# MATEMATYKA I

## SPOSÓB NA NAUKĘ

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROJEKT „SPOSÓB NA NAUKĘ” WSPÓŁFINANSOWANY ZE ŚRODKÓW
UNII EUROPEJSKIEJ W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

# Program nauczania z matematyki i poradnik dla nauczyciela – klasa I szkoły ponadgimnazjalnej

## Wstęp

Ważnym celem nauczania matematyki w liceum i technikum jest wyposażenie przyszłego absolwenta w umiejętności matematyczne niezbędne do sprostania wymogom egzaminu maturalnego z matematyki na wybranym przez niego poziomie. Dodatkowo zakres podstawowy powinien dać absolwentowi umiejętności przydatne w codziennym życiu, zaś zakres rozszerzony – stworzyć solidny fundament do kontynuowania nauki na wymagających tego wyższych studiach. Nauczanie matematyki w sposób szczególny stymuluje rozwój intelektualny ucznia, między innymi wykształca:

- umiejętność czytania tekstu ze zrozumieniem, w tym również tekstu zawierającego dane statystyczne prezentowane w różny sposób;
- umiejętność logicznego myślenia i argumentowania;
- nawyku krytycznej analizy informacji;
- umiejętność formułowania hipotez i ich uzasadniania;
- wyobraźnię przestrzenną;
- umiejętność planowania strategii rozwiązania problemu;
- postawę wykorzystywania narzędzi matematycznych w życiu codziennym, budowania modelu matematycznego dla danego kontekstu praktycznego z uwzględnieniem ograniczeń i zastrzeżeń z niego wynikających

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **1. LICZBY RZECZYWISTE** | | | **15** |
| **1. Pojęcie liczb naturalnych i ich opisie** | ▪ dzielniki liczby naturalnej<br>▪ opis liczby pierwszej<br>▪ cechy podzielności liczb<br>▪ określenie liczby parzystej i nieparzystej<br>▪ rozkład liczb naturalnych na czynniki pierwsze<br>▪ znajdowanie NWD i NWW | **Uczeń:**<br>• podaje przykłady liczb pierwszych, parzystych i nieparzystych<br>• podaje dzielniki całkowite liczby naturalnej<br>• przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych<br>• oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych<br>• przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb, np. wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $n^2 + n$ jest parzysta” | 1 |
| **2. Opis liczby całkowitej i wymiernej, ich własności** | ▪ opis liczby całkowitej<br>▪ opis liczby wymiernej<br>▪ oś liczbowa<br>▪ kolejność wykonywania działań | **Uczeń:**<br>• rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb<br>• podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych<br>• osi liczbowa, współrzędne danego punktu i zaznaczanie<br>• wykonuje działania na liczbach wymiernych | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **3. Liczby niewymierne, ich opis i własności** | ▪ opis liczby niewymiernej<br>▪ geometryczne przedstawianie odcinków o różnych długościach niewymiernych | **Uczeń:**<br>• odszukuje liczby niewymierne wśród danych liczb<br>• konstruuje odcinki o długościach niewymiernych<br>• zaznacza na osi liczbowej punkt<br>• wykazuje, dobierając odpowiednio przykłady, że suma, różnica, iloczyn oraz iloraz liczb niewymiernych nie musi być liczbą niewymierną<br>• dowód niewymierności liczby $\sqrt{2}$ ; $\sqrt{3}, \sqrt{3}-1$ | 1 |
| **4. Jak otrzymujemy i metoda rozwinięcia dziesiętnego liczb rzeczywistych** | ▪ postać dziesiętna liczby rzeczywistej<br>▪ metoda zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne<br>▪ metoda przedstawiania ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych | **Uczeń:**<br>• wyszukuje liczby wymierne i niewymierne wśród liczb podanych liczb w postaci dziesiętnej<br>• zna metodę wyznaczania rozwinięcia dziesiętnego ułamków zwykłych<br>• zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe i ułamki okresowe | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **5. Pojęcie pierwiastka z liczby nieujemnej** | ▪ definicja pierwiastka kwadratowego, trzeciego stopnia z liczby nieujemnej<br>▪ pojęcie pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej<br>▪ działania na pierwiastkach | **Uczeń:**<br>• oblicza wartość pierwiastka drugiego i trzeciego stopnia z liczby nieujemnej<br>• oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej<br>• wyłącza czynnik przed znak pierwiastka<br>• włącza czynnik pod znak pierwiastka<br>• wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach | 2 |
| **6. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby rzeczywistej** | ▪ definicja pierwiastka trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej<br>▪ definicja pierwiastka nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej<br>▪ działania na pierwiastkach | **Uczeń:**<br>• oblicza wartość pierwiastka trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej<br>• oblicza wartość pierwiastka nieparzystego stopnia z liczby rzeczywistej<br>• wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb rzeczywistych, stosując prawa działań na pierwiastkach | 1 |
| **7. Pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym** | ▪ pojęcie potęgi o wykładniku naturalnym<br>▪ pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym<br>▪ działania na potęgach | **Uczeń:**<br>• oblicza wartość potęgi o wykładniku naturalnym, całkowitym i ujemnym<br>• stosuje własności o działaniach na potęgach do ich obliczania | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **8. Notacja wykładnicza wielkich liczby** | ▪ pojęcie notacji wykładniczej<br>▪ sposób zapisywania małych i dużych liczb w notacji wykładniczej<br>▪ działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej | **Uczeń**:<br>• zapisuje i odczytuje liczbę w notacji wykładniczej<br>• wykonuje działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej | 1 |
| **9. Sposoby przybliżania liczb** | ▪ reguła zaokrąglania<br>▪ przybliżanie z nadmiarem i z niedomiarem<br>▪ błąd przybliżenia | **Uczeń**:<br>• zaokrągla liczbę z podaną dokładnością<br>• oblicza błąd przybliżenia danej liczby oraz ocenia, czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem<br>• szacuje wyniki działań | 1 |
| **10. Pojęcie procentu** | ▪ pojęcie procentu<br>▪ pojęcie punktu procentowego | **Uczeń**:<br>• oblicza procent z danej liczby<br>• zna pojęcia procentu i punktu procentowego<br>• oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba<br>• oblicza liczbę, gdy dany jest jej procent<br>• zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent<br>• stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **11. Powtórzenie wiadomości**<br><br>**12. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |
| | **2. ZBIORY I DZIAŁANIA NA NICH** | | **22** |
| **1. Zbiory i ich własności** | ▪ sposoby opisywania zbiorów<br>▪ zbiory skończone i nieskończone<br>▪ pojęcie zbioru pustego<br>▪ pojęcie podzbioru<br>▪ relacja zawierania zbiorów<br>▪ zapis symboliczny zbioru | **Uczeń:**<br>• posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony<br>• wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące<br>• opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór<br>• określa relację zawierania zbiorów | 1 |
| **2. Działania na zbiorach** | ▪ własności zbiorów<br>▪ suma zbiorów<br>▪ różnica zbiorów<br>▪ dopełnienie zbioru<br>▪ iloczyn zbiorów | **Uczeń:**<br>• zna pojęciami: iloczyn, suma oraz różnica zbiorów<br>• oblicza iloczyn, sumę oraz różnicę danych zbiorów<br>• przedstawia graficznie zbiór, który jest wynikiem działań na trzech dowolnych zbiorach<br>• wyznacza dopełnienie zbioru | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **3. Przedziały liczbowe i ich oznaczanie** | ▪ określenie przedziałów: otwartego, domkniętego, lewostronnie domkniętego, prawostronnie domkniętego, nieograniczonego<br>▪ zapis symboliczny przedziałów | **Uczeń**:<br>• zna pojęcia: przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, nieograniczony<br>• zapisuje przedział i zaznacza go na osi liczbowej<br>• odczytuje i zapisuje symbolicznie przedział zaznaczony na osi liczbowej<br>• wyznacza przedział opisany podanymi nierównościami | 1 |
| **4. Działania na przedziałach liczbowych** | ▪ iloczyn, suma, różnica przedziałów | **Uczeń**:<br>• opisuje iloczyn, sumę i różnicę przedziałów oraz zaznacza je na osi liczbowej i zapisuje symbolicznie | 1 |
| **5. Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia** | ▪ nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą<br>▪ nierówności równoważne i tożsamościowe | **Uczeń**:<br>• potrafi sprawdzić prawdziwość rozwiązania nierówności<br>• rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą<br>• potrafi zapisać zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziałów<br>• stosuje nierówności pierwszego stopnia w zadaniach tekstowych | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **6. Wzory skróconego mnożenia, analiza ich powstania** | ▪ kwadrat sumy dwóch wyrażeń $(a + b)^2$ oraz $a^2 + 2ab + b^2$<br>▪ kwadrat różnicy dwóch wyrażeń $(a - b)^2$ oraz $a^2 - 2ab + b^2$<br>▪ suma kwadratów dwóch wyrażeń $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$<br>▪ sześcian sumy dwóch wyrażeń $(a + b)^3$ oraz $a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$<br>▪ sześcian różnicy dwóch wyrażeń<br>▪ $(a - b)^3$ oraz $a^3 - 3a^2 + 3ab^2 - b^3$ | **Uczeń**:<br>• stosuje odpowiedni wzór skróconego mnożenia do wyznaczenia kwadratu sumy lub różnicy oraz różnicy kwadratów<br>• przekształca wyrażenie algebraiczne i stosuje odpowiednie wzorów skróconego mnożenia<br>• stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania działań na liczbach postaci $a + b\sqrt{c}$<br>• wyprowadza wzory skróconego mnożenia stosując definicję potęgi<br>• usuwa niewymierność z mianownika ułamka prz danych wyrażeniach | 3 |
| **7. Zastosowanie przekształceń algebraicznych** | ▪ zastosowanie przekształceń algebraicznych do przekształcania wyznaczania równań i nierówności równoważnych<br>▪ usuwanie niewymierności z mianownika | **Uczeń**:<br>• stosuje przekształcenia algebraiczne w równaniach oraz nierównościach<br>• potrafi usuwać niewymierności z mianownika danego ułamka | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **8. Pojęcie wartości bezwzględna liczby** | ▪ pojęcie wartości bezwzględnej liczby<br>▪ ilustracja geometryczna wartości bezwzględnej na osi liczbowej | **Uczeń**:<br>• oblicza wartość bezwzględną danej liczby<br>• upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną<br>• rozwiązuje, proste równania i nierówności z wartością bezwzględną stosując metodę geometryczną, | 1 |
| **9. Własności wartości bezwzględnej** | ▪ własności wartości bezwzględnej | **Uczeń**:<br>• zna i stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej danej liczby<br>• rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną stosując poznane własności<br>• upraszcza wyrażenia zwartością bezwzględną | 2 |
| **10. Równania i nierówności z wartością bezwzględną** | ▪ metody rozwiązywania równań i nierówności z wartością bezwzględną | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując postać geometryczną<br>• rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, stosując definicję oraz własności wartości bezwzględnej | 4 |
| **11. Błąd bezwzględny i błąd względny** | ▪ określenie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia | **Uczeń**:<br>• rozróżnia pojęcia: błąd bezwzględny, błąd względny przybliżenia oraz potrafi je obliczać | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **12. Powtórzenie wiadomości**<br><br>**13. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |
| **3. Funkcja LINIOWA** | | | **19** |
| **14. Sposoby opisu funkcji liniowych** | ▪ pojęcie funkcji liniowej<br>▪ sposoby jej opisywania<br>▪ określenie miejsca zerowego | **Uczeń**:<br>• stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, wykres funkcji, miejsce zerowe funkcji<br>• rozpoznaje wśród danych przyporządkowań te, które opisują funkcje<br>• podaje przykłady funkcji<br>• potrafi opisać funkcję różnymi sposobami | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **15. Wykres funkcji liniowej** | ▪ definicja funkcji liniowej oraz jej wykres<br>▪ interpretacja geometryczna współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej<br>▪ pojęcia: pęk prostych, środek pęku | **Uczeń**:<br>• rozpoznaje funkcję liniową, mając dany jej wzór oraz szkicuje jej wykres<br>• analizuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej i wskazuje wśród danych wzorów funkcji liniowych te, których wykresy są równoległe, prostopadłe, pokrywające się<br>• podaje własności funkcji liniowej danej wzorem<br>• wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia zadane warunki: np. jest równoległy, prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej | 1 |
| **16. Własności funkcji liniowej** | ▪ własności funkcji liniowej | **Uczeń**:<br>• wyznacza miejsce zerowe i określa monotoniczność funkcji<br>• wyznacza współrzędne punktów, w których wykres funkcji liniowej przecina osie układu współrzędnych oraz podaje, w których ćwiartkach układu znajduje się wykres<br>• wyznacza wartości parametrów, dla których funkcja ma określone własności | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **17. Równanie prostej na płaszczyźnie** | ▪ równanie kierunkowe prostej<br>▪ równanie ogólne prostej | **Uczeń**:<br>• podaje równanie kierunkowe i ogólne prostej<br>• zamienia równanie ogólne prostej, która nie jest równoległa do osi OY, na równanie w postaci kierunkowej<br>• wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty<br>• geometrycznie przedstawia prostą opisaną równaniem ogólnym<br>• wyznacza wartości parametru, dla których prosta spełnia określone warunki | 2 |
| **18. Współczynnik kierunkowy prostej** | ▪ współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa dane punkty<br>▪ postać geometryczna współczynnika kierunkowego | **Uczeń**:<br>• oblicza współczynnik kierunkowy prostej, mając dane współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej<br>• szkicuje prostą, wykorzystując interpretację współczynnika kierunkowego<br>• odczytuje wartość współczynnika kierunkowego, mając dany wykres; w przypadku wykresu zależności drogi od czasu w ruchu jednostajnym podaje wartość prędkości<br>• wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **19. Warunek prostopadłości prostych** | ▪ warunek prostopadłości prostych o równaniach kierunkowych<br>▪ wyznaczanie równania prostej prostopadłej do danej prostej | **Uczeń**:<br>• podaje warunek prostopadłości prostych o równaniach kierunkowych<br>• wyznacza równanie prostej prostopadłej do danej prostej<br>i przechodzącej przez dany punkt<br>• wyznacza wartości parametru, dla których proste są prostopadłe | 2 |
| **20. Układy równań liniowych i ich metody rozwiązywania** | ▪ metody algebraiczne rozwiązywania układów równań liniowych<br>▪ pojęcie układu równań oznaczonego, sprzecznego, nieoznaczonego | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje układ równań metodą podstawiania i przeciwnych współczynników<br>• określa typ układu równań (czy dany układ równań jest układem oznaczonym, nieoznaczanym, czy sprzecznym)<br>• układa i rozwiązuje układ równań do zadania z treścią<br>• rozwiązuje układ trzech równań z trzema niewiadomymi | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **21. Przedstawienie geometryczne układu równań liniowych** | ▪ interpretacja geometryczna układu równań liniowych, każdej postaci | **Uczeń**:<br>• opisuje geometrycznie układ równań<br>• rozwiązuje układ równań metodą graficzną<br>• zna związek między liczbą rozwiązań układu równań a położeniem prostych przy graficznym ich przedstawieniu<br>• rozwiązuje układ równań z parametrem oraz określa jego typ w zależności od wartości parametru<br>• rozwiązuje graficznie układ równań z wartością bezwzględną | 2 |
| **22. Układy nierówności liniowych** | ▪ geometryczne przedstawienie nierówności z dwiema niewiadomymi<br>▪ pojęcie półpłaszczyzny otwartej i domkniętej<br>▪ przedstawienie geometryczna układu nierówności | **Uczeń**:<br>• opisuje geometrycznie nierówności z dwiema niewiadomymi oraz pojęcie półpłaszczyzny otwartej i domkniętej<br>• zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi<br>• zapisuje układ nierówności opisujący zbiór punktów przedstawionych w układzie współrzędnych<br>• rozwiązuje graficznie układ kilku nierówności z dwiema niewiadomymi<br>• wyznacza w układzie współrzędnych iloczyn, sumę i różnicę zbiorów punktów opisanych nierównościami liniowymi z dwiema niewiadomymi | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
| --- | --- | --- | --- |
| **23. Funkcja liniowa – jej zastosowania** | ▪ tworzenie modelu matematycznego opisującego przedstawione zagadnienie praktyczne | **Uczeń**:<br>• przeprowadza analizę zadania tekstowego, a następnie zapisuje odpowiednie równanie, nierówność liniową lub wzór funkcji liniowej<br>• rozwiązuje i analizuje ułożone przez siebie równanie lub nierówność<br>• zapisuje odpowiedź | 2 |
| **24. Powtórzenie wiadomości**<br><br>**25. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |
| **4. Funkcje** | | | **19** |
| **1. Dziedzina i miejsca zerowe funkcji** | ▪ określa dziedzinę funkcji opisanej wzorem<br>▪ opis miejsca zerowego danej funkcji | **Uczeń:**<br>• wyznacza dziedzinę funkcji ze wzoru<br>• wyznacza miejsca zerowe funkcji | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **2. Sporządzanie wykresu funkcji** | ▪ wykres funkcji danej wzorem | **Uczeń**:<br>• geometrycznie przedstawia wykres funkcji określonej prostym wzorem<br>• rysuje wykres funkcji przedziałami liniowej | 1 |
| **3. Monotoniczność funkcji** | ▪ definicje: funkcji rosnącej, malejącej i stałej<br>▪ pojęcie monotoniczności funkcji<br>▪ określa: funkcję nierosnącą i niemalejąca<br>▪ pojęcie funkcji przedziałami monotonicznej | **Uczeń**:<br>• stosuje pojęcie funkcji monotonicznej<br>• z wykresu funkcji podaje jej monotoniczność<br>• rysuje wykres funkcji o zadanych kryteriach monotoniczności<br>• bada na podstawie definicji monotoniczność funkcji danej wzorem | 1 |
| **4. Odczytywanie własności funkcji z wykresu** | ▪ zapisuje zbiór wartości funkcji<br>▪ interpretacja geometryczna miejsca zerowego funkcji<br>▪ minimum i maksimum wartości funkcji<br>▪ określa znak wartości funkcji | **Uczeń**:<br>• stosuje pojęcia: zbiór wartości funkcji, największa i najmniejsza wartość funkcji<br>• odczytuje z wykresu funkcji jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe; argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne; argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie; przedziały monotoniczności funkcji, najmniejszą i największą wartość funkcji | 1 |
| **5. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OY układu współrzędnych** | ▪ metoda otrzymywania wykresów funkcji $y = f(x) + p$ dla $p > 0$ oraz $y = f(x) - p$ dla $p > 0$ | **Uczeń**:<br>• rysuje wykresy funkcji: $y = f(x) + p$ dla $p > 0$ oraz $y = f(x) - p$ dla $p > 0$ | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **6. Przesuwanie wykresu wzdłuż osi OX układu współrzędnych** | ▪ metoda otrzymywania wykresów funkcji y = f(x – p) dla p > 0 oraz y = f(x + p) dla p > 0 | **Uczeń**:<br>• rysuje wykresy funkcji: y = f(x – p) dla p > 0 oraz y = f(x + p) dla p > 0 | 1 |
| **7. Wektory w układzie współrzędnych** | ▪ pojęcie wektora<br>▪ wektor przeciwny do danego<br>▪ współrzędne wektora i ich przedstawienie geometryczne | **Uczeń**:<br>• posługuje się pojęciem wektora i wektora przeciwnego<br>• oblicza współrzędne wektora<br>• wyznacza współrzędne początku lub końca wektora, mając dane współrzędne wektora i współrzędne jednego z punktów<br>• znajduje obraz figury w przesunięciu o dany wektor | 1 |
| **8. Przesuwanie wykresu funkcji o dany wektor** | ▪ metoda otrzymywania wykresu funkcji y = f(x – p) + k | **Uczeń**:<br>• rysuje wykres funkcji y = f(x – p) + k<br>• zapisuje wzór funkcji otrzymanej po jej przesunięciu | 1 |
| **9. Przekształcanie wykresu w symetrii względem osi układu współrzędnych** | ▪ sposób otrzymywania wykresu funkcji y = – f(x)<br>▪ sposób otrzymywania wykresu funkcji y = f(–x) | **Uczeń**:<br>• rysuje wykresy funkcji y = – f(x) na podstawie wykresu funkcji y = f(x)<br>• rysuje wykresy funkcji y = f(–x) na podstawie wykresu funkcji y = f(x) | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **10. Inne metody przekształcenia wykresu funkcji** | ▪ metoda otrzymywania wykresu funkcji y = \|f(x)\| i y = f(\|x\|) | **Uczeń**:<br>• na podstawie wykresu funkcji y = f(x) rysuje wykresy funkcji y = \|f(x)\| i y = f(\|x\|)<br>• na podstawie wykresu funkcji y = f(x) rysuje wykres funkcji wykonaniu kilku przekształceń | 2 |
| **11. Funkcje – i ich zastosowanie** | ▪ zastosowanie funkcje w zadaniach | **Uczeń**:<br>• rozpoznaje zależność funkcyjną umieszczoną w kontekście praktycznym, określa dziedzinę oraz zbiór wartości takiej funkcji<br>• przedstawia zależności opisane w zadaniach tekstowych<br>funkcji danej wzorem lub wykresem | 2 |
| **12.**<br>**13.**<br>**14. Powtórzenie wiadomości**<br>**15. Praca klasowa i jej omówienie**<br>**16.** | - | - | 3 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| | **5. Funkcja kwadratowa** | | **28** |
| **1. Wykres funkcji kwadratowych $f(x) = ax^2$ i jej cechy** | ▪ wykres i własności funkcji $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$ | **Uczeń**:<br>• rysuje wykres funkcji $f(x) = ax^2$<br>• podaje własności funkcji $f(x) = ax^2$<br>• wykorzystuje własności funkcji $f(x) = ax^2$ do rozwiązywania zadań | 1 |
| **2. Przesunięcie wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ o wektor** | ▪ sposób otrzymywania wykresów funkcji:<br>$f(x) = ax^2 + q$,<br>$f(x) = a(x-p)^2$,<br>$f(x) = a(x-p)^2 + q$<br>▪ własności funkcji:<br>$f(x) = ax^2 + q$,<br>$f(x) = a(x-p)^2$,<br>$f(x) = a(x-p)^2 + q$<br>▪ współrzędne wierzchołka paraboli | **Uczeń**:<br>• rysuje wykresy funkcji: $f(x) = ax^2 + q$, $f(x) = a(x-p)^2$, $f(x) = a(x-p)^2 + q$ i podaje ich własności<br>• korzysta z własności funkcji: $f(x) = ax^2 + q$, $f(x) = a(x-p)^2$, $f(x) = a(x-p)^2 + q$ do rozwiązywania zadań | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **3. Postać kanoniczna i postać ogólna funkcji kwadratowej** | ▪ postać ogólna funkcji kwadratowej<br>▪ postać kanoniczna funkcji kwadratowej<br>▪ trójmian kwadratowy<br>▪ współrzędne wierzchołka paraboli<br>▪ rysowanie wykresu funkcji kwadratowej postaci $f(x)=ax^2+bx+c$<br>▪ pojęcie wyróżnika trójmianu kwadratowego | **Uczeń**:<br>• podaje wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej<br>• oblicza współrzędne wierzchołka paraboli z własności<br>• sprowadza postać ogólną funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej i rysuje jej wykres<br>• sprowadza postać kanoniczną funkcji kwadratowej do postaci ogólnej<br>• wyznacza wzór ogólny funkcji kwadratowej mając dane współrzędne wierzchołka i innego punktu jej wykresu<br>• zna metodę otrzymania wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli | 3 |
| **4. Równania kwadratowe i jego własności** | ▪ metoda rozwiązywania równań przez rozkład na czynniki<br>▪ zależność między znakiem wyróżnika a liczbą rozwiązań równania kwadratowego<br>▪ wzory na pierwiastki równania kwadratowego<br>▪ geometryczna postać rozwiązań równania kwadratowego | **Uczeń**:<br>• stosuje wzory skróconego mnożenia oraz zasadę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias do przedstawienia wyrażenia w postaci iloczynu<br>• rozwiązuje równanie kwadratowe przez rozkład na czynniki<br>• rozwiązuje równania kwadratowe, korzystając z poznanych wzorów<br>• interpretuje geometrycznie rozwiązania równania kwadratowego<br>• stosuje poznane wzory przy szkicowaniu wykresu funkcji kwadratowej | 4 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **5. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej** | ▪ opis postaci iloczynowej funkcji kwadratowej<br>▪ twierdzenie o postaci iloczynowej funkcji kwadratowej | **Uczeń**:<br>• opisuje postać iloczynową funkcji kwadratowej oraz warunek jej istnienia<br>• zapisuje funkcję kwadratową w postaci iloczynowej<br>• odczytuje wartości pierwiastków trójmianu podanego w postaci iloczynowej<br>• przekształca postać iloczynową funkcji kwadratowej do postaci ogólnej<br>• wykorzystuje postać iloczynową funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań | 1 |
| **6. Sprowadzanie równania do równań kwadratowych** | ▪ rozwiązywanie równań metodą podstawiania | **Uczeń**:<br>• rozpoznaje równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych<br>• wprowadza niewiadomą pomocniczą, podaje odpowiednie założenia i rozwiązuje równanie kwadratowe z niewiadomą pomocniczą<br>• podaje rozwiązanie równania wyjściowego | 2 |
| **7. Nierówności kwadratowe - własności** | ▪ sposoby rozwiązywania nierówności kwadratowych | **Uczeń**:<br>• rozumie związek między rozwiązaniem nierówności kwadratowej a znakiem wartości odpowiedniego trójmianu kwadratowego<br>• rozwiązuje nierówność kwadratową<br>• wyznacza na osi liczbowej iloczyn, sumę i różnicę zbiorów rozwiązań kilku nierówności kwadratowych | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **8. Układy równań różnych stopni** | ▪ metody rozwiązywania układów równań drugiego stopnia | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest równaniem paraboli<br>• stosuje układy równań drugiego stopnia do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej<br>• zaznacza w układzie współrzędnych graficznie obszar opisany układem nierówności | 2 |
| **9. Wzory Viète'a** | ▪ wzory Viète'a<br>▪ określenie znaku pierwiastków równania kwadratowego bez ich wyznaczania | **Uczeń**:<br>• wykorzystuje wzory Viète'a do wyznaczania sumy oraz iloczynu pierwiastków równania kwadratowego określa znaki pierwiastków równania kwadratowego,<br>• stosuje wzory Viète'a do obliczania wartości wyrażeń zawierających sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego<br>• wyprowadza wzory Viète'a | 2 |
| **10. Równania kwadratowe z parametrem** | ▪ rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych z parametrem | **Uczeń**:<br>• przeprowadza analizę zadań z parametrem<br>• zapisuje założenia, aby spełniały warunki z treści zadania<br>• wyznacza wartości parametru, dla których są spełnione warunki zadania | 4 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **11. Funkcja kwadratowa – zastosowania** | ▪ najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym | **Uczeń**:<br>• stosuje pojęcie minimum i maksimum wartości funkcji<br>• wyznacza wartość najmniejszą i największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym<br>• stosuje własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań | 2 |
| **12. Powtórzenie wiadomości**<br><br>**13. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |
| **6. Planimetria** | | | **23** |
| **1. Miary kątów w trójkącie - własności** | ▪ rodzaje trójkątów<br>▪ twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie | **Uczeń**:<br>• klasyfikuje trójkąty ze względu na miary ich kątów i długości boków<br>• stosuje twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta do rozwiązywania zadań<br>• przeprowadza dowód twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **2. Trójkąty przystające** | ▪ opis trójkątów przystających<br>▪ cechy przystawania trójkątów<br>▪ nierówność trójkąta | **Uczeń**:<br>• podaje definicję trójkątów przystających oraz ich cechy<br>• wie, które trójkąty są przystające<br>• stosuje nierówność trójkąta do rozwiązywania zadań | 1 |
| **3. Trójkąty podobne** | ▪ definicja wielokątów podobnych<br>▪ cechy podobieństwa trójkątów<br>▪ skala podobieństwa trójkątów | **Uczeń**:<br>• podaje cechy podobieństwa trójkątów<br>• sprawdza, czy dane trójkąty są podobne<br>• oblicza długości boków trójkąta podobnego do danego w danej skali podobieństwa<br>• układa odpowiednią proporcję, aby wyznaczyć długości boków trójkątów podobnych<br>• wykorzystuje podobieństwo trójkątów do rozwiązywania zadań | 1 |
| **4. Wielokąty podobne i ich własności** | ▪ zależność między polami i obwodami wielokątów podobnych a skalą ich podobieństwa | **Uczeń**:<br>• rozumie pojęcie figur podobnych<br>• oblicza długości boków w wielokątach podobnych<br>• wykorzystuje zależności między polami i obwodami wielokątów podobnych a skalą podobieństwa w zadaniach | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **5. Twierdzenie Talesa i jego własności** | ▪ twierdzenie Talesa<br>▪ twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa | **Uczeń**:<br>• podaje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do niego<br>• wykorzystuje twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań<br>• wykorzystuje twierdzenie Talesa do podziału odcinka w dowolnym stosunku<br>• przeprowadza dowód twierdzenia Talesa | 2 |
| **6. Trójkąty prostokątne i jego cechy** | ▪ twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego<br>▪ wzory na długość przekątnej kwadratu i długość wysokości trójkąta równobocznego | **Uczeń**:<br>• podaje twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz wzory na długość przekątnej kwadratu i długość wysokości trójkąta równobocznego<br>• stosuje twierdzenie Pitagorasa do rozwiązywania zadań<br>• korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyprowadza zależności dotyczące długości przekątnej kwadratu i wysokości trójkąta równobocznego | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **7. Funkcje trygonometrycz ne kąta ostrego** | ▪ definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego<br>▪ wartości funkcji trygonometrycznych kątów<br>$30^o$, $45^o$, $60^o$ | **Uczeń**:<br>• podaje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym<br>• podaje wartości funkcji trygonometrycznych kątów $30^o$, $45^o$, $60^o$<br>• wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych danego trójkąta prostokątnego wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności | 2 |
| **8. Trygonometria – jej zastosowania** | ▪ odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów<br>w tablicach<br>▪ odczytywanie miary kąta, dla którego dana jest wartość funkcji trygonometrycznej | **Uczeń:**<br>• odczytuje wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta w tablicach lub wartości kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych<br>• stosuje funkcje trygonometryczne do rozwiązywania zadań praktycznych | 2 |
| **9. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych** | ▪ rozwiązywanie trójkątów prostokątnych | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje trójkąty prostokątne<br>• podaje miary kątów i długości boków | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **10. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta** | ▪ podstawowe tożsamości trygonometryczne<br>▪ wzory na: sin(90° – α), cos(90° – α), tg(90° – α), ctg(90° – α) | **Uczeń**:<br>• podaje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta<br>• wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych przy jednej danej<br>• stosuje poznane związki w upraszczania wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne | 2 |
| **11. Pole trójkąta** | ▪ wzory na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ah$, $P=\frac{1}{2}ab\sin >$, wzór Herona $\sqrt{p*(p-a)*(p-b)*(p-c)}$<br>▪ wzór na pole trójkąta równobocznego | **Uczeń**:<br>• podaje różne wzory na pole trójkąta<br>• oblicza pole trójkąta, stosując odpowiedni wzór do sytuacji wynikającej z treści zadania<br>• wykorzystuje umiejętność wyznaczania pól trójkątów do obliczania pól innych wielokątów | 2 |
| **12. Pola czworokątów** | ▪ wzory na pole , rombu równoległoboku, trapezu | **Uczeń**:<br>• podaje wzory na pola czworokątów<br>• wykorzystuje funkcje trygonometryczne do ich wyznaczania | 2 |
| **13. Powtórzenie materiału**<br><br>**14. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **7. GEOMERTRIA ANALITYCZNA** | | | **22** |
| **1. Odległość między punktami w układzie współrzędnych. Środek odcinka** | ▪ wzór na odległość między punktami w układzie współrzędnych<br>▪ wzór na współrzędne środka odcinka | **Uczeń**:<br>• oblicza odległość punktów w układzie współrzędnych<br>• wyznacza współrzędne środka odcinka, mając dane współrzędne jego końców<br>• oblicza obwód wielokąta, mając dane współrzędne jego wierzchołków<br>• stosuje wzór na odległość między punktami do rozwiązywania zadań dotyczących równoległoboków | 2 |
| **2. Odległość punktu od prostej** | ▪ wzór na odległość punktu od prostej<br>▪ współczynnik kierunkowy prostej | **Uczeń**:<br>• oblicza odległość punktu od prostej<br>• oblicza odległość między prostymi równoległymi<br>• stosuje wzór na odległość punktu od prostej w zadaniach<br>• stosuje związek między współczynnikiem kierunkowym a kątem nachylenia prostej do osi OX<br>• wyznacza kąt między prostymi<br>• zna wzór na odległość punktu od prostej i jego wyprowadzenie | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **3. Okrąg w układzie współrzędnych** | ▪ ogólne równanie okręgu | **Uczeń**:<br>• wie, kiedy punkt należy do danego okręgu<br>• wyznacza środek i promień okręgu z jego równania<br>• opisuje równaniem okrąg o danym środku i punkcie należącym do niego<br>• sprawdza, czy dane równanie jest równaniem okręgu<br>• wyznacza wartość parametru, aby równanie opisywało okrąg<br>• stosuje równanie okręgu w zadaniach rachunkowych | 2 |
| **4. Wzajemne położenie dwóch okręgów** | ▪ okręgi styczne, przecinające się i rozłączne | **Uczeń**:<br>• określa wzajemne położenie dwóch okręgów, obliczając odległości ich środków oraz na podstawie rysunku<br>• dobiera tak wartość parametru, aby dane okręgi były styczne | 1 |
| **5. Wzajemne położenie okręgu i prostej** | ▪ styczna do okręgu<br>▪ sieczna okręgu | **Uczeń**:<br>• określa wzajemne położenie okręgu i prostej, porównując odległość jego środka od prostej z długością promienia okręgu<br>• korzysta z własności stycznej do okręgu<br>• wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **6. Układy równań drugiego stopnia** | ▪ sposoby rozwiązywania układów równań drugiego stopnia | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje algebraicznie i graficznie układy równań, z których co najmniej jedno jest drugiego stopnia<br>• stosuje układy równań drugiego stopnia do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej | 2 |
| **7. Koło w układzie współrzędnych** | ▪ nierówność opisująca koło | **Uczeń**:<br>• sprawdza, czy dany punkt należy do danego koła<br>• opisuje w układzie współrzędnych koło<br>• podaje geometryczną interpretację rozwiązania układu nierówności stopnia drugiego<br>• opisuje układem nierówności przedstawiony podzbiór płaszczyzny<br>• zaznacza w układzie współrzędnych zbiory spełniające warunki zadania | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **8. Działania na wektorach** | ▪ pojęcie wektora swobodnego i zaczepionego<br>▪ dodawanie i odejmowanie wektorów<br>▪ mnożenie wektora przez liczbę<br>▪ interpretacja geometryczna działań na wektorach<br>▪ długość wektora<br>▪ pojęcie wektora zerowego i jednostkowego | **Uczeń**:<br>• wykonuje działania na wektorach<br>• sprawdza cechy wektora<br>• stosuje działania na wektorach i i podaje interpretację geometryczną w zadaniach | 1 |
| **9. Wektory – zastosowania** | ▪ zastosowanie działań na wektorach | **Uczeń**:<br>• stosuje działania na wektorach do badania współliniowości punktów, podziału odcinka<br>• stosuje wektory do rozwiązywania zadań<br>• wykorzystuje działania na wektorach do dowodzenia twierdzeń | 1 |
| **10. Jednokładność** | ▪ definicja jednokładności<br>▪ pojęcie figur jednokładnych<br>▪ twierdzenie o podobieństwie figur | **Uczeń**:<br>• kreśli figury jednokładne<br>• wyznacza współrzędne punktów w danej jednokładności<br>• stosuje własności jednokładności w zadaniach | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | | Liczba godzin |
|---|---|---|---|---|
| **11. Symetria osiowa** | ▪ definicja symetrii osiowej<br>▪ figury osiowosymetryczne<br>▪ symetria osiowa w układzie współrzędnych | **Uczeń**:<br>• wie, jakie figury są osiowosymetryczne<br>• wyznacza współrzędne punktów w symetrii względem prostej<br>• stosuje własności symetrii osiowej w zadaniach | | 1 |
| **12. Symetria środkowa** | ▪ definicja symetrii środkowej - własności<br>▪ figury symetryczne względem punktu<br>▪ symetria środkowa w układzie współrzędnych | **Uczeń**:<br>• wskazuje figury środkowosymetryczne<br>• wyznacza współrzędne punktów w symetrii względem punktu<br>• stosuje poznane własności w zadaniach | | 2 |
| **13.**<br>**14.**<br>**15. Powtórzenie wiadomości**<br>**16. Praca klasowa i jej omówienie**<br>**17.** | - | - | | 3 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | | Liczba godzin |
|---|---|---|---|---|
| | | **8. WIELOMIANY** | | **20** |
| **1. Działania na wielomianach** | ▪ wskazuje jednomiany podobne<br>▪ dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany<br>▪ stosuje redukcję wyrazów podobnych<br>▪ stosuje wzory skróconego mnożenia | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności | | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | | Liczba godzin |
|---|---|---|---|---|
| **2. Rozkładanie wielomianu na czynniki** | ▪ stosuje metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias<br>▪ stosuje wzory skróconego mnożenia do rozkładania wielomianów na czynniki<br>▪ stosuje metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, gdy czynnik ten jest sumą algebraiczną<br>▪ stosuje metodę grupowania wyrazów do rozkładania wielomianów na czynniki<br>▪ rozkłada wielomiany na czynniki, wykorzystując poznane metody | **Uczeń**:<br>• dobiera odpowiednią metodę do rozkładania wielomianów na czynniki<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **3. Wielomian jednej zmiennej** | ▪ zna pojęcie jednomianu oraz wielomianu wielu i jednej zmiennej dowolnego stopnia<br>▪ opisuje sytuacje praktyczne za pomocą wielomianów<br>▪ określa dziedzinę danego wielomianu<br>▪ wyznacza współczynniki wielomianu, dla danych wartości wielomianu i określonych wartości zmiennej<br>▪ podaje stopień wielomianu | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje zadania, wykorzystując równość wielomianów<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | 1 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | | Liczba godzin |
|---|---|---|---|---|
| **4. Dzielenie wielomianu przez dwumian $ax + b$** | ▪ wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian ax + b<br>▪ sprawdza, czy jest możliwy rozkład danego wielomianu na czynniki<br>▪ rozwiązuje zadania na dzielenie wielomianu<br>▪ rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | **Uczeń**:<br>• wyznacza wielomian, gdy zna wynik jego dzielenia<br>przez dany dwumian<br>• wyznacza wielomian, gdy zna wynik dzielenia z resztą przez dany dwumian<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | | 3 |
| **5. Pierwiastki wielomianu jednej zmiennej. Twierdzenie Bézouta – jego zastosowanie** | ▪ stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian x - a<br>▪ wyznacza resztę z dzielenia wielomianu przez dwumian x - a<br>▪ rozkłada na czynniki wielomian, o którym wie, że dzieli się przez dwumian x - a | **Uczeń**:<br>• wyznacza wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu przez inny wielomian o znanych własnościach<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
|---|---|---|---|
| **6. Rozwiązywanie równań wielomianowych** | ▪ wie, czym różnią się równania wielomianowe od innych równań<br>▪ odczytuje pierwiastki równań postaci $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ lub $(a x^2 + bx + c)(x - d) = 0$<br>▪ sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem równania<br>▪ rozwiązuje równania postaci $x^n = a$ gdy $n \geq a$ | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje równania, stosując jego rozkład na czynniki<br>• wyznacza równanie, znając jego pierwiastki<br>• podaje przykład równań, gdy zna krotność jego pierwiastków<br>• rozwiązuje równania, które przyjmują postać równania wielomianowego po zastosowaniu przekształceń<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | 3 |
| **7. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianów** | ▪ zna twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu<br>▪ wskazuje liczby całkowite, które spełniają równania wielomianowe<br>▪ wskazuje liczby wymierne, które mogą spełniać równania wielomianowe<br>▪ określa krotność pierwiastków, gdy wielomian jest postaci iloczynu dwumianów | **Uczeń**:<br>• dowodzi twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu<br>• dowodzi twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu<br>• uzasadnia brak pierwiastków wymiernych wielomianu<br>• rozwiązuje równania z niewiadomą pod wartością bezwzględną, które prowadzą do równań wielomianowych | 2 |

