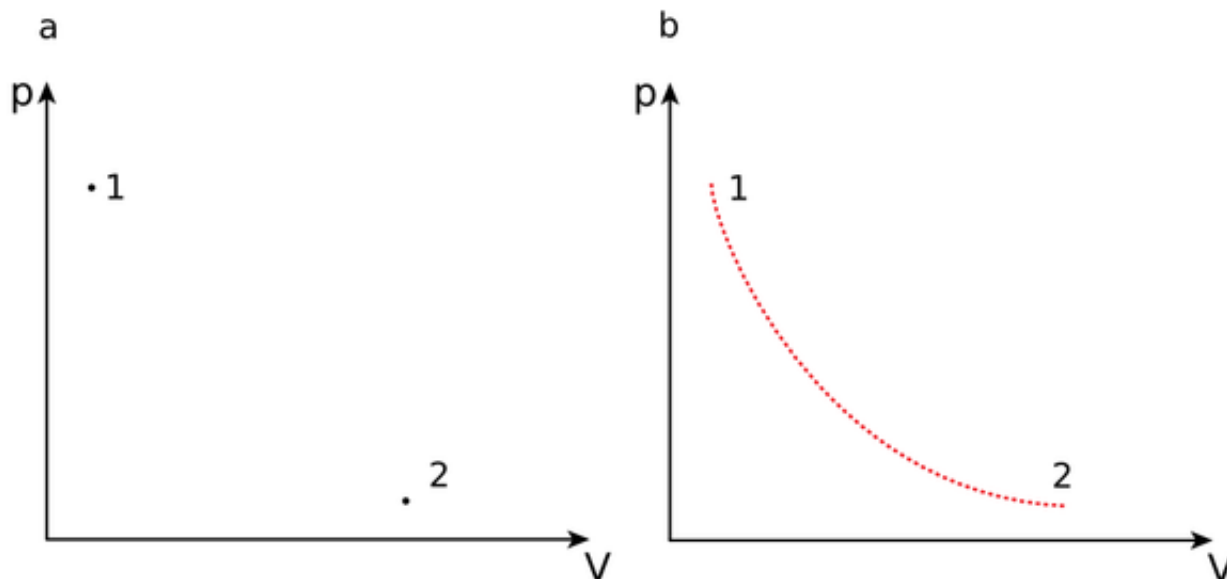
Nieodwracalność realnych procesów cieplnych

Dotychczas omawialiśmy przemiany gazu doskonałego, ale nie podawaliśmy warunków jakie muszą być spełnione, aby można było je przedstawić na wykresach zależności (p, V) , (T, V) i innych.

Dowolny stan gazu doskonałego możemy przedstawić jako punkt na płaszczyźnie tylko wtedy, gdy parametry termodynamiczne są ustalone, tzn. gdy gaz jest w stanie równowagi. Przejścia między dwoma stanami – początkowym i końcowym – na wykresie można przedstawić za pomocą krzywych pod warunkiem, że przechodzą one przez pośrednie stany równowagi.

Stan równowagi to taki stan układu, w którym układ ma ustalone parametry termodynamiczne (np. temperaturę, ciśnienie i objętość) i nie zachodzi wymiana energii między układem a otoczeniem. Linia krzywa na wykresie termodynamicznym przedstawia określony proces. Oczywiście, przedstawiając graficznie proces termodynamiczny, przyjmujemy jednocześnie, że układ we wszystkich punktach krzywej znajduje się w stanie równowagi. Wtedy właśnie proces wyobrażony na wykresie jest ciągłym następowaniem po sobie stanów równowagi. Proces taki jest wyidealizowany, gdyż rzeczywiste procesy zachodzące ze skończoną prędkością muszą w większym lub mniejszym stopniu odbiegać od stanów równowagi.

Wy tłumaczmy to na przykładzie gazu znajdującego się w cylindrze zamkniętym tłokiem. Załóżmy, że początkowy stan równowagi gazu na wykresie zależności p od V dany jest przez ciśnienie p_1 i objętość V_1 , natomiast stan końcowy – przez p_2 i V_2 (*Rysunek 7.14: a) Dwa stany (1 i 2), między którymi zachodzi proces nieodwracalny, b) proces odwracalny przechodzący przez wiele pośrednich stanów równowagi* na stronie 317a). Jeżeli gwałtownie podniesiemy tłok, to – mimo dobrego kontaktu cylindra z otoczeniem o stałej temperaturze – w gazie zajdą niekontrolowane zawirowania oraz niejednorodne zmiany temperatury i ciśnienia, tzn. temperatura i ciśnienie będą różne w różnych miejscach wewnątrz gazu. Po pewnym czasie ustali się równowaga i dopiero wtedy możemy mówić o określonej temperaturze gazu i o określonym ciśnieniu. Zatem proces przeprowadzony w ten sposób nie przechodzi przez pośrednie stany równowagi termodynamicznej. W tym przypadku nie możemy wykreślić jakiegokolwiek krzywej, wzdłuż której przebiegałby proces. Taki proces nazywamy *procesem nieodwracalnym* – jest to proces, który przebiega przez pośrednie stany nierównowagi. Zrozumiałe jest więc, że gdybyśmy chcieli odwrócić bieg procesu, okazałoby się, że zadanie to nie jest wykonalne ze względu na brak ustalonych stanów pośrednich przebiegu procesu. Zagadnienie nieodwracalności procesów zostanie omówione szerzej w dalszych częściach tego rozdziału.



Rysunek 7.14: a) Dwa stany (1 i 2), między którymi zachodzi proces nieodwracalny, b) proces odwracalny przechodzący przez wiele pośrednich stanów równowagi

Jeżeli jednak proces przejścia od stanu 1 do stanu 2 przeprowadzimy małymi etapami, dbając o to, aby po skończeniu każdego etapu ustaliły się warunki równowagi, to w tym przypadku mamy możliwość wykreślenia krzywej przebiegu procesu, która będzie przechodzić od punktu 1 do 2 poprzez pośrednie punkty obrazujące stany równowagi (*Rysunek 7.14: a) Dwa stany (1 i 2), między którymi zachodzi proces nieodwracalny, b) proces odwracalny przechodzący przez wiele pośrednich stanów równowagi* na stronie 317b). Taki proces musi zachodzić bardzo wolno, a zmiany ciśnienia i objętości muszą być bardzo małe. Nazywa się on *procesem kwazistatycznym*, czyli prawie statycznym (od łacińskiego słowa quasi, tzn. prawie, jak gdyby). W rzeczywistości procesy zachodzą ze skończoną prędkością i proces odwracalny jest tylko pewną idealizacją rzeczywistych procesów, ale idealizacja ta jest bardzo pożyteczna, gdyż pozwala uprościć wiele rozważań termodynamicznych.

Oto warunki, jakie musi spełniać proces, aby był uznany za odwracalny:

1. proces może być przeprowadzony w dwóch przeciwnych kierunkach jednakowo łatwo,
2. układ oraz otaczające go ciała przechodzą przez takie same stany pośrednie, niezależnie od kierunku procesu,
3. po powrocie do stanu wyjściowego, układ i otaczające go ciała powracają do tego stanu.

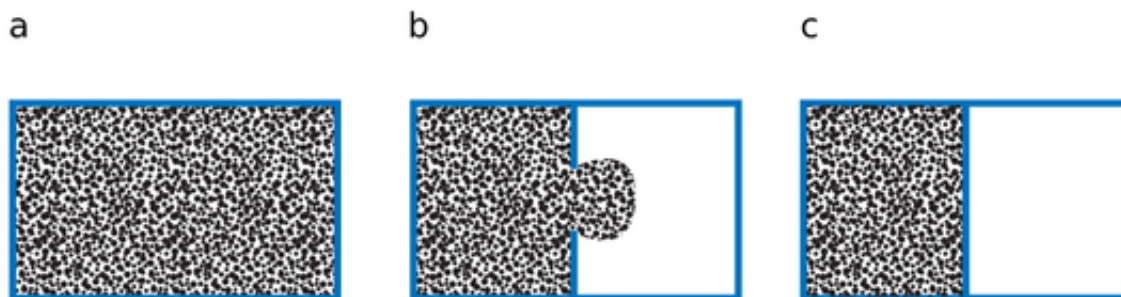
Zauważmy, że **proces odwracalny może zachodzić tylko wtedy, gdy w układzie działają siły zachowawcze**.

Oto przykład. Przypomnijmy sobie ciało zsuwające się bez tarcia w wyżłobionym dołku, jak na *Rysunek 3.16: Ciało zsuwające się po ścianie wydrążonego dołka w kształcie paraboli* na stronie 148 (podrozdział 3.4 *Prawo zachowania energii mechanicznej* na stronie 145). Ciało to, początkowo znajdujące się na wysokości h , zsuwając się, nabiera prędkości. Następnie, kosztem uzyskanej energii kinetycznej, nabiera wysokości, po czym wraca tą samą drogą, przechodząc przez te same stany pośrednie, aby osiągnąć stan wyjściowy na wysokości h . Proces ten można powtarzać wielokrotnie. Inne przykłady to kulka drgająca na doskonale sprężystej sprężynie, wahadło poruszające się bez tarcia w próżni itp.

Rozważmy jeszcze jeden przykład odwracalnego, kwazistatycznego gazowego procesu izotermicznego. Wiemy, że przy rozprężaniu izotermicznym gaz pobiera ciepło Q od otaczających go ciał. Podczas rozprężania gaz wykonuje pracę $W = Q$. Wyobraźmy sobie, że ta praca zostanie zużyta na podniesienie jakiegoś ciała o masie m na wysokość h . Ciało to uzyskuje energię potencjalną $m \cdot g \cdot h = W$. Następnie, spadając z tej wysokości, może wykonać pracę

sprężania gazu (proces odwrotny). Gaz odda otaczającym go ciałom tyle samo ciepła, ile pobrał w procesie rozprężania ($Q = W$). Gaz i ciała otoczenia wracają do stanu wyjściowego, przechodząc przez takie same, jak poprzednio, stany pośrednie. Zatem proces kwazistatycznego izotermicznego rozprężania gazu jest procesem odwracalnym. Jak już wspomniano, procesy odwracalne są pewną idealizacją, ponieważ w rzeczywistości nie ma idealnie zachowawczych układów, gdyż zawsze mamy do czynienia z tarciem.

Omówimy teraz przykład procesu nieodwracalnego. W naczyniu z przegrodą (*Rysunek 7.15: Przykład procesu nieodwracalnego* na stronie 318) w jednej komorze znajduje się gaz, a druga komora jest pusta. Po wykonaniu w przegrodzie otworka gaz stopniowo będzie się ulatniał do komory pustej tak długo, aż ciśnienia w obu częściach naczynia się wyrównają. Proces odwrotny – powrót samoczynny cząsteczek gazu – nie zachodzi, nawet gdybyśmy nie wiadomo jak długo na taki proces czekali. Oczywiście, gaz można sprowadzić z powrotem do pierwszej komory (np. za pomocą tłoka), ale proces ten nie będzie się odbywał poprzez takie same pośrednie stany równowagi, jak w procesie samoczynnego rozprężania. Ponadto powrót gazu do stanu wyjściowego odbywa się kosztem zmian stanu otaczających ciał (np. przemieszczenie tłoka, wykonanie pracy przemieszczenia tłoka). Zatem proces swobodnego rozprężania gazu zachodzi w jednym kierunku, więc jest procesem nieodwracalnym.



Gaz swobodnie rozprężający się przez otworek w przegrodzie; a) stan początkowy, cały gaz znajduje się w lewej komorze naczynia, b) jednokierunkowy proces swobodnego rozprężania się gazu przez otworek, c) stan końcowy, gaz równomiernie rozłożony w obu komorach naczynia

Rysunek 7.15: Przykład procesu nieodwracalnego

Inny przykład to dyfuzja jednego gazu w drugim. Podobnie jak poprzednio, jest to proces jednokierunkowy, nieodwracalny. Również transport ciepła od ciała o wyższej temperaturze do ciała o niższej temperaturze, który zachodzi samoczynnie, jest procesem nieodwracalnym, gdyż proces odwrotny – przepływ ciepła od ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze – samoczynnie nigdy nie zachodzi.

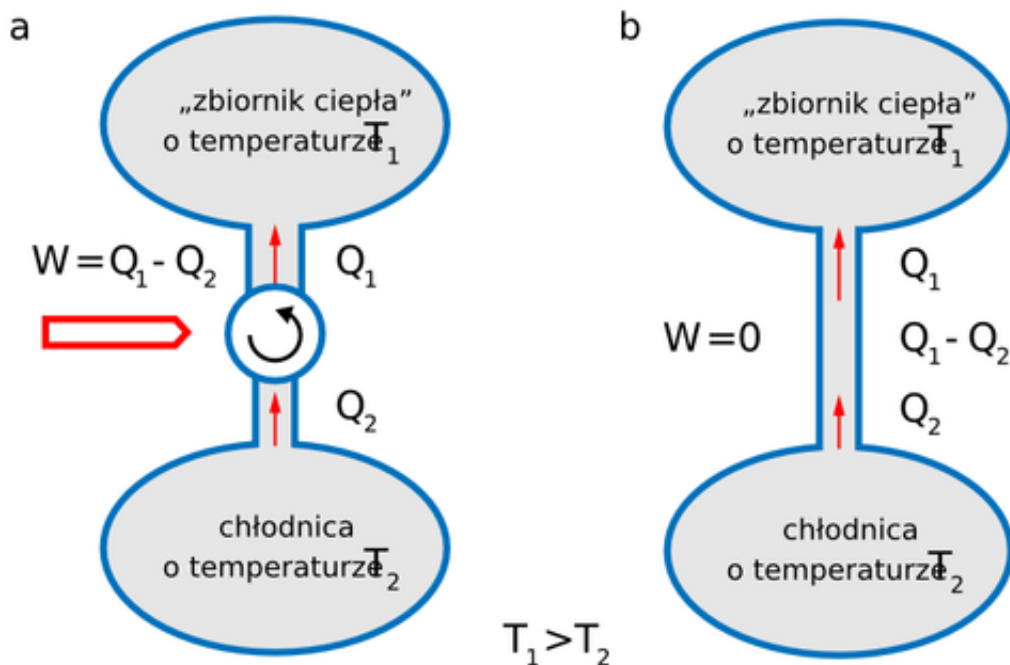
Druga zasada termodynamiki

Z rozważań dotyczących procesów nieodwracalnych możemy wyciągnąć wniosek, że w przyrodzie występuje określona kierunkowość przemian. Pierwsza zasada termodynamiki, będąca właściwie zasadą zachowania energii dla procesów termodynamicznych, nie wskazuje na tę kierunkowość. Można sobie wyobrazić wiele procesów, które spełniają postulat zachowania energii, mimo że nigdy w przyrodzie nie mogą występować. Na przykład przepływ

ciepła od ciała zimniejszego do cieplejszego, mimo że nie przeczy pierwszej zasadzie termodynamiki, nigdy nie zachodzi samorzutnie. Ponadto nigdy nie obserwuje się całkowitej zamiany ciepła na równoważną mu pracę, chociaż odwrotne zjawisko może zachodzić. Z pierwszej zasady termodynamiki nie można przewidzieć kierunku przebiegu procesu. Zatem kierunek przemian w przyrodzie nie wynika z zasad zachowania, ale z innego prawa przyrody. Tym prawem jest *druga zasada termodynamiki*. Istnieje wiele równoważnych sformułowań tej zasady. Jedno z nich jest następujące:

Niemożliwy jest taki proces, którego jedynym rezultatem byłoby samoistne przekazywanie ciepła od ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze.

Ważne są tu słowa „jedynym rezultatem”, gdyż można zrealizować proces przekazywania ciepła z ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze, np. w lodówce, ale musi mu towarzyszyć praca, zatem przeniesienie ciepła nie jest jedynym rezultatem tego procesu. Na *Rysunek 7.16: Schemat lodówki* na stronie 319a przedstawiono realny układ termodynamiczny, który przekazuje ciepło z ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze, kosztem pracy. Dla porównania, na *Rysunek 7.16: Schemat lodówki* na stronie 319b przedstawiono wyobrażony układ, niemożliwy do realizacji, przekazujący ciepło w tym samym kierunku co uprzednio, ale bez koniecznej pracy.



a) Schemat rzeczywistej lodówki, b) schemat nierealnej lodówki (idealnej)

Rysunek 7.16: Schemat lodówki

Ⓜ Zamapiętać:

Druga zasada termodynamiki

Nie jest możliwy taki proces, którego jedynym rezultatem byłoby przekazywanie ciepła od ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze.

Nie jest możliwy proces, którego jedynym rezultatem byłaby zamiana ciepła pobranego ze źródła ciepła na równoważną mu pracę.

Drugą zasadę termodynamiki można sformułować również w inny równoważny sposób:

Niemożliwy jest proces, którego jedynym rezultatem byłaby zamiana ciepła pobranego ze źródła ciepła na równoważną mu pracę.

Na *Rysunek 7.17: Silnik cieplny* na stronie 320a przedstawiono symbolicznie rzeczywistą maszynę cieplną. Rysunek *Rysunek 7.17: Silnik cieplny* na stronie 320b przedstawia natomiast maszynę cieplną, która wykonywałaby pracę W kosztem jedynie pobranego ciepła Q_1 . Wprawdzie nie przeczy to pierwszej zasadzie termodynamiki, gdyż jest ona tutaj spełniona: $Q_1 = W$, jednak realizacja takiej maszyny jest niemożliwa, ponieważ jedynym rezultatem procesu w niej zachodzącego byłaby praca wykonana kosztem pobranego ciepła, bez konieczności odprowadzania części ciepła do chłodnicy.

Maszyna taka przeczy drugiej zasadzie termodynamiki. Tego typu hipotetyczna maszyna nosi nazwę *perpetuum mobile drugiego rodzaju*. (*Perpetuum mobile pierwszego rodzaju* to maszyna, która miałaby pracować wbrew pierwszej zasadzie termodynamiki, tzn. wbrew zasadzie zachowania energii, musiałaby ona zatem tworzyć energię z niczego, czyli wykonywać pracę, nie czerpiąc energii. Oczywiście, jest to niemożliwe.). Gdyby było możliwe skonstruowanie *perpetuum mobile drugiego rodzaju*, to można by czerpać praktycznie nieograniczone ilości energii z otoczenia (np. z oceanów) i wykonywać kosztem nich pracę. Przed odkryciem drugiej zasady termodynamiki wielu wynalazców zgłaszało pomysły silników, będących w gruncie rzeczy *perpetuum mobile drugiego rodzaju*.

® **Zamapiętać:**

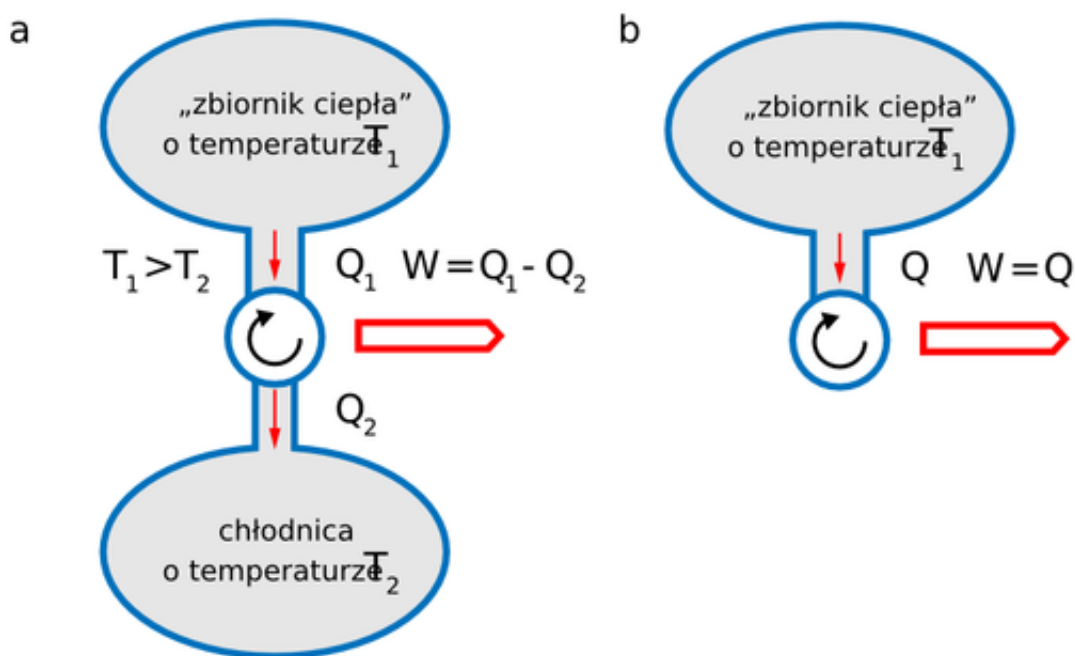
Perpetum mobile pierwszego rodzaju

to maszyna, która miałaby pracować wbrew pierwszej zasadzie termodynamiki, tzn. wbrew zasadzie zachowania energii.

Perpetum mobile drugiego rodzaju

to maszyna, która wykonywałaby pracę kosztem tylko pobranego ciepła, bez konieczności odprowadzania części ciepła do chłodnicy. Maszyna taka przeczy drugiej zasadzie termodynamiki.

a) Rzeczywisty silnik cieplny, b) nierealny silnik cieplny



(idealny)

Rysunek 7.17: Silnik cieplny

Druga zasada termodynamiki wskazuje kierunek przemian w przyrodzie, gdyż mówi, że proces zamiany pracy na ciepło jest procesem nieodwracalnym. Zamiana pracy w całości na ciepło jest dopuszczalna (np. w przypadku tarcia) i realnie zachodzi w przyrodzie, podczas gdy proces odwrotny, tzn. całkowita zamiana ciepła na pracę, jest niemożliwy.

Druga zasada termodynamiki znajduje swoje wyjaśnienie na gruncie teorii kinetyczno-molekularnej. Praca wykonywana, np. przy przesuwaniu tłoka przez rozprężający się gaz, wiąże się z przesunięciem makroskopowym w określonym kierunku. Natomiast ciepło dostarczone do układu zwiększa chaotyczny ruch cząsteczek. Samorzutna przemiana ruchu chaotycznego w ruch uporządkowany jest praktycznie niemożliwa, ale zamiana przeciwna, ruchu uporządkowanego w ruch chaotyczny, jest możliwa bez żadnych ograniczeń. Można również wykazać, opierając się na zasadach dynamiki Newtona, że samoczynny przepływ ciepła od ciała chłodniejszego (tzn. takiego, którego cząsteczki mają mniejszą średnią energię ruchu chaotycznego) do ciała cieplejszego (tzn. mającego cząsteczki o większej średniej energii ruchu chaotycznego) jest w zasadzie niemożliwy.

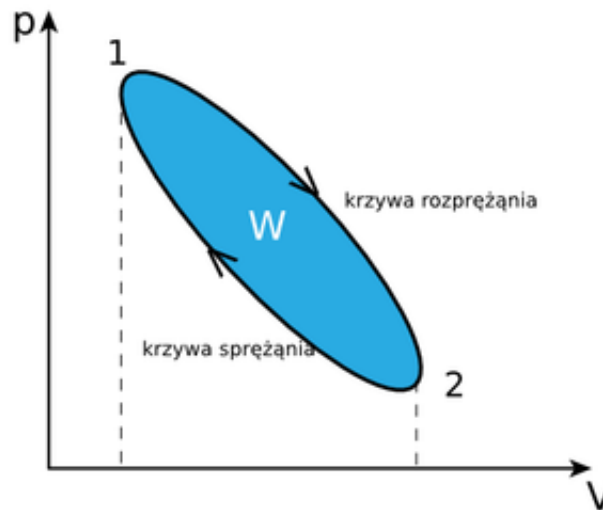
Pytania i problemy

1. Podaj warunki, jakie musi spełniać proces termodynamiczny, aby mógł być uznany za odwracalny.
2. Podaj definicję stanu układu i stanu równowagi.
3. Jaki proces termodynamiczny nazywamy odwracalnym? Dlaczego procesu nieodwracalnego nie można przedstawić na wykresie?
4. Jaki jest związek sił zachowawczych z odwracalnością procesów termodynamicznych?
5. Podaj po dwa przykłady procesów nieodwracalnych i procesów odwracalnych.
6. Podaj dwa równoważne sposoby sformułowania drugiej zasady termodynamiki.
7. Omów działanie maszyn, które nazwano perpetuum mobile pierwszego i drugiego rodzaju.
8. Opisz możliwość występowania jakich procesów wyklucza druga zasada termodynamiki?
9. Podaj definicję cyklu termodynamicznego.
10. Wyjaśnij pozorny paradoks: w makroświecie procesy są nieodwracalne, zaś w mikroświecie są one w pełni odwracalne.

7.5 Procesy kołowe i silniki cieplne

Silniki cieplne mają za zadanie przekształcać energię wewnętrzną w energię mechaniczną. Najczęściej ciepło pochodzące ze spalania paliwa jest dostarczane do gazu roboczego, który, rozprężając się, wykonuje pracę, wprawiając w ruch jakiś mechanizm. Rozprężanie gazu nie może się odbywać nieograniczenie, ponieważ silnik ma skończone rozmiary. Dlatego gaz musi być z powrotem sprężony tak, aby wszystkie części silnika wróciły do stanu wyjściowego, po czym cykl przemian powtarza się i za każdym razem silnik wykonuje pracę. Otóż taki proces termodynamiczny, po którym układ wraca do stanu wyjściowego po wykonaniu pośrednich przemian, nazywamy *cyklem termodynamicznym* lub *procesem kołowym*.

Na wykresie zależności p od V (*Rysunek 7.18: Wykres cyklu termodynamicznego* na stronie 322) cykl termodynamiczny przedstawia krzywa zamknięta. Silnik może wykonywać pracę użyteczną pod warunkiem, że praca przy rozprężaniu gazu jest większa od pracy przy jego sprężaniu. W takim przypadku cykl musi przebiegać w kierunku pokazanym na wykresie za pomocą strzałek. Tylko wtedy pole powierzchni pod krzywą procesu rozprężania gazu (pole powierzchni pod tą krzywą wyraża pracę wykonaną przez gaz) będzie większe od pola powierzchni pod krzywą sprężania gazu (wyrażającego pracę wykonaną nad gazem) i oczywiście wtedy pole powierzchni wewnątrz pętli wyrażać będzie pracę użyteczną W wykonaną przez silnik.



Rysunek 7.18: Wykres cyklu termodynamicznego

Jeżeli układ termodynamiczny wykonuje cykl w odwrotnym kierunku, to mamy do czynienia z maszyną chłodzącą, która kosztem pracy W transportuje ciepło z ciała o niższej temperaturze do ciała o wyższej temperaturze.

Silnik benzynowy

Nasze wiadomości z dziedziny termodynamiki pozwolą na zrozumienie i przeanalizowanie pracy zwykłego silnika benzynowego czterosuwowego używanego w samochodach i innych pojazdach. Silnik nazywa się czterosuwowym dlatego, że na pełny cykl pracy przypadają cztery pełne przesunięcia tłoka: dwukrotnie w górę i dwukrotnie w dół.

📌 Zamapiętać:

Silnik benzynowy to maszyna, która wykonuje pracę kosztem ciepła wydzielanego podczas spalania mieszanki benzynowej.

Kolejne etapy pracy silnika przedstawione są na [Rysunek 7.19: Kolejne etapy pracy silnika benzynowego czterosuwowego](#) na stronie 323. Silnik wykonuje pracę kosztem energii wydzielanej w postaci ciepła podczas spalania mieszanki benzynowej, którą jest zawieszina rozpylonych w powietrzu kropelek benzyny. Podczas wtryskiwania mieszanki benzynowej tłok przesuwany się w dół, zasysając mieszankę pod stałym ciśnieniem równym ciśnieniu atmosferycznemu – około 1 atm. Po wtrysnięciu mieszanki paliwowej zostaje zamknięty zawór i następuje jej sprężenie adiabatyczne, po czym świeca zapala się i mieszanka wybuchła. Dzięki temu ciśnienie gazowej mieszanki gwałtownie rośnie, osiągając typową wartość ok. 20 atm (p_1 na wykresie – [Rysunek 7.20: Wykres cyklu czterosuwowego silnika benzynowego \(tzw. cykl Otta\)](#) na stronie 324). Teraz tłok zostaje gwałtownie odrzucony i gorący gaz rozpręża się od objętości V_1 do V_2 adiabatycznie (adiabatycznie – ponieważ ciepło nie zdąży uciec do otoczenia). Właśnie podczas tego procesu silnik wykonuje pracę. Jest to tak zwany *suw pracy*. Następnie, przy otwartym zaworze, spaliny zostają wypchnięte na zewnątrz. Cały cykl powtarza się od nowa.

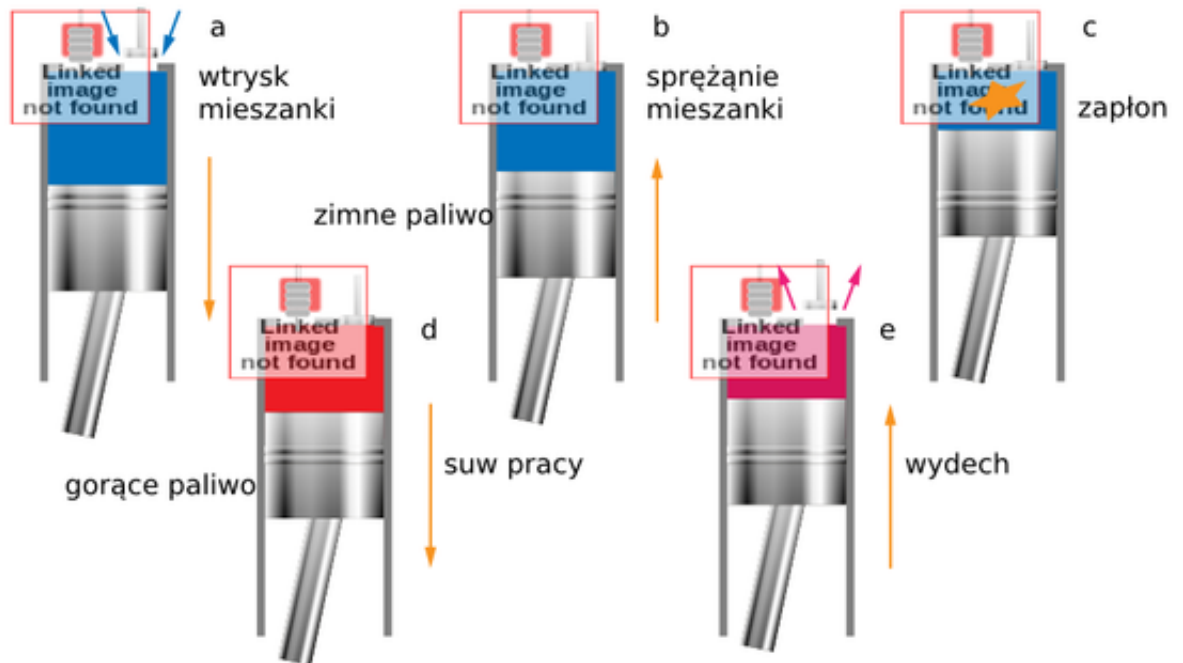
Obliczymy teraz sprawność omawianego silnika. Sprawność silnika η jest równa stosunkowi pracy wykonanej przez silnik ΔW do energii pobranej ΔU .

$$(\text{wzór 727}) \eta = \frac{\Delta W}{\Delta U}$$

Energia pobrana przez silnik jest równa przyrostowi energii wewnętrznej uzyskanej dzięki ciepłu spalania mieszanki. Przyrost energii wewnętrznej wynosi

$$(\text{wzór 728}) \Delta U = mc_V(T_1 - T_1')$$

gdzie: m – masa gazu, T_1 – temperatura gazu tuż po zapłonie, T_1' – temperatura gazu tuż przed zapłonem.

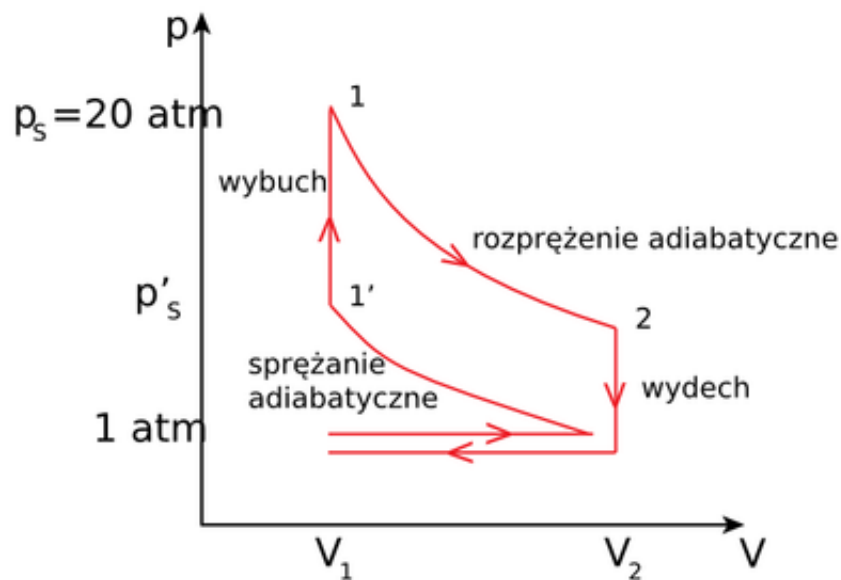


Rysunek 7.19: Kolejne etapy pracy silnika benzynowego czterosuwowego

Praca podczas rozprężania adiabatycznego, zgodnie ze wzorem (wzór 724 na stronie 312), wynosi

$$(\text{wzór 729}) W_1 = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

gdzie: p_1 i V_1 – ciśnienie i objętość gazu tuż po zapłonie, V_2 – objętość gazu po rozprężeniu adiabatycznym, czyli po wykonaniu suwu pracy (patrz [Rysunek 7.19: Kolejne etapy pracy silnika benzynowego czterosuwowego](#) na stronie 323 i [Rysunek 7.20: Wykres cyklu czterosuwowego silnika benzynowego \(tzw. cykl Otta\)](#) na stronie 324).



Rysunek 7.20: Wykres cyklu czterosuwowego silnika benzynowego (tzw. cykl Otta)

Natomiast przed zapłonem praca adiabatycznego sprężania gazu wynosi

$$(\text{wzór 730}) W_2 = \frac{p'_1 V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

gdzie p'_2 – ciśnienie gazu tuż przed zapłonem (*Rysunek 7.20: Wykres cyklu czterosuwowego silnika benzynowego (tzw. cykl Otta)* na stronie 324). Wypadkowa praca wykonana przez silnik wynosi $W_1 - W_2 = \Delta W$, więc

$$(\text{wzór 731}) \Delta W = \frac{(p_1 - p'_1) V_1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

Z równania Clapeyrona mamy, że $(p_1 - p'_1) V_1 = nR(T_1 - T'_1)$, więc:

$$(\text{wzór 732}) \Delta W = \frac{nR(T_1 - T'_1)}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

Dzieląc tak otrzymaną pracę przez energię pobraną przez silnik (*wzór 728* na stronie 323), otrzymamy wzór na *sprawność silnika*:

$$(\text{wzór 733}) \eta = \frac{nR}{mc_V(\kappa - 1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa - 1} \right]$$

Ułamek przed nawiasem kwadratowym jest równy 1, ponieważ zgodnie ze wzorem (*wzór 630* na stronie 273)

$$(\text{wzór 734}) nR = m(c_p - c_V) = mc_V \left(\frac{c_p}{c_V} - 1 \right) = mc_V(\kappa - 1)$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie następujący wzór na sprawność silnika:

$$(\text{wzór 735}) \quad \eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$$

Widzimy, że sprawność silnika zależy od stosunku $\frac{V_1}{V_2}$ czyli od stosunku objętości początkowej do końcowej podczas suwu pracy silnika. Odwrotność tego stosunku nazywa się *stopniem sprężania silnika*, gdyż odpowiada to stosunkowi objętości przy sprężaniu mieszanki benzynowej. Wzór ten daje możliwość obliczenia górnej teoretycznej granicy sprawności silnika. W praktyce sprawność silników spalinowych jest dużo niższa, ponieważ wzór ten został wyprowadzony przy pominięciu strat energii występujących w rzeczywistym silniku – część mieszanki nie zostaje w ogóle spalona i zostaje wydalona na zewnątrz, część ciepła ucieka poprzez chłodzone ścianki silnika, część energii rozprasza się na skutek tarcia itp. Na przykład, podstawiając do wzoru ([wzór 735](#) na stronie 325) typowy stopień sprężania silnika 8 do 1 oraz $\kappa = 1,4$ (dla mieszanki powietrza), otrzymujemy sprawność równą 56%, podczas gdy silnik taki w praktyce nie osiąga wyższej sprawności niż 25%.

Pytania i problemy

1. Dlaczego w silniku benzynowym czterosuwowym zarówno suw pracy, jak i suw sprężania uznajemy za procesy adiabatyczne, a nie izotermiczne?
2. Podaj i krótko opisz poszczególne fazy pracy czterosuwowego silnika benzynowego.
3. Przedstaw na wykresie zależności p od V cykl czterosuwowego silnika benzynowego, tzw. cykl Otta.
4. Opisz suw pracy, suw sprężania oraz stopień sprężania silnika benzynowego.
5. Wyprowadź wzór na sprawność silnika benzynowego czterosuwowego.
6. Podaj wzór na maksymalną teoretyczną sprawność silnika benzynowego czterosuwowego oraz na tej podstawie wyznacz, o ile jest większa sprawność silnika o stopniu sprężania 8 do 1, w stosunku do silnika o stopniu sprężania 6 do 1.

7.6 Cykl Carnota

W termodynamice szczególnie ważną rolę odgrywa cykl Carnota, gdyż dowolny cykl można przedstawić jako sumę pewnej liczby elementarnych cykli Carnota. Ponadto umożliwia on znalezienie maksymalnej sprawności dowolnego silnika cieplnego. Cykl Carnota jest najlepszy ze wszystkich możliwych i stanowi ideał dla konstruktorów silników cieplnych.

Zamapiętać:

Cykl Carnota

Jest to proces kołowy, w którym dokonywane są cztery przemiany; dwie rozprężania gazu izotermiczna i adiabatyczna, oraz dwie sprężania gazu: izotermiczna i adiabatyczna. Po czym gaz wraca do stanu początkowego.

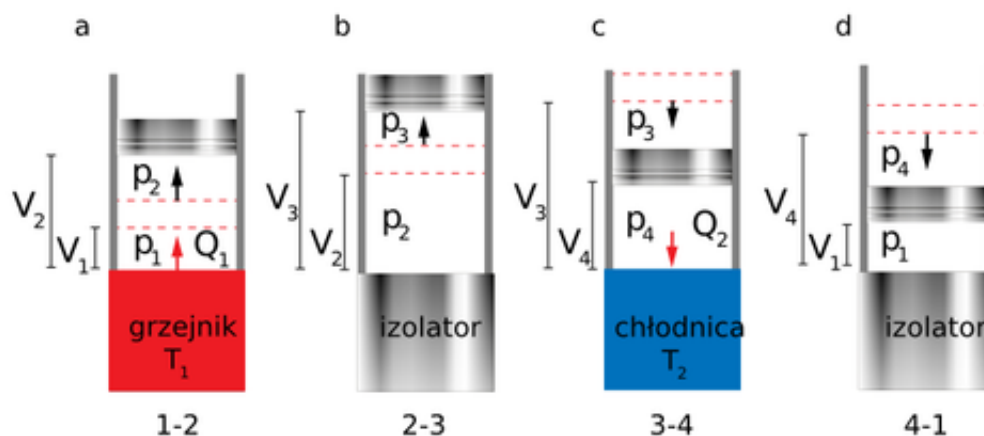
Cykl Carnota można zrealizować przez umieszczenie substancji roboczej wewnątrz cylindra zamkniętego tłokiem i dokonywanie na niej przemian: izotermicznego rozprężania w temperaturze T_1 , adiabatycznego rozprężania obniżającego temperaturę do wartości T_2 , następnie izotermicznego sprężania i w końcu sprężania adiabatycznego, przez co otrzymuje się powrót do stanu początkowego.

W celu ułatwienia naszych rozważań przyjmiemy, że substancją roboczą jest gaz doskonały. W rzeczywistych silnikach cieplnych stosuje się parę wodną lub mieszanek paliwa z powietrzem albo z tlenem. Ciepło, które służy jako źródło pracy, jest uzyskiwane ze spalania benzyny czy węgla albo z reakcji jądrowych. Część ciepła oddawana jest przez rurę wydechową do otoczenia lub przekazywana do chłodnicy w kondensatorze pary wodnej.

Realizację cyklu Carnota, przedstawiono na [Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota](#) na stronie 326. Cylinder ma ścianki wykonane z izolatora, natomiast podstawa cylindra dobrze przewodzi ciepło. Tłok jest również wykonany z izolatora cieplnego. Przyjmujemy, że stan początkowy jest dany przez p_1 , V_1 i T_1 .

Najpierw realizujemy proces izotermiczny przez postawienie cylindra na zbiorniku ciepła mającego dużą pojemność cieplną i temperaturę T_1 ([Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota](#) na stronie 326a).

Przez powolne rozprężanie izotermiczne gaz zwiększa swoją objętość do wartości V_2 oraz obniża ciśnienie do wartości p_2 . Gaz pobiera ze zbiornika ciepło Q_1 i wykonuje pracę W_1 równą pobranemu ciepłu.



a) (1–2) proces izotermiczny, b) (2–3) proces adiabatyczny, c) (3–4) proces izotermiczny, d) (4–1) proces adiabatyczny

Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota

Proces rozprężania adiabatycznego zachodzi wtedy, gdy cylinder jest ustawiony na izolacyjnej podstawie. Gaz zwiększa objętość do wartości V_3 , ciśnienie obniża się do wartości p_3 , a temperatura do wartości T_2 (*Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota* na stronie 326b). Gaz w tym procesie wykonuje pracę W_2 kosztem energii wewnętrznej.