| Temat lekcji | Zakres treści | Uczeń zna | Liczba godzin |
| --- | --- | --- | --- |
| **8. Rozwiązywanie nierówności wielomianowych** | ▪ odczytuje rozwiązanie nierówności wielomianowej z wykresu wielomianu<br>▪ rozwiązuje nierówności wielomianowe, gdy wielomian jest postaci iloczynowej | **Uczeń**:<br>• rozwiązuje nierówności wielomianowe, rozkładając wielomian na czynniki<br>• sporządza wykres wielomianu i odczytuje rozwiązanie nierówności wielomianowej<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | 2 |
| **9. Zadania tekstowe z zastosowaniem równań i nierówności wielomianowych** | ▪ opisuje objętość brył obrotowych za pomocą wielomianów<br>▪ ustala dziedzinę wielomianu<br>▪ rozwiązuje proste zadania tekstowe prowadzące do rozwiązywania nierówności wielomianowych | **Uczeń**:<br>• opisuje sytuacje z życia, używając wielomianów<br>• rozwiązuje zadania o zwiększonym stopniu trudności | 2 |
| **10. Powtórzenie wiadomości**<br><br>**11. Praca klasowa i jej omówienie** | - | - | 3 |
| Godziny do dyspozycji nauczyciela | | | |
| **RAZEM** | | | **182** |

# 1. SCENARIUSZE KLASY PIERWSZEJ

## 1. Liczby naturalne

### Umiejętności konieczne:

- znajduje dzielniki naturalne liczb
- stosowanie kolejności wykonywania działań
- zna definicję liczby pierwszej
- zna cechy podzielności liczb naturalnych
- określenie liczby parzystej i nieparzystej
- rozkład liczb naturalnych na czynniki pierwsze
- szukanie NWD i NWW
- twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze
- zbiory i zapis symboliczny

### Pojęcia i fakty:

- podaje przykłady liczb pierwszych, parzystych i nieparzystych
- podaje dzielniki danej liczby naturalnej
- przedstawia liczbę naturalną w postaci iloczynu liczb pierwszych
- oblicza NWD i NWW dwóch liczb naturalnych
- przeprowadza dowody twierdzeń dotyczących podzielności liczb, np. wykaż, że dla - każdej liczby naturalnej $n$ liczba $n^2 + n$ jest parzysta”

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję liczby pierwszej
2. Wyszukuje dzielniki liczb
3. Wyszukuje NWW i NWD
4. Stosuje twierdzenie o rozkładzie liczb na czynniki pierwsze
5. Potrafi zapisać wzorem ogólnym liczbę parzystą i nieparzystą
6. Działania na zbiorach

## Temat 1: Liczby naturalne.

1. Nauczyciel przypomina definicję liczb naturalnych, parzystych i nieparzystych oraz pierwszych
   **N = $C_+ \cup \{0\}$;** **2n;** **2n + 1;** liczby pierwsze to takie, które mają tylko dwa dzielniki: siebie i jeden.
2. Uczniowie wspólnie wyszukują przykłady liczb spełniających powyższe warunki

**ZAD. 1**

Przyporządkuj:

**-12; 7; 23; 25; 64; 191**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **L. naturalne** | | | | | |
| **L. parzyste** | | | | | |
| **L. parzyste** | | | | | |
| **L. pierwsze** | | | | | |

**ZAD. 2**

Znajdź dzielniki naturalne powyższych liczb.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **-12** | | | | | | | |
| **7** | | | | | | | |
| **23** | | | | | | | |
| **25** | | | | | | | |
| **64** | | | | | | | |
| **191** | | | | | | | |

**ZAD. 3**

Dla poniższych par liczbowych znajdź **NWW** oraz **NWD**
**243 i 36; 521 i 248; 125 i 620**

3. Nauczyciel wprowadza pojęcia:

   Mówi on, że dla dowolnych dwóch liczb możemy znaleźć ***największy wspólny dzielnik*** rozkładając obydwie liczby na czynniki pierwsze, a następnie mnożymy wspólne czynniki i jest to nasz wspólny dzielnik.

   Np.
   64 = $\underline{2*2*2*2}*2*2$
   112 = $\underline{2*2*2*2}*7$
   NWD(64;112) = $\underline{2*2*2*2}$ = 16

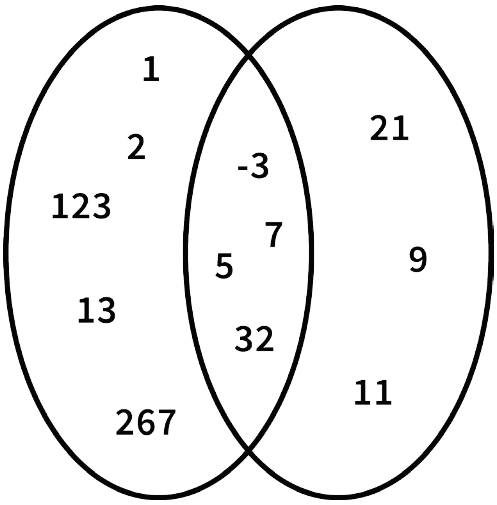
Podobnie postępujemy znajdując **NWW** *(najmniejszą wspólną wielokrotnością)*. Wykonujemy rozkład liczb na czynniki, następnie wybieramy cały rozkład największej z liczb i te liczby z rozkładu drugiej, które nie powtarzają się. Z tych liczb obliczamy iloczyn, który jest szukaną liczbą.

Np.
64 = 2*2*2*2*2*2
112 = 2*2*2*2*7
WWD(64;112) = 2*2*2*2*2*2*7 = 448

**ZAD. 5**

Wskaż prawdziwe inkluzje:
$\{1;2;3\} \subset \{0; 1; 2; 3; 4\}$
$\{0;1;2\} \subset \{1; 2; 3\}$
**N** $\subset C_+$**; 0** $\subset$ **N; {0}** $\subset C_+$

**ZAD. 6**
Zapisz  z użyciem symboli:




## Zadanie domowe:

1. Oblicz:
   **NWD i NWW**

   a) 10 i 15; b) 150 i140; c) 1320; 1650 i 2410; d) 0 i 138

2. Opisz wielokrotności liczb: 3; 10; 15.

3. Podziel zbiór liczb naturalnych od 0 do 50 na klasy ze względu na reszty z dzielenia:
   **a)** przez 3; **b)** przez 4; **c)** przez 5.

## Temat 2: Liczby całkowite i liczby wymierne.

### Umiejętności konieczne:

- określenie liczby całkowitej
- określenie liczby wymiernej
- oś liczbowa
- kolejność wykonywania działań
- zbiory i zapis symboliczny

### Pojęcia i fakty:

- rozpoznaje liczby całkowite i liczby wymierne wśród podanych liczb
- podaje przykłady liczb całkowitych i wymiernych
- odczytuje z osi liczbowej współrzędną danego punktu i odwrotnie:
- zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej
- wykonuje działania na liczbach wymiernych

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję liczby całkowitej i wymiernej
2. Zaznacza na osi liczbowej dane liczby
3. Stosuje i zna kolejność wykonywania działań
4. Potrafi zapisać wzorem ogólnym liczbę całkowitą i wymierną
5. Działania na zbiorach i relacje między zbiorami

Uczniowie przypominają definicję i własności liczb całkowitych i wymiernych i zapisują relacje zachodzące między tymi zbiorami.

$\mathbf{C = C_+ \cup C_-}$

$\mathbf{C_+ = N}$

$\mathbf{C_- = \{-1; -2; -3; -4; \ldots\}}$

$\mathbf{C = C_- \cup N = \{0\} \cup C_+ = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}}$

$\mathbf{\frac{m}{n};\ m, n \in C \text{ i } n \neq 0}$

**ZAD.1** Oblicz sumę zbiorów **A** i **B,** gdzie **A = {1;2;3}; B = {2;4}**

**ZAD. 2** Które zdanie jest prawdziwe:

a) $\mathbf{N \subset C}$; b) $\mathbf{C \subset N}$; c) $\mathbf{C \cup N = C}$; d) $\mathbf{C \cup N = N}$

**ZAD. 3** Uzasadnij, że liczbą przeciwną do (x - y) jest (y - x). pamiętaj, że nie ma jeszcze reguły otwierania nawiasów, czy „wyciągania znaku” przed nawias, ani mnożenia przez -1.

**ZAD. 4** Podaj regułę dodawania ułamków. Zapisz wzorem ogólnym.

**ZAD. 5** Skróć ułamki.

a) $\frac{50}{125}$; b) $\frac{350}{378}$; c) $\frac{380}{1000}$

## Praca domowa

**ZAD. 1** Czy liczba 13,5798 jest wymierna?

**ZAD. 2** Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{(4{,}561 + 5{,}439) * 0{,}1}{(7{,}01 - 5{,}01) : 0{,}5} : \frac{(4{,}45 - 2{,}2) : 0{,}3}{(0{,}823 + 0{,}177) * 30} =$$

**ZAD. 3** Rozłóż na czynniki:

**a)** $a^2 + 2ab + b^2 - 9 =$

**b)** $-4x^6 + 9 =$

**ZAD. 4** 0blicz $\mathbf{4990^2}$ stosując wzory skróconego mnożenia

## 2. Liczby niewymierne

### Umiejętności konieczne:

- określenie liczby niewymiernej
- oś liczbowa i zaznaczanie liczby na niej jako punktu
- konstrukcja geometryczna liczby niewymiernej
- wzory skróconego mnożenia
- kolejność wykonywania działań
- zbiory i zapis symboliczny

### Pojęcia i fakty:

- rozpoznaje liczby niewymierne wśród podanych liczb
- podaje przykłady liczb niewymiernych
- zaznacza punkt o podanej współrzędnej na osi liczbowej
- wykonuje działania na liczbach niewymiernych
- zna wzory skróconego mnożenia
- konstrukcję geometryczną liczby niewymiernej

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję liczby niewymiernej
2. Zaznacza na osi liczbowej dane liczby
3. Stosuje i zna kolejność wykonywania działań
4. Działania na zbiorach i relacje między zbiorami
5. Poznajemy konstrukcję geometryczną liczby niewymiernej

### Temat 3: Liczby niewymierne

Uczniowie przypominają definicję i własności liczb całkowitych i wymiernych, niewymiernych i zapisują relacje zachodzące między tymi zbiorami.
Nauczyciel podaje definicje liczby niewymiernej.
Jeżeli *p* jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną. Ponadto liczby niewymierne mają nieskończone rozwinięcie dziesiętne i nieokresowe.

**ZAD. 1**
Wykonaj konstrukcję geometryczną liczby niewymiernej:

**a)** $\sqrt{2}$
**b)** $\sqrt{3}$

**ZAD. 2**

Podaj prawą stronę następujących wzorów dla a i b ∈ **R**

a) $(a + b)^2 =$
b) $(a - b)^2 =$
c) $(a + b)(a - b) =$

**ZAD. 3**
Oblicz:

a) $\sqrt{\sqrt{1\frac{7}{9}} * 4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}} + \sqrt{\left(\sqrt[3]{7^2} * \sqrt{3^{-4}}\right)^3} * \frac{18}{7} =$

b) Znajdź taką liczbę niewymierną a i wymierną b, żeby iloraz a przez b był równy:
$(3\sqrt{2} - \sqrt{17})^{-1}$
$(\sqrt{2} + 3)^{-2}$

**ZAD. 4**
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

a) $(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
b) $a^4 + b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

## Zadanie domowe:

**ZAD. 1**
Wykaż, że dla dwóch liczb rzeczywistych a i b prawdziwe są zależności:

a) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
b) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
c) $(a - b)((a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
d) $(a + b)((a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

## 3. Rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych

### Umiejętności konieczne:

- postać dziesiętna liczby rzeczywistej
- metoda zamiany ułamków zwykłych na dziesiętne
- metoda przedstawiania ułamków dziesiętnych w postaci ułamków zwykłych
- ułamki okresowe

### Pojęcia i fakty:

- wskazuje liczby wymierne oraz niewymierne wśród liczb podanych w postaci dziesiętnej
- wyznacza rozwinięcie dziesiętne ułamków zwykłych
- zamienia skończone rozwinięcia dziesiętne na ułamki zwykłe
- przedstawia ułamki dziesiętne okresowe w postaci ułamków zwykłych
- zamienia ułamki okresowe na ułamki zwykłe

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję ułamka okresowego
2. Stosuje i zna metodę zamiany ułamka zwykłego na dziesiętne i odwrotnie
3. Zamienia ułamki okresowe na ułamki zwykłe

## Temat 4: Rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych

Uczniowie przypominają pojęcia: ułamek zwykły, ułamek dziesiętny, ułamek okresowy. Zapisują po jednym dowolnym przykładzie każdego z ułamków: np. 1,25; $\frac{1}{6}$; 0, 2(12)
Nauczyciel przypomina metodę zamiany ułamka zwykłego na dziesiętny i odwrotnie oraz podaje, jak rozpoznać bez liczenia, który ułamek zwykły jest dziesiętny (dzielenie licznika przez mianownik jest skończone) a które ułamki są okresowe (dzielenie licznika przez mianownik jest nieskończone).

**ZAD. 1**
Rozwiń w ułamki dziesiętne liczby. Które ułamki są okresowe?

$\frac{11}{9}; \frac{90}{11}; \frac{7}{8}; \frac{2}{7}; \frac{1}{14}; \frac{2}{17}$

**ZAD. 2**
Z poprzedniego przykładu zamień wszystkie ułamki, które są okresowe na zwykłe, stosując odpowiednie przekształcenia.

**ZAD. 3**
Czy liczby 0,999…= 0,(9) i 1 różnią się? Jeśli tak, to o ile?

**ZAD. 4**
Podaj rozwinięcia dziesiętne liczb postaci $2^{-n}$, n$\in \mathbf{N}$.
Zadanie domowe.

**ZAD. 1**
Zapisz 12,345999… = 12,345(9) w postaci ułamka dziesiętnego.

**ZAD. 2**
Czy rozwinięcie 0,999…= 0,(9) może powstać w wyniku dzielenia liczb naturalnych?

## 4. Pojęcie pierwiastka z liczby nieujemnej

### Umiejętności konieczne:

- definicja pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej
- definicja pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej
- definicja pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej
- działania na pierwiastkach
- działania na potęgach

### Pojęcia i fakty:

- oblicza wartość pierwiastka drugiego i trzeciego stopnia z liczby nieujemnej
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka
- włącza czynnik pod znak pierwiastka
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję pierwiastków różnych stopni
2. Stosujemy działania na pierwiastkach.
3. Zamienia pierwiastki na potęgę o wykładniku wymiernym

### Temat 5; 6: Pojęcie pierwiastka z liczby nieujemnej

Nauczyciel podaje definicję i własności pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej.
Jeżeli $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_+ \setminus \{\mathbf{1}\}$, $\mathbf{a} \in \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$**,** to pierwiastek arytmetyczny stopnia n z liczby a nazywamy taką liczbę b, dla której $\mathbf{b^n = a}$

### WŁASNOŚCI:

1. $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}^n = \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$; $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
2. $\left(\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}$
3. $\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{ab}} = \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}} * \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{b}}$
4. $\sqrt[\mathbf{n}]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \frac{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}}{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{b}}}$; $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$
5. $\sqrt[\mathbf{n}]{\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}} = \sqrt[\mathbf{n*m}]{\mathbf{a}}$
6. $\left(\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{m}} = \sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a^m}}$

   **a; b**$\in \boldsymbol{R}_+ \cup \{0\}$ **i m; n**$\in \mathbf{N}_+ \setminus \{\mathbf{1}\}$**.**

**ZAD. 1**

Usuń niewymierności z mianownika:

a) $\frac{8}{\sqrt[3]{4}} =$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} =$

c) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

**ZAD. 2**

Oblicz: *(nauczyciel wyjaśnia przykład, gdy liczba podpierwiastkowa jest dość duża)*

$\sqrt{7225} =$

Rozwiązanie:

$\sqrt{72|25} = 85$

64

82|5 165*5

825

0

## Omówienie przykładu:

Dzielimy liczbę podpierwiastkową na klasy, zawierające po dwie cyfry, zaczynając od przecinka dziesiętnego w obie strony. Liczba tych klas *(w skrajnych przykładach mogą być jednocyfrowe)* równa się liczbie cyfr szukanego pierwiastka.
Następnie znajdujemy w pamięci największą liczbę jednocyfrową, której kwadrat nie jest większy od liczby **72** *(liczby, której cyfry stanowią pierwszą klasę)*. Jest nią liczba 8.
Cyfra **8** jest pierwszą cyfrą w przedstawieniu dziesiętnym obliczanego pierwiastka.
Kwadrat liczby **8**, a więc **64**, piszemy pod liczbą **72**, obliczamy różnicę **72 – 64 = 8** i za cyfrą **8** dopisujemy kolejne cyfry naszej klasy. Z otrzymanej w ten sposób tzw.
Pierwszej reszty, **825** odcinamy pionową kreską ostatnią cyfrę z prawej strony,
i w tym samym wierszu, dalej na prawo, piszemy podwojoną liczbę **8** *(otrzymaną wcześniej ilość dziesiątek w obliczanym pierwiastku)*, czyli **16**. Pozostałą po odcięciu ostatniej cyfry liczbę **82** dzielimy przez **16** i całkowitą część ilorazu, czyli **5** dopisujemy z prawej strony do liczby **16**. Otrzymaną w ten sposób liczbę **165** mnożymy przez dopisaną w ten sposób liczbę tj. **5** i otrzymamy iloczyn **825**. Otrzymujemy w ten sposób drugą resztę **0**. Cyfra **5** dopisana do podwojonej cyfry dziesiątek, czyli **16** jest cyfrą jednostek obliczanego pierwiastka.
Spr. $82^2 = 7225$.