Po ustawieniu cylindra na chłodnicy, czyli na zbiorniku ciepła o niskiej temperaturze T_2 , powoli sprężamy gaz izotermicznie. Objętość zmniejsza się do wartości V_4 , a ciśnienie do wartości p_4 . W procesie tym ciepło Q_2 zostaje przekazane do chłodnicy. Ciepło Q_2 jest równe pracy W_3 wykonanej nad gazem, energia wewnętrzna w tym procesie nie ulega zmianie (*Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota* na stronie 326c).

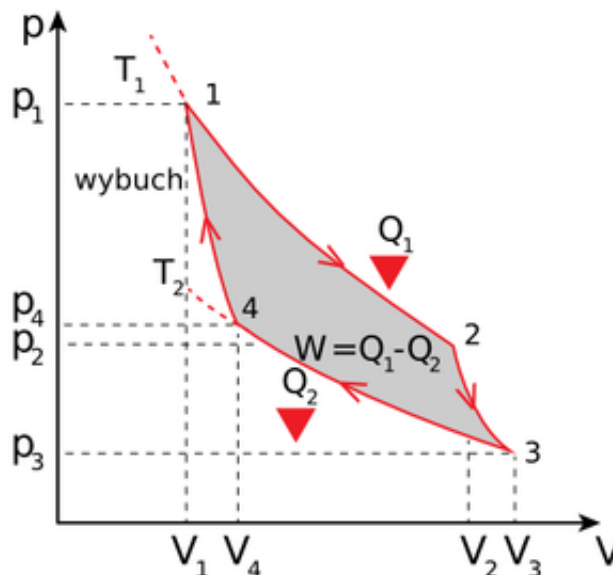
Ostatni proces (zamykający cykl) przebiega adiabatycznie (*Rysunek 7.21: Realizacja poszczególnych procesów w cyklu Carnota* na stronie 326d), zatem cylinder musi ponownie stać na materiale nieprzewodzącym ciepła. W celu doprowadzenia do warunków początkowych, należy sprężyć gaz, zmniejszając jego objętość do wartości początkowej V_1 , zwiększając ciśnienie do początkowej wartości p_1 . Praca sprężania adiabatycznego powoduje wzrost temperatury gazu i wzrost jego energii wewnętrznej.

Przebieg wszystkich procesów w cyklu Carnota przedstawiony został jako zależność p od V na *Rysunek 7.22: Cykl Carnota* na stronie 327. Wypadkowa praca W wykonana przez gaz w tym cyklu przedstawiona jest przez pole powierzchni ograniczonej krzywymi. Praca ta jest równa wypadkowemu ciepłu pobranemu przez układ podczas cyklu. Wypadkowe ciepło pobrane przez układ wynosi $Q_1 - Q_2$, zatem

$$\text{(wzór 736) } W = Q_1 - Q_2$$

Równość ta wynika z pierwszej zasady termodynamiki – układ w wyniku przebiegu cyklu wraca do stanu początkowego, zmiana energii wewnętrznej gazu jest równa zero i dlatego w równaniu (wzór 736 na stronie 326) energia wewnętrzna nie występuje.

Układ pracuje jako silnik cieplny



Rysunek 7.22: Cykl Carnota

Ze wzoru wynika, że energia pobrana ze źródła ciepła Q_1 tylko w części zamieniona zostaje na pracę wypadkową w cyklu Carnota. Część tej energii jako Q_2 zostaje bezużytecznie oddana do chłodnicy. Stosunek pracy wypadkowej W do energii pobranej jest sprawnością η cyklu. Zatem

$$(\text{wzór 737}) \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Wykażemy teraz, że sprawność cyklu Carnota możemy wyrazić za pomocą temperatury zbiornika ciepła T_1 i temperatury chłodnicy T_2 (dla zrozumienia dalszej części tego podrozdziału należy się zapoznać (choć pobeżnie) z logarytmami):

$$(\text{wzór 738}) \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

W celu wyprowadzenia wzoru (wzór 738 na stronie 327) trzeba się zapoznać ze wzorem na ciepło w przemianach izotermicznych. Wzoru tego dotychczas nie podawaliśmy, gdyż jego wyprowadzenie wykracza poza ramy szkoły ponadgimnazjalnej. Otóż ciepło Q dostarczone do gazu rozprężającego się izotermicznie w temperaturze T od objętości V_1 do V_2 wyraża się za pomocą następującego wzoru logarytmicznego:

$$(\text{wzór 739}) Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

gdzie n oznacza liczbę moli gazu, zaś R jest stałą gazową. Jeżeli gaz podlega sprężeniu, w liczniku tego wzoru występuje mniejsza objętość niż w mianowniku i logarytm ze stosunku tych objętości jest ujemny, co oznacza, że i ciepło jest ujemne, czyli jest oddawane przez gaz.

W przypadku cyklu Carnota podczas rozprężania izotermicznego (1–2) gaz pobiera ciepło Q_1 w temperaturze T_1 , więc

$$\text{(wzór 740) } Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

a podczas sprężania izotermicznego (3–4) gaz oddaje ciepło Q_2 , które jest równe

$$\text{(wzór 741) } Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (wzór 737 na stronie 327), otrzymujemy, że

$$\text{(wzór 742) } \eta = \frac{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

Widzimy, że wzór ten przechodzi we wzór (wzór 738 na stronie 327) pod warunkiem, że

$$\text{(wzór 743) } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Udowodnienie tego nie sprawi nam kłopotu, jeżeli rozważymy równania wszystkich przemian występujących w cyklu Carnota:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= p_2 V_2 \\ p_2 V_2^\kappa &= p_3 V_3^\kappa \\ p_3 V_3 &= p_4 V_4 \\ p_4 V_4^\kappa &= p_1 V_1^\kappa \end{aligned} \quad \text{(wzór 744)}$$

Mnożąc te równania stronami przez siebie oraz skracając przez wspólny czynnik $p_1 p_2 p_3 p_4$ pojawiający się po obu stronach wynikowego równania, otrzymujemy:

$$\text{(wzór 745) } V_1 V_2^\kappa V_3 V_4^\kappa = V_1^\kappa V_2 V_3^\kappa V_4$$

Stąd:

$$\text{(wzór 746) } (V_2 V_4)^{\kappa-1} = (V_1 V_3)^{\kappa-1}$$

oraz:

$$\text{(wzór 747) } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Wzór ten pozwala na uproszczenie czynników występujących po prawej stronie wyrażenia (wzór 742 na stronie 328) z wyjątkiem temperatury, co prowadzi do wzoru (wzór 738 na stronie 327): $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Ze wzoru (wzór 738 na stronie 327) wynika, że sprawność cyklu Carnota zawsze jest mniejsza od 1, bowiem temperatura T_2 chłodnicy ma wartość większą od zera, gdyż temperatura zera bezwzględnego jest nieosiągalna.

W przypadku, gdy odwrócimy kierunek cyklu Carnota (na wykresie zależności p od V – Rysunek 7.22: *Cykl Carnota* na stronie 327 – oznaczałoby to przebieg w kierunku odwrotnym do wskazówek zegara), tzn:

1. Będziemy rozprężać gaz izotermicznie w niższej temperaturze,
2. Zaś sprężać izotermicznie w wyższej temperaturze.

W wyniku przebiegu cyklu ciepło będzie przekazywane od ciała o temperaturze niższej do ciała o temperaturze wyższej. Zatem ciepło będzie przekazywane w kierunku przeciwnym do samorzutnego przepływu ciepła.

Jednakże procesowi przekazywania ciepła w tym nienaturalnym kierunku musi towarzyszyć praca czynnika zewnętrznego. Sytuacja taka zachodzi w lodówkach. Ilość ciepła Q_2 pobrana, zgodnie ze wzorem (wzór 737 na stronie 327), wynosi $Q_2 = Q_1(1-\eta)$. Praca W , jaka musi towarzyszyć przekazywaniu ciepła w maszynie chłodniczej, wynosi $W = Q_1 - Q_2$, zatem

$$(\text{wzór 748}) \quad Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} W$$

Za pomocą tego wzoru można określić, ile ciepła zostanie odprowadzone z ciała zimniejszego przy wykonaniu określonej pracy. Maszyna chłodnicza jest tym ekonomiczniejsza, im wymaga mniejszej pracy dla odprowadzenia określonej wartości ciepła.

Porównajmy teraz sprawność cyklu Carnota ze sprawnością omawianego uprzednio silnika spalinowego. Temperatura spalania mieszanki benzynowej wynosi około 2700 K. Załóżmy, że taką temperaturę będzie miał zbiornik ciepła, a otaczające powietrze o temperaturze około 300 K będzie służyło jako chłodnica. Wtedy sprawność cyklu Carnota wyniesie

$$(\text{wzór 749}) \quad \eta = \frac{2700 \text{ K} - 300 \text{ K}}{2700 \text{ K}} = 0,89$$

Porównując tę liczbę z maksymalną sprawnością silnika benzynowego wynoszącą 0,56, łatwo możemy obliczyć, że sprawność cyklu Carnota jest o około 33% większa od sprawności cyklu Otta.

Obliczmy jeszcze maksymalną sprawność silnika parowego, który pracowałby w cyklu Carnota. Przyjmując, że źródłem ciepła jest kocioł z wrzącą wodą, która ma temperaturę 373 K, zaś chłodnicą woda mająca temperaturę otaczającego powietrza 293 K, otrzymamy

$$(\text{wzór 750}) \quad \eta = \frac{373 \text{ K} - 293 \text{ K}}{373 \text{ K}} = 0,21$$

Widzimy, że sprawność silników parowych jest dużo mniejsza od sprawności silników spalinowych. Między innymi dlatego obecnie silników parowych prawie się nie stosuje. Jest to ogólna prawidłowość. Można udowodnić, że dowolny realny cykl musi mieć sprawność mniejszą od sprawności idealnego cyklu Carnota. Sprawność każdego cyklu można wyrazić za pomocą wzoru (wzór 737 na stronie 327), zaś sprawność idealnego cyklu Carnota jest wyrażona za pomocą wzoru (wzór 738 na stronie 327). Zatem dla dowolnego cyklu

$$(\text{wzór 751}) \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Termodynamika - Cykl Carnota

Rysunek 7.23: Animacja

[EXE PDF](#) Doświadczenie cykl Carnota

Doświadczenie - Cykl Carnota

Rysunek 7.24: Animacja

Pytania i problemy

1. Nazwij kolejno wszystkie rodzaje przemian gazowych, jakie występują w cyklu Carnota.
2. Przedstaw cykl Carnota na wykresie zależności p od V .
3. Podaj wzór na sprawność dowolnego cyklu i wzór na sprawność cyklu Carnota.
4. Porównaj maksymalną sprawność cyklu Carnota i maksymalną sprawność cyklu Otta dla silnika pracującego między tymi samymi temperaturami źródła i chłodnicy.
5. Kiedy maszyna, której działanie jest oparte na cyklu termodynamicznym, pracuje jako silnik cieplny, a kiedy jako maszyna chłodząca?

7.D1 Dodatek: Energia wewnętrzna gazu - zasada ekwipartycji energii (temat nadobowiązkowy)

Zasada ekwipartycji energii

Wiemy, że wszystkie cząsteczki gazu w jednakowej temperaturze mają jednakową średnią energię kinetyczną ruchu postępowego, niezależnie od wielkości ich mas. W wypadku gazu mającego cząsteczki w postaci pojedynczych atomów (tzw. gazu jednoatomowego) braliśmy pod uwagę tylko energię ruchu postępowego. Nie musieliśmy uwzględniać energii ruchu obrotowego. Energię ruchu obrotowego atomu można zaniedbać, gdyż jego masa jest głównie skoncentrowana w jądrze, którego rozmiary są setki tysięcy razy mniejsze od rozmiarów całego atomu (dlatego moment bezwładności atomu jest bardzo mały). Nie możemy jednak zaniedbać ruchu obrotowego cząsteczek składających się z dwóch i więcej atomów, gdyż w tym wypadku energia ruchu obrotowego jest porównywalna z energią kinetyczną ruchu postępowego.

W celu uwzględnienia energii ruchu obrotowego cząsteczek wprowadzimy pojęcie *liczby stopni swobody cząsteczki*. Jest to najmniejsza liczba niezależnych współrzędnych, które należy podać, aby jednoznacznie określić położenie cząsteczki w przestrzeni.

W przypadku pojedynczego atomu, którego rozmiary możemy zaniedbać i który redukujemy do punktu materialnego, liczba stopni swobody jest równa 3, ponieważ do określenia jego położenia wystarczy podać trzy współrzędne x , y i z . Według równania ([wzór 677](#) na stronie 290):

$$(\text{wzór 752}) \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{3kT}{2}$$

średnia energia kinetyczna ruchu postępowego wynosi $\frac{3kT}{2}$. Średni kwadrat prędkości można wyrazić za pomocą trzech składowych:

$$(\text{wzór 753}) \quad \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

Ze względu na to, że żaden z kierunków x , y , z nie jest wyróżniony, możemy przyjąć, że wszystkie trzy składowe prędkości średniej są jednakowe, czyli

$$(\text{wzór 754}) \quad \overline{v^2} = 3\overline{v_i^2}$$

gdzie wskaźnik i oznacza x , y lub z . Zatem na podstawie wzoru ([wzór 752](#) na stronie 330) mamy:

$$(\text{wzór 755}) \quad \frac{mv^2}{2} = 3 \left(\frac{mv_i^2}{2} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} kT \right)$$

Wnioskujemy stąd, że na jedną składową prędkości, czyli na jeden stopień swobody, przypada średnio energia kinetyczna równa

$$(\text{wzór 756}) \quad \frac{kT}{2}$$

Wniosek ten można uogólnić na cząsteczki o dowolnej liczbie stopni swobody, mogące wykonywać nie tylko ruchy postępowe, ale też rotacyjne (obrotowe) i drgające. Można go przedstawić w postaci *zasady ekwipartycji energii*, która brzmi:

Ⓡ Zamapiętać: Na każdy stopień swobody przypada średnio ta sama ilość energii, równa $\frac{kT}{2}$.

Należy podkreślić, że zasada ekwipartycji energii ma charakter statystyczny – dotyczy wartości średnich dużej liczby cząsteczek.

Energia wewnętrzna gazu składającego się z cząsteczek o liczbach swobody $i > 3$

Zasada ekwipartycji energii pozwala obliczyć energię wewnętrzną gazu złożonego z cząsteczek, z których każda ma i stopni swobody. W rozdziale *Energia wewnętrzna, ciepło i praca* na stronie 297 podaliśmy wzór (wzór 684 na stronie 297) na energię wewnętrzną gazu przy założeniu, że składa się na nią tylko energia kinetyczna N jednakowych cząsteczek gazu, z których każda ma tylko $i = 3$ stopni swobody

$$(\text{wzór 757}) U = N \frac{3}{2} kT$$

W ogólnym przypadku średnia energia kinetyczna jednej cząsteczki wynosi

$$(\text{wzór 758}) E_k = \frac{i}{2} kT$$

Zatem energia wewnętrzna gazu, tj. energia kinetyczna wszystkich N cząsteczek, wynosi

$$(\text{wzór 759}) U = N \cdot \frac{i}{2} kT$$

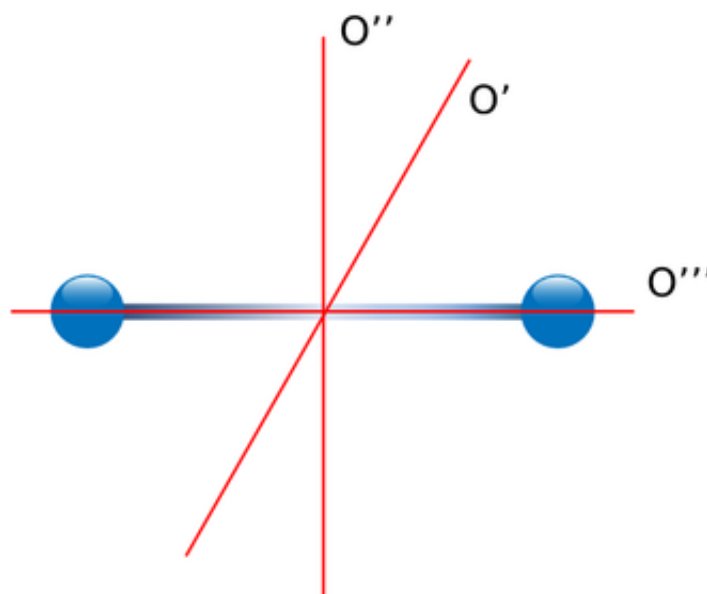
Rozważymy teraz działanie zasady ekwipartycji energii w następujących przypadkach:

1. Gaz jednoatomowy składa się z cząsteczek mających 3 stopnie swobody. Energię wewnętrzną N cząsteczek gazu, określoną jako suma energii kinetycznych cząsteczek, można wyrazić jako iloczyn średniej energii kinetycznej cząsteczek równej przez liczbę cząsteczek N :

$$(\text{wzór 760}) U = N \frac{3}{2} kT$$

2. Gaz dwuatomowy składa się z cząsteczek mających w uproszczeniu kształt hantli (dwie kule połączone sztywnym prętem) – *Rysunek 7.25: Niezależne osie obrotu cząsteczki dwuatomowej* na stronie 332. Dla takiej cząsteczki przyjmujemy pięć stopni swobody ($i = 5$), czyli trzy współrzędne określające położenie środka masy oraz dwie współrzędne określające jej obrót względem osi $O'-O'$ i prostopadłej do niej osi $O''-O''$. Trzeciej osi $O'''-O'''$ nie uwzględniamy, gdyż energia kinetyczna obrotu cząsteczki względem tej osi jest zaniedbywalnie mała w stosunku do energii obrotu cząsteczki względem dwóch pozostałych osi. Zatem energia wewnętrzna gazu wynosi

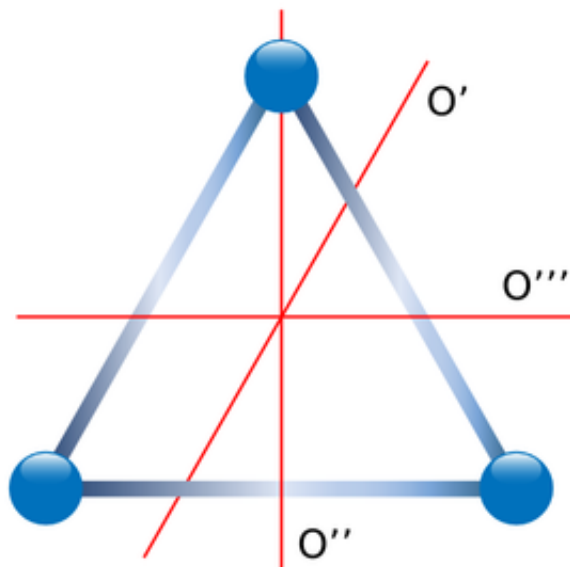
$$(\text{wzór 761}) U = N \cdot \frac{5}{2} kT$$



Rysunek 7.25: Niezależne osie obrotu cząsteczki dwuatomowej

3. Gaz trzyatomowy składa się z cząsteczek mających w uproszczeniu kształt trójkąta (*Rysunek 7.26: Trzy niezależne osie obrotu cząsteczki trójatomowej* na stronie 333). Dla takiej cząsteczki przyjmujemy sześć stopni swobody ($i = 6$): trzy współrzędne środka masy oraz trzy współrzędne obrotu względem trzech prostopadłych osi. Zatem energia wewnętrzna takiego gazu, zgodnie ze wzorem (*wzór 760* na stronie 331) wyrazi się następująco

$$(\text{wzór 762}) U = 3NkT$$



Rysunek 7.26: Trzy niezależne osie obrotu cząsteczki trójatomowej

Zasada ekwipartycji energii pozwala teoretycznie przewidzieć wartości ciepła właściwego oraz współczynnika Poissona dla różnych gazów. Zgodnie z definicją (wzór 707 na stronie 307)

$$(\text{wzór 763}) \quad \kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_p}{C_V}$$

gdzie c_V – ciepło właściwe gazu przy stałej objętości, C_V – ciepło molowe gazu przy stałej objętości, c_p – ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu, C_p – ciepło molowe gazu przy stałym ciśnieniu.

Obliczymy najpierw ciepło molowe przy stałej objętości. Wykorzystamy wzór (wzór 695 na stronie 305) wyrażający zmianę energii wewnętrznej pod wpływem przyrostu temperatury gazu o ΔT :

$$(\text{wzór 764}) \quad \Delta U = mc_V \Delta T$$

Zatem zmiana energii wewnętrznej dla jednego mola gazu wynosi

$$(\text{wzór 765}) \quad \Delta U = \mu c_V \Delta T = C_V \Delta T$$

gdzie μ – masa jednego mola gazu; wykorzystano tu również wzór (wzór 705 na stronie 307). Czyli

$$(\text{wzór 766}) \quad \Delta U_M = C_V \Delta T$$

Wcześniej wyprowadziliśmy wzór (wzór 760 na stronie 331): na energię wewnętrzną gazu zawierającego cząsteczek o i stopniach swobody. Zatem przy zmianie temperatury o ΔT przyrost energii wewnętrznej dla jednego mola gazu wynosi

$$(\text{wzór 767}) \quad \Delta U_M = \frac{i}{2} N_A k \Delta T$$

gdzie N_A jest liczbą cząsteczek w jednym molu – liczbą Avogadra. Ponieważ $N_A k = R$, więc

$$(\text{wzór 768}) \quad \Delta U_M = \frac{i}{2} R \Delta T$$

Porównując wzory (wzór 766 na stronie 333) i (wzór 768 na stronie 333) otrzymamy

$$(\text{wzór 769}) C_V = \frac{i}{2} R$$

Zgodnie z równaniem Mayera (wzór 706 na stronie 307) $C_p = C_V + R$, więc $C_p = \frac{i}{2} R + R$. Zatem

$$(\text{wzór 770}) C_p = \frac{i+2}{2} R$$

Dzieląc stronami (wzór 770 na stronie 334) przez (wzór 769 na stronie 334), otrzymujemy, że współczynnik Poissona wynosi

$$(\text{wzór 771}) \kappa = \frac{i+2}{2}$$

Widzimy zatem, że teoria kinetyczna pozwala przewidzieć, ile powinny wynosić ciepła molowe C_V i C_p oraz współczynnik Poissona dla dowolnego gazu, jeżeli wiadomo, z jakich cząsteczek składa się dany gaz. W tabeli *Rysunek 7.27: Ciepło molowe różnych rodzajów gazów oraz ciał stałych w temperaturze 20 ° C i przy ciśnieniu 1 atm* na stronie 335 zestawiono wyniki teoretyczne z wynikami otrzymanymi doświadczalnie dla różnych gazów rzeczywistych. Oprócz tego w tabeli zamieszczono doświadczalne wartości C dla ciał stałych (wyjaśnienie wartości teoretycznej C dla ciał stałych znajduje się w *przykładzie D1*). Jak widać, zgodność teorii z wynikami doświadczeń jest dobra, szczególnie dla gazów jedno- i dwuatomowych.

Przykład D1

Wykaż, że dla ciała stałego ciepło molowe C jest równe $3R$. Przyjmij, że przyrost energii wewnętrznej $\Delta U = C \Delta T$ (wzór podobny do (wzór 766 na stronie 333) dla gazów) oraz że obowiązuje zasada ekwipartycji energii również dla atomów znajdujących się w ciałach stałych.

Odpowiedź: Jak wiemy, w ciele stałym atomy są uwięzione w sieci krystalicznej. Mogą one tylko wykonywać drgania we wszystkich trzech kierunkach, co daje energię kinetyczną przypadającą na jeden atom równą $\frac{3kT}{2}$.

Wiemy, że w ruchu drgającym atomy mają również średnio taką samą energię potencjalną. Zatem N_A atomów znajdujących się w jednym molu ma energię wewnętrzną

$$(\text{wzór 772}) U_M = N_A \frac{6kT}{2} = 3N_A kT = 3RT$$

Przyjmując, że wzór (wzór 766 na stronie 333) obowiązuje również dla ciał stałych, otrzymamy $U_M = CT = 3RT$. Ostatecznie mamy więc, że dla ciał stałych

$$(\text{wzór 773}) C = 3R$$

Jak widzimy, ciepło molowe jest niezależne od masy molowej. Wzór ten nosi nazwę prawa Dulonga-Petita.

$\frac{f}{v}$	Rodzaj substancji	Liczba stopni swobody	Ciepło molowe		Współczynnik Poissona: =
			C_p	C_v	
Gaz jednoatomowy					
	teoria:	$i = 3$	R	R	$= 1,67$
	doświadczenie:				
	He		$2,51 R$	$1,51 R$	$1,67$
	Ne		$2,51 R$	$1,50 R$	$1,67$
	Ar		$2,51 R$	$1,51 R$	$1,67$
Gaz dwuatomowy					
	teoria:	$i = 5$	R	R	$= 1,67$
	doświadczenie:				
	H ₂		$3,47 R$	$2,46 R$	$1,41$
	O ₂		$3,55 R$	$2,54 R$	$1,40$
	N ₂		$3,51 R$	$2,50 R$	$1,40$
Gaz wieloatomowy					
	teoria:	$i = 6^*$	$4 R$	$3 R$	$1,33$
	doświadczenie:				
	H ₂ O (para wodna)		$4,28 R$	$3,04 R$	$1,33$
	CO ₂		$4,46 R$	$3,43 R$	$1,30$
Ciało stałe					
	teoria:	$i = 6$	$C = 3R$		
	doświadczenie:				
	Al		$2,92 R$		
	Cu		$2,94 R$		
	Ag		$3,06 R$		

* Liczba stopni swobody dla cząsteczek wieloatomowych może być większa ze względu na możliwość wykonywania drgań przez takie cząsteczki w temperaturze pokojowej.

Rysunek 7.27: Ciepło molowe różnych rodzajów gazów oraz ciał stałych w temperaturze 20 °C i przy ciśnieniu 1 atm

Wyprowadzenie wzoru na pracę w przemianie adiabatycznej

Cząsteczki o większej liczbie atomów, traktowane jako bryły sztywne, mają oczywiście również sześć stopni swobody. Zatem dla gazów z liczbą trzech i więcej atomów energia wewnętrzna wyrazi się również za pomocą wzoru (wzór 762 na stronie 332).

Na podstawie wzoru (wzór 760 na stronie 331) przyrost energii wewnętrznej gazu, przy wzroście temperatury o $\Delta T = T_2 - T_1$, możemy wyrazić następująco:

$$(\text{wzór 774}) \quad \Delta U = \frac{i}{2} Nk \Delta T$$

Wobec tego praca W w procesie adiabatycznym, zgodnie z (wzór 730 na stronie 324), wyrazi się wzorem

$$(\text{wzór 775}) \quad \Delta W = \Delta U = -\frac{i}{2} Nk(T_1 - T_2)$$

Z prawa gazu doskonałego (wzór 659 na stronie 287) otrzymamy $\Delta W = \frac{i}{2}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$. Ponadto łatwo można wykazać, korzystając ze wzoru (wzór 771 na stronie 334), że $\frac{i}{2} = \frac{1}{\kappa - 1}$. Dzięki temu ostatecznie otrzymamy następujący wzór na pracę w procesie adiabatycznym:

$$(\text{wzór 776}) \quad \Delta W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\kappa - 1}$$

7.D2 Dodatek: Entropia (temat nadobowiązkowy)

Przy omawianiu pierwszej zasady termodynamiki posługiwaliśmy się pojęciem energii wewnętrznej U . Stwierdziliśmy, że energia wewnętrzna jest funkcją stanu, tzn. jej przyrost jest niezależny od rodzaju procesu zachodzącego między dwoma stanami, a zależy tylko od tych stanów. Obecnie wprowadzimy nowe pojęcie –

entropię, która podobnie jak energia wewnętrzna jest funkcją stanu. Jest to bardzo ważna funkcja, gdyż, jak się okaże, *we wszystkich procesach realnie zachodzących w przyrodzie, entropia układu zamkniętego rośnie*. Zatem pokazuje kierunek procesów zachodzących w dowolnym układzie zamkniętym. Porównując dwa stany układu, możemy od razu określić kierunek procesu zachodzącego między tymi stanami. Będzie to przejście od stanu o niższej wartości entropii do stanu charakteryzującego się wyższą wartością entropii.

Wprowadzimy pojęcie entropii, rozważając cykl termodynamiczny. Dla realnego cyklu mamy nierówność:

$$(\text{wzór 777}) \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

gdzie wskaźnikiem 1 oznaczono źródło ciepła, a wskaźnikiem 2 – chłodzić. Po przekształceniu otrzymamy

$$(\text{wzór 778}) \frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}$$

Stąd

$$(\text{wzór 779}) \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} > 0$$

W równaniu tym ciepło jest wyrażone za pomocą liczby dodatniej, niezależnie od tego, czy ciepło było pobrane, czy oddane. Jeżeli, podobnie jak to czyniliśmy przy pierwszej zasadzie termodynamiki, znakiem dodatnim będziemy zaopatrywać ciepło pobrane przez ciało, a znakiem minus ciepło oddane, to:

$$(\text{wzór 780}) \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0$$

Nierówność ta daje nam okazję do określenia zmiany entropii S za pomocą wzoru:

$$(\text{wzór 781}) \Delta S = \sum \frac{Q}{T}$$

Zmiana entropii $\Delta S = S_2 - S_1$ układu jest równa sumie stosunków małych porcji ciepła pobranego Q do temperatury T w procesach elementarnych zachodzących przy przejściu od stanu początkowego 1 do stanu końcowego 2.

Zatem nierówność (wzór 779 na stronie 336) (jak i (wzór 780 na stronie 336)) należy interpretować następująco: całkowita zmiana entropii w realnym cyklu termodynamicznym wzrasta (przyrost entropii jest większy od zera). Zmiana entropii podczas tego procesu składa się z przyrostu entropii chłodzić

$$(\text{wzór 782}) \Delta S_2 = \frac{Q_2}{T_2}$$

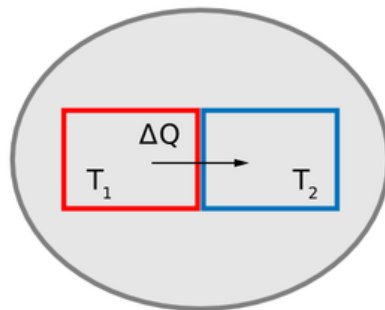
oraz z przyrostu entropii źródła ciepła

$$(\text{wzór 783}) \Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1}$$

(należy zauważyć, że nie występuje tutaj zmiana entropii substancji roboczej, ponieważ substancja robocza wraca do stanu początkowego po wykonaniu cyklu).

Przykład 4

Wykażemy, że entropia rośnie w układzie składającym się z dwóch ciał, jeżeli między nimi następuje wymiana małej porcji ciepła. Przyjmujemy, że układ jest otoczony osłoną adiabatyczną (Rysunek 7.28: *Dwa ciała wymieniające ciepło, umieszczone w osłonie adiabatycznej* na stronie 337).



Rysunek 7.28: Dwa ciała wymieniające ciepło, umieszczone w osłonie adiabatycznej

Odpowiedź: Przyjmijmy, że $T_1 > T_2$. Zatem ciepło przepływa od ciała o temperaturze T_1 do ciała o temperaturze T_2 . Ponadto przyjmijmy, że przekazywane ciepło ΔQ jest małe i nie wpływa istotnie na zmianę temperatury obu ciał podczas procesu.

Całkowita zmiana entropii układu jest równa sumie zmian entropii obu ciał:

$$(\text{wzór 784}) \quad \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Zgodnie ze wzorem ([wzór 781](#) na stronie 336) (i regułą znaków dla ciepła pobranego i oddanego)

mamy $\Delta S_1 = -\frac{\Delta Q}{T_1}$ i $\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2}$. Podstawiając to do wzoru ([wzór 784](#) na stronie 337), otrzymamy

$$(\text{wzór 785}) \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T_2} - \frac{\Delta Q}{T_1}$$

Otrzymaliśmy, że zmiana entropii jest większa od zera, gdyż liczniki obydwu składników są jednakowe, a mianowniki są zrelacjonowane nierównościami $T_1 > T_2$. Wykazaliśmy więc, że entropia układu izolowanego dwóch ciał wymieniających ciepło rośnie.

Te i inne przykłady procesów pozwalają nam sformułować drugą zasadę termodynamiki ilościowo w następujący sposób:

W każdym procesie zachodzącym w układzie makroskopowym zamkniętym i adiabatycznie izolowanym entropia nie może ulec zmniejszeniu, to znaczy $\Delta S \geq 0$.

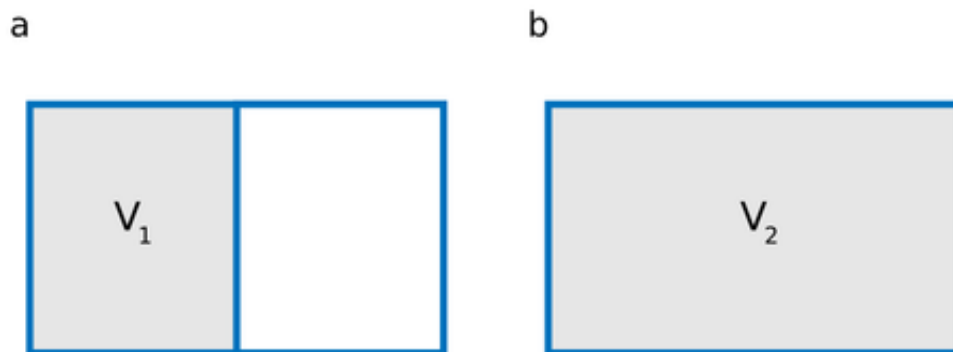
Statystyczna definicja entropii

W rozdziale tym postaramy się odpowiedzieć na pytanie: Dlaczego entropia rośnie? Pokażemy, że funkcja entropia, chociaż historycznie została odkryta na gruncie termodynamiki – nauki fenomenologicznej rozpatrującej zachowanie się ciał makroskopowych, ma swoje statystyczne uzasadnienie, gdyż wiadomo, że ciała makroskopowe składają się z wielkiej liczby obiektów mikroskopowych.

Przekonamy się o tym, że duża liczba cząsteczek zawartych w obiektach makroskopowych sprawia, iż w *makroświecie* procesy mają wyraźnie określony kierunek (ogólnie biorąc, są nieodwracalne!), mimo że procesy zachodzące w *makroświecie* są całkowicie odwracalne.

W celu omówienia tego zadziwiającego zjawiska rozważymy proces nieodwracalny swobodnego rozprężania się gazu, podobny do rozważanego w rozdziale [7.4 Druga zasada termodynamiki. Nieodwracalność realnych](#)

procesów cieplnych na stronie 316. Obecnie przyjmujemy, że mamy do czynienia z gazem zgromadzonym w jednej części naczynia o objętości V_1 za przegrodą (*Rysunek 7.29: a) Gaz skupiony w lewej części naczynia, b) po usunięciu przegrody gaz rozprzestrzenił się w całym naczyniu* na stronie 338a). Po usunięciu przegrody gaz rozprzestrzenił się na całe naczynie o objętości V_2 (*Rysunek 7.29: a) Gaz skupiony w lewej części naczynia, b) po usunięciu przegrody gaz rozprzestrzenił się w całym naczyniu* na stronie 338b). Zakładamy, że proces odbywa się w stałej temperaturze. Obliczymy zmianę entropii w tym procesie.



Rysunek 7.29: a) Gaz skupiony w lewej części naczynia, b) po usunięciu przegrody gaz rozprzestrzenił się w całym naczyniu

Zauważmy, że stan początkowy jest stanem równowagi, stan końcowy również, jednak że proces przejścia od stanu początkowego do końcowego odbiega znacznie od warunków równowagi. Zatem proces rozprężania swobodnego gazu jest procesem nieodwracalnym. Dla procesów nieodwracalnych nie jesteśmy w stanie zastosować bezpośrednio wzoru (*wzór 781* na stronie 336) na zmianę entropii, gdyż procesy te przebiegają przez stany nierównowagi (o nieustalonych parametrach termodynamicznych). Jednakże w przypadku, gdy proces nieodwracalny zaczyna się i kończy stanem równowagi, to do obliczenia przyrostu entropii możemy zastosować wzór (*wzór 781* na stronie 336) dla równoważnego mu procesu odwracalnego – przebiegającego między tymi samymi stanami skrajnymi. Jest to możliwe, ponieważ, jak zaznaczono wyżej, przyrost entropii zależy tylko od stanu początkowego i końcowego, będzie więc taki sam dla dowolnego procesu zachodzącego między tymi stanami. W naszym przypadku będzie to odwracalny proces izotermicznego rozprężania gazu od objętości V_1 do V_2 . Zastosujemy wzór (*wzór 781* na stronie 336):

$$(\text{wzór 786}) \quad S = \sum \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \sum Q = \frac{\Delta Q}{T}$$

gdzie Q jest ciepłem dostarczonym do gazu rozprężającego się izotermicznie, które wyraża się za pomocą wzoru (*wzór 781* na stronie 336):

$$(\text{wzór 787}) \quad Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Zatem przyrost entropii gazu rozprężającego się izotermicznie, jak również przyrost entropii gazu swobodnie rozprężającego się możemy wyrazić za pomocą wzoru:

$$(\text{wzór 788}) S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Ponieważ $V_2 > V_1$, więc $S_2 - S_1 > 0$, czyli entropia w tym procesie rośnie (zgodnie z naszymi oczekiwaniami).

Obliczmy teraz zmianę entropii w procesie odwrotnym względem wyżej omawianego, tzn. w izotermicznym procesie sprężania gazu. W tym przypadku ciepło Q będzie odprowadzane z gazu i zgodnie z regułą znaków, będzie ono obdarzone znakiem minus. Obecnie więc

$$(\text{wzór 789}) Q = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

(wzór powyższy wynika z relacji: $\ln \frac{V_1}{V_2} = - \ln \frac{V_2}{V_1}$). Korzystając ze wzoru ([wzór 781](#) na stronie 336) na zmianę entropii, dla procesu izotermicznego sprężania gazu otrzymamy wzór

$$(\text{wzór 790}) \Delta S = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Ponieważ $V_1 < V_2$, więc $S_1 - S_2 < 0$, czyli entropia w tym procesie maleje. Nie powinno to nas dziwić, mimo że druga zasada termodynamiki mówi o wzroście entropii – mówi ona o wzroście entropii w układzie zamkniętym izolowanym, traktowanym jako całość. Jedne fragmenty układu mogą doznawać spadku entropii, inne – wzrostu entropii przy przejściu od jednego do drugiego stanu układu, jednakże algebraiczna suma entropii wszystkich fragmentów układu nie może maleć. Tak jest i w rozważanym przez nas przypadku. Sprężany gaz oddaje ciepło do otoczenia, czyli mamy tu do czynienia z wymianą ciepła między dwoma ciałami. Udowodniliśmy w przykładzie ([Przykład 4](#) na stronie 336), że w przypadku wymiany ciepła entropia całego układu wzrasta!

Zmiana entropii wyrażona wzorem ([wzór 790](#) na stronie 339) jest równa zmianie entropii procesu sprężania gazu od objętości V_2 do V_1 . Taki proces samoczynnie mógłby zajść, ale z niezwykle małym prawdopodobieństwem (co wykażemy poniżej).

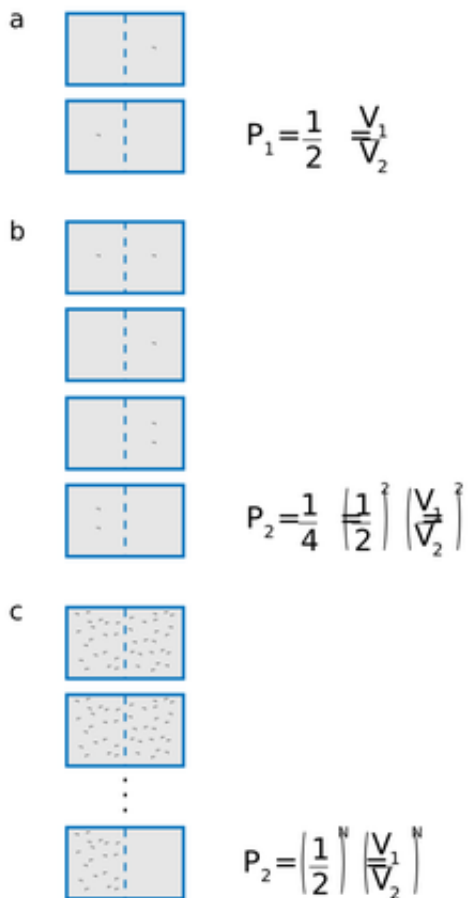
Wzór ([wzór 790](#) na stronie 339) jest dla nas bardzo ważny, gdyż pozwoli nam zinterpretować entropię w ujęciu statystycznym. W tym celu obliczmy prawdopodobieństwo przebywania gazu w określonym stanie (w lewej połowie naczynia) w przypadkach przedstawionych na rysunku [Rysunek 7.29: a\) Gaz skupiony w lewej części naczynia, b\) po usunięciu przegrody gaz rozprzestrzenił się w całym naczyniu](#) na stronie 338.

Na początek weźmy pod uwagę naczynie z jedną cząsteczką gazu – [Rysunek 7.30: Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki](#) na stronie 340a. Jedna cząsteczka może przebywać z równym prawdopodobieństwem w obu częściach naczynia. Zatem prawdopodobieństwo tego, że cząsteczka znajdzie się w lewej części naczynia, wynosi

$$(\text{wzór 791}) P_1 = \frac{1}{2} = \frac{V_1}{V_2}$$

(założyliśmy, że $V_2 = 2V_1$).

Pojęcie prawdopodobieństwa poznasz dokładnie na lekcjach matematyki.