**ZAD. 3** Wspólnie z nauczycielem, uczniowie rozwiązują drugi, podobny przykład.

a) $\sqrt{7|29} = 27$

<u>  4</u>
<u>  32|9</u>          47*5
<u>   329</u>
0

b) $\sqrt{4|66|56} = 216$

<u>  4</u>
<u>    6|6</u>
<u>     41</u>
255|6        426*6
<u>2556</u>
0

### Ćwiczenia:

Usuń niewymierność z mianownika:

1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}} =$

2) Uprość wyrażenie:

a) $x = \dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$ (zastosuj odpowiednie podstawienie)

b) $\left(a\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{bc} + \sqrt[4]{\sqrt{4ab^2}}\right)\left(\sqrt{ab} + c\sqrt{\frac{b}{c}} - \sqrt[4]{4ab^2c}\right) =$

c) **Oblicz**:

$\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{2\sqrt{2}-2}\right)^3 - \left[\dfrac{6+5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-2} - \dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)^2\right] =$

### Praca domowa.

**ZAD. 1** Udowodnij tożsamość:

a) $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{a+a^2-b}}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{a-a^2-b}}{2}}$

b) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2 = 2$

## 5. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby rzeczywistej

**Umiejętności konieczne:**

- definicja pierwiastka kwadratowego z liczby nieujemnej
- definicja pierwiastka trzeciego stopnia z liczby nieujemnej
- definicja pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej
- działania na pierwiastkach
- działania na potęgach

**Pojęcia i fakty:**

- oblicza wartość pierwiastka drugiego i trzeciego stopnia z liczby nieujemnej
- oblicza wartość pierwiastka dowolnego stopnia z liczby nieujemnej
- wyłącza czynnik przed znak pierwiastka
- włącza czynnik pod znak pierwiastka
- wyznacza wartości wyrażeń arytmetycznych zawierających pierwiastki, stosując prawa działań na pierwiastkach

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy definicję pierwiastków różnych stopni
2. Stosujemy działania na pierwiastkach.
3. Zamienia pierwiastki na potęgę o wykładniku wymiernym

**Temat 7: Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby rzeczywistej**

Nauczyciel podaje definicję i własności pierwiastka stopnia nieparzystego z lczby rzeczywistej, oraz jego własności.

1. $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}^n = \mathbf{a}$**, a; b**$\in \mathbf{R}$

Przykład: $\sqrt[3]{-8} = -2$, ponieważ $-2^3 = -8$

Podobnie jest dla innych pierwiastków z liczb należących do **R.**

**ZAD. 1**
Oblicz:

**a)** $\left(\sqrt[3]{-\left(\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}\right)^{\mathbf{3}} =$

**b)** $\sqrt[3]{(-1):125} =$

**c)** $\sqrt[5]{-625 * 5} =$

**d)** 10% z wartości wyrażenia:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}: \sqrt{\frac{6}{25}+\frac{1}{4}}}}{\sqrt{\frac{5}{7}}} =$$

**Zadanie domowe:**

**ZAD. 1**

Oblicz:

a) $\left(6\sqrt[3]{40\frac{1}{2}} - 8\sqrt[3]{12}\right) : 2\sqrt[3]{1{,}5} =$

b) $\left(4\sqrt[3]{-625} - 3\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{320}\right) : \sqrt[3]{5} =$

c) Uzasadnij, że:

$$\sqrt[3]{0{,}75} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$$

## 6. Pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym

### Umiejętności konieczne:

- pojęcie  potęgi o wykładniku naturalnym
- pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym
- działania na potęgach

### Pojęcia i fakty:

- oblicza wartość potęgi o wykładniku naturalnym, całkowitym
- stosuje własności o działaniach na potęgach do ich obliczania

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję:
   *- potęgi o wykładniku naturalnym*
   *- potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym*

2. Działania na potęgach:
   *- kolejność wykonywania działań*

## Temat 8: Pojęcie potęgi o wykładniku całkowitym

Uczniowie przypominają definicję potęgi i poznane w gimnazjum własności.
Nauczyciel podaje podstawowe wzory na potęgi i działania na nich.

**DEF**. N – tą potęgą liczby a nazywamy iloczyn n czynników, z których każdy wynosi a.
$a^n = a * a * a * \ldots * a$

a) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; dla $a \neq 0$
b) $(a^n)^m = a^{n*m}$
c) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

**ZAD.1**
Oblicz:

a) $\left[\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} * 5^1 - \left(\sqrt{2}\right)^0 * (0,5)^2\right]^{-2} =$

b) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2 * 5^2\right]^{-1} + \frac{2^{-3}}{\sqrt{81}} =$

c) $\frac{4^{28} - 6 * 4^{25} : 4\frac{1}{7}}{16^{13} + 3 * 4^{25}} =$

d) Która z liczb jest większa?
$1024^5$ czy $5^{1024}$?

e) Ile wynosi połowa liczby $200^{123}$?

## Zadanie domowe:

**Uporządkuj liczby**

a) $27^4$; $9^7$; $243^2$; $81^5$; $9^8$; $3^{18}$ od najmniejszej do największej.

b) $64^3$; $16^4$; $32^2$; $8^4$; $4^{10}$; $2^{25}$ od największej do najmniejszej.

## Temat 9: Notacja wykładnicza

- Uczeń zapisuje i odczytuje liczbę w notacji wykładniczej;
- Uczeń wykonuje działania na liczbach zapisanych w notacji wykładniczej.

### Wprowadzenie:

Nauczyciel zapoznaje uczniów z definicją notacji wykładniczej i uzasadnia potrzebę jej wprowadzenia podając przykłady występujących w przyrodzie wielkości bardzo dużych i bardzo małych. Wykorzystuje stronę internetową o adresie: www.medianauka.pl wybierając tematy: Długość i Masa.

### Uczniowie z pomocą nauczyciela rozwiązują proste przykłady:

12345 km ile to metrów?
0,058 g ile to kilogramów?
4,3 mm ile to metrów?
5,12 t ile to gramów?

### Samodzielna praca uczniów:

**a)** Zapisz w notacji wykładniczej liczby:

1015000=
0,0000567=
9700=
0,00042=

**b)** Zapisz w postaci dziesiętnej:

$3{,}26 \cdot 10^{4}=$
$1{,}9 \cdot 10^{6}=$
$6{,}06 \cdot 10^{-3}=$
$5 \cdot 10^{-5}=$

### Do kolejnych zadań nauczyciel wykorzystuje dane z Internetu

**1)** Oblicz stosunek masy Ziemi do masy Księżyca.
**2)** Oblicz ile sekund biegnie światło od Słońca do Ziemi?
**3)** Ziemia jest w przybliżeniu kulą. Oblicz długość równika, pole powierzchni i objętość Ziemi.
**4)** Ile cząsteczek kurzu zrównoważy masę słonia?

## Indywidualna praca uczniów

Wykonaj działania i wynik zapisz w notacji wykładniczej:

$(5{,}2 \cdot 10^{20}) \cdot (3{,}5 \cdot 10^{10}) =$
$(1{,}2 \cdot 10^{-5}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-7}) =$
$(1{,}25 \cdot 10^{8}) : (5 \cdot 10^{12}) =$
$(2{,}3 \cdot 10^{-2}) : (3{,}2 \cdot 10^{-5}) =$
$2{,}7 \cdot 10^{15} + 5{,}3 \cdot 10^{14} =$
$4{,}4 \cdot 10^{-3} + 6{,}5 \cdot 10^{-2} =$
$7{,}24 \cdot 10^{4} - 1.38 \cdot 10^{3} =$
$8{,}3 \cdot 10^{-4} - 4{,}7 \cdot 10^{-5} =$

## Zadanie domowe:

Wykorzystaj informacje o jednostkach miar na stronie encyklopedia.pwn.pl i rozszyfruj zapisy:

- 17 megaton
- 5 gigawatów
- 28 mikrometrów
- 49 pikogramów
- 216 jottasekund
- 7 femtoomów

## 7. Sposoby przybliżania liczb

### Umiejętności konieczne:

- algorytm zaokrąglania
- metoda przybliżania liczby z nadmiarem
- metoda przybliżania liczby z niedomiarem
- błąd przybliżenia

### Pojęcia i fakty:

- zaokrągla liczbę z podaną dokładnością do określonego miejsca

- oblicza błąd przybliżenia danej liczby i określa, czy jest to przybliżenie z nadmiarem, czy z niedomiarem

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy zasadę zaokrąglania liczb
2. Wie, jak zaokrąglić liczbę z nadmiarem lub niedomiarem
3. Potrafi oszacować błąd przybliżenia

## Temat 10: Sposoby przybliżania liczb

Nauczyciel wyjaśnia, że liczby wymierne mają rozwinięcie dziesiętne okresowe, zaś niewymierne mają nieokresowe i nieskończone.
Wyjaśnia, że dwa odcinki są niewspółmierne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje odcinek, mieszczący się w każdym z nich dokładnie całkowitą liczbę razy.

### Przykład 1:
Boki kwadratu i jego przekątna.

### Przykład 2:
Ułamek dziesiętny, nieskończony
0,10110111011110… przedstawia liczbę niewymierną. Odpowiada ciąg przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem

0,1 0,10 0,101 0,1011 0 10110, …

oraz ciąg przybliżeń dziesiętnych z nadmiarem

0,2 0,11 0,102 0,1012 0,10111,…

**ZAD. 1**
Dla liczb:

a) x = 0,1032981…
b) z = 0,6928146…

Podaj przybliżenia z nadmiarem i niedomiarem do 1; 2; 3; 4; 5 miejsc po przecinku.
Podaj błąd przybliżeń.

**ZAD. 2**
Oszacuj sumę liczb x + z do czwartego miejsca po przecinku:

a) z niedomiarem
b) nadmiarem

**ZAD. 3**
Znajdź przybliżenia dziesiętne liczb $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{11}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ do drugiego miejsca po przecinku:

a) z nadmiarem
b) niedomiarem
c) oszacuj błąd przybliżeń

## Zadanie domowe.

**ZAD. 1** Znajdź przybliżenia dziesiętne liczb: $\frac{2}{7}$; $\sqrt[3]{4}$ do ósmego miejsca po przecinku.

a) z nadmiarem

b) niedomiarem

c) oszacuj błąd przybliżeń

## 8. Pojęcie procentu

### Umiejętności konieczne:

- pojęcie procentu
- pojęcie punktu procentowego

### Pojęcia i fakty:

- oblicza procent z danej liczby
- zna pojęcia procentu i punktu procentowego
- oblicza, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba
- oblicza liczbę, gdy dany jest jej procent
- zmniejsza i zwiększa liczbę o dany procent
- stosuje obliczenia procentowe w zadaniach praktycznych

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy metodę przedstawiania liczb za pomocą procentu i odwrotnie
2. Wie, co to jest punkt procentowy, potrafi go obliczyć
3. Zna działania na procentach

## Temat 11: Pojęcie procentu

Nauczyciel przypomina pojęcie procentu, .,zasadę zamiany liczb na procenty i odwrotnie. Wyjaśnia pojęcie punktu procentowego.
1% - to setna część tej liczby. Np. 1% liczby wynosi $\frac{a}{100}$.

**ZAD. 1**
Oblicz 15% wartości wyrażenia:

$$\frac{3}{5} - \left(1{,}4 * \frac{5}{14} - \frac{0{,}9}{3^2}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right)$$

**ZAD. 2**
Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{8 * 4\frac{1}{4} - \left(11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{3}\right) : 1\frac{2}{3}\right)}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} * 1\frac{2}{7}} =$$

i znajdź liczbę, której 25% stanowi jego wartość.

**ZAD. 3**
Cenę materiału podwyższono 0 20% a następnie obniżono o 20%. Czy otrzymano cenę pierwotną?

**ZAD. 4**
Klasa liczy 30 uczniów, liczba nieobecnych wynosi $6\frac{2}{3}\%$. Ilu uczniów było nieobecnych na lekcji? Jaki to % liczby wszystkich uczniów?

**Nauczyciel opisuje pojęcie punktu procentowego na podstawie przykładu.**

### Przykład:

Bank poinformował, że oprocentowanie kredytu wzrosło z 8% do 12%. Oznacza to, że podniósł stopę procentową o 4 punkty procentowe *(zaś nie o 4%!)*.
Jeżeli słyszymy wiadomość, że bezrobocie wzrosło z 15% o 6 punktów procentowych oznacza to, że bezrobocie wynosi obecnie 21%.

### Zadanie domowe.

Pan Jan miał kredyt w banku w wysokości 4000zł. Wkrótce stopa procentowa wzrosła z 10% do 12%. O ile punktów procentowych wzrosła stoa procentowa?
O ile procent wzrosło oprocentowanie kredytu pana Jana?

## Temat 12: Powtórzenie wiadomości

Zadania na powtórkę, to porcja 10 sztuk.

**ZAD. 1**
Rozłóż na czynniki, znajdź NWW = a i NWD(b) = c dla liczb: 108 i 270. Sprawdź czy znalezione liczby spełniają NWW(108; 270) * NWD(108; 270) = a* b

**ZAD. 2**
Dane są zbiory A i B:
A = {x: x∈ N i $4x + 6 > 2x - 2$}; B = {x: x∈ C i 2x + 3> $x - 1$ }
Znajdź A \ B; A ∪ B; A ∩ B oraz B \ A; B ∪ A; B ∩ A.

**ZAD. 3**
Oblicz, ile wynosi połowa liczby $2^{100}$.

**ZAD. 4**
Wykonaj działania:

$$\left\{\frac{(-4{,}5*)\sqrt{\frac{25}{81}}+\left(-6\frac{2}{5}\right)*\sqrt{\frac{9}{64}}}{\left[\left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)*\left(-1\frac{1}{2}\right)-3{,}3\right]:\sqrt{0{,}09}}+\sqrt{6{,}25}\right\}:\left(-\sqrt{\frac{16}{25}}\right)$$

**ZAD. 5**
Oblicz jakim procentem liczby a = $\left(6 * \frac{-2}{3-3{,}75}\right) : \sqrt{1\frac{23}{121}}$ jest liczba b = $\left|3\frac{2}{3} : \frac{5}{9} * (-0{,}4)\right|$

**ZAD. 6**
Usuń niewymierność z mianownika $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

**ZAD. 8**
Rozwiń ułamek $\frac{3}{7}$ i zamień go na ułamek zwykły znana metodą.

**ZAD.9**
Cenę **a** towaru podwyższono o12% a następnie obniżono o 22%. O wynosi cena towaru?

**ZAD. 10**
Oblicz 24% wyrażenia

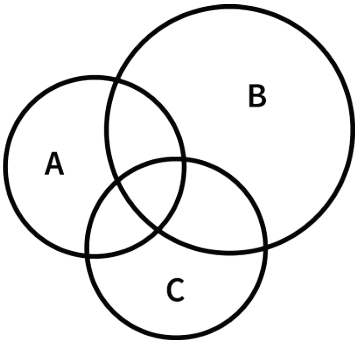
$$\frac{8 * 4\frac{1}{4} - \left(11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3} + \left(-2\frac{1}{3}\right) : 1\frac{2}{3}\right)}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} * 1\frac{2}{7}} =$$

## SPRAWDZIAN (Liczby rzeczywiste)

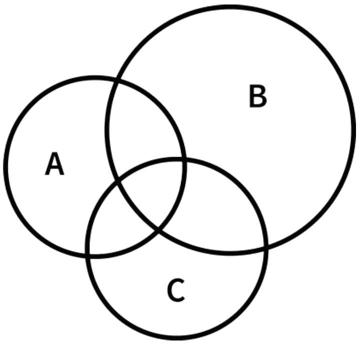
**Imię i nazwisko ……………………………………………….klasa I …………………..**

**ZAD.1 N**a oddzielnych rysunkach zakreskuj następujące zbiory:

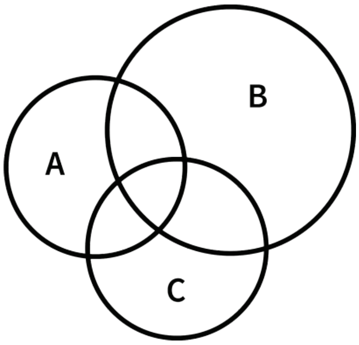
a)




b)




c)




| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

a) $A \cup B$; b) $A \setminus B$ ; c) $(A \cup B) \cap (A \cup B)$

**ZAD.2**
Czy zbiór $N \cap (-\infty; 3) \cap (2; +\infty)$ jest przedziałem:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |

a) $(2; 3)$ b) $(2;3\rangle$ **c)** $\langle 2;3)$ d) $\langle 2; 3\rangle$
b)

**ZAD.3**
Jakim procentem liczby 34% z 40 jest liczba, której 20% stanowi wyrażenie

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} * \left(\frac{2}{\sqrt{81}}\right)^{-1} - \left[11\frac{1}{5} : \left(\frac{3}{28}\right)^{-1} + 3^{-1} : \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^{-1}}\right]}{\left[4^{-2} : \left(\sqrt{2^4}\right)^{-1}\right]^{-1}}$$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**ZAD.4**
Usuń niewymierność z mianownika w wyrażeniu i oszacuj (podaj w przybliżeniu) wartość wyrażenia z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| | |

$$\frac{1}{3+\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}-3}$$

**ZAD.5**
Rozłóż na czynniki następujące wyrażenie:

a) $a^8 - 2^4 =$
b) $z^2 - 5az + 6a^2$
c) Czy sześcian liczby $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ = jest równy:
$(a-b)^3$; b) $(a-b)(a+b)^2$; c) $(a-b)(a-b)^2$; c) $(a+b)(a-b)^2$

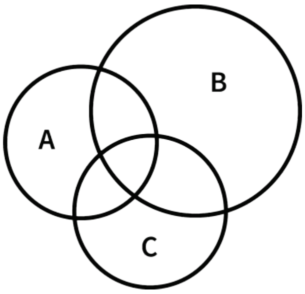
| a | | b | | c | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 3 | | | | |

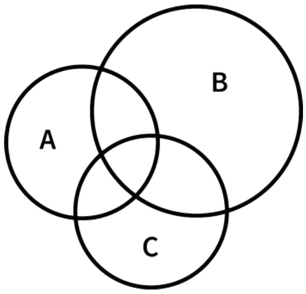
| **SUMA PUNKTÓW** | 0 -7 | 8-15 | 16 - 17 | 18 - 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| **OCENA** | ndst | dp | dst | db | bdb |

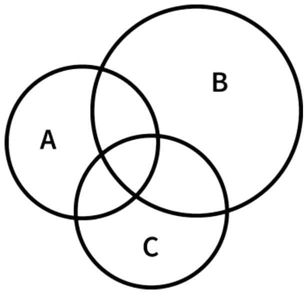
## Temat 14: Poprawa pracy klasowej

Rozwiązujemy zadania z pracy klasowej i podobne z tego działu

**ZAD.1 N**a oddzielnych rysunkach zakreskuj następujące zbiory:

a) 


b) 


c) 


| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

a) $A \cup B$; b) $A \setminus B$ ; c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

**ZAD.2**

Czy zbiór $N \cap (-\infty; 3) \cap (2; +\infty)$ jest przedziałem:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |

c) $(2; 3)$ b) $(2;3\rangle$ **c)** $\langle 2;3)$ d) $\langle 2; 3\rangle$

**ZAD.3**

Jakim procentem liczby 34% z 40 jest liczba, której 20% stanowi wyrażenie

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} * \left(\frac{2}{\sqrt{81}}\right)^{-1} - \left[11\frac{1}{5} : \left(\frac{3}{28}\right)^{-1} + 3^{-1} : \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^{-1}}\right]}{\left[4^{-2} : \left(\sqrt{2^4}\right)^{-1}\right]^{-1}}$$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**ZAD.4**
Usuń niewymierność z mianownika w wyrażeniu i oszacuj (podaj w przybliżeniu) wartość wyrażenia z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

$$\frac{1}{3+\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}-3}$$

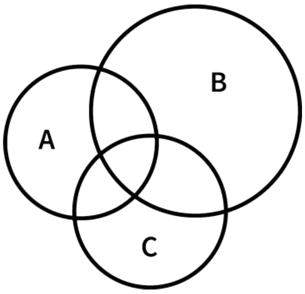
**ZAD.5**
Rozłóż na czynniki następujące wyrażenie:

b) $a^8 - 2^4 =$
c) $z^2 - 5az + 6a^2$
d) Czy sześcian liczby $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ = jest równy:
$(a-b)^3$; b) $(a-b)(a+b)^2$ ; c) $(a-b)(a-b)^2$; c) $(a+b)(a-b)^2$

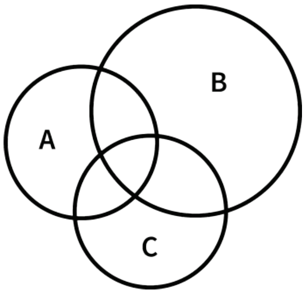
## ROZWIĄZANIA

**ZAD.1 N**a oddzielnych rysunkach zakreskuj następujące zbiory:

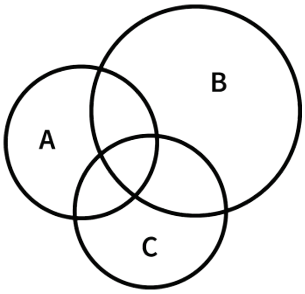
a)




b)



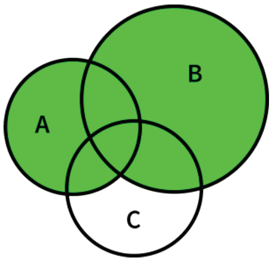

c)



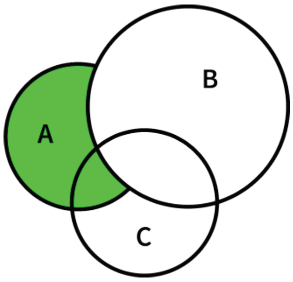

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

a) $A \cup B$; b) $A \setminus B$ ; c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

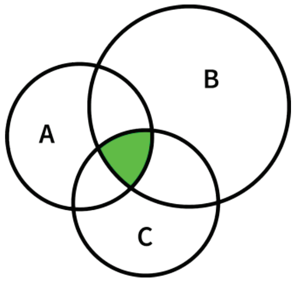
AD. a)




AD. B)




AD. C)




**ZAD.2**

Czy zbiór $N \cap (-\infty; 3) \cap (2; +\infty)$ jest przedziałem:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |

a) $(2; 3)$ b) $(2;3\rangle$ **c)** $\langle 2;3)$ d) $\langle 2; 3\rangle$

**ZAD.3** Jakim procentem liczby 34%  z 40 jest liczba, której 20% stanowi wyrażenie

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} * \left(\frac{2}{\sqrt{81}}\right)^{-1} - \left[11\frac{1}{5} : \left(\frac{3}{28}\right)^{-1} + 3^{-1} : \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^{-1}}\right]}{\left[4^{-2} : \left(\sqrt{2^4}\right)^{-1}\right]^{-1}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{1}\right)^{3} * \left(\frac{\sqrt{81}}{2}\right)^{1} - \left[11\frac{1}{5} : \left(\frac{28}{3}\right)^{1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{1} : \sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)^{1}}\right]}{\left\{\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{2} : \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2^4}}\right)\right)^{1}\right]}\right\}^{1}} = \frac{8 * \frac{9}{2} - \left[\frac{56}{5} : \frac{28}{3} + \frac{1}{3} : \frac{5}{3}\right]}{\frac{1}{\frac{1}{16} : \frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{36 - \left[\frac{56}{5} * \frac{3}{28} + \frac{1}{3} * \frac{3}{5}\right]}{\frac{1}{1}} = \frac{36 - \left[\frac{2 * 3}{5} + \frac{1}{5}\right]}{1} = \frac{36 - \frac{7}{5}}{1} = 34\frac{3}{5}$$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**ZAD.4**

Usuń niewymierność z mianownika w wyrażeniu i oszacuj (podaj w przybliżeniu) wartość wyrażenia z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

$$\frac{1}{3+\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{1}{3+\sqrt{11}} + \frac{1}{3-\sqrt{11}} = \left(\frac{\sqrt{11}-3+3+\sqrt{11}}{3+\sqrt{11} * \sqrt{11}-3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{11}}{11-9}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{2}$$

$$= \sqrt{11}$$

**ZAD.5**

Rozłóż na czynniki następujące wyrażenie:

a) $a^8 - 2^4 =$

b) $z^2 - 5az + 6a^2$

c) Czy sześcian liczby $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ = jest równy:

$(a-b)^3$;  b) $(a-b)(a+b)^2$ ;  c) $(a-b)(a-b)^2$;  c) $(a+b)(a-b)^2$

**AD. a)**

a) $a^8 - 2^4 = ((a^4)^2 - (2^2)^2)((a^4)^2 + (2^2)^2) = (a^4 - 2^2)(a^4 + 2^2) = ((a^2)^2 - 2^1)((a^2)^2 + 2^1) =$

$= \left(a^2 - \sqrt{2}\right)\left(a^2 + \sqrt{2}\right) = \left(a^2 + \sqrt{2}\right)\left(a + \sqrt[4]{2}\right)\left(a - \sqrt[4]{2}\right)$

**AD. b)**

b) $z^2 - 5az + 6a^2 = z^2 - 2az - 3az + 6a^2 = z(z - 2a) + 3z(z - 2a) = (z - 2a)(z + 3a)$

**AD. c)**

c) Czy sześcian liczby $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ = jest równy:
a) $(a - b)^3$; b) $(a - b)(a - b)^2$ ; c) $(a - b)(a - b)^2$; c) $(a + b)(a - b)^2$

| Pyt nr 4c | |
|---|---|
| Typ pytania | Wybierz odpowiedź |
| Treść pytania | Czy sześcian liczby $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ jest równy? |
| Odpowiedzi (od a do d) | a) $(a - b)^3$<br>b) $(a - b)(a - b)^2$<br>c) $(a - b)(a - b)^3$<br>c) $(a + b)(a - b)^3$ |
| Multimedia do odpowiedzi: | |
| Grafika | Rozdzielczość 640x480 |
| Równanie matematyczne | Wzory matematyczne |
| Audio | |
| Wideo | Rozdzielczość 800x600 |
| Odpowiedź zwrotna | Prawidłowa odpowiedź – uzasadnienie<br>a) $(a - b)^3$ - prawidłowy wzór na sześcian różnicy |
| | Nieprawidłowa odpowiedź - b; c; d |

## 9. Zbiory i działania na nich

### Umiejętności konieczne:

- sposoby opisywania zbiorów
- zbiory skończone i nieskończone
- pojęcie zbioru pustego
- pojęcie podzbioru
- relacja zawierania zbiorów
- zapis symboliczny zbioru
- nierówności i ich graficzne przedstawienie
- działania na przedziałach

### Pojęcia i fakty:

- posługuje się pojęciami: zbiór, podzbiór, zbiór pusty, zbiór skończony, zbiór nieskończony
- wymienia elementy danego zbioru oraz elementy do niego nienależące
- opisuje słownie i symbolicznie dany zbiór
- określa relację zawierania zbiorów
- rozróżnia zbiory

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy metodę graficznego przedstawiania liczb za pomocą przedziałów, grafów, wzoru, wykresu.
2. Wie, jak graficznie przedstawić rozwiązanie nierówności
3. Zna działania na zbiorach i przedziałach

## Temat 1; 2; 3; 4: Pojęcie zbiory i własności.

**Nauczyciel podaje pojęcie zbioru i jego własności**

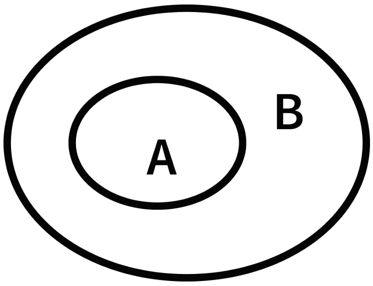
Zbiór, to takie pojęcie, którego nie definiujemy, ponieważ jest to pojęcie pierwotne.