- a) Jedna cząsteczka może przebywać z równym prawdopodobieństwem w obu częściach naczynia, $P_1 = \frac{1}{2}$. b) Prawdopodobieństwo tego, że dwie cząsteczki znajdą się w lewej części naczynia, wynosi $P_2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. c) Prawdopodobieństwo tego, że N cząsteczek gazu znajdzie się w lewej części naczynia, wynosi $P_N = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

Rysunek 7.30: Prawdopodobieństwo znalezienia cząstek

Jeżeli gaz składa się tylko z dwóch cząsteczek, to prawdopodobieństwo znalezienia obu cząsteczek w lewej części naczynia wynosi

$$\text{(wzór 792) } P_2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Jeżeli gaz składa się z N cząsteczek, to prawdopodobieństwo znalezienia wszystkich cząsteczek w lewej części naczynia wynosi

$$\text{(wzór 793) } P_N = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

W ogólnym przypadku, gdy stosunek objętości lewej części naczynia V_1 do objętości całego naczynia V_2 jest dowolny (niekoniecznie równy $\frac{1}{2}$), to względne prawdopodobieństwo P tego, że wszystkie cząsteczki gazu zgromadzą się w objętości V_1 , wynosi:

$$(\text{wzór 794}) P_{21} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^N$$

Jeżeli uwzględnimy fakt, że N jest bardzo dużą liczbą, rzędu liczby Avogadra ($N \approx 10^{24}$), to prawdopodobieństwo P_{21} okaże się niezwykle małe ($P_{21} < 1$), nawet w przypadku, gdy V_2 tylko nieznacznie przewyższa V_1 . Oznacza to, że samoczynne zgromadzenie się gazu tylko w części naczynia, pozostawiając pozostałą część pustą, jest niezwykle mało prawdopodobne. Równanie (wzór 794 na stronie 341) jest dla nas bardzo ważne, gdyż dzięki niemu łatwo wprowadzimy statystyczną definicję entropii. Zlogarytmujemy obustronnie to równanie:

$$(\text{wzór 795}) \ln P_{21} = \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^N = N \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Pomnóżmy obustronnie równanie (wzór 795 na stronie 341) przez k – stałą Boltzmanną:

$$(\text{wzór 796}) k \ln P_{21} = kN \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Przekształćmy teraz współczynnik kN występujący po prawej stronie tej równości. Ponieważ stałą Boltzmanną można wyrazić za pomocą stałej gazowej R i liczby Avogadra N_A jako $k = \frac{R}{N_A}$ (rozdz. 5.6 Pole grawitacyjne na stronie 232) oraz $\frac{N}{N_A} = n$ (n – liczba moli gazu), więc

$$(\text{wzór 797}) kN = \frac{R}{N_A} N = \frac{N}{N_A} R = nR$$

Podstawiając otrzymany wynik do równania (wzór 796 na stronie 341), otrzymamy ostatecznie

$$(\text{wzór 798}) k \ln P_{21} = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

Porównajmy teraz otrzymany wzór ze wzorem (wzór 790 na stronie 339):

$$(\text{wzór 799}) \Delta S = nR \ln \frac{V_1}{V_2}$$

wyrażającym zmianę entropii gazu sprężanego od objętości V_2 do V_1 . I co widzimy? Widzimy, że prawe strony obydwu wzorów są identyczne. Stąd wynika, że $\Delta S = k \ln P_{21}$, czyli

$$(\text{wzór 800}) S_2 - S_1 = k \ln P_2 - k \ln P_1$$

gdzie P_1 i P_2 – prawdopodobieństwa termodynamiczne stanu 1 i stanu 2 układu.

Prawdopodobieństwem termodynamicznym danego stanu określonego układu ciał nazywamy liczbę kombinacji pojedynczych elementów układu, za pomocą których realizuje się dany stan układu. Wzór (wzór 800 na stronie 341) pozwala na sformułowanie bardzo ważnego wniosku:

$$(\text{wzór 801}) S = k \ln P$$

co słowami wyrazimy w następująco:

- Ⓡ **Zamknięta:** Entropia układu zamkniętego, izolowanego adiabatycznie, jest proporcjonalna do logarytmu z prawdopodobieństwa termodynamicznego stanu układu; współczynnikiem proporcjonalności jest stała Boltzmanną k .

Tak sformułowana definicja entropii umożliwia stwierdzenie, że entropia jest miarą nieuporządkowania rozkładu cząsteczek. Gaz zgromadzony w części naczynia jest bardziej uporządkowany niż ten sam gaz, który zajmuje całą objętość naczynia. Druga zasada termodynamiki, określająca kierunek procesów w przyrodzie od stanu o niższej

entropii do stanu o wyższej entropii, mówi nam po prostu, że procesy w przyrodzie zachodzą w kierunku od stanów mniej do bardziej prawdopodobnych. Ponieważ stany o większym prawdopodobieństwie są stanami o mniejszym uporządkowaniu, zatem procesy zachodzą w kierunku od bardziej do mniej uporządkowanych stanów. Przyroda zawsze zmierza od porządku do chaosu, gdyż w każdym realnym procesie entropia, która jest miarą chaosu, wzrasta.

Entropia

Rysunek 7.31: Animacja

7.D3 Dodatek: Chaos i porządek w przyrodzie (temat nadobowiązkowy)

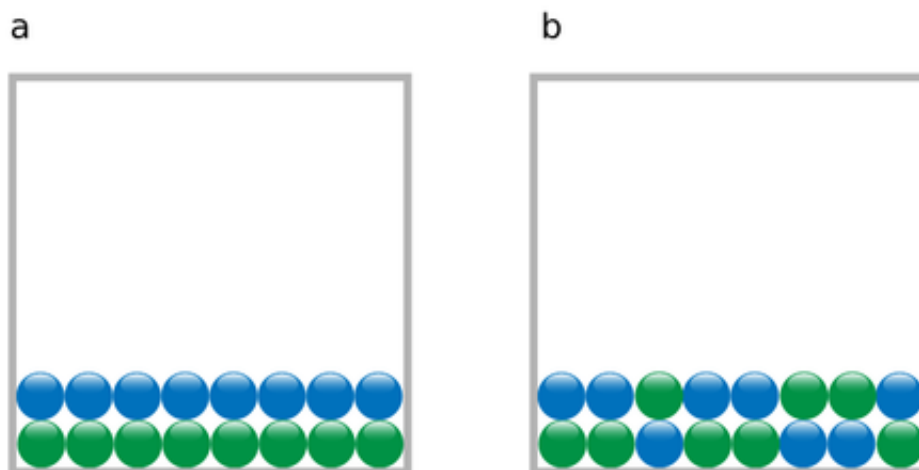
Nieodwracalność procesów makroskopowych

Nieodwracalność procesów makroskopowych wydaje się czymś paradoksalnym. Przecież procesy te sprowadzają się do wielu mikroskopowych procesów mechanicznych – ruchów oddziałujących i zderzających się cząsteczek. Wiemy, że te ostatnie procesy są procesami odwracalnymi. Weźmy pod uwagę np. wzajemne zderzenie dwóch cząsteczek. Gdybyśmy nakręcili film z takiego procesu, a potem puścili taśmę w odwrotnym kierunku, wtedy zderzenie na filmie przebiegałoby tak samo, jak w rzeczywistości. Nie byłibyśmy w stanie zorientować się w tym, że taśma porusza się w stronę przeciwną. Odwrócenie ruchu taśmy w przeciwnym kierunku odpowiada odwróceniu biegu procesu w czasie. Odwracalność procesów mechanicznych wynika z praw Newtona, które mają tę własność, że jeżeli do równań z nich wynikających podstawimy $t = -t$, to otrzymujemy także prawidłowe rozwiązanie. Jednakże, jeżeli przeprowadzimy podobny eksperyment z dużą liczbą cząsteczek, np. w swobodnie rozprężającym się gazie, to każdy zauważy, że „taśma filmowa została puszczone w przeciwnym kierunku”, gdyż samoczynne gromadzenie się gazu w jednej części naczynia (widoczne na filmie) w rzeczywistości nigdy nie występuje.

Co jest przyczyną nieodwracalności takich procesów? Skąd cząsteczki „wiedzą”, że powinny zajmować całą objętość naczynia i nie skupiać się w jednej tylko jego części? Dlaczego chaotyczne rozmieszczenie cząsteczek jest dużo bardziej prawdopodobne niż uporządkowane? Rozwiązanie tego zagadnienia znajdziemy w statystycznym charakterze praw rządzących układami składającymi się z dużej liczby cząsteczek.

W celu wyjaśnienia tego zagadnienia rozważmy prosty przykład rozmieszczenia w naczyniu dziesięciu niebieskich i dziesięciu czerwonych kuleczek w dwóch warstwach (*Rysunek 7.32: Rozmieszczenie kulek w dwóch warstwach: a) uporządkowane, b) chaotyczne* na stronie 343). Załóżmy, że będziemy potrząsać naczyniem i za każdym razem zarejestrujemy rozmieszczenie kulek. Bardzo łatwo przekonamy się o tym, że kulki najczęściej będą rozmieszczać się chaotycznie w obu warstwach (*Rysunek 7.32: Rozmieszczenie kulek w dwóch warstwach: a) uporządkowane, b) chaotyczne* na stronie 343b), a rozmieszczenie uporządkowane (takie jak na *Rysunek 7.32: Rozmieszczenie kulek w dwóch warstwach: a) uporządkowane, b) chaotyczne* na stronie 343a) wystąpi niesłychanie rzadko. Można eksperyment ten zasymulować w komputerze i kazać mu zliczać liczbę poszczególnych przypadków. Można też przeprowadzić obliczenia za pomocą znanej metody matematycznej kombinatoryki. Okazuje się, że liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń jest bardzo duża i wynosi 184756. Tabela *Rysunek 7.33: Liczba możliwych rozmieszczeń kulek w dwóch warstwach* na stronie 343 ujmuje wszystkie przypadki rozmieszczeń kul w obu warstwach, z podziałem na poszczególne stany, gdzie stanem nazwaliśmy rozkład kulek charakteryzujący się określoną liczbą kulek niebieskich znajdujących się w górnej warstwie. Na przykład stan 10, charakteryzujący się tym, że w górnej warstwie znajduje się jedna kulka niebieska, może być utworzony na 100 sposobów (bo każdemu z dziesięciu położenia kulki niebieskiej w górnej warstwie odpowiada 10 możliwości rozmieszczenia kulki czerwonej w dolnej warstwie, stąd liczba możliwych ułożeń kulek w tym stanie: $10 \cdot 10 = 100$).

Z tabeli można odczytać, że układ dziesięciu niebieskich i dziesięciu czerwonych kulek może się znajdować w 11 stanach. Każdemu z tych stanów odpowiada inna liczba możliwych kombinacji kulek, czyli inne prawdopodobieństwo termodynamiczne stanu.



Rysunek 7.32: Rozmieszczenie kulek w dwóch warstwach: a) uporządkowane, b) chaotyczne

Nr stanu	Rozkład kulek w górnej warstwie		Liczba możliwych rozmieszczeń		Uwagi
	niebieskie	czerwone	ilościowo	procentowo	
1	10	0	1	0,00054	stan uporządkowany
2	9	1	100	0,05446	
3	8	2	2 025	1,096	
4	7	3	14 400	7,794	
5	6	4	44 100	23,87	
6	5	5	63 504	34,37	
7	4	6	44 100	23,87	
8	3	7	14 400	7,794	
9	2	8	2 025	1,096	
10	1	9	100	0,05446	
11	0	10	1	0,00054	stan uporządkowany
Razem			184 756	100,00	

Rysunek 7.33: Liczba możliwych rozmieszczeń kulek w dwóch warstwach

Z tabeli *Rysunek 7.33: Liczba możliwych rozmieszczeń kulek w dwóch warstwach* na stronie 343 wynika, że największe prawdopodobieństwo termodynamiczne występuje wtedy, gdy w górnej warstwie znajduje się połowa liczby kulek jednego koloru (stan nr 6) oraz w stanach bliskich temu stanowi (stany 5 i 7). Odpowiada to równomiernemu rozmieszczeniu kulek lub bliskiemu równomiernemu ich rozmieszczeniu. Najmniejsze prawdopodobieństwo termodynamiczne odpowiada całkowicie uporządkowanym stanom 1 i 11. Przełóżmy teraz powyższe wyniki na kategorię czasu. Prześledźmy nasze doświadczenie w czasie rzeczywistym. Załóżmy, że potrząsaliśmy naczyniem z częstością dwa razy na sekundę przez całą dobę. Wtedy okaże się, że układ będzie przebywać w stanie nr 6 aż około 8 godzin, w stanie nr 5 i 7 – po około 6 godzin, a w stanie całkowicie uporządkowanym 1 (i w stanie 11) – tylko około 0,5 sekundy! (Czyli zdarzy się to tylko raz w ciągu całej doby!). Oto przyczyna, z powodu której w skali makro występują procesy nieodwracalne, mimo że w skali mikro są całkowicie odwracalne. Zatem nieodwracalność procesu przemieszczania kulek w kierunku od stanu uporządkowanego do nieuporządkowanego wynika z prawdopodobieństwa termodynamicznego tych stanów. Ponieważ entropia rośnie

wraz ze wzrostem prawdopodobieństwa termodynamicznego stanu, zatem przejście od stanu uporządkowanego do nieuporządkowanego jest związane ze wzrostem entropii.

Doświadczenie to jest bardzo pouczające, gdyż wnioski z niego można uogólnić na dowolny układ składający się z dużej liczby jednakowych elementów, w którym zachodzą zdarzenia przypadkowe. Takim układem jest rozpatrywany przez nas przykład swobodnego rozprzestrzeniania się gazu. Możemy w myśli podzielić całą przestrzeń naczynia na obszary o małej objętości i obliczać liczbę sposobów, na które można rozmieścić cząsteczki gazu w tych obszarach. Oczywiście, liczba rozkładów cząsteczek gazu zgromadzonego tylko w jednej części naczynia (układ uporządkowany) jest dużo mniejsza od liczby rozkładów w całym naczyniu (układ nieuporządkowany).

Wszystkie procesy we Wszechświecie zachodzą zawsze w kierunku wzrostu entropii. Entropia jest miarą nieuporządkowania – miarą chaosu. Wszechświat zawsze zmierza od „porządku” do „chaosu”. Skoro tak, to skąd się wziął porządek we Wszechświecie? Dlaczego sytuacje, z którymi się spotykamy na co dzień, są w określonym stopniu uporządkowane i dlaczego w ogóle mogą zachodzić jakiegokolwiek procesy? Skąd się wziął porządek?

Oto jedno z możliwych wyjaśnień. Przyglądając się naszemu eksperymentowi z potrząsaniem naczynia z kuleczkami, dochodzimy do wniosku, że jeżeli będziemy przeprowadzać ten eksperyment dostatecznie długo, to – chociaż jest to bardzo mało prawdopodobne – pojawi się przypadek całkowitego uporządkowania kulek. Potem, wraz z upływem czasu, kulki znów się wymieszają. Takie przypadkowe odstępstwo od stanu równowagi nazywamy *fluktuacją*. Zatem jednym z możliwych wyjaśnień dużego uporządkowania obecnego świata jest przypadek. Możliwe, że nasz Wszechświat doznał kiedyś w przeszłości fluktuacji, podczas której nastąpiło przypadkowe uporządkowanie wszystkiego, a obecnie wszystko zmierza ponownie do nieporządku.

Innym wyjaśnieniem dużego stopnia uporządkowania obecnego Wszechświata jest teoria Wielkiego Wybuchu, w której przyjmuje się, że na początku czasu wszystko było zgromadzone w bardzo małej przestrzeni. Stąd się wziął porządek i to jest przyczyną wszystkich procesów zachodzących w obecnym Wszechświecie!

Rozdział

8

Stany skupienia materii

Podrozdziały:

- [8.1 Siły międzycząsteczkowe w cieczech](#)
- [8.2 Pary i parowanie](#)
- [8.3 Przemiany fazowe](#)

Rysunek 8.1: Wirtualny nauczyciel

W poprzednich rozdziałach podręcznika zajmowaliśmy się własnościami ciał, nie uwzględniając w zasadzie oddziaływań między cząsteczkami. Takie podejście pozwoliło nam zrozumieć zachowanie się ciał makroskopowych oraz pojąć bardzo dużo zjawisk, które nie zależą od wewnętrznej struktury uporządkowania atomów i cząsteczek. Obecnie zajrzemy głębiej w materię i zajmiemy się własnościami zależnymi od rozmieszczenia atomów w gazach cieczech i ciałach stałych. Przyjrzymy się bliżej, co się dzieje z cząsteczkami substancji, gdy zmienia się stan skupienia materii – gdy ciecz paruje lub gdy para się skrapla. Odpowiemy na pytanie, co jest przyczyną powstawania mgły, dlaczego ciecz zaczyna gwałtownie parować w temperaturze wrzenia.

8.1 Siły międzycząsteczkowe w cieczech

Obecnie rozważymy oddziaływania wzajemne cząsteczek w gazach, cieczech i ciałach stałych. Zachowanie się gazów rzeczywistych różni się wyraźnie od zachowania się gazu doskonałego w przypadkach różnych od warunków normalnych, szczególnie przy dużych ciśnieniach. Należy uwzględnić zatem, że cząsteczki mają skończone rozmiary i nie są punktami materialnymi, oraz, że istnieją oddziaływania wzajemne cząsteczek będących w odległościach większych od odległości wynikającej z ich wzajemnego kontaktu bezpośredniego podczas zderzenia.

Rozważmy siły oddziaływania międzycząsteczkowego. Już bardzo prosta obserwacja ciał prowadzi do wniosku, że cząsteczki oddziałują na siebie siłami przyciągania i siłami odpychania. Jeżeli staramy się rozciągnąć jakieś ciało stałe, to natychmiast wystąpi siła reakcji, której pochodzenie tłumaczymy sumowaniem się sił przyciągania cząsteczek tego ciała. Podobna, lecz przeciwna reakcja występuje przy ściskaniu, gdy staramy się zmniejszyć odległości międzycząsteczkowe. Wnioskujemy stąd o istnieniu sił odpychania między cząsteczkami. Siły te rosną bardzo szybko w miarę zmniejszania się wzajemnych odległości między cząsteczkami. Na [Rysunek 8.2: Zależność a\) sił oddziaływania molekularnego, b\) energii potencjalnej od odległości międzycząsteczkowej](#) na stronie 347a przedstawione są krzywe zależności tych sił od odległości r między cząsteczkami. Wypadkowa krzywa ma wyraźne minimum i przecina oś r w odległości r_0 , przy której cząsteczki znajdują się w równowadze.

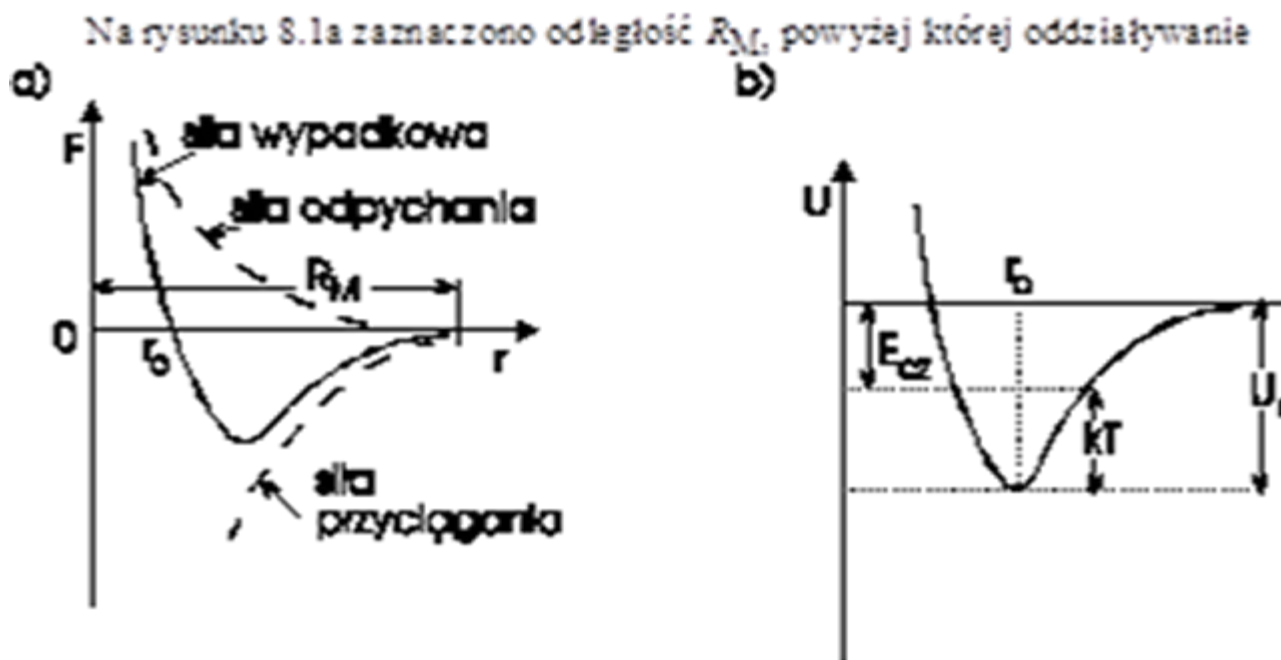
Na [Rysunek 8.2: Zależność a\) sił oddziaływania molekularnego, b\) energii potencjalnej od odległości międzycząsteczkowej](#) na stronie 347b przedstawiona jest krzywa zależności energii potencjalnej oddziałujących na siebie cząsteczek. Jest to bardzo pożyteczna krzywa, gdyż pozwala na wyciągnięcie szeregu ważnych wniosków. Zauważmy, że "głębokość" minimum krzywej U_{\min} informuje nas o tym, jak silnie cząsteczki są związane ze sobą, jeżeli przebywają we wzajemnej odległości równowagi r_0 ; U_{\min} oznacza wtedy energię, jaką należałoby zużyć, aby oddalić cząsteczki poza zasięg ich oddziaływania (tzn. na odległość r , gdzie siły ich wzajemnego oddziaływania i wynikająca stąd energia potencjalna jest równa zero).

Cząsteczki w ciele stałym wykonują drgania o energii całkowitej wynikającej z zasady ekwipartycji energii (patrz dodatek do rozdz. 7. [7.D1 Dodatek: Energia wewnętrzna gazu – zasada ekwipartycji energii \(temat nadobowiązkowy\)](#) na stronie 330), która w tym przypadku przydziela drgającej cząsteczce energię równą kT ($kT/2$ dla energii kinetycznej drgań plus $kT/2$ dla energii potencjalnej drgań). Zatem energia całkowita drgającej cząsteczki wyniesie $E_{cz} = kT - U_{\min}$. Widzimy, że w przypadku, gdy $U_{\min} > kT$, energia całkowita cząsteczki będzie ujemna, $E_{cz} < 0$ i drgania cząsteczki nie spowodują "wyskoczenia jej ze studni potencjału" ([Rysunek 8.2: Zależność a\) sił oddziaływania molekularnego, b\) energii potencjalnej od odległości międzycząsteczkowej](#) na stronie 347b), czyli cząsteczki nie oddalą się od siebie poza zasięg ich wzajemnego oddziaływania. Wtedy utworzą ciało stałe, w którym cząsteczki są utrzymane siłami wzajemnego oddziaływania w bliskiej odległości.

Natomiast gdy U_{\min} jest małe w porównaniu z energią kT , to termiczny ruch cząsteczek spowoduje zerwanie ich wzajemnych więzów i cząsteczki utworzą stan gazowy, bowiem całkowita energia cząsteczki będzie dodatnia $E_{cz} > 0$, co oznacza, że cząsteczka "wyskoczy ze studni potencjału". Wtedy cząsteczki oddalą się poza zasięg wzajemnego oddziaływania. W przypadkach pośrednich, gdy $U_{\min} \approx kT$ będziemy mieli do czynienia z fazą ciekłą. Zatem, znając wykres energii potencjalnej wynikającej z sił wzajemnego oddziaływania cząsteczek możemy przewidzieć, czy w określonej temperaturze substancja złożona z dużej ilości cząsteczek znajdzie się w stanie stałym, ciekłym czy gazowym, według następującego kryterium:

$$(\text{wzór 802}) U_{\min} \begin{cases} < kT & - \text{ gaz} \\ \approx kT & - \text{ ciecz} \\ > kT & - \text{ ciało stałe} \end{cases}$$

Na [Rysunek 8.2: Zależność a\) sił oddziaływania molekularnego, b\) energii potencjalnej od odległości międzycząsteczkowej](#) na stronie 347a zaznaczono odległość R_M , powyżej której oddziaływanie jest tak słabe, że możemy z dobrym przybliżeniem założyć całkowity brak oddziaływania. Wprowadzenie odległości R_M , która nosi nazwę *promienia działania molekularnego*, pozwala na znaczne uproszczenie rozumowania, chociaż zdajemy sobie sprawę, że R_M nie ma dokładnie określonej wartości. Rozpatrzenie krzywych oddziaływania międzycząsteczkowego prowadzi do wniosku, że w odległości większej od ok. 10^{-9} m cząsteczki praktycznie nie oddziałują na siebie, czyli $R_M < 10^{-9}$ m (jeżeli porównamy tę odległość z rozmiarami typowej cząsteczki, to dojdziemy do wniosku, że promień działania molekularnego jest od ok. 5 do 10 razy większy od wymiaru cząsteczki).

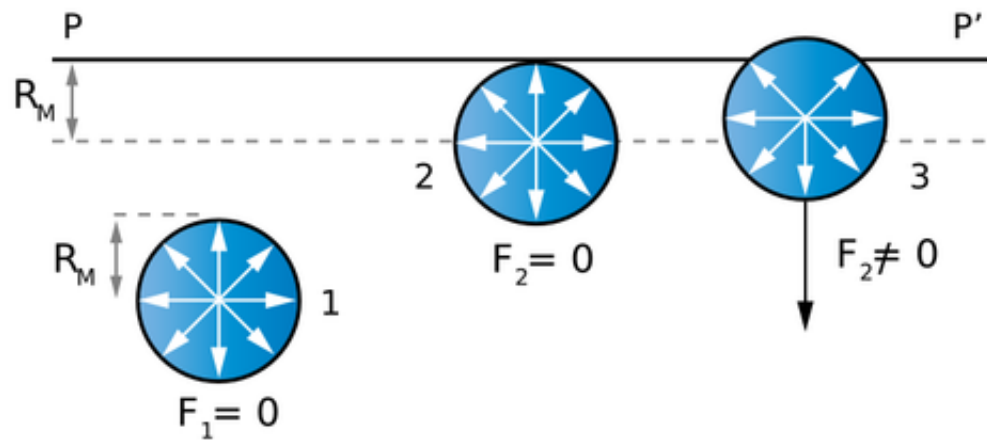


Rysunek 8.2: Zależność a) sił oddziaływania molekularnego, b) energii potencjalnej od odległości międzycząsteczkowej

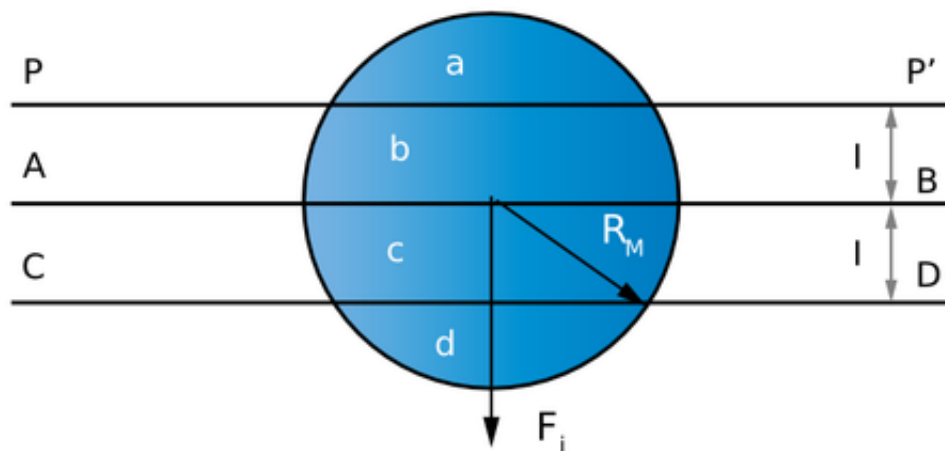
Napięcie powierzchniowe

Zapytajmy teraz, jak wprowadzenie sił oddziaływania międzycząsteczkowego wpłynie na stan gazu, czy cieczy?

Na *Rysunek 8.3: Sytuacja różnych cząsteczek wewnątrz płynu i w pobliżu ścianki naczynia P-P'* na stronie 348 przedstawiono trzy różne sytuacje cząsteczek znajdujących się w gazie wewnątrz naczynia. Cząsteczka oznaczona "1" znajduje się w głębi naczynia. Cząsteczki znajdujące się wewnątrz obszaru kulistego o promieniu R_M otaczającego tę cząsteczkę będą ją przyciągały ze wszystkich stron, dając zerową siłę wypadkową. Podobna sytuacja wystąpi dla cząsteczek będących w sytuacji cząsteczki oznaczonej jako "2", których sfery działania molekularnego znajdują się tuż pod powierzchnią cieczy. Zatem dla cząsteczek będących w sytuacji cząsteczek "1" i "2" siły oddziaływania międzycząsteczkowego nie mają żadnego wpływu na ich zachowanie się.



Rysunek 8.3: Sytuacja różnych cząsteczek wewnątrz płynu i w pobliżu ścianki naczynia $P-P'$



Rysunek 8.4: Podział kuli oddziaływania molekularnego dla i -tej cząsteczki znajdującej się w pobliżu powierzchni $P-P'$

Inaczej sprawa przedstawia się dla cząsteczki "3", której sfera działania molekularnego wystaje poza powierzchnię swobodną cieczy $P-P'$. Dla tej cząsteczki wystąpi siła wypadkowa wynikająca z oddziaływania z cząsteczkami otoczenia, która będzie skierowana w głąb cieczy. Taka sytuacja będzie miała miejsce dla wszystkich cząsteczek, które znajdują się w warstwie przypowierzchniowej o grubości równej R_M . Na *Rysunek 8.4: Podział kuli oddziaływania molekularnego dla i-tej cząsteczki znajdującej się w pobliżu powierzchni P-P'* na stronie 348 przedstawiono taką cząsteczkę. Sferę działania molekularnego podzielono płaszczyznami równoległymi do powierzchni cieczy na cztery obszary: a , b , c i d w ten sposób, że obszary a i d są równe sobie; podobnie obszary b i c są równe sobie. Siły wypadkowe od cząsteczek z obszarów b i c wzajemnie się kompensują. Obszar a nie jest zajęty przez cząsteczki gazu i nie kompensuje działania pochodzącego z obszaru d . Zatem na cząsteczkę w środku sfery będzie działać siła wypadkowa F_i pochodząca od cząsteczek znajdujących się w obszarze d . Siła ta jest proporcjonalna do liczby cząsteczek N' znajdujących się w tym obszarze. Całkowita siła działająca na wszystkie cząsteczki znajdujące się w warstwie przypowierzchniowej wyraża się sumą

$$(\text{wzór 803}) F' = F_1 + F_2 + \dots = \sum_{i=1}^{N'} F_i$$

gdzie N' - liczba cząsteczek w warstwie przypowierzchniowej o grubości R_M .

Zatem $N' = n_c R_M S$, gdzie n_c - koncentracja cząsteczek, czyli liczba cząsteczek w jednostce objętości, S - powierzchnia ścianki naczynia.

Jeżeli przez \overline{F}_i oznaczymy wartość średnią sił działających na cząsteczki w warstwie przypowierzchniowej to dodatkowa siła działająca na płyn (gaz lub ciecz) i pochodząca od wszystkich N' cząsteczek wyniesie

$$(\text{wzór 804}) F = N' \overline{F}_i = n_c R_M S \overline{F}_i$$

lub

$$(\text{wzór 805}) F = K_\sigma S$$

gdzie stały czynnik $\sigma = n_c R_M S \overline{F}_i$.

Dzieląc siłę F przez pole powierzchni S otrzymujemy dodatkowe ciśnienie p_d działające na płyn na skutek sił wzajemnego przyciągania cząsteczek:

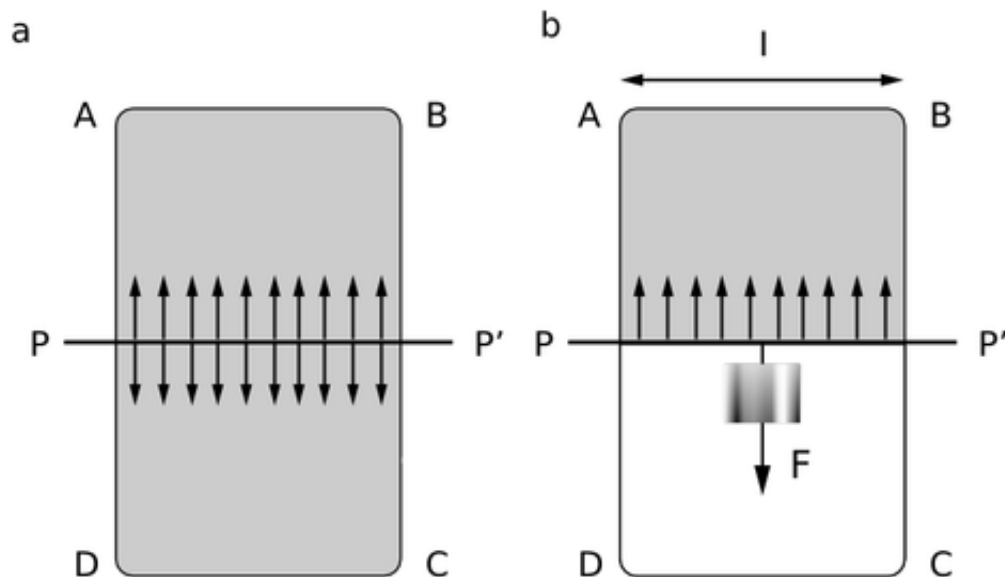
$$(\text{wzór 806}) p_d = K_\sigma$$

Jest ono ściśle związane z tzw. napięciem powierzchniowym działającym w cieczy, którego definicję podajemy niżej.

Cząsteczki w warstwie powierzchniowej cieczy mają wyższą energię niż cząsteczki wewnątrz cieczy. Ponieważ cząsteczki wewnątrz cieczy znajdują się blisko siebie, więc siły wzajemnego przyciągania cząsteczek działają we wszystkich kierunkach, dając siłę wypadkową równą zeru. Natomiast cząsteczki w warstwie powierzchniowej są w innej sytuacji. Na te cząsteczki pozostała część cieczy wywiera siłę przyciągania skierowaną w głąb cieczy (*Rysunek 8.3: Sytuacja różnych cząsteczek wewnątrz płynu i w pobliżu ścianki naczynia P-P'* na stronie 348). Dlatego warstwa powierzchniowa działa dużym ciśnieniem na pozostałą część cieczy. Ciśnienie to dochodzi do dziesiątków tysięcy atmosfer. Jest skierowane w głąb cieczy prostopadle do jej powierzchni, zatem nie działa na ścianki naczynia ani na ciała zanurzone w cieczy.

Widzimy więc, że cząsteczki w warstwie powierzchniowej będą miały oprócz energii kinetycznej ruchu cieplnego jeszcze energię potencjalną związaną z istnieniem sił oddziaływania międzycząsteczkowego. Natomiast cząsteczki w głębi cieczy mają tylko energię kinetyczną. Cząsteczki, które chcą przejść z głębi cieczy na powierzchnię, muszą wykonać pracę przeciwko siłom przyciągania pochodzącym od innych cząsteczek cieczy. Zatem cząsteczki w warstwie powierzchniowej będą miały tyle energii potencjalnej, w stosunku do cząsteczek w głębi cieczy, ile wymaga to pracy, aby się znalazły w tej warstwie.

Ponieważ zawsze w stanie równowagi układ ciał dąży do tego, aby miał możliwie najniższą energię, dlatego każda ciecz dąży do zminimalizowania swojej powierzchni. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, więc zmniejszenie powierzchni cieczy nie może się odbyć poprzez zmniejszenie jej objętości, ale przez takie dopasowanie kształtu, aby stosunek powierzchni do objętości był najmniejszy. Z geometrii wiadomo, że taki warunek spełnia ciało w kształcie kuli. Dlatego krople cieczy zawieszona w powietrzu i innych ośrodkach przybierają kształt kulisty.



Rysunek 8.5: a) Siły powierzchniowe pochodzące od błonki górnej równoważą siły powierzchniowe od błonki dolnej, b) po zerwaniu błonki dolnej siły powierzchniowe od błonki górnej są równoważone przez siłę zewnętrzną F

Ciecz dąży do zmniejszania wymiarów powierzchni swobodnej, ponieważ warstwa powierzchniowa działa podobnie do naciągniętej błonki sprężystej, w której działają siły napięcia. Dla zilustrowania tego stanu wykonajmy następujące doświadczenie. Ramkę drucianą $ABCD$ z poprzeczką PP' przedstawioną na [Rysunek 8.5: a\) Siły powierzchniowe pochodzące od błonki górnej równoważą siły powierzchniowe od błonki dolnej, b\) po zerwaniu błonki dolnej siły powierzchniowe od błonki górnej są równoważone przez siłę zewnętrzną \$F\$](#) na stronie 350 zanurzamy w wodzie z rozpuszczonym mydłem. Po wyjęciu z wody na ramce utworzy się błonka. W przypadku a) siły działające na poprzeczkę od strony obu części błonki - górnej i dolnej równoważą się wzajemnie i poprzeczka jest w spoczynku. Po rozerwaniu dolnej błonki w przypadku b) poprzeczka zaczyna przesuwać się w górę i należy przyłożyć siłę F , przez zawieszenie np. na niej ciężarka, dla zrównoważenia sił pochodzących od górnej błonki. Doświadczalnie stwierdzono, że siła równoważąca F jest proporcjonalna do długości krawędzi l

$$(\text{wzór 807}) F = 2\sigma l$$

Współczynnik proporcjonalności σ nosi nazwę *napięcia powierzchniowego*. Czynniki 2 we wzorze wynika stąd, że na poprzeczkę działają siły pochodzące od dwóch warstw powierzchniowych cieczy rozpiętej w postaci błonki mydlanej, z których każda działa siłą

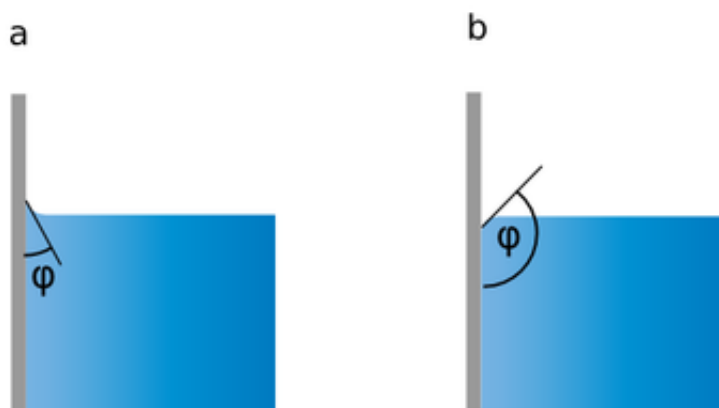
$$(\text{wzór 808}) F_{\sigma} = \sigma l$$

Więc napięcie powierzchniowe możemy zdefiniować jako *stosunek wartości siły, jaką warstwa powierzchniowa cieczy działa na ograniczającą ją krawędź, do długości tej krawędzi*.

Z wzoru ([wzór 807](#) na stronie 350) wynika, że jednostką napięcia powierzchniowego jest niuton dzielony przez metr, N/m. Wartość napięcia powierzchniowego zależy od rodzaju cieczy, otaczającego środowiska i jej temperatury. Np. dla wody w ośrodku powietrznym w temperaturze 20°C $\sigma = 72,7 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, zaś w temperaturze 100°C : $\sigma = 58,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$.

Menisk i zjawisko włoskowatości

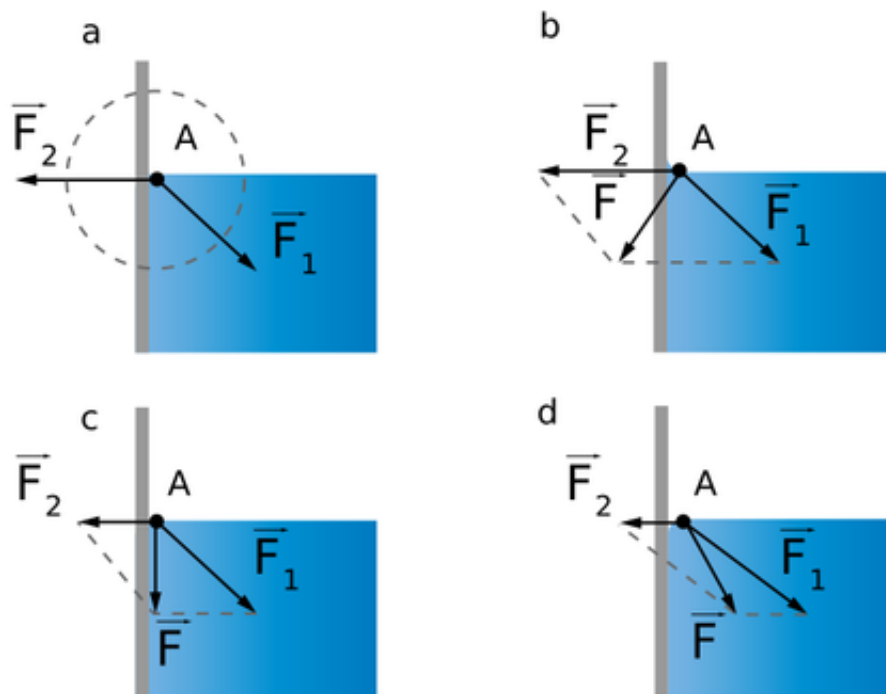
Łatwo można zauważyć przyglądając się poziomowi cieczy na granicy ze ścianką naczynia, że ciecz w tym miejscu jest albo nieco podniesiona do góry, albo obniżona w dół (*Rysunek 8.6: Menisk: a) wklęsły, b) wypukły; kąt graniczny #* na stronie 351); jest to tzw. *menisk*. W pierwszym przypadku jest to tzw. *menisk wklęsły*, a w drugim *menisk wypukły*. Menisk można scharakteryzować za pomocą kąta granicznego ϑ między ścianką naczynia i styczną do powierzchni menisku w miejscu jego zetknięcia ze ścianką (patrz *Rysunek 8.6: Menisk: a) wklęsły, b) wypukły; kąt graniczny #* na stronie 351). Kąt ten nosi również nazwę *kąta zwilżania*. Gdy kąt zwilżania jest mniejszy od 90° , to mówimy, że ciecz zwilża ściankę naczynia, natomiast gdy jest on większy od 90° , to mówimy, że ciecz nie zwilża ścianki.