Konkretny zbiór możemy określić w dwojaki sposób:

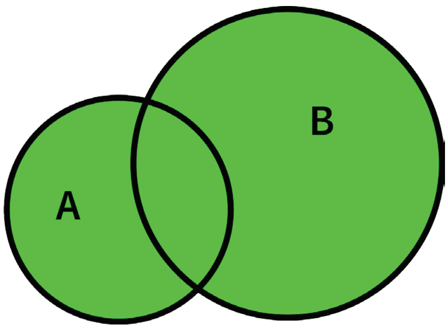
a) wymieniając wszystkie jego elementy, np. $A = \{1; 2; 3\}$
b) podając własności, które posiadają wszystkie jego elementy np. B = $\{x : x \in N; 0 \leq x \leq 9\}$

### WŁASNOŚCI:

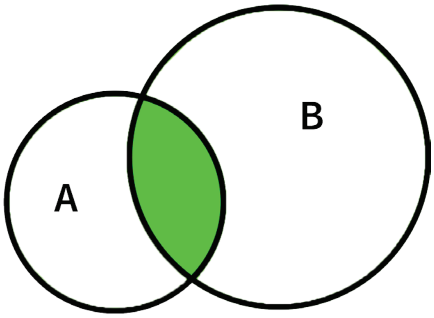
1. Dwa zbiory A i B są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i odwrotnie.
   A = B ⇔ (dla każdego x mamy x$\in A \Leftrightarrow x \in B$ )
2. Zbiór A jest **podzbiorem** zbioru B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B.
   A ⊂ B ⇔(dla każdego x mamy x$\in A \Rightarrow x \in B$ )




3. **Sumą zbiorów** A i B nazywamy taki zbiór A ⋃ B, którego elementami są wszystkie elementy, które należą do zbioru A i należą do zbioru B:
   x$\in$ A ⋃ B ⇔ ( x$\in$ A lub x $\in$ B )

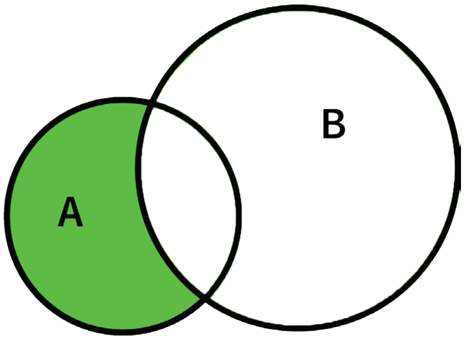



4. **Iloczynem zbiorów** A i B (wspólną częścią) nazywamy taki zbiór A⋂ B, którego elementami są wszystkie te elementy, które należą do zbioru A i należą do zbioru B
   x$\in$ A⋂ B ⇔ ( x$\in$ A i x $\in$ B )



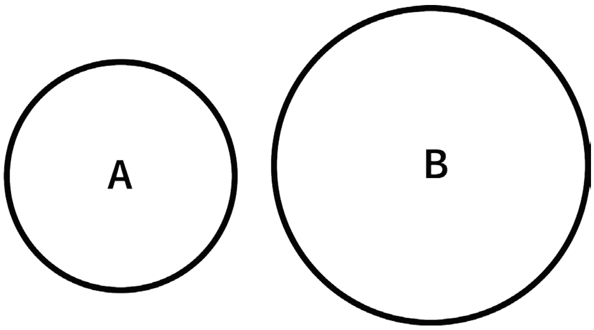

5. **Różnicą zbiorów** A i B nazywamy taki zbiór A \ B, którego elementami są te elementy, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } x \notin B)$




6. Zbiór Ø (pusty) nie zawiera żadnego elementu. Zbiór pusty należy do każdego zbioru.

7. Zbiory rozłączne
8.




$x \in A$ i $x\, x \notin B$ oraz $x \in B$ i $x\, x \notin A$
Iloczyn tych zbiorów jest zbiór pusty Ø

### Przykłady do samodzielnego rozwiązania:

**ZAD. 1**
Na osi liczbowej wyznacz konstrukcyjnie punkty odpowiadające liczbom
$\frac{2}{5}$; -0,(3); 1,(4); $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}+1$; $\sqrt{5}$;

**ZAD. 2**
Wyznacz zbiory: N ∪ C =; R ∩ W =; R \ W =; N ∩ C =;

**ZAD. 3**
Dane są zbiory:

a) A = (2; 5) i B = $\langle -4;\ 5)$.
b) A = $\langle -3: 4\rangle$ i B = $(-\infty; -1)$
c) A = $\langle -3;\ -1\rangle$ i B = $(4; 8)$
d) A = $(-\infty; 4)$ i B = ( -1;+∞)
e) Wyznacz A ∪ B; A ∩ B; A \ B; B \ A. Podaj ilustrację na osi liczbowej.

**ZAD. 4**
Opisz następujące zbiory na osi liczbowej.

a) $\{x: x\ < 1 \text{ i } x\ \geq 0\ \}$
b) $\{x: x\ < 1 \text{ i } x\ > 2\ \}$
c) $\{x: x\ \leq 1 \text{ i } x\ <\ 0\ \}$
d) $\{x: x\ \leq 1 \text{ i } x\ \geq 0\ \}$

**ZAD. 5**
Zaznacz na osi przedziały:

a) $\langle 0; 2\rangle\langle 1; 4\rangle$
b) $(-\infty; 1) \cap \langle 0; 2\rangle$
c) $(-\infty; 1) \cup\ \langle 0; 2\rangle$
d) $\langle -5; +\infty\ ) \cap\ \langle 0; \infty)$
e) $\langle -\sqrt{3}; +\infty) \cap (-\infty; \sqrt{5})$
f) $(-5; 1) \cap (-\infty; 1\rangle$

**ZAD. 6**
Zaznacz na osi liczbowej przedziały, a następnie wyniki działań w kolejności ich wykonywania.
a) $[(-1; 3) \cup\ (0;\ +\infty)] \cap (-5: 1)$
b) $[\langle -2; 3\rangle \cap (2; 5)] \cup \langle 2; 4\rangle$
c) $[(-\infty; -3) \cup\ (0;\ +\infty)] \cap (-7: 1)$
d) $[\langle -4; 13\rangle \cap (2; 5)] \cup \langle 5; 6\rangle$

**ZAD. 7**
Oblicz:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| N ∩ C =; | N ∩ R =; | C ∩ NW =; | NW ∩ $W$ =; | N ∩ ∅ =; | W ∪ NW =; |
| NW ∪ $R$ =; | C ∪ $N$ =; | R \ W **=;** | C \ NW =; | $R_+ \cup R_-$ =; | C ∪ ∅ =; |

**ZAD. 8**
Następujące zbiory przedstaw na osi liczbowej:

{x: x∈ R i -3 ≤ x < 2}; {x: x∈ R i -1 < x ≤ 0}; $\langle 3; +\infty) \cap (-\infty; 6)$;
$(-\infty; -2) \setminus (-1; +\infty)$; $\langle 3; +\infty) \cup (4; +\infty)$; $(-\infty; 0) \cap \langle -5; +\infty)$

## Zadanie domowe.

Na osi liczbowej zaznacz następujące zbiory:

a) A = {x: x ∈ N i 2 ≤ x ≤ 8 }
b) B = {x: x ∈ R i 2 ≤ x ≤ 8 }
c) C = {x: x ∈ R i x 2 > 2 }
d) D = {x: x ∈ R i x ≤ 2 }

## Temat 5;6 7: Równania i nierówności; wzory skróconego mnożenie z zastosowaniem zbiorów

Nauczyciel podaje treść zadań do rozwiązania z zastosowaniem poznanych metod.

**ZAD. 1**

Rozwiąż podane równania i nierówności. Dla nierówności podaj odpowiedź graficzną.

a) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{2x-7}{2x-1}$

b) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = 0$

c) $\frac{x-3}{4} + \frac{x-4}{3} = \frac{x-5}{2} \ \frac{x-4}{8}$

d) $\frac{3-x}{2} > \frac{x-6}{3}$

e) $\frac{0,6-3x}{6} > \frac{0,9-2x}{5}$

f) $3,5 = \frac{x+1,2}{12} > 1,5 - \frac{1,8-x}{18}$

g) $\frac{4x-7}{5} - \frac{2x+1}{2} > 3$

h) $(x-2)^2 + 1 < \frac{x+8}{3+} + \ (x-1)(x+1)$

i) $\frac{(x+1)(x-1)-(2+2)^2}{3} > 2x + 4$

j) $\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = 0$

k) $x > \left[\sqrt{1\frac{3}{81}} * \frac{3^2}{2\sqrt{21}} - \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}\ \right] * 2 - \left(\sqrt{6}\right)^2$

l) $(x+1)^2$ -5(x - 2) > $\left(x + \sqrt{13}\right)$ * $\left(x - \sqrt{13}\right)$

m) Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność.

1 – 1000x < 1,999* $10^6$

n) $\frac{x-\sqrt{2}}{1,5} > \frac{4}{\sqrt{3}}$

o) $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+2)^2}{3} - 2x < 4 - \frac{(1-x)(1+x)}{6}$

p) $(x-3)^2 \leq 2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) - \frac{1}{3}(-3x+18) - x^2$

**ZAD. 2** Usuń niewymierności z mianownika.

a) $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{7}}$

e) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

## 10. Wartość bezwzględna

### Umiejętności konieczne:

- wykonywanie działań w pamięci
- stosowanie kolejności wykonywania działań
- zbiory liczbowe

### Pojęcia i fakty:

- wartość bezwzględna liczby
- obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych z wartością bezwzględną
- rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną
- stosowanie własności wartości bezwzględnej

### Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję wartości bezwzględnej
2. Stosujemy definicję do obliczania wartości wyrażeń
3. Poznajemy własności wartości bezwzględnej
4. Stosujemy własności do uproszczania wyrażeń
5. Poznajemy geometryczną interpretację wartości bezwzględnej
6. Rozwiązujemy równania i nierówności w oparciu o interpretację geometryczną i własności wartości bezwzględnej

## Temat 8: Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej.

**1.** Nauczyciel podaje definicję

$$|x| = \begin{cases} \mathbf{x\ dla x \geq 0} \\ \mathbf{-x\ dla\ x} < 0 \end{cases}$$

**2.** Uczniowie wspólnie rozwiązują przykłady obliczania wartości bezwzględnej na podstawie definicji

**ZAD. 1**

$\left|5\frac{1}{2}\right| =$

$|-13,84| =$

$|0| =$

$|1-\sqrt{2}| =$

$|4\sqrt{2}-5| =$

$|\pi-3| =$

$|\sqrt{5}-5| =$

$\left|0,66-\frac{2}{3}\right| =$

**ZAD. 2**

$|7| =$

$|-7| =$

$|-138| =$

$|138| =$

$|-0,8| =$

$|0,8| =$

Czy dostrzegasz jakąś prawidłowość?

$|a| = |-a|$

**3. Nauczyciel prezentuje film**

**ZAD.3** Zapisz bez użycia znaku wartości bezwzględnej

$$|x-5| = \begin{cases} \mathbf{x-5\ dla\ x \geq 5} \\ \mathbf{-x+5\ dla\ x < 5} \end{cases}$$

## Praca samodzielna

$|x+3| = \{$

$|5-2x| = \{$

**4.** Nauczyciel wprowadza pojęcia:

Wartości bezwzględnej jako odległości liczby rzeczywistej od liczby 0 na osi
Uczniowie zaznaczają na osi liczby, których wartości bezwzględne spełnią warunek:
$|x| = 4$ i $|x| = 1$

**ZAD. 4**

Oblicz odległość na osi liczbowej między liczbami:

-4 i -2,8 ; 7 i – 2,5 ; $-3\frac{1}{3}$ i 5,5; $\sqrt{3}$ – 1 i $\sqrt{3}$ + 5

$|x| = k$ i $k \in \mathbf{R_+}$; x = k lub x = - k

**ZAD. 5**

$|\mathbf{x}| = 3$

$|\mathbf{x}| = \sqrt{2}$

$|\mathbf{x}| = 0$

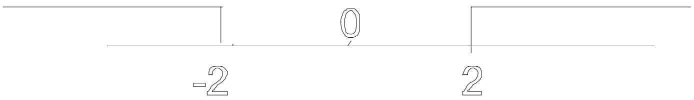
$|\mathbf{x}| = -5$

Wniosek; $|\mathbf{x}| \geq 0$

**Zad. 6**

Spróbujmy znaleźć wszystkie liczby, których odległość od 0 jest większa od 2.

$|\mathbf{x}| > 2$, mogą to być liczby: 5; -17; 204




x$\in (-\infty; -2) \cup (2;\ +\infty)$

Rozwiąż nierówności:

$|\mathbf{x}| \leq 8$

$|\mathbf{x}| > 4$

$|\mathbf{x}| \geq 1\frac{1}{2}$

## Zadanie domowe:

**ZAD. 1**

Oblicz:

$\mathbf{|53 - 7\sqrt{11}| =}$

$\mathbf{\left|\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right| =}$

$\mathbf{|-7 - \sqrt{3}| + |5 - 2\sqrt{3}| =}$

$\mathbf{|1 - (-8)| - |-3 - 4| =}$

$\mathbf{2|3 - \sqrt{7}| - 3|2\sqrt{7} - 5| =}$

**ZAD. 2**

Rozwiąż równania:

$|\mathbf{x}| = 1 - \sqrt{2}$

$|\mathbf{x}| = \mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

**ZAD. 3**

Rozwiąż nierówność:

$|\mathbf{x}| \leq 3\frac{1}{3}$

$|\mathbf{x}| > 2\sqrt{2}$

$|\mathbf{x}| < \ -2$

$|\mathbf{x}| \geq 0$

## Temat 9; 10: Ćwiczenia z wartością bezwzględną.

**Uczniowie stosują poznane wiadomości.**

**ZAD.1**

Wyznacz zbiory.

$A = \{x \in C: |x| \leq 3\sqrt{5}\}$

$B = \{x \in N: |x| < 7\}$

$C = \{x \in R: |x| > 1\frac{1}{3}\}$

**ZAD. 2**

Zapisz bez użycia symbol wartości bezwzględnej.

a) $|a-2| - |a-5|$ ; $a \in (-\infty; 0)$

b) $|a-1| + |a+2|$ ; $a \in \langle 3; \infty)$

c) $|6-a| + |3+a|$ ; $a \in (-3; 6)$

**ZAD.3**

Wiadomo, że $k > 0$ i $l < 0$.

Tam gdzie jest to możliwe zapisz wyrażenie bez użycia wartości bezwzględnej.

$|k| =$ $\left|-\frac{k}{l}\right| =$ $|k-l| =$

$|-l| =$ $|kl| =$ $|l-k| =$

$|k^2| =$ $|l^3| =$

**ZAD. 4**

Oblicz, dla jakich x prawdziwe jest równanie.

$|x-8| = x - 8$

$|2x - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 2x$

$|l + x| = -x - 1$

**Nauczyciel zapoznaje uczniów z twierdzeniem.**

**„Pierwiastek kwadratowy z liczby a jest równy wartości bezwzględnej tej liczby."**

$\sqrt{a^2} = |a|$

**Przykład.**

$\sqrt{5^2} = |5| = 5$ $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$

**ZAD. 5**

Rozwiąż. Uzupełnij z „worka”

$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$ $\qquad$ $\sqrt{(3\sqrt{(\sqrt{3}-5)^2}} =$

$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} =$ $\qquad$ $\sqrt{(2\sqrt{5}-10)^2} =$

$2-\sqrt{5}$ $\qquad$ $-1-\sqrt{2}$

$3\sqrt{3}-5$ $\qquad$ $5-3\sqrt{3}$

$\sqrt{5}-2$

$\sqrt{2}-1$ $\qquad$ $2\sqrt{5}-10$

$10+2\sqrt{5}$

## Zadanie domowe:

**ZAD.1**

Wyznacz zbiór:

A = {x∈C: $|x| > 3$ i $|x| \leq 3$}

B = {x∈R: $\sqrt{(x-4)^2} \leq 2$}

**ZAD. 2**

Wstaw w miejsce liczb a I b liczby rzeczywiste tak, aby warunek

a) $|x-a| = b$ spełniały liczby 3 i 10
b) $|x-a| < b$ spełniały liczby rzeczywiste x z przedziału $(-\pi+2; \pi+4)$

**ZAD. 3**

Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej

a) $|3\sqrt{2}-5| + |3^{-2}-2^{-2}| - |\pi-\sqrt{11}|$
b) $|2x-10| - |x+2|$ jeśli x ∈ (-2; 5)

## Temat 11: Własności wartości bezwzględnej

Nauczyciel przypomina własności już poznane

1. $|a| = |-a|$
2. $|a| \geq 0$

**(wynikają z pracy domowej)**

## Zadania dla uczniów

**ZAD. 1**
Oblicz:

$|-7 * 3| =$ $\quad |-7| * |3| =$ $\quad |-12 * (-2)| =$

$|-12| * |-2| =$ $\quad \frac{|-16|}{|2|} =$ $\quad \left|-\frac{16}{2}\right| =$

$\left|\frac{-18}{-6}\right| =$ $\quad \frac{|-18|}{|-6|} =$

Co zauważyłeś? Uczniowie ustalają wniosek:

$$|a * b| = |a| * |b| \text{ i } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

**ZAD. 2**
Nauczyciel daje do rozwiązania kolejny problem. Podaje przykłady liczb k i l takich, że:
$|k + l| \neq |k| + |l|$.

Uczniowie szukają liczb k i l

np. $|3 + (-8)| = |-5| = 5$
$|3| + |-8| = 3 + 8 = 13$
$5 < 13$

**ZAD. 3**
**Kolejny problem:**

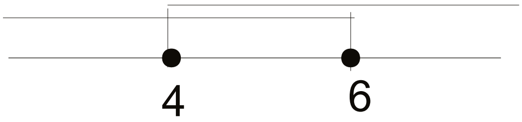
Dla jakich k i l, $|k + l| = |k| + |l|$.
$|-3 - 5)| = |-8| = 8$ i $\quad |-3| + |-5| = 8$

**Wniosek:**
k i l są tych samych znaków
Zanotować kolejną własność.
$|k + l| \leq |k| + |l|$

## Przykłady zastosowań poznanych własności:

$|3(x-5)| = |3| * |x+5| = 12$
$3 * |x+5| = 12 /:3$
$|x+5| = 4$ lub $x - 5 = -4$
$x = 9$ lub $x = 1$

$\sqrt{x^2 - 10x + 25} \leq 1$
$|x+5| \leq 1$
$x - 5 \leq 1$ i $x - 5 \geq -1$
$x \leq 6$ i $x \geq 4$




$x \in \langle 4;\ 6 \rangle$

## Przykłady do samodzielnego rozwiązania.

a) $|7x| = 14$

b) $|6 - 2x| = 15$

c) $\left|\frac{-2x}{5}\right| = 21 - |x|$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$

e) $|x+5| > 10$

f) $\left|\frac{-x}{2} + \frac{3}{2}\right| > 3{,}5$

g) $\sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4}} \leq \frac{3}{4}$

## Praca domowa:

1. $2\sqrt{3} - 4|2 + x| = 3\sqrt{3}$
2. $\sqrt{(x+4)^2} = 2$
3. $|1 - x| - 3\sqrt{2} = 4$
4. $\sqrt{(x^2 - 14x + 49} = 1$
5. $4 - |x - 4| > 0$
6. $\sqrt{(36 - 12x + x^2} \leq 6$
7. $1 - |x + 5| \geq 1$

## Temat12; 13; 14; 15: Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Nauczyciel podaje zadania do rozwiązania.

**ZAD. 1**
Rozwiąż równania

a) $|3x + 2| = 4$
b) 5x - 2$|3 - 4x| = 3$
c) $|1 - x| = |1 + 2x - x^2|$
d) $\big|3 - |2 - |1 - x||\big| = 4$
e) $|x| - |3x - 2| = x - 4$
f) $\sqrt{3x + 2}$ - $\sqrt{x}$ = $\sqrt{2}$
g) $|(x + 1)^2 - (x - 2)(x + 2)| = 6$
h) $\sqrt{x^2 - 6|x| + 9} - \sqrt{x^2 - 4|x| + 4 = 0}$
i) $|x| + 3x - 4 = 0$
j) $\big||x| - 4\big| = |-x|$

**ZAD. 2**
Rozwiąż nierówności

a) $|2x| < |x^2 - 4x| - 1$
b) $|2x - 8| < 1$
c) $||x| - 1| \geq 1$
d) $|3x + 6| + x \leq 6$
e) $||x| - 4| < |-x|$
f) $|10 - 5x| \geq 2$
g) $|x^2 - 4x| + |x| \geq 1$
h) $|2x - 1| \leq 1$
i) $\Big|\Big|||x| - 1| - 1\Big| - 1\Big| \geq 1$

## Sprawdzian „Wartość bezwzględna”

Imię i nazwisko ………………………………………………………….. klasa ……………..

| 0 | 1 |
|---|---|

**1**. Dla $a \geq \frac{1}{2}$ wyrażenie $|1 - 2a|$ jest równe?

A. 1-2a B. -1 – 2a C. 1 + 2a D. -1 + 2a

| 0 | 1 |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**2**.Podaj przykłady liczb spełniających warunek

$|a| = a$ $b = -|b|$ $c = |-c|$ $|d| = |d| -$

**3**. Zbiorem rozwiązań nierówności $|x + 2| \leq 5$ jest przedział:

A. $\langle -3; 7 \rangle$ B. $\langle -7; 3 \rangle$ C. $\langle 0; 3 \rangle$ D. $\langle -3; 3 \rangle$

| 0 | 1 |
|---|---|

**4**. Zbiór liczb na osi liczbowej, których odległość od liczby 2 jest równa 6 można opisać równaniem:

A. $|x - 2| = 6$ B. $|x + 2| = 6$ C. $|x - 6| = 2$ D. $|x + 6| = 2$

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|

**5**. Wykaż, że $\sqrt{(1 - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3} - 3)^2}$ jest liczbą wymierną.

| Ilość punktów | 0 - 4 | 5 | 6 -7 | 8 - 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## Sprawdzian „Wartość bezwzględna”

Imię i nazwisko …………………………………………………………….. klasa ………………

| 0 | 1 |
|---|---|

**1.** Dla $a \geq \frac{1}{2}$ wyrażenie $|1-2a|$ jest równe?

A. 1-2a B. -1 – 2a C. 1 + 2a D. -1 + 2a

| 0 | 1 |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**2.** Podaj przykłady liczb spełniających warunek

$|a| = a$ $b = -|b|$ $c = |-c|$ $|d| = |d| -$

**3.** Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+2| \leq 5$ jest przedział:

A. $\langle -3; 7\rangle$ B. $\langle -7; 3\rangle$ C. $\langle 0; 3\rangle$ D. $\langle -3; 3\rangle$

| 0 | 1 |
|---|---|

**4.** Zbiór liczb na osi liczbowej, których odległość od liczby 2 jest równa 6 można opisać równaniem:

A. $|x-2| = 6$ B. $|x+2| = 6$ C. $|x-6| = 2$ D. $|x+6| = 2$

| 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|

**5.** Wykaż, że $\sqrt{(1-2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}$ jest liczbą wymierną.

| Ilość punktów | 0 - 4 | 5 | 6 -7 | 8 - 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## 11. BŁĄD BEZWZGLĘDNY I BŁĄD WZGLĘDNY

**Umiejętności konieczne:**

- pojęcie błędu względnego i bezwzględnego
- sposoby ich opisywania
- przybliżenia

Pojęcia i fakty:

- rozróżnia pojęcia: błąd bezwzględny, błąd względny przybliżenia oraz potrafi je obliczać

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy metodę obliczania błędu bezwzględnego i błędu względnego
2. Zna metodę obliczania obliczania przybliżeń

## Temat 16: Błąd bezwzględny i błąd względny

Nauczyciel wyjaśnia pojęcie błędu względnego oraz bezwzględnego na przykładzie

**PRZYKŁAD:**

*Ogólnie, błąd określamy jako rozbieżność między wynikiem pomiaru (czy obliczeń) a rzeczywistością:*

Rozróżniamy:
- błąd względny przyjmuje się niekiedy jako stosunek błędu bezwzględnego do bezwzględnej wartości przybliżenia
- błąd bezwzględny rozumiemy jako różnica wartości bezwzględnej dokładnej i otrzymanej

**ZAD 1.**. Zmierzono długość pręta, o której wiadomo, że wynosi 125cm, i uzyskano 124cm.
Błąd bezwzględny wynosi $|125 - 124|$ = 1cm zaś względny $\frac{1}{125}$ = 0,008
Liczby przybliżone pojawiają się jako otrzymane z pomiaru miary pewnych wielkości oraz wielkości obarczonych błędem. Zastępując liczbę dokładną a przez jej przybliżenie $a_1$ popełniamy
- błąd bezwzględny, czyli $\Delta = |a - a_1|$
- błąd względny, czyli $k = \frac{\Delta}{a_1}$

Jeżeli a $> a_1$ to $a_1$ jest przybliżeniem z niedomiarem, zaś gdy a $< a_1$, to $a_1$ jest przybliżeniem z nadmiarem liczby a.
Zadania do samodzielnego rozwiązania:
**ZAD. 2** Zamień $\frac{13}{9}$ na ułamek dziesiętny. Mamy 1,444…
Ułamek możemy przedstawić jako: $\frac{13}{9} \approx 1{,}44$. W tym miejscu popełniamy błąd bezwzględny:
$\Delta = |a - a_1|$; $\Delta = \frac{13}{9} - 1{,}44 = \frac{1}{225}$ oraz błąd względny wynosi $\frac{1}{225} : 1{,}44 = \frac{1}{324}$
**ZAD. 3** Oblicz przybliżenia:

a) $\frac{3}{7} =$

b) $\frac{3}{7} =$

**ZDDANIE DOMOWE:**

**ZAD. 1** Oblicz przybliżenia:

a) $\frac{3}{11} =$

b) $\frac{3}{7} =$

c) $\frac{6}{13} =$

## Temat 17; 18: Powtórzenie wiadomości i praca klasowa

Teoretyczne przypomnienie wiadomości o NWW i NWD oraz metoda znajdowania powyższych własności.

**Zadania do samodzielnego rozwiązania:**

**ZAD. 1** Rozwiąż równania i nierówności. Rozwiązanie nierówności przedstaw graficznie i algebraicznie.

**a)** $\frac{1-2(x-1)}{x-1} > 0$

**b)** $\frac{x+1)}{x(x-1)} \geq 0$

**c)** $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} > \frac{x}{6}$

**d)** $|x+1| = 1$

**e)** $|2x-1| = |x-3|$

**f)** $\left|\frac{4x-5}{2x+7}\right| < 3$

**g)** $2x + \frac{1}{x-2} = 10 + \frac{1}{x-2}$

**h)** $\frac{1}{x} - \frac{3}{2(x+1)} = 1$

**i)** zamień na ułamek dziesiętny: $\frac{3}{11}; \frac{1}{7}$

## Praca klasowa nr 3

**ZBIORY I DZIAŁANIA NA ZBIORACH**

**Imię i nazwisko ........................................................... klasa ...................**

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 1** Jaka to liczba, jeżeli 26% tej liczby to: $\frac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}*3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0{,}8-1{,}5:2{,}25}$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 2** Zaznacz zbiory na osi liczbowej:
$(2;4) \cup \langle -1;2\rangle \cup (4;6\rangle =$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 3** Rozwiąż równanie: a) $(x+1)^2 - 5(x-2) = (x-\sqrt{13})*(x+\sqrt{13})$; 3pkt

b) $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+2)^2}{3} - 2x = 4 - \frac{(1-x)(1+x)}{6}$; 3pkt

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 4** Rozstrzygnij, która z równość jest prawdziwa:

a) $R \setminus \{0\} = (0;\ +\infty)(0;-\infty)$

b) $C_+ \cup \{0\} = (0;+\infty\rangle$

c) $R \cap R_+ = \langle -\infty;0)$

d) $R \cup R_- = (-\infty;\ +\infty)$

| Pyt nr 4 | |
|---|---|
| Typ pytania | Prawda/Fałsz |
| Treść pytania | Rozstrzygnij, która równość jest prawdziwa: |
| Odpowiedzi (od A do d) | Prawda |
| | Fałsz |
| Multimedia do odpowiedzi: | |
| Grafika | Multimedia do odpowiedzi: |
| Równanie matematyczne | Równanie matematyczne- (zbiory) |
| Audio | |
| Wideo | |
| Odpowiedź zwrotna | Prawidłowa odpowiedź – a; d (działania na zbiorach) |
| | Nieprawidłowa odpowiedź – b; c; (nie domykamy nieskończoności) |

| Ilość punktów | 1 - 7 | 8 - 9 | 10 - 13 | 14 -15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## Temat 19: Poprawa pracy klasowej

**ROZWIĄZANIA**

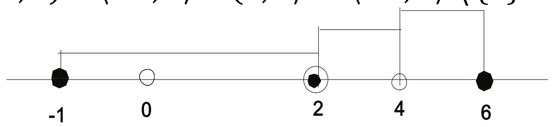
**ZAD. 1** Jaka to liczba, jeżeli 26% tej liczby to: $\frac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}*3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0,8-1,5:2,25}$

$$\frac{9\frac{1}{6}-1\frac{9}{14}-\frac{1}{30}*3\frac{1}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(8\frac{4}{15}-6\frac{7}{24}\right):0,8-1,5:2,25}=\frac{\frac{37}{6}-\frac{23}{14}-\frac{1}{30}*\frac{10}{3}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(\frac{124}{15}-\frac{151}{24}\right):\frac{4}{5}-\frac{3}{2}:\frac{9}{4}}==\frac{\frac{95}{21}-\frac{1}{9}+\frac{1}{63}}{\frac{19}{96}+\left(\frac{124}{15}-\frac{151}{24}\right)*\frac{5}{4}-\frac{3}{2}*\frac{4}{9}}=$$

$$\frac{\frac{31}{7}}{\frac{19}{96}+\frac{79}{40}*\frac{5}{4}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{31}{7}}{\frac{19}{96}+\frac{79}{32}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{31}{7}}{2}=\frac{31}{14}=2\frac{3}{14};\quad 26\%*2\frac{3}{14}=\frac{26}{100}*\frac{31}{14}=\frac{403}{700}$$

**ZAD. 2 Zad. 2** Zaznacz zbiory na osi liczbowej:

$$(2;4)\cup\langle-1;2\rangle\cup(4;6\rangle=\langle-1;6\rangle\setminus\{4\}$$




**ZAD. 3** Rozwiąż równanie: a) $(x+1)^2-5(x-2)=(x-\sqrt{13})*(x+\sqrt{13})$; 3pkt

b) $\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x+2)^2}{3}-2x=4-\frac{(1-x)(1+x)}{6}$; 3pkt

AD.a) $(x+1)^2-5(x-2)=(x-\sqrt{13})*(x+\sqrt{13})$; $x^2+2x+1-5x+10=x^2-13$

$x^2-x^2+2x-5x=-13-11$; $-3x=-24/:(-3)$; $\underline{x=8;}$

AD.b) $\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x+2)^2}{3}-2x=4-\frac{(1-x)(1+x)}{6}$; $\frac{x^2+2x+1}{2}-\frac{x^2+2x+1}{3}-2x=4-\frac{1-x^2}{6}$;

$\frac{x^2+2x+1}{2}-\frac{x^2+2x+1}{3}-2x=4-\frac{1-x^2}{6}/*6$;

$3x^2+6x+3-2x^2-4x-2-12x=24-1-x^2$; $-10x=-22$; $\underline{x=2,2;}$

**ZAD. 4 ODP. jw**

## 12. Funkcja Liniowa

**Umiejętności konieczne:**

- pojęcie funkcji liniowej
- sposoby jej opisywania
- określenie miejsca zerowego
- definicja funkcji liniowej oraz jej wykres
- własności funkcji liniowej

**Pojęcia i fakty:**

- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, wykres funkcji, miejsce zerowe funkcji
- rozpoznaje wśród danych przyporządkowań te, które opisują funkcje
- podaje przykłady funkcji
- potrafi opisać funkcję różnymi sposobami
- zna własności funkcji
- zna metodę obliczania współczynnika kierunkowego prostej
- zna warunek prostopadłości i równoległości dwóch prostych
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności liniowych oraz ich interpretację geometryczną
- potrafi analizować i układać równania i nierówności do zadań tekstowych

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy własności funkcji liniowych, tworzenie wykresów
2. Zna metodę obliczania wzoru funkcji
3. Potrafi znaleźć proste równoległe i prostopadłe
4. Interpretuje geometryczne rozwiązanie układów równań i nierówności

## Temat 1; 2; 3: Sposoby opisu funkcji liniowych i ich wykresy

Nauczyciel podaje definicję ogólną funkcji i jej sposoby przedstawienia:

**Def.** Funkcja nazywamy przyporządkowanie, według którego każdemu elementowi **x** ze zbioru **X** przyporządkowany jest dokładnie jeden element **y** ze zbioru **Y**. Zbiór **X** nazywamy zbiorem argumentów lub dziedziną funkcji zaś zbiór **Y** zbiorem wartości lub przeciwdziedziną.
Funkcję możemy przedstawić w postaci : wzoru literowego; grafu; tabelki; zapisu słownego; wykresu.

**WŁASNOŚCI:** (funkcji liniowej typu: Ax + By + C = 0)

- wykresem jest linia prosta
- miejscem zerowym jest taka wartość argumentu, dla której wartość funkcji wynosi zero.
- funkcja Ax + By + C = 0 może być przedstawiona w postaci: y = mx + k, gdzie m = $-\frac{A}{B}$ - jest to współczynnik kierunkowy; wyraz wolny k = $-\frac{C}{B}$ jest miejscem przecięcia wykresu funkcji z osią OY.
- miejsce zerowe funkcji wyrażamy wzorem $x_0 = -\frac{k}{m}$
- wykres funkcji y = mx, $m \neq 0$ zawsze przechodzi przez początek układu współrzędnych
- wykres funkcji y = mx + k; k i $m \neq 0$ nigdy nie przechodzi przez początek układu współrzędnych
- funkcja stała y = a, $a \neq 0$ jest równoległa do osi OX
- równanie postaci x = c, $c \in \mathrm{R}$ jest prostą równoległą do osi OY
- jeżeli współczynnik A = 0 wówczas otrzymujemy funkcję stałą typu y = a, $a \neq 0$ i $a \in \mathrm{R}$;
- gdy a = 0 wykresem jest oś OX.
- pęk prostych, toto zbiór linii prostych na płaszczyźnie przechodzących przez jeden punkt lub są równoległe.
- funkcja jest rosnąca, gdy współczynnik przy zmiennej x jest większy od zeza
- funkcja malejąca, gdy współczynnik przy zmiennej x jest mniejszy od zeza

**PRZYKŁADY FUNKCJI LINIOWYCH**

**ZAD. 1** Podaj przykłady funkcji każdego rodzaju: y = a; y = mx; y = mx + k i sporządź ich wykresy.
**ZAD. 2** Sporządź wykresy podanych funkcji, znajdź miejsca przecięcia z osiami.

y = -5x + 1;  $y = -\frac{2}{3}$;  y = 2x;  3y + 2x + 3 = 0;  3(3x + 2) + (5x - 4) = 0

**ZAD. 3** Które z wyżej podanych funkcji są rosnące, a które malejące? Podaj przedziały, w których funkcja rośnie a w których maleje.

**ZAD. 4** Znajdź miejsca przecięcia wykresu funkcji z osiami oraz podaj wzór tej funkcji, sporządź wykres każdej z podanych funkcji, gdy dane są:

a) y = 2x + b, $b \neq 0$ oraz $x_0$ = - 3

b) 2x + 4y + 6 = 0

c) y = mx + 4; przechodzi przez punkt P(1; - 6)

d) $3x + \frac{1}{3}y - b$; $b \neq 0$ i $x_0 = -1$

e) 2x = - 3

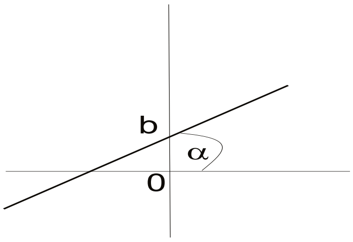
**Zadanie domowe:**

a) Napisz wzór funkcji y = ax + 2 przechodzącej przez punkt P(-4; $\frac{3}{2}$)

b) Napisz wzór funkcji y = 3x + b przechodzącej przez punkt P($-\frac{3}{2}$; $\frac{4}{5}$)

## Temat 4; 5; 6: Równanie prostej na płaszczyźnie oraz współczynnik kierunkowy

Przypomnienie własności funkcji liniowej oraz przykładów.
Nauczyciel podaje własności współczynnika kierunkowego dla funkcji f(x) = ax + b. Jest to prosta nachylona do osi OX pod takim kątem $\alpha$, dla którego a = tg $\alpha$. Jeżeli a $\neq 0$, to funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{a}$.




Nauczyciel podaje warunek równoległości dwóch prostych oraz prostopadłości.
Dwie proste k: y = ax + b, a, b$\neq 0$ i l: y = $a_1 x + b_1$ ; $a_1$ ; $b_1 \neq 0$ są równoległe wtedy gdy a = $a_1$ .
**ZAD. 1** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy i podaj wzory funkcji, których wykresy są równoległe do danych. Zaznacz miejsca przecięcia wykresów z osiami układu.

a) y = - x
b) 2y – 4x = 5
c) y = - 7
d) x = 4

Nauczyciel podaje warunek prostopadłości funkcji liniowych.
Dwie funkcje liniowe y = ax + b i y = cx + d , gdzie a, c $\neq 0$ są prostopadłe jeżeli a*c = - 1
**ZAD. 2** Znajdź funkcję liniową prostopadłą do funkcji 3y + 2x + 3 =0 i przechodzącą przez punkt P(0; 2).
**ZAD. 3** Znajdź prostą prostopadłą do prostej y = 3x + 2 i przechodzącą przez punk P(4; - 5)
**ZAD. 4** Napisz równanie prostej równoległej do osi OX i przechodzącej przez punkty o współrzędnych, oraz prostopadłych do tej osi:

a) (-3;6); b) (0; 0); c) $(\frac{1}{3};\ \sqrt{2})$; d) (- 3; 0)

ZADANIE DOMOWE:
**ZAD.1** Znajdź równania prostych prostopadłych i równoległych do prostej y = 2x + 1 i przechodzących przez punkty: a) (0; 0); b) (1; -2); c) $(\sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{3} + 1)$

## Temat 7; 8; 9: Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania

Bazujemy na wiedzy posiadanej z gimnazjum.
Uczniowie wymieniają metody rozwiązywania układów równań. Nauczyciel podaje przykłady do rozwiązania samodzielnego.

**ZAD. 1** Rozwiąż układ metodą podstawiania i określ jaki to układ.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=-2 \\ -5x+2y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-3z=4 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$

**ZAD. 2** Rozwiąż układ metodą przeciwnych współczynników i określ jaki to układ.

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=3 \\ y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -17x+289y=102 \\ 11x-17y=104 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x+\sqrt{2}y=-4 \\ 2x-\sqrt{6}y=4-2\sqrt{3} \end{cases}$

**ZAD. 3** Rozwiąż układ metodą graficzną i określ jaki to układ.

a) $\begin{cases} y=x+2 \\ y=x-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y=x+2 \\ 2y=2x+4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax-y=a \\ 2x+ay=2 \end{cases}$

**ZADANIE DOMOWE**

Rozwiąż układ trzema znanymi ci metodami:

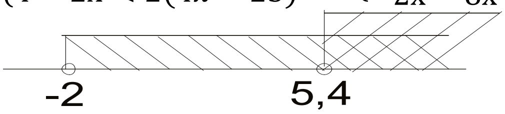
$$\begin{cases} 2x+5y-2z=55 \\ 3x-2z+4z=55 \\ x+y+3z=55 \end{cases}$$

## Temat 10; 11: Układy nierówności liniowych i metody ich rozwiązywania

Nauczyciel przedstawia i wyjaśnia na czym polega rozwiązanie układu nierówności liniowych na przykładzie

Przykład: Rozwiąż układ nierówności liniowych

$$\begin{cases} x+7 > -2x+1 \\ 4-2x < 2(4x-25) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x > -7+1 \\ -2x-8x < -4-50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > -6 \\ -10x < -54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x > 5{,}4 \end{cases}$$




Zbiorem rozwiązań jest przedział, gdzie $x \in (5{,}4;\ +\infty)$

**ZAD. 1** Rozwiąż układ nierówności:

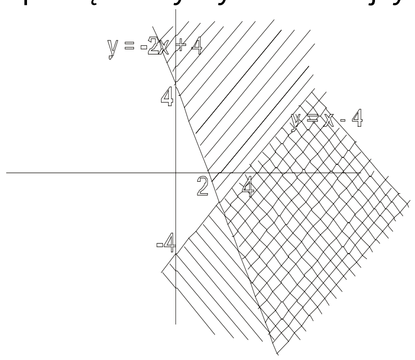
a) $\begin{cases} (x+1)^2 + (x+2)^2 \geq 2x^2 \\ (x-1)^2 + (x-2)^2 > 2x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3 < 3x+2 \\ 4-3x \geq 6-2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 1 \\ 4x - 2(x+1) < 3 \end{cases}$

**ZAD. 2** Zaznacz przedziały rozwiązań dla nierówności dwóch zmiennych

Przykład rozwiązany wspólnie z nauczycielem

$$\begin{cases} 2x - y > 4 \\ x - y > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -2x+4 \\ -y > -x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 4-2x \\ y < x-4 \end{cases}$$

Sporządzamy wykres funkcji $y = -2x + 4$ oraz $y = x - 4$




Współrzędne punktów leżących powyżej prostej $y = -2x + 4$ spełniają nierówność $y > -2x + 4$, zaś współrzędne punktów leżących poniżej prostej $y = x - 4$, spełniają nierówność $y < x - 4$. Zbiór punktów obszaru będącego częścią wspólną tych dwóch płaszczyzn, jest zbiorem rozwiązań układu nierówności.

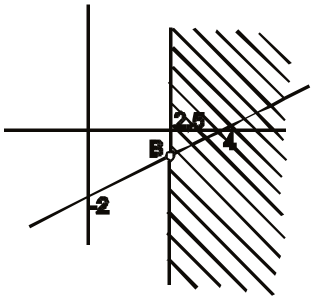
**ZAD. 1** Przedstaw graficznie zbiór rozwiązań układu;

a) $\begin{cases} x+y > 3 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y < 2 \\ x-y < 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+y > 7 \\ 3y = 3 \end{cases}$

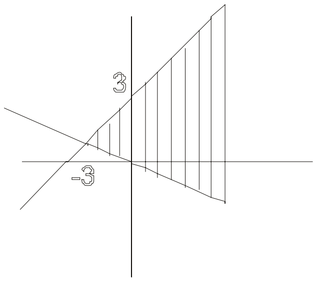
## Temat 12; 13: Zastosowanie funkcji liniowych w zadaniach.

**ZAD. 1** Jakie równania opisują poniższe wykresy:

a)




b)




**ZAD. 2**Rozwiąż układy oraz podaj interpretację geometryczną rozwiązania:

- $\begin{cases} 3x - 4 > 3 \\ x - 5 \leq 2 \end{cases}$

- $\begin{cases} \frac{4z-5}{7} > z + 3 \\ \frac{3z+5}{4} + 2 > 2z + 3 \end{cases}$

- $\begin{cases} 6y - 8 > 9y + 8 \\ 7y + 3 \leq 6y + 11 \end{cases}$

- $\begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$

- $\begin{cases} x \leq 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$

- $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - 2y < 4 \end{cases}$

## Temat 1; 2; 3: Powtórzenie wiadomości, praca klasowa i jej poprawa.

Rozwiązywanie zadań z działu – funkcje liniowe, układy równań i nierówności

**ZAD. 1** Znajdź funkcję liniową prostopadłą do funkcji -2y + 3x - 4 = 0 i przechodzącą przez punkt K(-2; 2).

**ZAD. 2** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji i określ ich monotoniczność

3y = – 6; – 2x – 4y = – 8; $\frac{1}{5}x - y = 0$;

**ZAD. 3** Przedstaw graficznie zbiór rozwiązań układu;

$\begin{cases} x + y \le 3 \\ 2x - y > 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - y = 3 \\ y > \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y \ge 6 \\ -4y = 3 \end{cases}$

**ZAD. 4** Napisz wzór funkcji przechodzącej przez punkty A(-1; 2); B(-2; 3) i równoległej do niej. Określ przedziały monotoniczności.

## Praca klasowa nr 4

**FUNKCJE LINIOWE I DZIAŁANIA NA NICH**

**Imię i nazwisko ........................................................... klasa ..................**

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 1** Znajdź funkcję liniową prostopadłą do funkcji -4y + 2x - 8 = 0 i przechodzącą przez punkt K(-1; -1).

**Zad. 2** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji i określ ich monotoniczność

$- x - 4y = - 6;$ $\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 0;$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

**Zad. 3** Przedstaw graficznie zbiór rozwiązań układu;

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y \leq 3 \\ y < \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

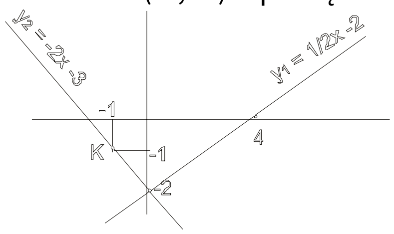
**Zad. 4** Napisz wzór funkcji przechodzącej przez punkty A(-1; 1); B(-2; -4) i równoległej do niej. Określ przedziały monotoniczności.

| Pyt nr 4 | |
|---|---|
| Typ pytania | Prawda/Fałsz |
| Treść pytania | Rozstrzygnij, która funkcja jest rosnąca, a która malejąca: |
| Odpowiedzi (od 1 do 2) | Prawda - obydwie |
| | Fałsz |
| Multimedia do odpowiedzi: | |
| Grafika | Multimedia do odpowiedzi: |
| Równanie matematyczne | Równanie matematyczne |
| Audio | |
| Wideo | |
| Odpowiedź zwrotna | Prawidłowa odpowiedź – $y_1$; $y_2$ (wynika z własności funkcji) |
| | Nieprawidłowa odpowiedź – żadna; (zła interpretacja własności) |

| Ilość punktów | 1 - 7 | 8 - 9 | 10 - 12 | 13 -14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## Temat: Poprawa pracy klasowej (rozwiązania)

**Zad. 1** Znajdź funkcję liniową prostopadłą do funkcji -4y + 2x - 8 = 0 i przechodzącą przez punkt K(-1; -1). Sporządź wykresy



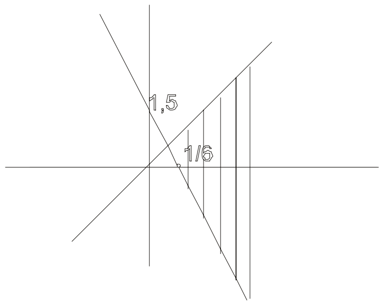

Wykres funkcji przechodzącej przez punkt K i prostopadły do danej prostej $y_1 = \frac{1}{2}x - 2$ ma postać: $y_2 = -2x + b$, ponieważ współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej spełnia własność: $m = a_1 \cdot a_2 = -1$

Mamy więc: $-1 = -2 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow$ nasza funkcja przybiera postać: $y_2 = -2x - 3$

Funkcja $y_1$ jest rosnąca zaś $y_2$ malejąca

**Zad. 2** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji i określ ich monotoniczność

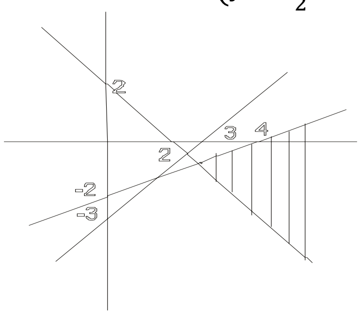
$f(x_1)$: $-x - 4y > -6$; $\qquad$ $f(x_2)$: $\frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 0$;




Funkcja $f(x_1)$: jest malejąca zaś $f(x_2)$: jest rosnąca

**Zad. 3** Przedstaw graficznie zbiór rozwiązań układu;

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y \leq 3 \\ y < \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$




**Zad. 4** Napisz wzór funkcji przechodzącej przez punkty A(-1; 1); B(-2; -4) i równoległej do niej. Określ przedziały monotoniczności.

Z ogólnego równania prostej y = ax + b oraz danych punktów A i B otrzymujemy:

$\begin{cases} 1 = -a + b \\ -4 = -2a + b \end{cases}$ stąd otrzymujemy: a = 5; b = 6; podstawiając do ogólnego równania prostej współczynniki a i b mamy: $y_1 = 5x + 6$. Równanie prostej równoległej ma równy współczynnik kierunkowy, więc prosta równoległa jest postaci: $y_2 = 5x + b$; $b \in R$.

Funkcja $y_1$ jest rosnąca. W przedziale $\left(-\infty; -1\frac{1}{5}\right)$ $y < 0$ zaś w przedziale $\left(-1\frac{1}{5};\ +\infty\right)$ $y > 0$;

Funkcja $y_2$ jest rosnąca. Dla b = 0 mamy: W przedziale $(-\infty; 0)$ $y < 0$ zaś w przedziale $(0;\ +\infty)$ $y > 0$;

## 13. Funkcje

**Umiejętności konieczne:**

- zna pojęcie funkcji
- wie jak wyznaczyć monotoniczność funkcji
- określenie i znajduje miejsca zerowego
- własności funkcji liniowej
- zna definicję wektora

**Pojęcia i fakty:**

- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, wykres funkcji, miejsce zerowe funkcji
- odczytuje własności funkcji z wykresu
- poznaje przesunięcie wykresu funkcji o dany wektor
- zna metodę obliczania współczynnika kierunkowego prostej
- zna warunek prostopadłości i równoległości dwóch prostych

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy dodatkowe własności, związane z przesunięciem wykresu funkcji o dany wektor
2. Zna metodę przesunięcia wykresu funkcji
3. Zna metodę przesuwania wykresu wzdłuż osi układu współrzędnych

### Temat 1; 2; 3; 4: Dziedzina funkcji; wykres; monotoniczność; sporządzanie wykresu funkcji i odczytywanie własności.

W celu przypomnienia własności podanych w temacie, nauczyciel podaje treści zadań, z których uczniowie odczytają podane własności.

**Zad. 1** Sporządź wykres funkcji, przechodzącej przez dwa punkty

a) A(–3; $\frac{2}{5}$); B(1; – 4).
b) Podaj dziedzinę funkcji
c) Znajdź wzór funkcji równoległej do danej
d) Znajdź wzór funkcji prostopadłej do danej
e) Podaj przedziały monotoniczności znalezionych funkcji
f) Sporządź wykresy znalezionych funkcji i zaznacz punkty przecięcia wykresów z osiami układu

**ZAD. 2** Dana jest funkcja –3x + 5 – y = 0.

a) Podaj dziedzinę funkcji
b) Sporządź wykres
c) Podaj monotoniczności
d) Znajdź wzór funkcji równoległej do danej i takiej, aby $x_0$ = – 1. Co zauważyłeś?
e) Znajdź wzór funkcji równoległej do danej i takiej, aby miejsce przecięcia wykresu z osią OY znajdowało się w punkcie K(0; –4). Co zauważyłeś?

**ZAD. 3** Dana jest funkcja f(x) = – 2x – 1.

Znajdź wzory i wykresy funkcji. Podaj punkty przecięcia wykresu z osiami układu

a) f(x) = f(x) + p
b) f(x) = f(x) – p. Co zauważyłeś?

**ZAD. 4** Podaj wnioski przy przesuwaniu wykresów funkcji o wektor wzdłuż osi układu

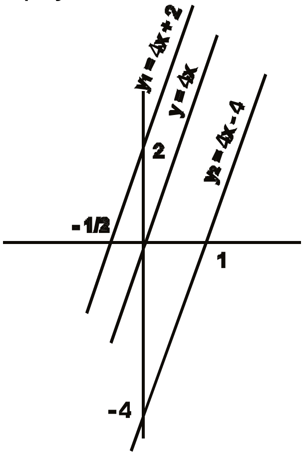
**ZADANIE DOMOWE:**

Przesuń wykresy funkcji:

a) – y – x – 1 = 0 o wektor $a = [0; 4]$; b = $[-4\,; 0]$; $c = [0; -4]$

## Temat 5; 6: Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi OY i OX

**Wniosek z poprzednich lekcji:**
Jeżeli mamy daną funkcję y = ax, wówczas przesuwając wykres o wektor [0; b], b$\in$ R otrzymujemy wykres równoległy do danego, przesunięty wzdłuż osi OY o wektor równy długości współczynnika b.
Np. y = 4x




Wykres funkcji y = 4x przesunęliśmy o wektor [0; 2] i otrzymaliśmy funkcję daną wzorem $y_1$ = 4x + 2, zaś przesuwając go o wektor [0; -4] otrzymaliśmy funkcję $y_2$ = 4x – 4
Powyższy wykres przesuwając o wektor $[-\frac{1}{2}; 0]$ a następnie o wektor [1; 0] otrzymujemy te same wykresy.

**ZAD. 1** Dane są dwa punkty A$\left(\frac{3}{4};\ -2\right)$; B$\left(\frac{1}{5};\ 6\right)$

a) Napisz wzór funkcji przechodzącej przez te punkty
b) Określ dziedzinę funkcji
c) Przesuń wykres funkcji o wektor $[-2; 4]$
d) Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej i przechodząca przez punkt K$(-2; -2)$
e) Zaznacz graficznie obszar, w którym funkcje przyjmują wartości $y > 0$

**ZAD. 2** Dane są dwa punkty A$(-1;\ -1)$; B$(-2;\ 4)$

a) Napisz wzór funkcji przechodzącej przez te punkty
b) Określ dziedzinę funkcji
c) Przesuń wykres funkcji o wektor $[-2; -2]$
d) Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej i przechodząca przez punkt K$(0; -2)$
e) Zaznacz graficznie obszar, w którym funkcje przyjmują wartości $y < 0$

**ZADANIE DOMOWE**
Przesuń wykres funkcji y = |x| wzdłuż osi układu o wektor [1; 2]

## Temat 7: Wektory i działania na wektorach

Nauczyciel podaje pojęcie wektora, cechy oraz działania na wektorach

*DEF. Uporządkowana para punktów, których pierwszy jest początkiem wektora a drugi końcem nazywamy wektorem.*

$A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$

$\vec{v} = [a; b] = [x_2 - x_1; y_2 - y1]$

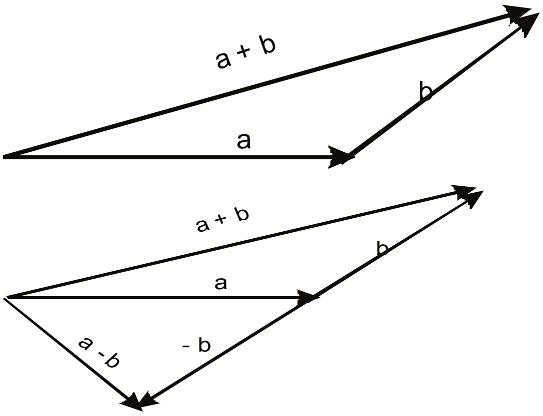
Długość wektora obliczamy ze wzoru: $\sqrt{\vec{v}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$

Dwa wektory są równe jeżeli mają takie same długości, ten sam kierunek i zgodny zwrot.