Rysunek 8.6: Menisk: a) wklęsły, b) wypukły; kąt graniczny ϑ

Menisk występuje dlatego, że cząsteczki cieczy znajdujące się w pobliżu ścianki naczynia oddziałują nie tylko ze sobą, ale również z cząsteczkami ścianki. Rozważmy cząsteczkę A znajdującą się w pobliżu ścianki naczynia, jak na *Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia* na stronie 352a. Obszar jej oddziaływania z innymi cząsteczkami zawarty jest w objętości kuli o promieniu działania molekularnego. W obszarze tym znajdują się cząsteczki cieczy jak również cząsteczki ścianki naczynia.

Wypadkowa sił przyciągania cząsteczek cieczy \vec{F}_1 jest skierowana pod kątem w głąb cieczy, natomiast wypadkowa \vec{F}_2 pochodząca od cząsteczek ścianki jest skierowana prostopadle do ścianki. Kierunek wypadkowej siły $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ zależy od tego jaka duża jest siła \vec{F}_2 (o tym decydują cząsteczki, z jakich zbudowana jest ścianka) w porównaniu z siłą \vec{F}_1 . Otóż o kształcie menisku decyduje kierunek wypadkowej \vec{F} tych dwóch sił, dlatego że powierzchnia cieczy ustawia się zawsze prostopadle do wypadkowej siły działającej na cząsteczki na powierzchni cieczy.



a) zasięg działania molekularnego, b) duża siła F_2 - menisk wklęsły, zwilżanie, c) menisk płaski, d) mała siła F_2 - menisk wypukły, brak zwilżania

Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia

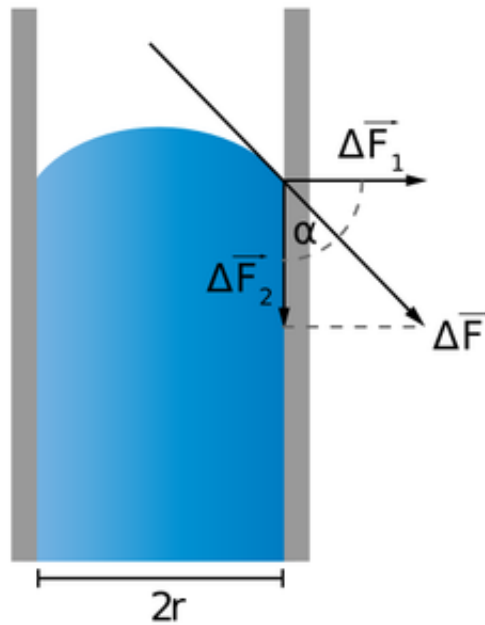
Na *Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia* na stronie 352 zaznaczono trzy przypadki:

1. wypadkowa siła \vec{F} jest skierowana w stronę ścianki - otrzymujemy menisk wklęsły (*Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia* na stronie 352b), to znaczy że ciecz zwilża ściankę,
2. wypadkowa siła \vec{F} jest skierowana równoległe do ścianki (siła \vec{F}_1 jest skierowana pod kątem do ścianki) - wynikiem jest menisk płaski (*Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia* na stronie 352c),
3. wypadkowa siła \vec{F} jest skierowana w głąb cieczy (*Rysunek 8.7: Sytuacja cząsteczki A w pobliżu ścianki naczynia* na stronie 352d) - menisk jest wypukły; wtedy ciecz nie zwilża ścianki.

Obliczymy teraz ciśnienie jakie wywiera warstwa powierzchniowa na ciecz w cienkiej rurce o przekroju kołowym o promieniu r (*Rysunek 8.8: Składowa ΔF 2 siły napięcia powierzchniowego powoduje ciśnienie dodatkowe działające na ciecz* na stronie 353). W przypadku, gdy promień r jest bardzo mały można przyjąć, że powierzchnia cieczy ma kształt wycinka kuli. Na każdy mały element obwodu kolistego Δl w miejscu styku powierzchni cieczy ze ścianką rurki działa siła ΔF styczna do powierzchni cieczy. Siłę tę rozłożymy na dwie składowe ΔF_1 i $\Delta F_2 = \Delta F \cos \alpha = -\sigma \Delta l \cos \vartheta$ (patrz *Rysunek 8.8: Składowa ΔF 2 siły napięcia powierzchniowego powoduje ciśnienie dodatkowe działające na ciecz* na stronie 353). Zatem, na cały obwód styku $2\pi r$ działa siła skierowana w głąb cieczy równa $F_2 = -\sigma 2\pi r \cos \vartheta$. Siła ta wywiera na ciecz dodatkowe ciśnienie, niezależnie od ciśnienia atmosferycznego. Aby otrzymać wartość tego dodatkowego ciśnienia, należy podzielić wartość siły F_2 przez pole powierzchni $S = \pi r^2$:

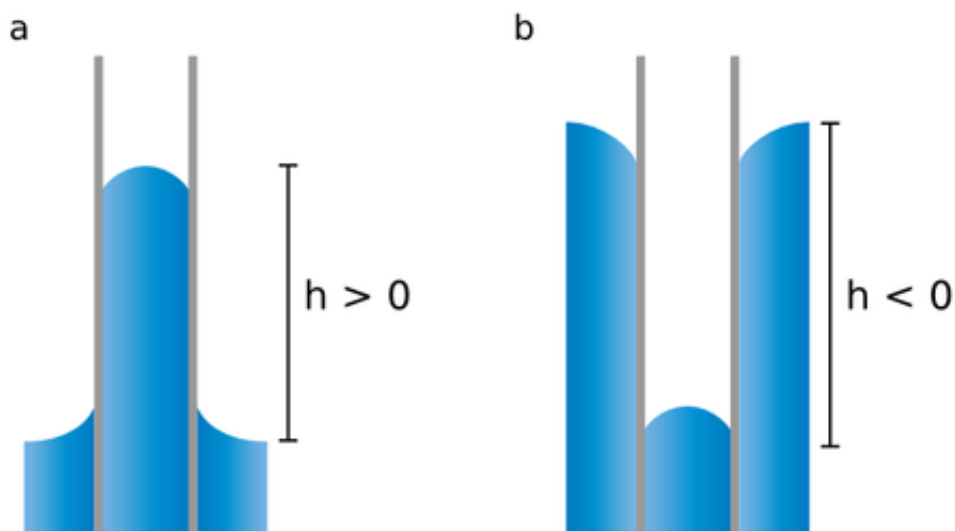
$$(\text{wzór 809}) p = -\frac{2\sigma \cos \vartheta}{r}$$

Znak minus w tym wzorze wyraża zależność, że gdy kąt ϑ jest ostry, czyli gdy menisk jest wklęsły, to ciśnienie jest ujemne, i na odwrót, gdy kąt ϑ jest rozwarty - menisk wypukły - to ciśnienie jest dodatnie (bo cosinus jest ujemny dla kąta zawartego w przedziale $90^\circ - 180^\circ$).



Rysunek 8.8: Składowa ΔF_2 siły napięcia powierzchniowego powoduje ciśnienie dodatkowe działające na ciec

Obliczone przez nas ciśnienie dodatkowe przesuną poziom równowagi cieczy w bardzo wąskich rurkach, których średnica wynosi około 1 mm lub mniej. Rurki takie noszą nazwę *naczyń włoskowatych* lub *kapilarnych* (od słowa łacińskiego *capillus* - włos). Jeżeli rurkę włoskową zanurzymy w cieczy, która ją zwilża, to na skutek ujemnego ciśnienia dodatkowego (wzór [wzór 809](#) na stronie 352)) poziom cieczy wewnątrz rurki podniesie się ponad poziom cieczy w dużym naczyniu ([Rysunek 8.9: Poziom cieczy w naczyniach włoskowatych: a\) ciecz zwilżająca b\) brak zwilżania](#) na stronie 354a), i odwrotnie ciecz w naczyniu nie zwilżanym obniży się ([Rysunek 8.9: Poziom cieczy w naczyniach włoskowatych: a\) ciecz zwilżająca b\) brak zwilżania](#) na stronie 354b).



Rysunek 8.9: Poziom cieczy w naczyniach włoskowatych: a) ciecz zwilżająca b) brak zwilżania

Możemy teraz łatwo obliczyć na jaką wysokość h podniesie się (lub opuści) ciecz w kapilarze. Warunek równowagi cieczy mówi, że suma ciśnienia hydrostatycznego ρgh i ciśnienia dodatkowego $p = -(2\sigma \cos \vartheta)/r$ jest równa zero: $\rho gh - (2\sigma \cos \vartheta)/r = 0$. Stąd

$$(\text{wzór 810}) \quad h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho gr}$$

Zjawisko włoskowatości jest często spotykane w życiu codziennym. Higroskopijność ciał, czyli zdolność do pochłaniania wilgoci tłumaczymy zjawiskiem włoskowatości, którym charakteryzują się np. wata, tkaniny stosowane na ręczniki, papier, bibuła itp. Gleba również ma własności higroskopijne dlatego że rurki włoskowate występujące w glebie podnoszą wodę aż do jej powierzchni, a to zwiększa parowanie wody. W celu zatrzymania wilgoci, glebę orze się i bronuje, aby zniszczyć naczynia włoskowate.

Pytania i problemy

1. Co rozumiesz przez sferę działania molekularnego?
2. Jak przedstawia się obraz działania sił międzycząsteczkowych w przypadku cząsteczki znajdującej się w warstwie powierzchniowej oraz cząsteczki w głębi cieczy.
3. Wyjaśnij, w jaki sposób powstaje napięcie powierzchniowe.
4. Co to jest menisk: wklęsły, wypukły.
5. Dlatego powierzchnia cieczy w pobliżu ścianki naczynia zagina się. Jaka jest sytuacja cząsteczki cieczy znajdującej się w pobliżu ścianki naczynia. Jak oddziałują ze sobą, cząsteczki cieczy z cząsteczkami ścianki.
6. Jaki sposób stosują rolnicy, aby zachować wilgoć w glebie w czasie suszy?

8.2 Pary i parowanie

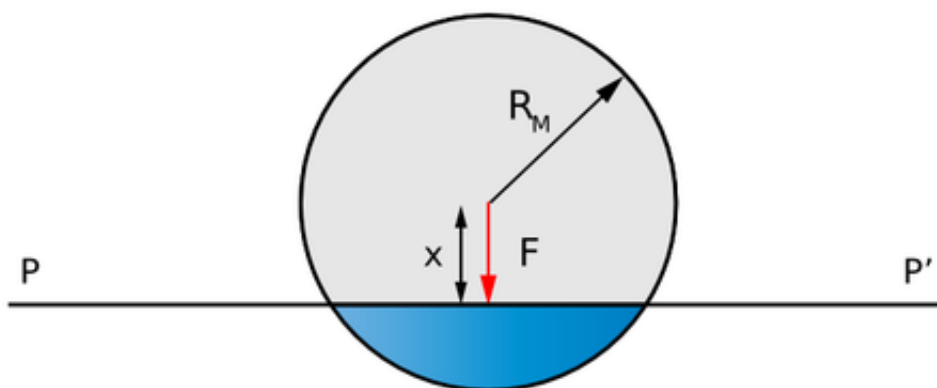
Obserwacje z życia codziennego wykazują, że ciecze mają zdolność do parowania. Na przykład, rozlany eter w temperaturze pokojowej paruje bardzo szybko; woda również paruje, ale dużo wolniej. Parowanie zachodzi w

każdej temperaturze, ale wraz ze wzrostem temperatury rośnie szybkość parowania. Zjawisko to wykorzystujemy w praktyce, np. wtedy, gdy rozwieszamy po wypraniu wilgotne rzeczy w pobliżu kaloryferów.

Również ciała stałe parują w temperaturze pokojowej. Istnieją ciała stałe, które parują bardzo intensywnie, jak np. kamfora czy naftalina. Inne, np. lód, parują wolniej. Szybciej parują te substancje, których cząsteczki przyciągają się słabszymi siłami. Dlatego kryształy organiczne, na ogół, wykazują większą zdolność do parowania niż kryształy, np. metali, których atomy są silnie związane w sieci krystalicznej. Zjawisko parowania ciała stałego, z pominięciem fazy ciekłej, nazywamy *sublimacją*.

Mechanizm parowania można wyjaśnić w oparciu o [Rysunek 8.10: Sfera działania molekularnego dla cząsteczki uciekającej \(parującej\) z cieczy](#) na stronie 355. Siły wzajemnego przyciągania cząsteczek przeciwdziałają przejściu cząsteczek w parę. Aby cząsteczka mogła opuścić powierzchnię cieczy (czyli ciała stałego), czyli „wyparować”, musi mieć dostatecznie dużą energię kinetyczną dla wykonania pracy przeciwko siłom przyciągania tej cząsteczki przez inne cząsteczki. Praca ta odbywa się na drodze xR_M nie większej od promienia działania molekularnego. Jeżeli cząsteczka ma dostateczną energię kinetyczną do tego, aby znaleźć się poza zasięgiem działania sił molekularnych, to „wyparuje”, czyli opuści powierzchnię cieczy (ciała stałego). Ponieważ wzrost temperatury jest równoważny wzrostowi średniej energii kinetycznej cząsteczek, więc w wyższej temperaturze będzie więcej cząsteczek, które będą miały wystarczającą energię kinetyczną dla wyparowania. Widzimy, że przedstawiony mechanizm parowania wyjaśnia, dlaczego szybkość parowania rośnie wraz z podwyższeniem temperatury.

Natomiast jeżeli mamy do czynienia z dwiema substancjami w tej samej temperaturze, to trzeba będzie większej energii kinetycznej dla wykonania pracy przeciwko większym siłom przyciągania w jednej substancji niż w przypadku drugiej substancji, gdzie siły te są mniejsze. To również wyjaśnia, dlaczego ciała organiczne, których cząsteczki są związane słabymi siłami, parują szybciej niż ciała nieorganiczne. Na przykład eter – paruje bardzo łatwo.



Rysunek 8.10: Sfera działania molekularnego dla cząsteczki uciekającej (parującej) z cieczy

Oczywiście, podczas parowania z cieczy uciekają cząsteczki najszybsze. W ten sposób ciecz zubaża się o cząsteczki o dużej energii kinetycznej i średnia energia kinetyczna pozostałych cząsteczek staje się niższa, czyli obniża się temperatura. Oto dlaczego przy parowaniu ciecz się ochładza. Dlatego na przykład odczuwamy chłód podczas pocenia się.

Gdy dostatecznie dużo cieczy zamkniemy w szczelnym naczyniu, pewna jej ilość przejdzie do fazy gazowej, a pozostała część pozostanie w fazie ciekłej – ustali się pewna równowaga. Czy to oznacza, że proces parowania zostanie zahamowany? Otóż nie. W stanie równowagi dynamicznej cząsteczki w dalszym ciągu będą opuszczać ciecz, ale część cząsteczek będzie do niej wracać, czyli para będzie ulegała *kondensacji*. W stanie równowagi szybkość parowania będzie równa szybkości kondensacji. Faza gazowa zawierająca cząsteczki cieczy, będąca w stanie równowagi dynamicznej z cieczą, nazywa się *parą nasyconą*.

Gęstość pary nasyconej bardzo szybko rośnie wraz ze wzrostem temperatury. Oczywiście, przy obniżaniu temperatury gęstość pary nasyconej musi maleć. Dla każdej temperatury przy ustalonym ciśnieniu istnieje pewna charakterystyczna gęstość pary nasyconej. Oznacza to, że w określonych warunkach w równowadze z cieczą w fazie gazowej nie może zmieścić się już więcej cząsteczek pochodzących z cieczy. Tym więcej cząsteczek cieczy mieści się w jednostce objętości fazy gazowej, im wyższa jest temperatura. Jeżeli w danej temperaturze gęstość cząsteczek cieczy jest mniejsza niż gęstość pary nasyconej, to mówimy, że mamy do czynienia z *parą nienasyconą*.

Powstawanie rosy tłumaczymy zjawiskami związanymi z przejściem powietrza ze stanu pary nienasyconej do stanu pary nasyconej oraz dostosowaniem gęstości cząsteczek wody do charakterystycznej dla danej temperatury gęstości pary nasyconej. Gdy temperatura powietrza ulegnie szybkiemu obniżeniu, np. w samochodzie w pobliżu zimnej szyby, z powietrza kondensują się kropelki wody i osiadają na szybie w postaci rosy.

Z zawartością pary wodnej związane jest pojęcie *wilgotności powietrza*, przy czym rozróżniamy wilgotność bezwzględną oraz wilgotność względną. Przez *wilgotność bezwzględną* powietrza rozumiemy masę pary wodnej zawartej w 1 m³ powietrza w określonych warunkach, czyli gęstość pary wodnej. Pojęcie wilgotności bezwzględnej stosuje się do powietrza zarówno w stanie pary nasyconej, jak i nienasyconej. Na przykład, w temperaturze 10°C stan pary nasyconej powietrza odpowiada wilgotności bezwzględnej równej 10 g/m³. To oznacza, że para w powietrzu w temperaturze wyższej, np. 20°C, mającym wilgotność bezwzględną 10 g/m³, jest w stanie pary nienasyconej.

Wilgotność bezwzględną można wyznaczyć, znając gęstość pary nasyconej w różnych temperaturach. Pomiar polega na przepuszczaniu powietrza przez obszar, w którym obniżamy systematycznie temperaturę aż do uzyskania tzw. *punktu rosy*, tzn. temperatury powietrza, przy której para wodna zawarta w powietrzu zacznie kondensować się w postaci kropelek rosy. Poniżej temperatury punktu rosy występuje już tylko para nasycona. Wtedy z tablic odczytujemy odpowiednią wartość wilgotności bezwzględnej dla danego punktu rosy. Na przykład, jeżeli w omawianym wyżej przykładzie temperatura punktu rosy wyniosła 10°C, to oznacza, że otaczające nas powietrze, które miało 20°C, miało wilgotność bezwzględną równą 10 g/m³.



Rysunek 8.11: Higrometr

Przyrząd do pomiaru wilgotności powietrza nazywa się *higrometrem*. Jeżeli interesuje nas, w jakim stopniu para znajdująca się w powietrzu jest zbliżona do stanu nasycenia, to stosujemy pojęcie tzw. wilgotności względnej. *Wilgotnością względną* powietrza nazywamy stosunek wilgotności bezwzględnej do gęstości pary nasyconej w danej temperaturze.

W omawianym tu przykładzie mieliśmy w temperaturze 20°C wilgotność bezwzględną równą 10 g/m^3 . Z odpowiednich tablic można odczytać, że gęstość pary nasyconej przy 20°C wynosi $17,3 \text{ g/m}^3$. Zatem wilgotność względna powietrza wynosiła $10/17,3 = 57,8 \%$.

Pytania i problemy

1. Na czym polega zjawisko parowania z punktu widzenia mikroskopowego?
2. Jakie właściwości posiada para nasycona? Podaj wielkość fizyczną, za pomocą której charakteryzujemy parę nasyconą w danej temperaturze.
3. Opisz związek między wilgotnością powietrza i gęstością zawartej w nim pary wodnej.

8.3 Przemiany fazowe

Z potocznych obserwacji wiemy, że przy zwiększaniu temperatury ciała stałe przechodzą w ciecze, a następnie przy jeszcze wyższej temperaturze stają się gazami. Przy oziębianiu – odwrotnie – ciała gazowe przechodzą w stan ciekły, a następnie przy niższej temperaturze w stan stały. Przemiany te nazywamy *przemianami stanu skupienia*. Są to: topnienie, wrzenie, skraplanie i krzepnięcie. Możliwe jest również bezpośrednie przejście z fazy stałej do gazowej, czyli tzw. sublimacja. To, czy określona substancja będzie w stanie stałym, ciekłym czy gazowym, zależy od temperatury i od ciśnienia panującego nad jej powierzchnią.

Ciała stałe występują zwykle w postaci krystalicznej charakteryzujące się regularną budową. Cechą budowy krystalicznej jest uporządkowanie cząsteczek i atomów dalekiego i bliskiego zasięgu. *Uporządkowanie dalekiego zasięgu* obejmuje cały kryształ. Natomiast *uporządkowanie bliskiego zasięgu* jak sama nazwa wskazuje jest uporządkowaniem lokalnym, każda cząsteczka ma prawie podobne otoczenie. W cieczy i w ciałach stałych amorficznych (np. w szklivach) występuje tylko uporządkowanie bliskiego zasięgu (jednakże istnieją również ciała ciekłe – ciekłe kryształy wykazujące uporządkowanie dalekiego zasięgu). W gazach rozmieszczenie cząsteczek jest chaotyczne i żadne uporządkowanie nie występuje.