Dwa wektory są przeciwne jeżeli mają takie same długości, ten sam kierunek i przeciwne zwrot.

$\vec{v}$

$-\vec{v}$




$\vec{a} + \vec{b}$

**ZAD. 1** Dane są wektory $\vec{a} = [3; 5]$; $\vec{b} = [4; -2]$; $\vec{c} = [-1; 3]$. Oblicz współrzędne wektorów

$\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c} - \vec{b}$;

**ZAD. 2** Dane są punkty A (3; -2); B(1; 4); C(2; -5); D(6; 2). Wyznacz współrzędne punktu S, takie że dla każdego S zachodzi: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$

**PRACA DOMOWA**

Dane są punkty A(3; 1); B(-1; 5); C(3; -3) będące wierzchołkami pewnego równoległoboku. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka tego równoległoboku. Ile rozwiązań ma to zadanie?

## Temat 8; 9; 10; 11: Przesunięcie wykresu o wektor, przekształcanie wykresu względem osi układu współrzędnych i inne przekształcenia.

**ZAD.1** W jednym układzie współrzędnych, przekształć wykres funkcji $3x - 2y + 1 = 0$ w symetrii względem osi OX i OY. Znajdź wzory otrzymanych funkcji.

**ZAD.2** Wykres funkcji przechodzi przez dwa punkty A(–1; –1); B(0,5; 0,75). Znajdź wzór tej funkcji, przekształć ją względem osi układu współrzędnych, znajdź wzory przekształconych funkcji. Sporządź wykresy tych funkcji.

**ZAD.3** Wykres funkcji przechodzi przez dwa punkty A(–2; 2); B(–1; 0,125). Znajdź wzór tej funkcji i przesuń go o wektor [–3; 4]

**ZAD.4** W jednym układzie współrzędnych wykreśl wykres funkcji $y = |x|$ oraz $y = |x| - 3$. Co zauważyłeś?

**ZAD.5** W jednym układzie współrzędnych narysuj wykres funkcji $y = |x|$ oraz $y = |x - 2|$. Co zauważyłeś?

**ZAD.6** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = |2x|$ oraz $y = |2x + 4|$. Co zauważyłeś?

**ZAD.7** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = |x| + 1$ oraz $y = -(|x| + 1)$. Co zauważyłeś?

**ZAD.8** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = |-x + 2| - 3$. Następnie przesuń go o wektor $[-2; 0]$. Co zauważyłeś? Następnie otrzymany wykres przesuń o wektor $[0; [-3]$. Co zauważyłeś?

**ZAD.9** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = |x|$. Następnie przesuń go o wektor $[-2; -3]$. Co zauważyłeś?

**ZAD.10** W jednym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = |2x|$. Przesuń go o wektor $[-\frac{1}{2}; 0]$.

**ZADANIE DOMOWE**

Narysuj wykres funkcji $y = -|-x + 1| - 2$ i przekształć go względem obydwu osi układu współrzędnych.

## Temat 12: Powtórzenie, praca klasowa oraz poprawa pracy klasowej

**ZADANIA NA POWTÓRKĘ**

**ZAD.1** Punkty $A(2; -2)$; $B(5; 1)$; $C(4; 5)$; $D(1; 7)$ są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta, w którym boki przeciwległe są równe i równoległe. Wyznacz pozostałe wierzchołki.

**ZAD.2** Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(2; 1)$; $B(3; 5)$; $C(-1; 7)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta otrzymanego przez przesunięcie go o wektor $\vec{a} = [-3; -2]$

**ZAD.3** Sporządź wykres funkcji $y = |x - 1| + 1$. Przesuń go o wektor $[-1; 2]$

**ZAD.4** Sporządź wykres funkcji $y = -|1 - ||x + 1|$

**ZAD.5** Dane są dwa punkty $A(0; -1)$; $B(-2; 0)$

a) Napisz wzór funkcji przechodzącej przez te punkty

b) Określ dziedzinę funkcji

c) Przesuń wykres funkcji o wektor $[-3; -4]$

d) Znajdź równanie prostej prostopadłej do danej i przechodząca przez punkt $K(-1; -2)$

e) Zaznacz graficznie obszar, w którym funkcje przyjmują wartości ujemne

## Praca klasowa nr 5

**FUNKCJE LINIOWE I DZIAŁANIA NA NICH**

**Imię i nazwisko ............................................................ klasa ...................**

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 1** Punkty $A(2; -2)$; $B(5; 1)$; $C(4; 5)$ są kolejnymi wierzchołkami czworokąta, w którym boki przeciwległe są równe i równoległe. Wyznacz pozostałe wierzchołki.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 2** Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(1; 1)$; $B(3; 2)$; $C(-1; 4)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta otrzymanego przez przesunięcie go o wektor $\vec{a} = [-3; -2]$

$[-1; -1]$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 3** Sporządź wykres funkcji $y = -|x - 2| - 1$. Przesuń go o wektor

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 4** Sporządź wykres funkcji $y = -|x + 1|$. Przekształć go symetrycznie względem osi układu

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

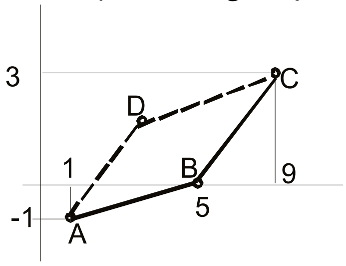
**Zad. 4** Sporządź wykres funkcji $y = |2x - 2| + 2$. Znajdź wektor o jaki przesunięto wykres $y = |2x|$

| Ilość punktów | 1 – 10 | 11 – 13 | 14 – 18 | 19 – 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## Temat 14: Poprawa pracy klasowej

**ROZWIĄZANIA**

**Zad. 1** Punkty A(1; −1); B(5; 0); C(9; 3) są kolejnymi wierzchołkami czworokąta, w którym boki przeciwległe są równe i równoległe. Wyznacz wierzchołek D.




$\overrightarrow{CB} = [5 - 9; 0 - 3] = [-4; -3]$

$|CB| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$|AB| = |DC|$ czyli $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ stąd $\overrightarrow{AB} = [5-1; 0 + 1] = [4;1]$

$\overrightarrow{DC} = [9 - x; 3 - y]$ stąd $9 - x = 4$ i $3 - y = 1$; $x = 5$; $y = 2$; stąd D(5; 2)

**Zad. 2** Dany jest trójkąt o wierzchołkach A(1; 1); B(3; 2); C(−1; 4). Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta otrzymanego przez przesunięcie go o wektor $\vec{a} = [-3; -2]$

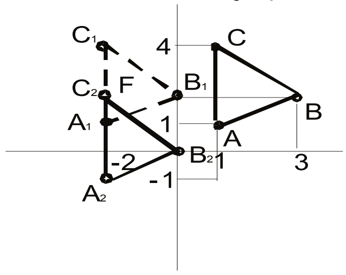
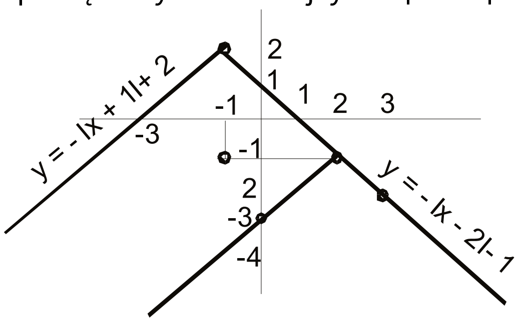


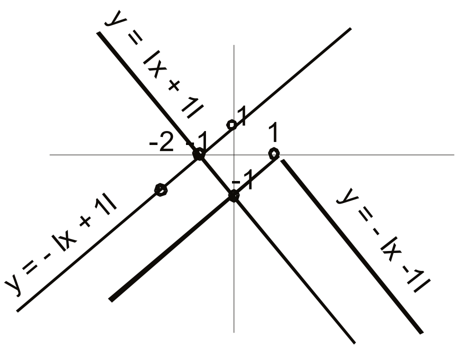

Figura $A_2$; $B_2$; $C_2$ jest trójkątem powstałym w przesunięciu o wektor [−3; 0] a następnie o wektor [0; −2] lub o wektor [−3; −2]. Współrzędne możemy odczytać i wypisać z rysunku.

**Zad. 3** Sporządź wykres funkcji $y = -|x - 2| - 1$. Przesuń go o wektor [−3; 3]

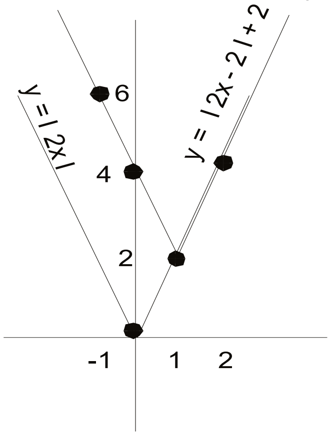



Wykres i wzór funkcji $y =-|x - 2| - 1$otrzymujemy poczynając od funkcji postaci $y = =-|x|$, następnie przesuwamy go o wektor [−3; 0] otrzymujemy wzór $y = -|x + 1|$. Ponownie przesuwamy otrzymany wykres o wektor [0; 3] i otrzymujemy końcowy wzór $y = -|x + 1| + 2$. Podobnie jak w zad.2 końcowy efekt otrzymamy pierwotną funkcję a następnie wykres przesuniemy bezpośrednio o wektor [−3; 3];

**Zad. 4** Sporządź wykres funkcji $y = -|x + 1|$. Przekształć go symetrycznie względem osi układu




**Zad. 5** Sporządź wykres funkcji y = $|2x - 2| + 2$. Znajdź wektor o jaki przesunięto wykres y =|2x|



## 14. FUNKCJA KWADRATOWA

**Umiejętności konieczne:**

- zna pojęcie funkcji
- wie jak wyznaczyć monotoniczność funkcji
- znajduje miejsca zerowe
- własności funkcji kwadratowej
- zna postać, ogólną, kanoniczną oraz iloczynową funkcji kwadratowej
- potrafi przesuwać wykres funkcji o wektor

**Pojęcia i fakty:**

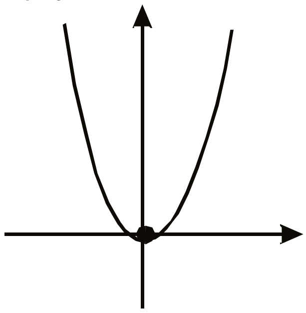
- stosuje pojęcia: funkcja, argument, dziedzina, wartość funkcji, wykres funkcji, miejsca zerowe funkcji
- odczytuje własności funkcji z wykresu
- poznaje przesunięcie wykresu funkcji o dany wektor
- zna metodę sprowadzania funkcji do postaci iloczynowej
- potrafi obliczyć wierzchołek paraboli
- rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe
- zna i potrafi stosować wzory Viète'a
- rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wyższych stopni

**Ad. Podstawy programowej**

- Poznajemy własności funkcję kwadratową i jej własności
- Zna metodę rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych
- Zna metodę rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem
- Zna metodę przesuwania wykresu
- Zna wzory Viète'a i potrafi je stosować
- Zna metodę rozwiązywania układów równań i nierówności wyższych stopni

## Temat 1: Pojęcie oraz wykres funkcji kwadratowej postaci $y = ax^2$; $a \neq 0$, i jej własności

Nauczyciel podaje różnicę między funkcją liniową a kwadratowa.
Rysuje wykres dowolnej funkcji kwadratowej postaci $y = ax^2$; $a \neq 0$,; $a \neq 0$, i na podstawie wykresu określają wspólnie własności.
Np. $y = 2x^2$; $a \neq 0$,



$a = 2$; $a \neq 0$,

Sporządzając częściową tabelkę odczytalibyśmy, że ramiona paraboli zwrócone są ku górze. Funkcja przecina oś OX w punkcie (0; 0). Jest to miejsce zerowe tej funkcji. W punkcie (0; 0) funkcja osiąga minimum (najmniejszą wartość funkcji)
Dla x = 0 wartość funkcji wynosi 0.

**ZAD.1** Sporządźmy wykres funkcji $y = -x^2$; $a \neq 0$. Jaki wynika stąd wniosek?

**ZAD.2** Sporządźmy wykres funkcji $y = x^2$; $a \neq 0$. Dla jakich wartości argumentów powyższa funkcja przyjmuje wartości ujemne; dodatnie lub zero?

**ZAD.3** W tym samym układzie współrzędnych sporządź wykres funkcji $y = -x^2$; $a \neq 0$. Określ monotoniczność funkcji (czyli: dla jakich wartości argumentów powyższa funkcja przyjmuje wartości ujemne; dodatnie lub zero? )

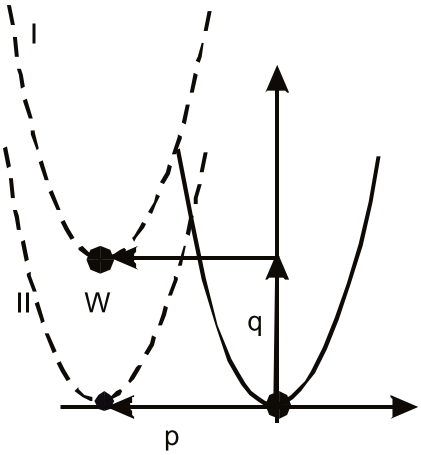
**ZADANIE DOMOWE**

Sporządź wykres funkcji $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$. Określ monotoniczność tej funkcji i podaj miejsca zerowe.

## Temat 2; 3; 4; 5; 6: Przesunięcie wykresu o dany wektor. Wierzchołek paraboli. Pierwiastki trójmianu kwadratowego. Postać kanoniczna trójmianu oraz iloczynowa.

Nauczyciel wraz z uczniami przesuwa wykres funkcji y = $ax^2$, a $\neq 0$ i próbuje
Na podstawie wykresu uczniowie rozpatrują, jak zmieni się wykres i wzór funkcji y = $ax^2$, a $\neq 0$ po przesunięciu o dany wektor.

**Przykład**: Uczniowie szukają wzoru funkcji y = $2x^2$, a $\neq 0$ po przekształceniu.




Z wykresu wynika, że wykres o wierzchołku W został przesunięty o wektor W[p; q].
Funkcja II przyjmuje postać y = $a(x-p)^2$, zaś z wykresu I otrzymamy wzór y = $a(x-p)^2 + q$.
Ogólna postać trójmianu kwadratowego to y = $ax^2 + bx + c$; a $\neq 0$, $b, c \in R$. Wyróżnik trójmianu wyrażamy wzorem: $\Delta = b^2 - 4ac$; stąd p = $-\frac{b}{2a}$ i q = $-\frac{\Delta}{4a}$; przy tych oznaczeniach mamy: y = $a(x-p)^2 + q$. A stąd otrzymujemy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego y = $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$; zaś dalej mamy określony wierzchołek paraboli W($-\frac{b}{2a}$; $-\frac{\Delta}{4a}$)

**ZAD. 1**

a) Sporządź wykres funkcji y = $x^2 - 3x + 4$ i oblicz współrzędne wierzchołka paraboli. Sprowadź wzór do postaci kanonicznej. Znajdź wektor o jaki przesunięto wykres funkcję y = $x^2$.

b) Sporządź wykres funkcji -2y = $-4x^2 - 6x + 2$ i oblicz współrzędne wierzchołka paraboli. Sprowadź wzór do postaci kanonicznej. Znajdź wektor o jaki przesunięto wykres.

**ZAD. 2** Sporządź wykres funkcji y = $-4x^2 - x$. Znajdź miejsca przecięcia wykresu funkcji z osią OX. Podaj współrzędne wierzchołka.

Nauczyciel podaje wzory na pierwiastki funkcji kwadratowej oraz własności wynikające z wykresu.

Dany jest trójmian kwadratowy postaci: y = $ax^2 + bx + c$; a $\neq 0$, $b, c \in R$, wówczas sprawdzamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego, czyli jaki znak ma $\Delta$?
Jeżeli $\Delta > 0$ wówczas trójmian ma dwa pierwiastki, jeżeli $\Delta = 0$ wówczas trójmian ma jeden podwójny pierwiastek, zaś gdy $\Delta < 0$, wówczas nie posiada pierwiastków w zbiorze liczb

rzeczywistych. Wykres nie przecina osi OX. Pierwiastki o których mowa znajdujemy znając współczynniki trójmianu.
Jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian posiada dwa miejsca zerowe; miejsca przecięcia wykresu z osią OX $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ zaś $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Jeżeli $\Delta = 0$ wówczas $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$. Gdy $\Delta < 0$, wówczas nie posiada pierwiastków w zbiorze liczb rzeczywistych

**ZAD. 3** Sporządź wykresy funkcji danej wzorem; znajdź pierwiastki jeżeli posiada; sprowadź wzór funkcji do postaci kanonicznej; znajdź współrzędne wierzchołka paraboli

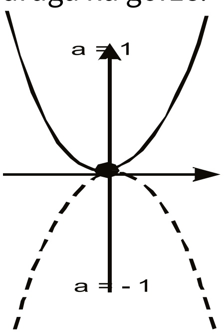
a) $y = x^2 - 12x + 35$
b) $y = 2x^2 + 7x + 6$
c) $y = 2x^2 - 10x + 11$
d) $y = -3x^2 + x + 2$
e) $y = -x^2 - 2x + 1$
f) $y = 4x^2 + x - 3$

Co zauważyliście w przykładzie d) i e)?

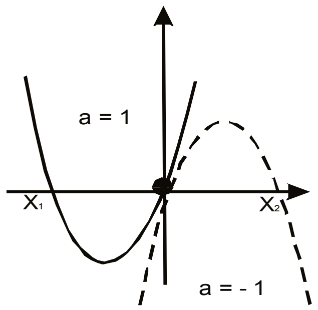
**WNIOSEK:**
Jeżeli trójmian kwadratowy ma współczynnik $a < 0$, wówczas ramiona paraboli zwrócone są ku dołowi układu współrzędnych.
Sporządzimy wszystkie możliwe przypadki jakie może przybierać wykres, w zależności od wartości $\Delta$
czyli wyróżnika trójmianu kwadratowego oraz współczynnika a. Rozpatrzmy funkcje postaci:

a) $y = ax^2$; $a \neq 0$
b) $y = ax^2 + bx$; $a; b \neq 0$
c) $y = ax^2 + bx + c$; $a; b; c \neq 0$

Ad. 1 Rozpatrujemy dwa przypadki gdy $a < 0$ i $a < 0$. W obu przypadkach funkcja ma jedno miejsce zerowe w punkcie (0; 0). Pierwsza parabola zwrócona jest ramionami ku dołowi zaś druga ku górze.

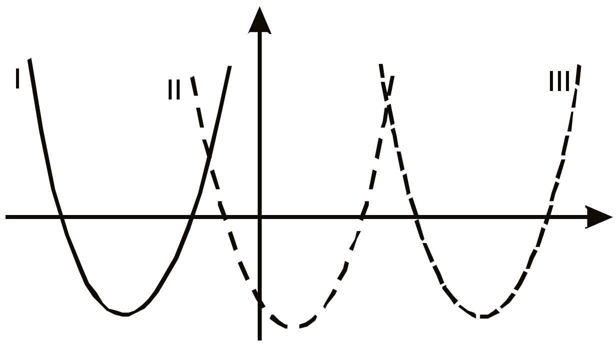



Ad.2 Dla funkcji $y = ax^2 + bx$; $a; b \neq 0$; $\Delta = 0$; $a > 0$ i $a < 0$. Wykres przecina oś OX w dwóch miejscach. Funkcję $y = ax^2 + bx$ możemy zapisać w postaci: y = x(ax + b), wówczas pierwiastki powyższego równania są następujące: $x_1 = 0$ i $x_2 = -\frac{b}{a}$. Wykres przybiera postać:



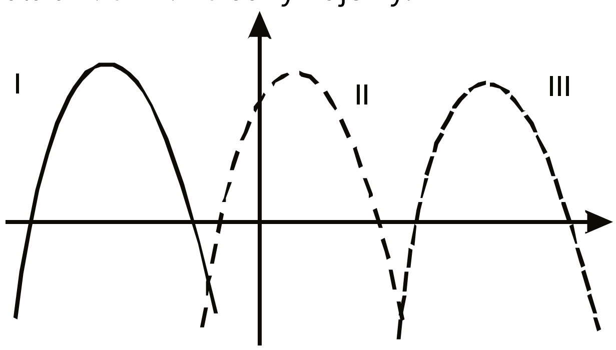

Ad.3 Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:

1) dla a $> 0$ i $\Delta > 0$ otrzymujemy



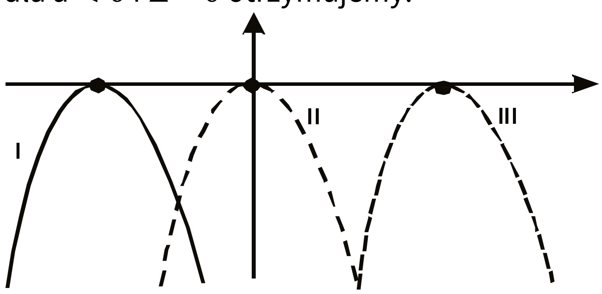

Funkcja I i III ma pierwiastki tego samego znaku. Funkcja II posiada pierwiastki różnych znaków.

2) Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:
dla a $< 0$ i $\Delta > 0$ otrzymujemy:



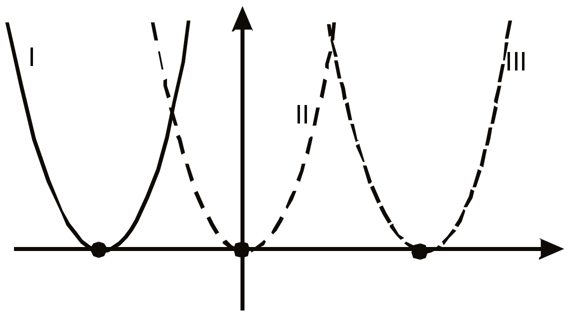

Funkcja I i III ma pierwiastki tego samego znaku. Funkcja II posiada pierwiastki różnych znaków.

3) Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:
dla a $< 0$ i $\Delta = 0$ otrzymujemy:

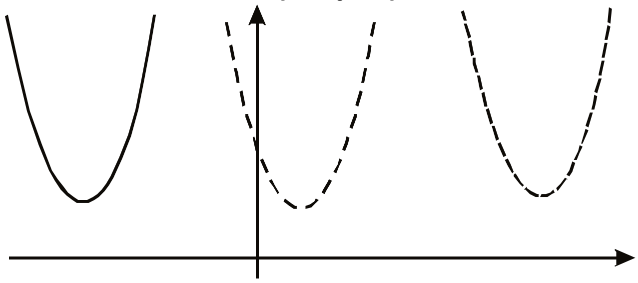



Każda funkcja ma po jednym pierwiastku różnego znaku

4) Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:
dla a $> 0$ i $\Delta = 0$ otrzymujemy:

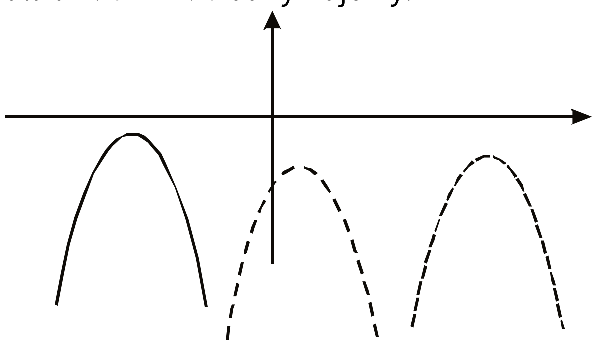



5) Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:
   dla a $> 0$ i $\Delta < 0$ otrzymujemy:



   Żadna z funkcji nie posiada pierwiastków rzeczywistych

6) Dla funkcji y = $ax^2 + bx + c$; a; b; c $\neq 0$ mamy następujące przypadki:
   dla a $< 0$ i $\Delta < 0$ otrzymujemy:



   Żadna z funkcji nie posiada pierwiastków rzeczywistych

**ZAD. 1** Przesuń funkcję y = $2x^2$ o wektor [p; q] = [- 4; -3]. Napisz wzór otrzymanej funkcji, sporządź wykresy w jednym układzie współrzędnych po każdym przesunięciu, podaj współrzędne wierzchołka paraboli. Oblicz wartość pierwiastków otrzymanej funkcji.

**ZADANIE DOMOWE**

Znajdź postać kanoniczną funkcji y = $\frac{2}{3}x^2$ w przesunięciu o wektor [-2; 0]. Sporządź wykres otrzymanej funkcji.

## Temat 6; 7; 8; 9: Równania kwadratowe, jego własności.

**ZAD. 1** Zbadaj ile pierwiastków mają poszczególne trójmiany kwadratowe określone w zbiorze R. Podaj przedziały monotoniczności. Sporządź wykresy. Zapisz każdy trójmian w postaci kanonicznej i liniowej.

a) $y = -2x^2 + 3x - 7$

b) $y = 7x^2 + 5$

c) $y = -4x^2 + 9$

d) $y = 4x^2 + x - 3$

e) $y = 2x^2 - 8x + 7$

f) $y = -5x^2 + 4x - 6$

g) $y = 9x^2 - 12x + 19$

h) $y = 5x^2 - 2x$

i) $y = 10x^2 + 3x - 4$

j) $y = = -x^2 - 2x + 1$

k) $y = 6x^2 + 5x + 2$

l) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

m) $y = 25x^2 - 20x + 4$

n) $y = 2x^2 + x - 3$

**ZADANIE DOMOWE**

Rozłóż, jeżeli to możliwe na czynniki liniowe:

a) $x^2 - 1$; $x^2 - m$; dla $m > 0$

b) $(x-1)^2 - y^2$; $(x+4)^2 - 5$

## Temat 10; 11: Sprowadzanie równań do równań kwadratowych.

Nauczyciel podaje metodę sprowadzania równań wyższych stopni do równania kwadratowego. Zaznacza, że nie każde równanie wyższego rzędu da się sprowadzić tą metodą do równania kwadratowego. Podaje istotną własność, która jest stosowana do tego tupu rozwiązań.
DEF. Równanie zwrotne to takie równanie algebraiczne $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, w którym $a_n = a_0;\ a_{n-1} = a_1;\ a_{n-2} = a_2; \ldots$ . Równanie zwrotne stopnia n = 2k, ($a_0 \neq 0$)można sprowadzić do równania stopnia k za pomocą podstawienia z = x + $\frac{1}{x}$.
Dla równań trzeciego stopnia pierwiastkami są często podzielniki wyrazu wolnego.
Rozwiążmy równanie: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$ dzielimy przez $x^2$, co jest możliwe, ponieważ $a_0 \neq 0$, więc liczba 0 nie jest pierwiastkiem tego równania, stąd $x^2 - 5x + 6 - 5\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ czyli $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$, podstawiając z = x + $\frac{1}{x}$ otrzymujemy (*): $z^2 - 5z + 4 = 0$.
Rozwiązując równanie (*) otrzymujemy $z_1 = 1;\ z_2 = 4$, podstawiając 1 = x + $\frac{1}{x}$ oraz 4 = x + $\frac{1}{x}$, ostatecznie otrzymujemy: $x_1;\ x_2$- są to pierwiastki nierzeczywiste, ponieważ $\Delta < 0$. Dla $z_2 = 4$ mamy $x_3 = 2 - \sqrt{3};\ x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

**ZAD. 1** Rozwiąż równanie $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ grupując czynniki

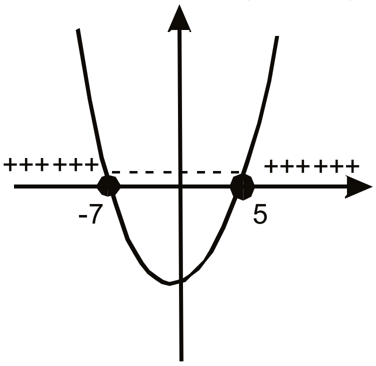
**ZAD. 2** Rozwiąż równanie

a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$
b) $68x^4 - 257x^3 + 257x^2 + 68 = 0$
c) $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2 = 0$
d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$
e) $-x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

## Temat 11; 12: Nierówności kwadratowe

Nauczyciel podaje metodę rozwiązywania nierówności kwadratowych na podstawie przykładu. $x^2 + 2x - 35 > 0$, ponieważ współczynnik a$> 0$ wykres nierówności jest parabolą zwróconą ramionami ku górze. Liczymy wyróżnik trójmianu dla $x^2 + 2x - 35$, stąd mamy $\Delta = 144 > 0$, więc parabola przecina oś OX w dwóch miejscach $x_1 = -7$ i $x_2 = 5$

Z wykresu odczytujemy w jakich przedziałach nierówność jest spełniona.




Powyższa nierówność przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach:

$(-\infty;\ -7) \cup (5;\ +\infty)$ Liczby -7; 5 są miejscami zerowymi.

**ZAD. 1** Rozwiąż nierówności. Zapisz w jakich przedziałach spełniona jest nierówność.

a) $x^2 + 2x - 3 < 0$

b) $x^2 + x + 5 > 0$

c) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-1} > 1$

d) $-x^2 + x - 5 > 0$

e) $-3x^2 + x - 5 < 0$

f) $-x^2 + 2x - 2 > 0$

g) $x^2 - 9 > 0$

h) $\frac{1}{x^2+5x+4} < 0$

i) $4x + x^2 < 0$

j) $x^2 - 4x > 2x - 5$

## Temat 13; 14: Układy równań różnych stopni.

**ZAD. 1** Rozwiąż układy. Do każdego sporządź wykres.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 2x^2 - y + 3x = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x - \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 3y^2 = 12 \end{cases}$

i)

e) $\begin{cases} \frac{3}{2x-5} - \frac{5}{x-2y} = 7 \\ \frac{2}{2x-5} - \frac{5}{x-2y} = 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y^2 = 5x \\ x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 + 35 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (2y^2 + x)^2 - 25y^2 = 0 \\ x + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (x + y) + xy = 0 \\ (x^3 + y^3) + (xy)^3 = 12 \end{cases}$

j) $\begin{cases} |x - 1| + y - 5 = 1 \\ |x - 1| = y - 5 \end{cases}$

**ZADANIE DOMOWE**

Rozwiąż układ. Zastosuj odpowiednie podstawienie

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

## Temat15; 16: Wzory Viète'a i ich zastosowanie.

Nauczyciel podaje twierdzenie o związkach zachodzących między pierwiastkami trójmianu kwadratowego a jego współczynnikami.

**Twierdzenie: (Viète'a).** *Jeżeli $a \neq 0, x_1$ i $x_2$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ to zachodzą związki:*

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$

**Dowód**: Z założenia wynika, że $\Delta \geq 0$ wówczas dla każdej wartości x prawdziwa jest równość:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wykonując działania po prawej stronie równości otrzymujemy:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 - x_2)x + ax_1 * x_2$$

Równość powyższa zachodzi dla każdego x wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy x i wyrazy stałe są odpowiednio równe:

$b = -a(x_1 + x_2)$ i  $c = a \cdot x_1 * x_2$ stąd  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i  $x_1 * x_2 = \frac{c}{a}$ *c.n.d*

Gdy $\Delta = 0$ mamy $x_1 = x_2 = x_0$ wówczas wzory Viète'a są postaci:

$2x_0 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_0{}^2 = \frac{c}{a}$.

Badanie znaków pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Zakładamy: $\Delta \geq 0, x_1 \leq x_2$

Z własności sumy i iloczynu liczb rzeczywistych wynika:

1) $x_1 * x_2 < 0 \Leftrightarrow (x_1 < 0 \text{ } i \text{ } x_2 > 0)$
2) $(x_1 * x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 > 0) \Leftrightarrow (x_1 > 0 \text{ } i \text{ } x_2 > 0)$
3) $(x_1 * x_2 > 0 \text{ i } x_1 + x_2 < 0) \Leftrightarrow (x_1 < 0 \text{ } i \text{ } x_2 < 0)$

**Przykład**

Nie obliczając pierwiastków ustal ich znak.

Obliczamy $\Delta$ i sprawdzamy czy jest dodatnia. Jeżeli tak, to pierwiastki istnieją i zachodzi $x_1 \neq x_2$.

Ze wzorów Viète'a mamy:

$$\begin{cases} x_1 * x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 > 0 \text{ } i \text{ } x_2 > 0$$

**ZAD. 1** Dla jakich wartości parametru k trójmian $y = x^2 - (2k + 1)x + k^2 + 1$ ma dokładnie dwa różne pierwiastki?

**ZAD. 2** Dany jest trójmian: $x^2 - 4x - 6$. Oblicz sumę odwrotności pierwiastków tego trójmianu.

**ZAD. 3** Oblicz drugi pierwiastek trójmianu, gdy dany jest jeden.

a) $x^2 + 3x - 4, x_1 = 1$
b) $ax^2 + bx + c, x_1 = m$. Jaki związek zachodzi między m, a, b, c?

**ZAD. 4** Rozwiąż równania:

1) (5x - 2)(x + 3) = 0
2) (m +1)(m - 1) = 0

3) $9x^2 -- 9 = 0$
4) $3x^2 - x\sqrt{2} = 0$
5) $x(x - 4) = 0$

**ZADANIE DOMOWE**

Rozwiąż równanie $\sqrt{5}\,y^2 - 2y - 3\sqrt{5} = 0$

## Temat 17; 18; 19; 20: Równania kwadratowe z parametrem.

Nauczyciel podaje metodę rozwiązywania równania kwadratowych z parametrem na podstawie przykładu.

**Przykład**: Dla jakich wartości parametru m równanie: $x^2 - \frac{2x}{m} - 2mx + 4 = 0$ ma jedno rozwiązanie.
Zakładamy, że $m \neq 0$. Po przemnożeniu równania stronami przez m otrzymujemy:
$mx^2 - 2(m^2 + 1)x + 4m = 0$. Ponieważ $m \neq 0$ i $2(m^2 + 1) \neq 0$, równanie ma jedno podwójne rozwiązanie, jeżeli wyróżnik równania jest zero.
$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(m^2 + 1)^2 - 16m^2 = 4(m^2 - 1)^2 * (m^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = 1$ i $m = -1$.
Dla m = 1 równanie przyjmuje postać: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = 2$, zaś dla $m = -1$
Mamy: $-x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = -2$

**ZAD. 1** Dla jakich wartości parametru m równanie: $(m + 1)x^2 - (m + 1)^2x + (m + 1)^2 = 0$ ma rozwiązanie?
**ZAD. 2** Dla jakich wartości parametru m trójmian kwadratowy: $(m - 4)x^2 - (2 - m)x + \frac{m}{2} + 1$ ma wszystkie wartości większe od $\frac{5}{4}$?
**ZAD. 3** Dla jakich wartości parametru m równanie: $x^2 - 2(2m - 3)x + (m - 1) = 0$ ma jedno podwójne rozwiązanie?
**ZAD. 4** Dla jakich wartości parametru m równanie: $(m - 1)x^2 + 2mx + (3m - 2) = 0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?
**ZAD. 5** Dla jakich wartości parametru m równanie: : $m(1-x^2) - 2x^2 + 2x - 2 = 0$ ma rozwiązania?
**ZAD. 6** Dla jakich wartości parametru m równanie: $(m^2 - 5m + 3)x^2 + (3m - 1)x + 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania, z których jedno jest dwa razy większe od drugiego?
**ZAD. 7** Podać równanie kwadratowe, którego każde rozwiązanie jest o 5 większe od odpowiedniego rozwiązania równania $x^2 - 6x - 7 = 0$.
**ZAD. 8** Podać równanie kwadratowe, którego rozwiązania są m razy większe od odpowiednich rozwiązań równania $ax^2 + bx + c = 0$.
**ZAD. 9** Nie rozwiązując równania $x^2 - 9x + 20 = 0$ oblicz: $(x_1)^3 + (x_2)^3$ oraz $(x_1)^4 + (x_2)^4$
**ZAD. 10** Podaj równanie kwadratowe, w którym suma kwadratów rozwiązań i suma odwrotności kwadratów rozwiązań są równe po $\frac{17}{4}$.
**ZAD. 11** Rozwiąż równania:

a) $|x - 3| - 7 = 0$
b) $|7x - 1| + 9x - 21 = 0$
c) $|x - 1| + |x - 2| = 1$

## Praca klasowa nr 6

**FUNKCJE KWADRATOWE, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ**

**Imię i nazwisko** ............................................................ **klasa** ...................

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 1** Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} |x-y| = 2 \\ |x| + |y| = 4 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 2** Znajdź rozwiązanie układu równań $\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$, sporządź wykres, znajdź wierzchołki paraboli. O jaki wektor zostały przesunięte wykresy paraboli?

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 3** Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów rozwiązań równania $x^2 + mx + 4 = 0$ jest dwa razy większa od sumy tych rozwiązań?

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

**Zad. 4** Rozwiąż równanie $|x-3| - 7 = 0$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 5** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$

| Ilość punktów | 1 – 10 | 11 – 13 | 14 – 18 | 19 – 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## Temat 22: Poprawa pracy klasowej

**ROZWIĄZANIA**

**AD. 1** Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} |x-y|=2 \\ |x|+|y|=4 \end{cases}$

Podnosimy równania stronami do kwadratu i otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy=4 \\ x^2+y^2+2|xy|=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4+2xy \quad (*) \\ 4+2xy+2|xy|=16 \Rightarrow xy+|xy|=6 \end{cases}$$

Jeżeli xy$>0$, to $xy=|xy|$ i równanie przyjmuje postać: xy = 3, co po podstawieniu do(*) daje układ:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=16 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \text{ lub } x+y=-4 \\ xy=3 \end{cases}$$

Wykorzystując wzory Viète'a otrzymujemy: $z^2$ −4z + 3 = 0 ⇒ z = 1 lub z = 3, czyli x = 1 i y = 3 lub x = 3 i y = 1 lub $z^2$ + 4z + 3 = 0 ⇒ z = − 3 lub z = −1, czyli x = −3 i y = −1 lub x =−1 i y= −3

Rozwiązaniem układu są cztery pary liczb:

$\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

**AD. 2** Znajdź rozwiązanie układu równań $(*)$ $\begin{cases} x^2-y+1=0 \\ x^2+2x+y-3=0 \end{cases}$, sporządź wykres, znajdź wierzchołki paraboli. O jaki wektor zostały przesunięte wykresy paraboli?

Wykresem pierwszego równania jest parabola: y = $x^2$ $+1$ zaś drugiego równania jest parabola postaci: y = $-x^2$ $-2x+3$. Rozwiązujemy układ równań rachunkowo.

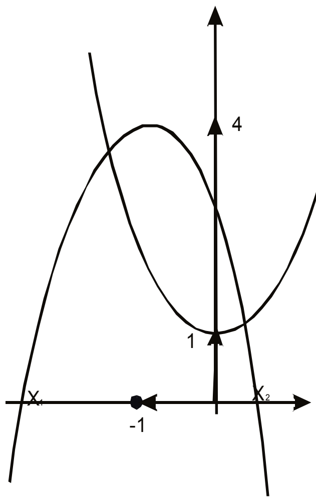
$\begin{cases} y=x^2+1 \\ x^2+2x+x^2+1-3=0 \end{cases}$ po uporządkowaniu otrzymujemy: $x^2+x-1=0$, stąd

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Układ (*) jest równoważny alternatywie układów: $\begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y=x^2+1 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=x^2+1 \end{cases}$

Stąd otrzymujemy: $\begin{cases} x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx -1{,}6 \\ y_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx 3{,}6 \end{cases}$ i : $\begin{cases} x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6 \\ y_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}4 \end{cases}$

Wykres funkcji $y=x^2+1$ jest przesunięciem wykresu funkcji $y=x^2$ o wektor [0; 1]. Wykres ma ramiona paraboli zwrócone ku górze. Wierzchołek ma współrzędne (0; 1). Wykresem funkcji y = $-x^2-2x+3$ jest parabola zwrócona ramionami ku dołowi układu współrzędnych. Aby wyliczyć współrzędne wierzchołka należ obliczyć wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego. Δ= $(-2)^2-4(-1)3 \Rightarrow$ Δ= 16. Wierzchołek ma współrzędne: $(\frac{-b}{2a};\ \frac{-\Delta}{4a})$ stąd wyliczamy jego współrzędne podstawiając odpowiednie wartości liczbowe. Otrzymujemy: $W\left(\frac{-(-2)}{2(-1)};\ \frac{-16}{4(-1)}\right)$, stąd W(-1; 4). Wykres drugiej funkcji powstał przez przesunięcie wykresu funkcji y = $-x^2$ o wektor [−1; 4]. Sporządzamy wykresy obu funkcji:




$\infty$

**AD. 3** Dla jakich wartości parametru m suma kwadratów rozwiązań równania $x^2 + mx + 4 = 0$ jest dwa razy większa od sumy tych rozwiązań?

$x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2(x_1 + x_2) \Rightarrow (x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2) - 2x_1x_2 = 2(x_1 + x_2) \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 =$
$= 2(x_1 + x_2)$. Z wzorów Viète'a $x_1 + x_2 = -m$; $x_1x_2 = 4$ co po podstawieniu daje równanie:

$m^2 + 2m - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -1 - \sqrt{5}$; $m_2 = -1 + \sqrt{5}$; dla m = $-1 - \sqrt{5}$ lub m = $-1 + \sqrt{5}$ spełnione są warunki zadania.

**AD. 4** Rozwiąż równanie $|x - 3|$ −7 = 0

$1^0$) Jeżeli x$\leq$ 3, to $|x - 3| = -x + 3$ i równanie przyjmuje postać – x + 3 – 7 = 0 ⇒ x = – 4, co leży w rozważanym przedziale $(-\infty;\ 3\rangle$, czyli x = – 4 jest rozwiązaniem równania.

$2^0$) Jeżeli x$\geq$ 3, to $|x - 3| = x + 3$ i równanie przyjmuje postać x + 3 – 7 = 0 ⇒ x = 10, co leży w rozważanym przedziale $\langle 3; +\infty)$ , czyli x = 10 jest rozwiązaniem równania.

**AD. 4** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$

Przekształcamy równanie następująco, dzieląc go przez $x^2$, i otrzymujemy $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$. Podstawiając z = x + $\frac{1}{x}$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

Którego pierwiastkami są liczby 1 i 4. Rozwiązujemy następujące równanie $x + \frac{1}{x} = 1$ nie posiada pierwiastków, oraz równanie $x + \frac{1}{x} = 4$, czyli $x^2 - 4x + 1 = 0$, którego pierwiastkami są liczby

$x_1 = 2 - \sqrt{3}$ oraz $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, które są rozwiązaniem równania.

## 15. Planimetria 6

**Umiejętności konieczne:**

- opis trójkątów podobnych i ich cechy
- opis trójkątów przystających
- opis wielokątów podobnych
- twierdzenie Talesa oraz Pitagorasa; twierdzenia odwrotne do nich
- własności funkcji trygonometrycznych kątów ostrych i ich własności
- tożsamości trygonometryczne
- pola trójkątów i czworokątów

**Pojęcia i fakty:**

- klasyfikuje trójkąty
- podaje cech trójkątów podobnych i przystających
- rozumie pojęcie figur podobnych i przystających
- wykorzystuje znajomość twierdzenia Talesa w zadaniach
- wykorzystuje znajomość twierdzenia Pitagorasa w zadaniach
- zna definicje funkcji trygonometrycznych i ich zależności
- zna związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- potrafi obliczać pola trójkątów i czworokątów

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy własności funkcji trygonometrycznych
2. Zna metodę obliczania pól poznanych figur
3. Potrafi udowadniać tożsamości trygonometryczne
4. Potrafi rozwiązywać trójkąty prostokątne

## Temat 1: Miary kątów w trójkącie, własności.

Nauczyciel przypomina jak dzielimy trójkąty ze względu na boki i kąty. Przypomina, że aby z trzech różnych odcinków a > b > c mógł powstać trójkąt musi zachodzić nierówność: a + b > c.

**Podział trójkątów ze względu na boki:**

- trójkąt jest równoboczny, jeżeli ma wszystkie trzy boki równe.
- trójkąt jest równoramienny, jeżeli ma dwa boki równe zwane ramionami a trzeci zwany podstawą
- trójkąt, który nie jest równoramienny ani równoboczny nazywamy różnobocznym

**Podział trójkątów ze względu na kąty:**

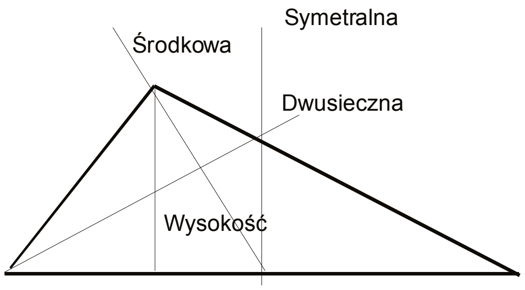
- mówimy, że trójkąt jest ostrokątny, jeżeli ma wszystkie kąty ostre
- mówimy, że trójkąt jest prostokątny, jeżeli ma jeden kąt prosty
- mówimy, że trójkąt jest rozwartokątny, jeżeli ma jeden kąt rozwarty

**WŁASNOŚCI:**

- Kąty przy podstawie w trójkącie równoramiennym są równe
- Każdy trójkąt ma trzy wysokości, trzy dwusieczne, trzy środkowe i trzy symetralne
- Suma kątów trójkąta jest kątem półpełnym: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$
- Każdy trójkąt jest określony przez 6 elementów: 3 boki i 3 kąty.

**Punkty szczególne w trójkącie:**

- środek ciężkości, tj. punkt przecięcia się trzech środkowych
- środek koła wpisanego, tj. punkt przecięcia się trzech dwusiecznych kątów
- ortocentrum, tj. punkt przecięcia się trzech wysokości
- środek koła opisanego, tj. punkt przecięcia się trzech symetralnych boków




**ZAD. 1** Kiedy wysokość trójkąta leży:

a) wewnątrz trójkąta

b) pokrywa się z bokiem

c) leży poza trójkątem

**ZAD. 2** Ile wysokości może wychodzić poza trójkąt?
**ZAD. 3** Czy istnieje trójkąt, w którym tylko jedna wysokość pokrywa się z bokiem?
**ZAD. 4** Czy kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego może być rozwarty?

**ZADANIE DOMOWE**
Udowodnij, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równe.

## Temat 2: Trójkąty podobne – własności

Nauczyciel podaje ogólną definicję podobieństwa figur.
**DEF.** *Podobieństwo jest to przekształcenie jednej figury w drugą, przy którym odległości pomiędzy punktami jednej figury zmieniają się w tym samym stosunku, zwanym skala podobieństwa.*

Dwie figury są podobne, jeżeli odcinki jednej figury są proporcjonalne do odpowiednich odcinków drugiej figury.

**WŁASNOŚCI:**

- dwa wielokąty o tej samej liczbie boków są podobne, jeżeli odpowiednie kąty tych wielokątów są równe, a odpowiednie jednego wielokąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego wielokąta
- dwa okręgi są podobne
- dwa odcinki są podobne
- dowolne dwie proste są podobne
- dowolne wielokąty foremne są podobne, jeżeli mają tę sama liczbę wierzchołków.

Nauczyciel podaje cechy podobieństwa trójkątów:
**I cecha podobieństwa (b b b)**
Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta.

**II cecha podobieństwa (b k b)**
Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta, a kąty zawarte między proporcjonalnymi bokami mają równe miary.

**III cecha podobieństwa (k k)**
Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy dwa kąty jednego trójkąta mają te same miary co dwa kąty drugiego trójkąta.

**IV cecha podobieństwa (b b k – naprzeciwko większego boku leżący)**
Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta i kąt leżący naprzeciwko większego z tych boków w jednym trójkącie jest równy kątowi leżącemu naprzeciwko większego boku w drugim trójkącie, to te trójkąty są podobne.

**PRZYKŁAD**
W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i BE przecinające się w punkcie S. Wykażmy pary trójkątów podobnych wyznaczonych przez punkty A, B, C, D, E, S
W tym przykładzie mamy następujące pary trójkątów podobnych:
$\Delta AOS \sim \Delta BSD$ (cecha: (k k)); $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ (cecha: (k k)); $\Delta ASB \sim \Delta ESD$ (cecha: (b k b));

**ZAD. 1** Figura $F_1$ jest podobna do figury $F_2$ w skali k, a figura $F_2$ jest podobna do figury $F_1$ w skali 2k. Wyznacz k.
**PRACA DOMOWA:** Czy każde dwa prostokąty są podobne? (Odpowiedź uzasadnij)

## Temat 3: Trójkąty przystające – własności

Nauczyciel definicję przystawania trójkątów oraz cechy.

*Dwa trójkąty nazywa się przystające, jeżeli dają się nawzajem nałożyć, tzn. jeżeli jeden z nich po przeniesieniu pokrywa się z drugim. Pokrywanie się dwóch trójkątów wyznacza odpowiedniość ich elementów. Jeżeli dwa trójkąty są przystające, to boki i kąty jednego z nich są odpowiednio równe bokom i kątom drugiego.*

**Cechy przystawania trójkątów:**

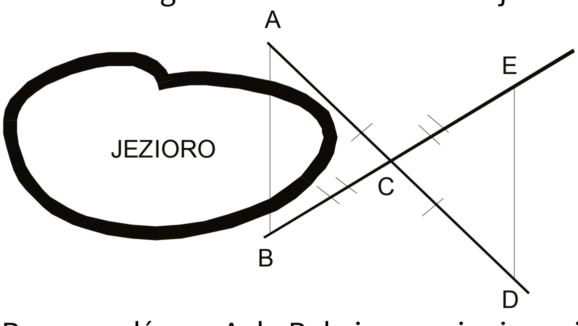
**I cecha przystawania trójkątów, (b b b):**
Jeżeli trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta, to trójkąty są przystające.

**II cecha przystawania trójkątów, (b k b):**
Jeżeli dwa boki i kąt zawarty między nimi w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi zawartemu między nimi w drugim trójkącie, to trójkąty są przystające.

**III cecha przystawania trójkątów, (k b k):**
Jeżeli jeden trójkąt ma bok i dwa przyległe do niego kąty odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są przystające.

**IV cecha przystawania trójkątów, (b b k - naprzeciwko większego boku leżący)**:
Jeżeli dwa boki i kąt naprzeciwko większego boku leżący w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi naprzeciwko większego boku leżącemu w drugim trójkącie, to te trójkąty są przystające.

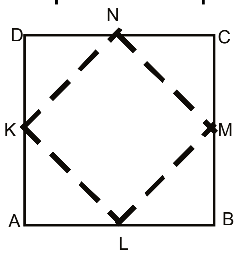
**Przykład**
Zmierz odległość dwóch domów nad jeziorem bez przepływania przez nie.(patrz rysunek)




Poprowadźmy z A do B dwie przecinające się proste w punkcie C. Od punktu C odłóżmy na pierwszej półprostej odcinek CD równy AC, na drugiej odcinek CE równy BC. Kąty wierzchołkowe ∡BCA i ∡DCE są równe, więc na podstawie cechy (b k b) wnioskujemy, że trójkąty ΔABC i Δ DEC są przystające, stąd $|AB| = |DE|$

### Temat 4: Figury podobne – własności.

Na podstawie przykładu, nauczyciel wyjaśnia cechę podobieństwa wielokątów.




W kwadrat □ABCD wpisano kwadrat □KLMN. Wiemy, że każde dwa kwadraty są podobne, więc

□ABCD ~ □KLMN. Oznaczmy długość boku $|AB| = a$, stosując twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy:

$|KN| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, stąd $k = \frac{|AB|}{|KN|} = \frac{a*2}{a\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, k to skala podobieństwa kwadratu □ ABCD do kwadratu □KLMN. Z obliczeń mamy: pole kwadratu □ ABCD jest dwa razy większe od pola kwadratu □KLMN, stąd mamy, że:

$\frac{P_{\square ABCD}}{P_{\square KLMN}} = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = k^2$. Z powyższych rozważań wynika następująca własność, że:

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$\frac{P_1}{P_2} = k^2$

**ZAD. 1** Każdy bok prostokąta o wymiarach $3\times 4$ zwiększono czterokrotnie. Oblicz stosunek pól obu prostokątów.

**ZAD. 2** Prostokątna działka na planie w skali 1:2500 ma pole 15,36 $cm^2$. ile arów ma działka w rzeczywistości?

**ZAD. 3** Pole równoległoboku wynosi 72 $cm^2$. Oblicz pole równoległoboku podobnego do danego w skali 1:3.

**ZAD. 4** Masz zaprojektować staw w kształcie prostokąta o powierzchni 10 ha. Jakiej skali użyjesz, jeśli do dyspozycji masz papier prostokątny o wymiarach 55 cm × 25 cm?

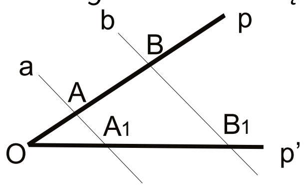
PRACA DOMOWA

Dane są odcinki długości a, b, c, d. Zbuduj trójkąt prostokątny podobny do danego o obwodzie d.

## Temat 5: Twierdzenie Talesa i odwrotne oraz własności

Nauczyciel podaje treść twierdzenia Talesa i odwrotnego do niego i ich dowody.

**Twierdzenie Talesa:**
*Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez proste równoległe na jednym z ramion kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta.*




**Założenie:** a || b

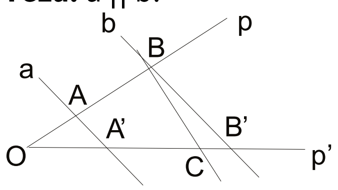
**Teza:** $AO : OA_1 = O A_1 : A_1B_1$

**DOWÓD:**
W dowodzie rozróżniamy dwa przypadki, zależne czy OA i OB są współmierne czy nie. Rozpatrzmy tylko pierwszy przypadek.
Przypuśćmy, że odcinki są współmierne; niech odcinek m stanowi ich największą wspólną miarę. Jeżeli odcinek m mieści się k razy w odcinku OA i l razy w odcinku AB, to $OA = k \cdot l$, $AB = l \cdot m$, a więc $OA : AB = k \cdot l$. Odkładamy odcinek m na odcinkach OA i AB, prowadzimy przez otrzymane punkty podziału K, L, M, N, … proste równoległe do prostej a i i oznaczamy ich punkty przecięcia z prostą p’ odpowiednio przez K’, L’, M’, N’, … Ponieważ odcinki odłożone na prostej p są równe, przeto i odcinki wyznaczone na prostej p’ będą równe, przy tym na odcinku OA’ będzie k takich odcinków, a na odcinku A’B’ będzie l. Wobec tego OA’ : A’B’ = k **:** l, czyli zachodzi proporcja OA : AB = OA’ : A’B’, którą mieliśmy wykazać.

**Twierdzenie odwrotne do twierdzenie Talesa:**
Jeżeli odcinki wyznaczone przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to proste są równoległe.

**Założenie:** OA : AB = OA; : A’B’.

**Teza:** a || b.




**Dowód:**
Zastosujemy dowód przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że prosta b nie jest równoległa do prostej a. Wtedy przez punkt B można by poprowadzić różną prostej b prostą c || a, przecinającą ramię p’ w punkcie C, przy tym punkt C leżałby po tej stronie punktu A’, po której leży punkt B’. Na mocy twierdzenia Talesa zachodziłaby proporcja: OA : AB = OA’ : A’C. Ponieważ jednak A’C $\neq$ A’B’, proporcja ta jest sprzeczna z założeniem. Wobec sprzeczności mamy a || b.

**ZAD. 1** Dany odcinek m podziel na części x i y, proporcjonalne do dwu danych odcinków a i b.

**ZAD. 2** Zbuduj odcinek x, jeżeli dane są odcinki a, b, c.

a) $\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$ b) $\frac{a}{x} = \frac{a+b}{b}$ c) x = $\frac{6ab}{a-b}$ d) x = $\frac{b^2}{a+b}$

**ZAD. 3** Mając dane odcinki a, b, c, a', b' zbuduj odcinek x = $\frac{abc}{a'b'}$.

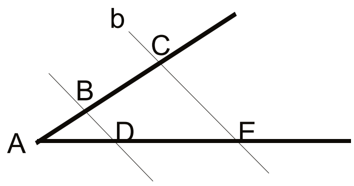
**ZAD. 4** W jakiej odległości od punktu A znajduje się punkt C na prostej AB, jeżeli $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{3}{4}$, $|AB|$ = 21cm?