Zmiany stanu skupienia substancji, którym towarzyszą zmiany uporządkowania struktury (zmiany uporządkowania dalekiego i bliskiego zasięgu lub przejście do stanu (nieuporządkowanego), nazywamy *przejściami fazowymi pierwszego rodzaju*. Istnieją również *przejścia fazowe drugiego rodzaju* polegające na bardziej subtelnych zmianach występujących najczęściej wewnątrz jednego określonego stanu skupienia; ułożenie atomów ciała w zasadzie nie ulega zmianie. Na przykład, pewne zmiany magnetyczne żelaza pod wpływem wygrzewania w określonych temperaturach są przejściami drugiego rodzaju.

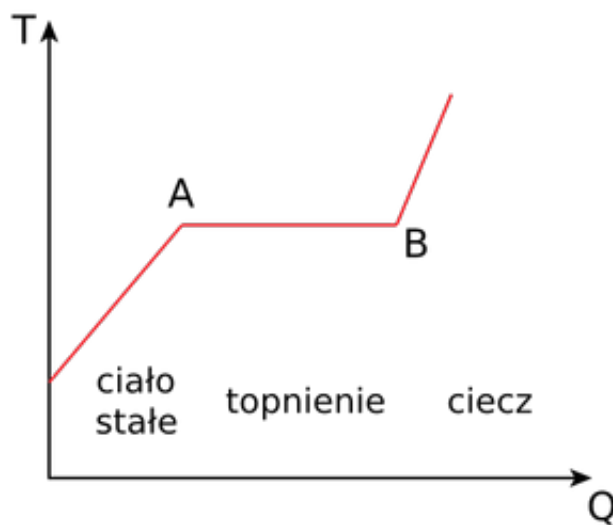
Topnienie i krzepnięcie

Prześledźmy, z punktu widzenia termodynamiki, co się dzieje podczas podgrzewania ciała stałego. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki, ciepło dostarczone do ciała zostaje zużyte na przyrost energii wewnętrznej ciała oraz na wykonanie pracy przeciwko siłom zewnętrznym ($W = pV$). Jednakże przyrost objętości ciała stałego jest nieznaczny, co oznacza, że praca jest nieduża, czyli prawie całe ciepło zostaje zużyte na przyrost energii wewnętrznej ciała stałego. Energia wewnętrzna to przede wszystkim suma energii kinetycznych ciepłych drgań cząsteczek oraz suma energii potencjalnych wzajemnego oddziaływania tych cząsteczek. Cząsteczki znajdujące się w węzłach sieci krystalicznej, wykonując coraz większe drgania wskutek nagrzewania, zwiększają średnie odległości międzywęzłowe w sieci krystalicznej (patrz rozszerzalność cieplna ciał stałych). Wzrost energii drgań cząsteczek prowadzi do osłabienia wiązań między nimi. Silne nagrzanie ciała stałego może spowodować zniszczenie uporządkowania dalekiego zasięgu występującego w sieci krystalicznej i przejście do stanu ciekłego lub nawet gazowego. Zniszczenie tylko uporządkowania dalekiego zasięgu z pozostawieniem uporządkowania bliskiego zasięgu prowadzi do przemiany ciała stałego w ciecz, czyli tzw. *topnienia*. Jeżeli oprócz zniszczenia uporządkowania dalekiego zasięgu zostają również zerwane wiązania między cząsteczkami i uporządkowanie bliskiego zasięgu, to występuje przemiana bezpośrednia fazy stałej w fazę gazową, czyli *sublimacja*.

Proces dostarczania ciepła do ciała możemy przedstawić na wykresie zależności $T(Q)$. Typowy przebieg tej zależności przedstawiono na *Rysunek 8.12: Zależność temperatury T od dostarczanego ciepła Q przy przemianie fazowej ciało stałe–ciecz* na stronie 359. Jeżeli ciepło jest dostarczane z jednakową szybkością, to taki sam przebieg będzie miała krzywa zależności temperatury ciała od czasu. Gdy temperatura osiągnie odpowiednią wartość, tj. punkt A na wykresie, wówczas ciało stałe zaczyna się topić i temperatura przestaje wzrastać. Tak jest w przypadku ciał krystalicznych. Dla ciał bezpostaciowych nie ma określonej temperatury topnienia, jest tylko pewien zakres temperatur mięknięcia.

Odcinek izotermiczny AB na wykresie odpowiada współlistnieniu dwóch faz: stałej i ciekłej. Odcinkowi temu odpowiada pewna ilość ciepła, którą trzeba dostarczyć, aby stopić całe ciało stałe. To ciepło przypadające na jednostkę masy nazywa się ciepłem topnienia. Oznaczamy je symbolem c_t . Jednostką ciepła topnienia jest dżul na kilogram (J/kg). Zatem ciepło Q potrzebne do stopienia masy m ciała stałego wynosi

$$(\text{wzór 811}) \quad Q = mc_t$$



Rysunek 8.12: Zależność temperatury T od dostarczanego ciepła Q przy przemianie fazowej ciała stałe-ciecz

Proces krzepnięcia

Proces krzepnięcia jest procesem odwrotnym do procesu topnienia. Jeżeli substancja ciekła przechodzi w stan stały — krystaliczny, to taki proces nazywamy *krystalizacją*. Podczas tego procesu wydziela się ciepło, które jest równe ciepłu pochłoniętemu podczas topnienia. Podczas stopniowego odbierania ciepła z cieczy, jej temperatura stopniowo maleje. Proces ten przebiega podobnie do wykresu na [Rysunek 8.12: Zależność temperatury \$T\$ od dostarczanego ciepła \$Q\$ przy przemianie fazowej ciała stałe-ciecz](#) na stronie 359, tyle tylko, że w odwrotnym kierunku w stosunku do procesu poprzednio opisanego.

Energia kinetyczna ruchu cieplnego cząsteczek stopniowo maleje i przy osiągnięciu temperatury krystalizacji, pod wpływem wzajemnego przyciągania cząsteczek, ruch ich przekształca się w ruch drgający wokół określonych niezmiennych średnich położenia — węzłów sieci krystalicznej. W ten sposób w stałej temperaturze zachodzi przemiana substancji ze stanu ciekłego w stan krystaliczny.

Przykład 1

Do naczynia zawierającego $m_1 = 1$ kg wody o temperaturze $t_1 = 10^\circ\text{C}$ włożono kawałek lodu o temperaturze $t_2 = -32^\circ\text{C}$, w wyniku czego woda zamarzała i wytworzył się lód o temperaturze $t_3 = -2^\circ\text{C}$. Jaką masę lodu włożono do naczynia? Ciepło właściwe wody $c_1 = 4185 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, ciepło właściwe lodu $c_2 = 2100 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, ciepło topnienia lodu $c_t = 3,3 \cdot 10^5 \text{ J}/\text{kg}$.

Odpowiedź: Należy utworzyć bilans cieplny: **ciepło oddane = ciepło pobrane**.

Ciepło oddane to:

- ciepło schłodzenia wody do temperatury 0°C ,
- ciepło krzepnięcia wody w temperaturze 0°C ,
- ciepło schłodzenia powstałego lodu od temperatury 0°C do t_3 .

Ciepło pobrane to:

- ciepło ogrzania kawałka lodu od temperatury t_2 do t_3 .

Zatem, **ciepło oddane**Ciepło schłodzenia wody do temperatury 0°C :

$$(\text{wzór 812}) Q_1 = m_1 c_1 (t_1 - 0) = m_1 c_1 T_1$$

Ciepło krzepnięcia wody w temperaturze 0°C :

$$(\text{wzór 813}) Q_2 = m_1 c_t$$

Ciepło schłodzenia powstałego lodu od temperatury 0°C do t_3 :

$$(\text{wzór 814}) Q_3 = m_1 c_2 (0 - t_3) = -m_1 c_2 T_3$$

Ciepło pobraneCiepło ogrzania kawałka lodu od temperatury t_2 do t_3 :

$$(\text{wzór 815}) Q_4 = m_x c_2 (t_3 - t_2)$$

Bilans cieplny: **ciepło oddane = ciepło pobrane**, zatem

$$(\text{wzór 816}) Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 \quad \Rightarrow \quad m_1 c_1 t_1 + m_1 c_t - m_1 c_2 t_3 = m_x c_2 (t_3 - t_2)$$

Stąd

$$(\text{wzór 817}) m_x = \frac{m_1 (c_1 t_1 + c_t - c_2 t_3)}{c_2 (t_3 - t_2)} = 5,97 \text{ kg}$$

Masa lodu, jaką włożono do naczynia wynosi $m_x = 5,97 \text{ kg}$.**Wrzenie i skraplanie**

Jeżeli będziemy podgrzewać ciecz, to przy osiągnięciu określonej temperatury, tj. *temperatury wrzenia*, ciecz zaczyna wrzeć, czyli gwałtownie parować w całej objętości. Występuje wtedy proces przemiany fazy ciekłej w gazową (taki proces zachodzi nie tylko przy wrzeniu, ale również i przy parowaniu z powierzchni cieczy). Podobnie jak przy przemianie ciało stałe–ciecz, temperatura wrzenia pozostaje stała podczas trwania całego procesu wrzenia. Jednakże w tym przypadku warunkiem koniecznym stałości temperatury wrzenia jest stałe ciśnienie zewnętrzne panujące nad powierzchnią cieczy.

Przy wrzeniu ważną rolę odgrywają pęcherzyki gazu znajdujące się w cieczy. Pęcherzyki są wypełnione parą nasyconą. Przy wzroście temperatury gęstość pary nasyconej rośnie, rośnie więc i ciśnienie wewnątrz pęcherzyków. Dzięki temu pęcherzyki zwiększają swoją objętość i zgodnie z prawem Archimedesesa zwiększa się siła ich wyporu. Pęcherzyki, wypływając na powierzchnię, pękają i słyszymy charakterystyczne „bulgotanie” cieczy.

Ciśnienie pary nasyconej wewnątrz pęcherzyka p_p jest równoważone przez sumę ciśnień: zewnętrznego p_0 (np. ciśnienia atmosferycznego), ciśnienia hydrostatycznego gh panującego na głębokości h cieczy, na której się znajduje pęcherzyk, oraz ciśnienia napięcia powierzchniowego $\frac{2\sigma}{r}$. Rozmiary pęcherzyka będą rosły, gdy będzie spełniony warunek

$$(\text{wzór 818}) p_p \geq p_0 + gh + \frac{2\sigma}{r}$$

Gdy promień pęcherzyka r jest mały, ostatni wyraz we wzorze ([wzór 818](#) na stronie 360) jest duży i aby warunek ten mógł być spełniony (aby pęcherzyk mógł rosnąć), ciśnienie pary nasyconej p_p wewnątrz pęcherzyka musi być

wysokie, co można uzyskać w dużej temperaturze. Dlatego należy ogrzać ciecz do odpowiedniej temperatury. Jeżeli pęcherzyki wzrosną do rozmiarów rzędu kilku milimetrów, to ostatni wyraz we wzorze (wzór 818 na stronie 360) staje się mały i wobec ciśnienia atmosferycznego p_0 wynoszącego około 1000 hPa można go zaniedbać, jak również można zaniedbać ciśnienie hydrostatyczne wody. Otrzymamy wtedy *warunek wrzenia wody* w postaci

$$(\text{wzór 819}) p_p \geq p_0$$

Ponieważ gęstość i ciśnienie pary nasyconej zależą od temperatury, więc z warunku (wzór 819 na stronie 361) wynika, że temperatura wrzenia zależy tylko od ciśnienia zewnętrznego. Jeżeli zmniejszymy ciśnienie zewnętrzne nad wodą, np. przez odpompowanie powietrza, to woda może zacząć wrzeć w temperaturze dużo niższej niż 100°C.

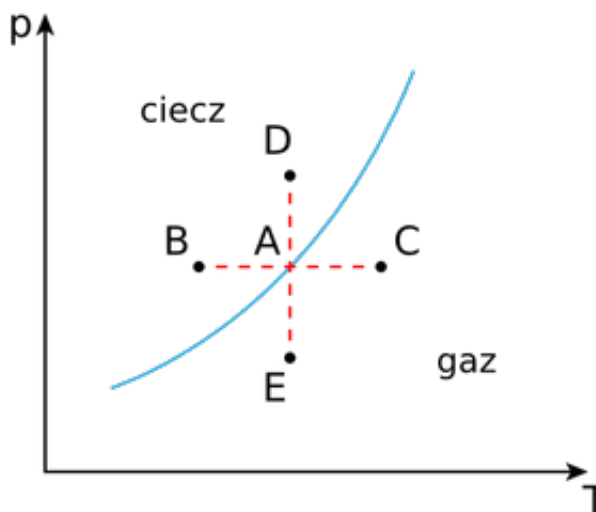
Jak już wspomniano wyżej i jak wynika z warunku wrzenia (wzór 819 na stronie 361), przy stałym ciśnieniu p_0 temperatura wrzenia pozostaje stała. Ciepło dostarczone do cieczy w temperaturze wrzenia zostaje zużyte na odrywanie cząsteczek od cieczy i ich przejście w stan pary. Ciepło c_p potrzebne do przeniesienia jednostki masy substancji ze stanu ciekłego do stanu pary, dostarczone do cieczy w temperaturze wrzenia, nazywa się *ciepłem parowania* w temperaturze wrzenia. Zatem ciepło potrzebne do zamiany masy m cieczy w parę wynosi

$$(\text{wzór 820}) Q = mc_p$$

Procesem odwrotnym do parowania jest *skraplanie* lub *kondensacja* pary. Ciepło skraplania jest równe ciepłu parowania w tej samej temperaturze i ciśnieniu.

Diagram przejścia fazowego

Przejścia fazowe dla poszczególnych substancji wygodnie jest przedstawiać na wykresie w układzie zależności p od T . Przejścia substancji ze stanu ciekłego i krystalicznego do stanu gazowego (i odwrotne) mają wiele cech wspólnych. Zarówno w jednym, jak i w drugim przypadku wzrost temperatury sprzyja przejściu do stanu gazowego. Zmniejszenie ciśnienia nad powierzchnią cieczy i kryształu również ułatwia to przejście.



Rysunek 8.13: Diagram fazowy ciecz-gaz

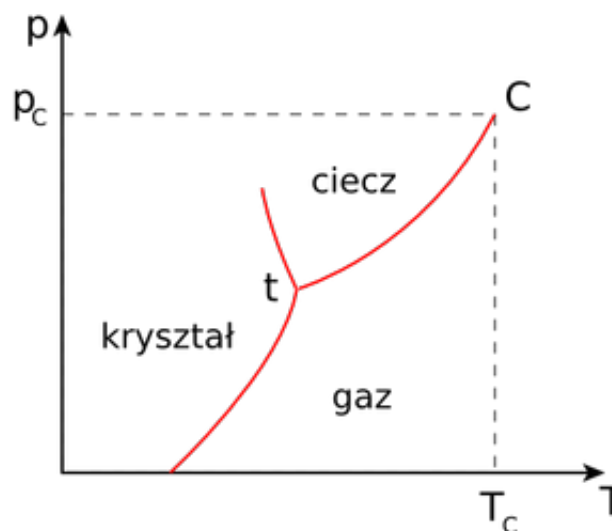
Natomiast wzrost ciśnienia w gazie powoduje zbliżanie się cząsteczek i dzięki siłom przyciągania cząsteczki te mogą utworzyć w wyższych temperaturach stan bliskiego uporządkowania występujący w cieczy, a w niższych temperaturach stan uporządkowania dalekiego zasięgu występujący w kryształach.

Na płaszczyźnie zależności ciśnienia od temperatury można wykreślić krzywe, które oddzielają obszary przedstawiające różne stany skupienia. Tego typu wykresy noszą nazwę *diagramów fazowych*. Na [Rysunek 8.13: Diagram fazowy ciecz–gaz](#) na stronie 361 przedstawiono taki diagram fazowy dla przejścia ciecz–gaz. Krzywa na tym wykresie dzieli płaszczyznę na dwa obszary występowania fazy ciekłej i występowania fazy gazowej. Na krzywej leżą punkty odpowiadające stanowi równowagi dynamicznej dwóch faz – pary nasyconej i cieczy. Na przykład punkt *A* odpowiada takiemu stanowi o określonej temperaturze i ciśnieniu; w zamkniętym naczyniu ciecz i para nasycona znajdują się w równowadze (tzn. nie ubywa i nie przybywa zarówno cieczy, jak i pary).

Przejście od *A* do *B* odpowiada obniżeniu temperatury, przy stałym ciśnieniu. Wtedy para ulegnie całkowitemu skropleniu – punkt *B* odpowiada stanowi ciekłemu. Podobnie punkt *C* (przy tym samym ciśnieniu, ale zwiększonej temperaturze) odpowiada stanowi gazowemu. Przejście od *C* do *A* to osiągnięcie punktu rosy (T_A) dla danego ciśnienia. Jeżeli izotermicznie zwiększymy ciśnienie – przejście od *A* do *D*, to para ulegnie skropleniu. Zmniejszenie izotermiczne ciśnienia (przejście od *A* do *E*) spowoduje wyparowanie cieczy.

Na [Rysunek 8.14: Diagram fazowy](#) na stronie 362 przedstawiono diagram trójfazowy. Krzywe na tym wykresie dzielą płaszczyznę na trzy obszary występowania fazy: stałej, ciekłej i gazowej. Krzywe te przecinają się w jednym wspólnym punkcie *t* zwanym *punktem potrójnym*. W tej jednej temperaturze i przy tym ciśnieniu wszystkie trzy fazy mogą współistnieć w stanie wzajemnej równowagi. Dzięki temu, że punkt potrójny dla wody może być wyznaczony z dużą dokładnością, służy on do skalowania bezwzględnej skali temperatury. Przyjęto, że punktowi potrójnemu, w którym występuje wzajemna równowaga faz: lodu, wody i pary, odpowiada temperatura 273,16 K.

Punkt *t* oznacza punkt potrójny, punkt *C* – punkt krytyczny



Rysunek 8.14: Diagram fazowy

Przy niskich ciśnieniach, w odpowiednich temperaturach, faza stała może przejść bezpośrednio w fazę gazową – mówimy wtedy o procesie sublimacji. Odpowiada to dolnym obszarom wykresu, gdzie krzywa, poczynając od dołu do punktu *t* oznacza stan równowagi dynamicznej między fazą gazową i stałą.

Punkt *C* na diagramie oznacza *punkt krytyczny*. Możemy zrozumieć, co się dzieje w punkcie krytycznym, gdy wyobrazimy sobie naczynie zamknięte tłokiem, w którym przy wysokiej temperaturze i ciśnieniu dwie fazy, gazowa i ciekła, znajdują się w równowadze (punkty na krzywej między punktami *t* i *C* na wykresie, *Rysunek 8.14: Diagram fazowy* na stronie 362). Przejście po tej krzywej w górę, w kierunku punktu *C*, oznacza wzrost ciśnienia wywołanego przesuwaniem tłoka przy równoczesnym wzroście temperatury i zmniejszaniu objętości pary nasyconej. Para nasycona staje się coraz gęstsza, aż jej gęstość stanie się równa gęstości cieczy. W tym stanie nie można odróżnić już cieczy od gazu (a nawet – od kryształu). Jest to stan krytyczny. Poza tym punktem nie może już jedna faza przekształcić się w drugą, bo tam istnieje tylko jedna faza – „płynna”. Przy tak dużym ciśnieniu nie możemy odróżnić już cieczy od gęstego gazu. Dla wody $t_{kr} = 374^{\circ}\text{C}$, $p_{kr} = 218 \text{ atm}$, $\rho = 329 \text{ kg/cm}^3$.

Przy superwysokich temperaturach i bardzo wysokich ciśnieniach możliwe jest istnienie tylko stanu całkowicie nieuporządkowanego substancji, przypominającego bardziej stan gazowy niż ciekły. Takie warunki panują w pewnych typach gwiazd zwanych *białymi karłami*, w których olbrzymie pole grawitacyjne powoduje, że substancja znajduje się w specyficznym stanie superciężkim. Stan taki nazywa się *plazmą*, w której jądra atomowe pozbawione są swoich otoczek elektronowych. Rozmiary jąder są około 10 tysięcy razy mniejsze od atomów. Jądra i elektrony tworzą kolosalnie gęsty gaz o całkowicie nieuporządkowanym ułożeniu cząstek. Gęstość takiej substancji jest rzędu $10^7 \div 10^8 \text{ kg/m}^3$. Jeden litr takiej substancji ma masę około 100 ton!

Pytania i problemy

1. Podaj przykłady przejść fazowych pierwszego i drugiego rodzaju.
2. Wyjaśnij z punktu widzenia termodynamiki, na czym polega proces topnienia.
3. Przedstaw na wykresie zależność temperatury od dostarczanego ciepła przy przemianie fazowej ciała stałe–ciecz.
4. Czym różni się topnienie od mięknięcia?
5. Wyjaśnij, dlaczego temperatura wrzenia cieczy jest uzależniona od ciśnienia zewnętrznego. Przedstaw związek między ciśnieniem wewnątrz pęcherzyka gazu we wrzącej cieczy i ciśnieniem atmosferycznym.
6. Na czym polega różnica między sublimacją a parowaniem cieczy? Jakie są podobieństwa obu procesów?
7. Jakie wykresy nazywamy diagramami fazowymi? Narysuj przykładowy diagram fazowy.
8. Narysuj diagram fazowy i zaznacz na nim punkt potrójny oraz punkt krytyczny. Co opisują współrzędne każdego z tych punktów?