**ZAD. 5** Sprawdź, czy proste CD i BE są równoległe jeżeli (patrz rys.):

a) $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{3}{4}$; $|AE|$ = 6cm; $|AD|$ = 14cm

b) $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{7}{13}$; $|AE|$ = 28cm; $|AD|$ = 2dm

c) $\frac{|AD|}{|AC|} = 0{,}2$; $|DE| = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $|BC| = \sqrt{5}$

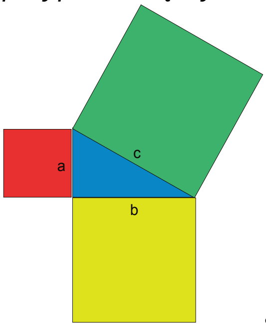



**ZADANIE DOMOWE**

Mając dane a; b; gdzie b > a, skonstruuj: y = $\frac{b(b-a)}{a}$.

## Temat 7; 8: Trójkąty prostokątne i jego cechy.

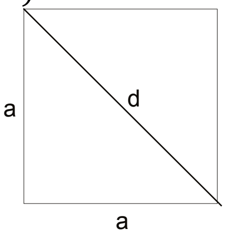
**Twierdzenie Pitagorasa**
*W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych.*




$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

Własności i zastosowanie twierdzenia

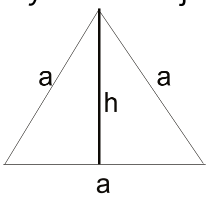
$1^0$)




$\mathbf{d^2 = a^2 + a^2}$ $\Rightarrow$ d = $\mathbf{a\sqrt{2}}$. Dotyczy każdego kwadratu

$2^0$)

Wysokość trójkąta równobocznego:

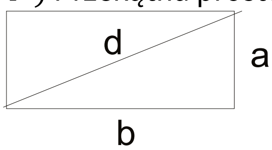



$\mathbf{h^2 = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

$3^0$) Pole trójkąta równobocznego

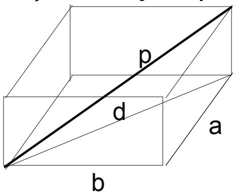
P = $\mathbf{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}$

$4^0$) Przekątna prostokąta




**d =** $\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$4^0$) Przekątna prostopadłościanu




**p =** $\mathbf{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$5^0$) Przekątna sześcianu **p = a**$\mathbf{\sqrt{3}}$

$6^0$) Wysokość czworościanu foremnego **h = a**$\mathbf{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ i jego objętość **V =** $\mathbf{\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}}$

**Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa**
*Jeżeli dane są trzy boki trójkąta i suma kwadratów dwóch krótszych boków jest równa kwadratowi boku najdłuższego, to trójkąt ten jest prostokątny.*

**ZAD. 1** Oblicz promień r kuli wpisanej i opisanej R na czworościanie foremnym o krawędzi a.

**ZAD. 2** Udowodnij, że jeżeli A$(x_1;\ y_1)$ i B$(x_2;\ y_2)$ to AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

**ZAD. 3** Sprawdź czy prostokątny trójkąt o bokach:

a) 5; 12; 13

b) 6; 8; 10

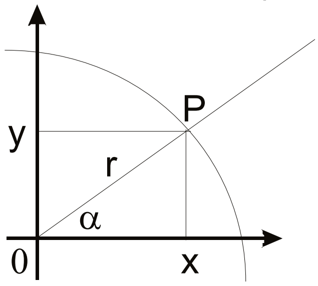
**PRACA DOMOWA**
Sprawdź, czy trójkąt o bokach długości $\mathbf{\sqrt{5}; 2\sqrt{3}; \sqrt{17}}$ jest prostokątny?

## Temat 9; 10; 11; 12: Definicje funkcji trygonometrycznych oraz ich wartości dla kątów $30^0$ ; $45^0$; $60^0$ oraz własności.

Nauczyciel podaje słowną definicję funkcji trygonometrycznych:

$1^0$) **Sinusem** (skrót: sinα) kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do przeciwprostokątnej.
$2^0$) **Cosinusem** (skrót: cosα) kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kąta α do przeciwprostokątnej.
$3^0$) **Tangensem** (skrót: tgα) kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do drugiej przyprostokątnej.
$4^0$) **Cotangensem** (skrót: ctgα) kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej leżącej przy kącie α do drugiej przyprostokątnej.

Aby obliczyć powyższe funkcje należy: dobrać układ współrzędnych, aby jego początek leżał w wierzchołku kąta α, dodatnia półoś OX była jednym ramieniem, a drugie ramię leżało w I ćwiartce układu współrzędnych (patrz rys.)




1) obrać jakikolwiek punkt P(x; y) na drugim ramieniu
2) znaleźć jego współrzędne x i y
3) Obliczyć jego odległość r od początku układu współrzędnych

   Wtedy

   $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$;

**PRZYKŁAD**

Dla kąta α = – $45^0$ oblicz: sinα; cosα; tgα; ctgα

Kąt α = – $45^0$ wyznacza jedną z półprostych prostej y = –x, więc P(x; –x). Teraz

$r = \sqrt{x^2 + (-x)^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2} > 0$, wówczas mamy:

$\sin(-45^0) = \frac{y}{r} = \frac{-x}{x\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

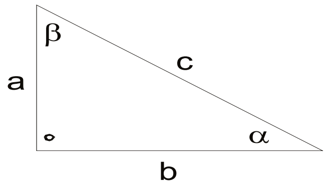
$\cos(-45^0) = \frac{x}{r} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}(-45^0) = \frac{y}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

$\mathrm{ctg}(-45^0) = \frac{x}{y} = \frac{x}{-x} = -1$

Równość $\frac{y}{x} = -1$ określa wszystkie punkty prostej y = –x z wyjątkiem punktu O(0; 0). Dla współczynnika kierunkowego tej prostej mamy a = –1 = tg($-45^0$)

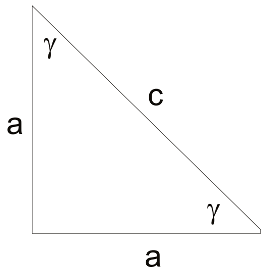
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów: $30^0$; $45^0$; $60^0$ możemy wyliczyć z trójkąta prostokątnego kątach $30^0$; $60^0$ i $90^0$ oraz $45^0$; $45^0$; $90^0$ lub trójkąta równobocznego.




$\alpha = 30^0$ $\beta = 60^0$; $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$; $a = \frac{1}{2}c$

**stąd mamy**:

- $\sin 30^0 = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin 30^0 = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30^0 = \frac{b}{c} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} =$
- $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{b}{a} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}c} = \sqrt{3}$
- $\sin 60^0 = \frac{b}{c} \Rightarrow = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60^0 = \frac{a}{c} = \ = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 60^0 = \frac{b}{a} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}c} = \sqrt{3}$
- $\operatorname{ctg} 60^0 = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$




$c = a\sqrt{2}$

$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1$

$\operatorname{ctg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1$

**ZAD.1** Pod jakim kątem jest nachylona do osi OX jest prosta y = 2x?

**ZAD.2** Obliczmy funkcje trygonometryczne dla $\beta = 570^0$.

**ZAD.3** Zbuduj kąt β, $90^0 < \beta < 180^0$, mając dane:

a) $\cos\beta = -0{,}3$; b) $\sin\beta = 0{,}7$ c) $\operatorname{tg}\beta = -5$

## WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

$1^0$) Dla każdego $x \in R$

$\sin^2x + \cos^2x = 1$

$2^0$) Dla każdego $x \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{1}{2}\pi : k \in C\right\}$

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$.

$3^0$) Dla każdego $x \in R \setminus \{k\pi : k \in C\}$

$ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$4^0$) Dla każdego $x \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}k\pi : k \in C\right\}$

$tgx * ctg = 1$

Wykażemy, że dla $x \in R$ zachodzi tożsamość: $\cos^3x + \cos x * \sin^2x = \cos x$.

$L = \cos^3x + \cos x * \sin^2x = \cos x * (\cos^2x + \sin^2x) = \cos x * 1 = \cos x$

**ZAD.1** Sprawdź, że:

a) $\sin^3x + \sin x * \cos x^2 x - \sin x = 0$; dla $x \in R$

b) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2x$, dla $x \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{1}{2}\pi : k \in C\right\}$

c) $1 + ctg^2x - \frac{1}{\sin^2 x} = 0$; dla $x \in R \setminus \{k\pi : k \in C\}$

d) $\sin^4x - \cos^4x = \cos^2x - \sin^2x$; dla $x \in R$

e) $\sin^4x + \cos^4x = 1 - 2\sin^2x * \cos^2x$; dla $x \in R$

**ZADANIE DOMOWE**

Sprawdź tożsamość:

$\frac{1+\sin x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2}{\sin x}$; dla $x \in R \setminus \{k\pi : k \in C\}$

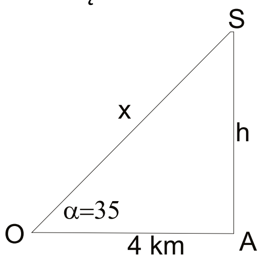
## Temat 13; 14: Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych.

Rozwiązać trójkąt prostokątny oznacza, że należy obliczyć wszystkie długości boków i miary kątów.

**Przykład:**

Samolot widać pod kątem $35^0$w momencie, gdy znajduje się nad punktem odległym od obserwatora o 4 km(odległość mierzona w poziomie). Na jakiej wysokości i jak daleko od obserwatora znajduje się samolot?

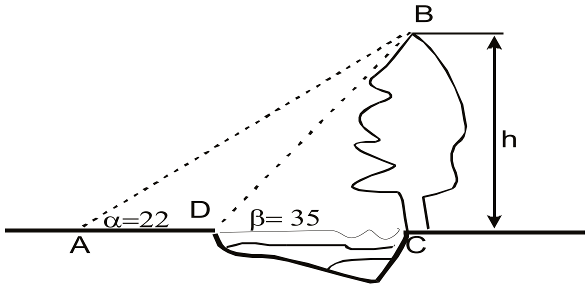
*Rozwiązanie*




$\frac{h}{|OA|}$ = tgα, więc h = $|OA| \cdot$ tgα, czyli h = 4 $\cdot$ $tg35^0$ stąd h = 4$\cdot$0,700 = 2,8 km. Analogicznie x = $\frac{4}{\cos 35^0}$

Stąd x ≈ $\frac{4}{0{,}819} \approx 4{,}9$ km

**Zad. 1** Aby wyznaczyć szerokość rzeki (rys. poniżej) DC zmierzono odległość $|AD| = 52{,}5\mathrm{m}$ prostopadle do brzegu. Drzewo BC = h, rosnące na brzegu po przeciwnej stronie rzeki, widać z punktu A pod kątem o mierze $35^0$. Oblicz szerokość rzeki.




**Zad. 2** Oblicz na jakiej wysokości znajduje się balon widziany z punktu P pod kątem $42^0$zaś z punktu K pod kątem $22^0$ wiedząc, że odległość między P i K wynosi 90m.

**Zad. 3** Podaj miarę kąta zawartego między wykresem funkcji y = $\frac{1}{4}x + 8$ a osią OX.

**Zad. 4** Rozwiąż trójkąt prostokątny mając dane:

a) PΔ = $2\sqrt{3}$; przyprostokątna a = 2
b) c = 3 – przeciwprostokątna, α = $31^0$
c) a = 10, α = $23^0$
d) a = $6\sqrt{3}$; h = 3 – trójkąt równoramienny
e) P = $100\sqrt{3}$; α = $60^0$ – trójkąt równoramienny

**Zad. 5** Długość przekątnej w prostokącie jest równa pierwiastkowi równania $\frac{x}{10} + 1 = 2$, a kąt zawarty między przekątnymi wynosi:

a) $120^0$

b) $160^0$

Oblicz obwód prostokąta.

**PRACA DOMOWA**

Oblicz pole rombu o boku długości $2 * \frac{40}{3} * 0{,}75$, jeżeli kąt ostry rombu ma miarę $36^0$.

## Temat 15; 16: Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta Bezpośrednio z poznanych własności trygonometrycznych wynikają tzw. wzory redukcyjne.

Dla każdego $\alpha \in R$ zachodzi:

- $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{1}{2}\pi : k \in C\right\}$

- $tg(90^0 - \alpha) = ctg\,\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R\setminus\{k\pi : k \in C\}$

- $ctg(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha$
- $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$
- $\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{1}{2}\pi : k \in C\right\}$

- $tg(90^0 + \alpha) = -ctg\,\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R\setminus\{k\pi : k \in C\}$

- $ctg(90^0 + \alpha) = -tg\,\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R$ zachodzi:

- $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R \setminus \left\{k\pi + \frac{1}{2}\pi : k \in C\right\}$

- $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

Dla każdego $\alpha \in R\setminus\{k\pi : k \in C\}$

- $ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

**UWAGA!**

Aby łatwo zapamiętać powyższe wzory, przyjmijmy, że $\alpha \in (0; \frac{1}{2}\pi)$.
Ustalamy czy dana funkcja przyjmuje wartości dodatnie czy ujemne.
Jeżeli $\beta = \pi \pm \alpha$ lub $\beta = 2\pi \pm \alpha$ - w tym przypadku nazwa funkcji nie zmienia się.
Jeżeli $\beta = \frac{1}{2}\pi \pm \alpha$ lub $\beta = \frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ - w tym przypadku nazwa funkcji zmienia się z sinusa na kosinus, z kosinusa na sinus, z tangensa na kotangens, z kotangensa na tangens. Często mówimy, że funkcja przechodzi w kofunkcję.

**Przykład:** Oblicz $\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) =$

$\sin(\frac{3}{2}\pi - \alpha) = \sin(\frac{1}{2}\pi + (\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

**ZAD. 1** Korzystając ze wzorów redukcyjnych oblicz:

a) $\operatorname{ctg}\frac{17}{4}\pi =$

b) $\cos\frac{5}{6}\pi =$

c) $\cos 135^0 =$

d) $\sin 300^0 =$

e) $\operatorname{tg}\frac{35}{6}\pi$

**ZAD. 2** Wiedząc, że $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ i $\alpha \in (\frac{1}{2}\pi;\ \pi)$, oblicz:

a) $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$; b) $\cos(9\pi - \alpha)$; c) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$

**ZAD. 3** Oblicz:

a) $\sin(-\frac{37}{6}\pi)$; b) $\cos(-\frac{25}{3}\pi)$; c) $\operatorname{tg}(-\frac{17}{6}\pi)$; d) $\operatorname{ctg}(-\frac{5}{4}\pi)$;

**ZAD. 3** Oblicz:

a) $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi + \alpha)$; b) $\cos(\pi + \alpha)$; c) $\sin(\frac{7}{3}\pi - \alpha)$; d) $\sin(\frac{7}{3}\pi + \alpha)$;

## Temat 17; 18: Obliczanie pól z zastosowaniem wzorów na pole trójkąta.

Nauczyciel podaje wzory na obliczanie pola trójkąta.
Oznaczenia: a; b; c – boki trójkąta; h – wysokość, sinα - kąt zawarty między bokami a i b

$P = \frac{a*h}{2}$

$P = \frac{a*b}{2} * \sin\alpha$

wzór Herona

$P = \sqrt{p*(p-a)*(p-b)*(p-c)}$

$p = \frac{a+b+c}{2}$

wzór na pole trójkąta równobocznego

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Przykład:
Oblicz wysokość trójkąta mając dane: P∆ = 15; podstawa – 6
*Rozwiązanie:*
h - wysokość

$P = \frac{a*h}{2} \Rightarrow h = \frac{2P}{a} \Rightarrow h = 15 : \frac{1}{2} * 6 \Rightarrow h = 5$

**ZAD.1** Przez wierzchołek C trójkąta ABC poprowadzono prostą l równoległą do boku AB. Wykazać, że trójkąt o podstawie AB mający wierzchołek na prostej l, ma pole równe polu trójkąta ABC.

**ZAD.2** Pole trapezu wynosi 480, wysokość jest równa 12, jedna z podstaw jest dłuższa od drugiej o 6. Oblicz podstawy trapezu.

**ZAD.3** Dany jest kwadrat ABCD o boku a. Na bokach AB; BC; CD; DA kwadratu obrano kolejno punkty K; L; M; N tak, że AK = BL =CM =DN = $\frac{1}{5}$a. Oblicz pole czworokąta.

**ZAD.4** Oblicz pole trójkąta o bokach a = 4; b = 5; c = 8.

**ZAD.5** Dane są dwa boki trójkąta i kąt zawarty między nimi $\alpha = 60^0$. Oblicz jego pole.

**ZAD.6** Boki trójkąta są równe a = 6; b = 7; c = 8. Wyznacz stosunek wysokości $h_A : h_B : h_C$.

**ZAD.7** Dany jest prostokąt o wymiarach 6*(120:12) i (15 + 45:3) + 6*4. Oblicz jego pole, przyjmując za jednostkę pola kwadrat o boku 6.

**ZAD.8** W trapezie równoramiennym krótsza podstawa i ramiona mają długości 6, a przedłużenia ramion przecinają się pod kątem prostym. Oblicz obwód trapezu.

## Temat19; 20: Pola czworokątów.

Rozwiązujemy różne zadania dotyczące wielokątów.

**ZAD.1** Pole trapezu jest równe 480, wysokość wynosi 12, jedna z podstaw jest dłuższa od drugiej o 6. Oblicz podstawy trapezu.

**ZAD.2** Wykonaj konstrukcję trójkąta ABC mając dane: podstawę AB = a, wysokość CD = h, kąt BAC = $\alpha$.

**ZAD.3** Oblicz długość boku rombu wiedząc, że przekątne mają długości 30 i40.

**ZAD.4** W pewnym równoległoboku boki są równe 7 i 9, jedna z przekątnych ma długość 12. Czy ten równoległobok jest prostokątem?

**ZAD.5** Oblicz pole trójkąta równobocznego, znając długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

**ZAD.6** Trójkąt równoboczny ma pole S. Oblicz bok, wysokość , promień okręgu wpisanego w trójkąt, promień okręgu opisanego na trójkącie.

**ZAD.7** Wykaż, że środki czterech boków dowolnego prostokąta są wierzchołkami rombu.

**ZAD.8** Pole trapezu wynosi 1200, wysokość jest równa 24, Jedna z podstaw jest trzykrotnie dłuższa od drugiej. Oblicz obie podstawy.

**PRACA DOMOWA**
W trójkącie prostokątnym ABC wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego C dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki 2 i 3. Oblicz pole prostokąta.

## Temat 20: Powtórzenie materiału.

**ZAD.1** Podziel dany odcinek AB na 5 równych części.

**ZAD.2** Dane są odcinki a i b. Skonstruuj odcinek $x = \frac{b^2}{a+b}$

**ZAD.3** Boki trójkąta mają długości 6; 7; 10. Znajdź boki trójkąta podobnego, którego najmniejszy bok ma długość 10.

**ZAD.4** Pole równoległoboku wynosi 24, obwód jest równy 28. Odległość między dwoma równoległymi bokami wynosi 4. Jaka jest odległość pomiędzy dwoma pozostałymi bokami równoległymi

**ZAD.5** Oblicz $\sin 700^0$.

**ZAD.6** Sprawdź tożsamość: $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha$.

**ZAD.7** Rozwiąż trójkąt prostokątny gdy dane są: $P = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $\alpha = 60^0$.

## Praca klasowa nr 7

**PLANIMETRIA**

**Imię i nazwisko ........................................................ klasa ..................**

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 1** Dane są odcinki a, b, c, d. Zbuduj trójkąt podobny do trójkąta o bokach a, b, c, tak aby jego obwód był równy długości d.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad.2** Wysokości równoległoboku są w stosunku 3 : 5. Oblicz długości boków równoległoboku, wiedząc, że jego obwód jest równy 32.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 3** Mając dane odcinki a i b, skonstruuj odcinek $x = \frac{(a-b)^2}{b}$.

**Zad. 4**

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |

Dana jest funkcja $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji.

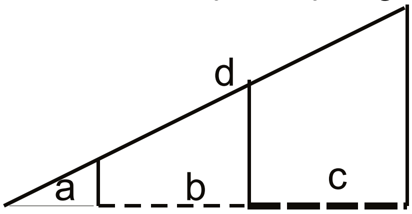
| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 5** Sprawdź tożsamość: $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$

| Ilość punktów | 1 – 10 | 11 – 13 | 14 – 18 | 19 – 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

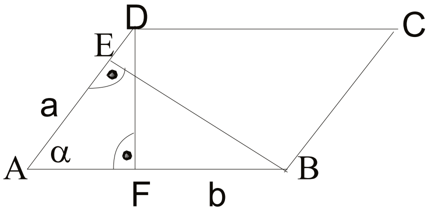
## ROZWIĄZANIA

**Zad. 1** Dane są odcinki a, b, c, d. Zbuduj trójkąt podobny do trójkąta o bokach a, b, c, tak aby jego obwód był równy długości d.




**ZAD.2** Wysokości równoległoboku są w stosunku 3 : 5. Oblicz długości boków równoległoboku, wiedząc, że jego obwód jest równy 32.

$\Delta AFD \sim \Delta AEB$

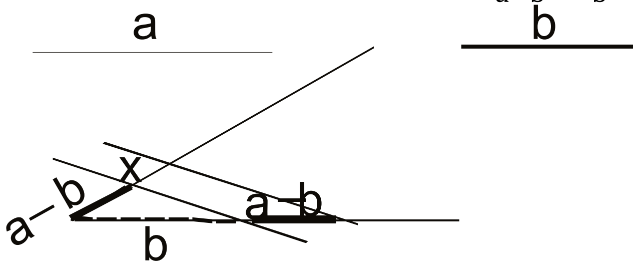



$$\begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{3}{5} \\ a + b = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 10 \end{cases}$$

**ZAD.3** Mając dane odcinki a i b, skonstruuj odcinek $x = \frac{(a-b)^2}{b}$.

Przekształcamy równość do postaci: $\frac{x}{a-b} = \frac{a-b}{b}$.




**ZAD.4** Dana jest funkcja $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Oblicz wartości pozostałych funkcji, kąt α ostry.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{25}}} = \frac{4}{5}$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$;     $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$.

**ZAD.5** Sprawdź tożsamość: $\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$

$L = \mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \cos^2\alpha\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$

$= \cos^2\alpha\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$.

## 16. GEOMERTRIA ANALITYCZNA

**Umiejętności konieczne:**

- określenie odległości między punktami, środka odcinka
- określenie odległości punktu od prostej
- ogólne równanie okręgu
- wzajemne położenie dwóch okręgów, okręgu i prostej
- położenie koła w układzie współrzędnych
- wektory, jednokładność, symetria

**Pojęcia i fakty:**

- zna wzory na obliczanie odległości
- podaje przykłady ich obliczania
- wie kiedy punkty należą do okręgu
- zna interpretację geometryczną okręgu, koła, okręgu i prostej
- zna pojęcie wektora i działania na nich
- wie jak znajdować figury symetryczne i jednokładne

**Ad. Podstawy programowej**

1. Poznajemy definicję ogólną okręgu i koła
2. Zaznacza w układzie współrzędny okrąg i koło
3. Zna pojęcie okręgu, koła, wektora (działania na wektorach)
4. Wskazuje i podaje interpretację geometryczną figur symetrycznych i jednokładnych

## Temat 1; 2: . Odległość między punktami w układzie współrzędnych. Środek odcinka.

Nauczyciel wprowadza pojęcia odległości dwóch punktów na płaszczyźnie, środka odcinka.
Odległością w niepustym zbiorze X nazywamy funkcję d, która dowolnym elementom A i B ze zbioru X przyporządkowuje liczbę rzeczywistą d(A; B) i spełniającą warunki:
d(A; B) = d (B; A),
d(A; B) = 0 wtedy i tylko wtedy, gdy A = B,
d(A; C) + d(C; B) ≥ d(A; B) – jest to nierówność trójkąta

Niech dane są dwa punkty A($x_1$; $x_2$); B($y_1$; $y_2$) wówczas odległość tych punktów jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Niech dane są dwa punkty A($x_1$; $x_2$); B($y_1$; $y_2$), będące końcami odcinka $|AB|$ wówczas środkiem odcinka $|AB|$ jest punkt C($x_S$; $y_S$) o współrzędnych:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_S = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \text{stąd} \qquad C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

**Przykład:**
Znajdź środek S odcinka AB; gdzie A(3; 4); B(5; 7).
$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$; podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy: $S\left(\frac{3+5}{2}; \frac{5+7}{2}\right) \Rightarrow S(4;\ 6)$.

**Zad.1** Dana jest prosta y = 2x – 6 oraz punkty A(3; 0); $B\left(\frac{1}{2};\ -5\right)$. Czy dane punkty należą do prostej? Jeżeli tak, to oblicz ich odległość i środek odcinka AB.

**Zad.2** Znajdź odległość punktów A(2; −3; −5); B(0; −6; −1) oraz jego środek.

**Zad.3** Oblicz obwód wielokąta, którego wierzchołki mają współrzędne: A $\left(4;\ \frac{1}{2}\right)$; $B(-3;\ -3)$; $C(-1;\ -2)$; $D(5;\ -2)$ oraz środek najdłuższego boku.

**Zad.4** Czy dany wielokąt o wierzchołkach A $(-2;\ -3)$; $B(1;\ -2)$; $C(5;\ 6)$; $D(1;\ 5)$ jest równoległobokiem? Odpowiedź uzasadnij.

**Zad.5** Znajdź wzór symetralnej odcinka AB o końcach $A(-3; -1)$; $B(3;\ 4)$.

**Zad.6** Znajdź obwód i pole wielokąta mając dane jego wierzchołki: A $\left(-2;\ \frac{1}{2}\right)$; $B(-3;\ -3)$; $C(1;\ -5)$; $D(5;\ 2)$; $D(-3;\ 6)$.

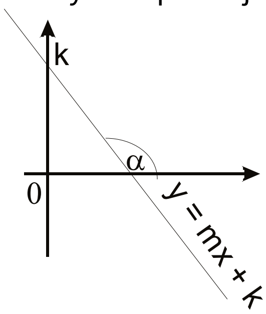
**Zad.7** Znajdź prostą symetralną do odcinka AB o współrzędnych, oraz punkt przecięcia tej prostej z odcinkiem AB.

## Temat 3; 4: Odległość punktu od prostej, równanie prostej i jej własności.

Nauczyciel wprowadza pojęcie odległości punktu od prostej, wzór literowy.
Niech dany jest punktu $P(x_0;\ y_0)$ i prosta l: Ax + By + C= 0; $A^2 + B^2 > 0$, wówczas odległość d punktu P od prostej l wyrażamy wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Równanie prostej o współczynniku m, przechodzącej przez punkt $P(x_0;\ y_0)$; m = tgα i α jest kątem nachylenia prostej do osi OX. Równanie ma postać: $y - y_0 = m(x - x_0)$.




Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez dwa punkty $A(x_1;\ y_1)$ i $B(x_2;\ y_2)$, gdzie $x_1 \neq x_2$, ma postać:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A(x_1;\ y_1)$ i $B(x_2;\ y_2)$, gdzie $x_1 \neq x_2$, ma postać:

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1).$$

Dwie proste o równaniach k: $y = m_1x + b$ i l: $y = m_2x + c$ są

a) równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_1 = m_2$,

b) prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Tangens kąta α zawartego między prostymi, które nie są równoległe wyrażamy wzorem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$$

Równanie parametryczne prostej przechodzącej przez dwa punkt opisuje twierdzenie:

**Jeżeli punkt C należy do prostej wyznaczonej przez punkty A i B wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje t$\in$ R takie, że C = tB + (1 −t )A.**

Oznaczmy przez $l_{AB}$ prostą przechodzącą przez punkty $A(a_1;\ a_2;\ a_3)$ i $B(b_1;\ b_2;\ b_3)$, to
$l_{AB} = \{tB + (1-t)A : t \in R\} = \{t(b_1;\ b_2;\ b_3) + (1-t)(a_1;\ a_2;\ a_3) : t \in R\} = \{(a_1 + t(b_1 - a_1); a_2 + t(b_2 - a_2);\ a_3 + t(b_3 - a_3)) : t \in R\}$.

Zapis:

$$l_{AB} = \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) & t \in R \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases}$$

Nazywa się przedstawieniem parametrycznym prostej w przestrzeni $\mathbf{E}^3$ (Euklidesowej)

**ZAD.1** Na symetralnej odcinka AB, gdzie A(1; 2), B(−3; 0), znajdź punkt wspólny z prostą o równaniu 2x – y + 3 = 0.

**ZAD.2** Trójkąt ABC, gdzie A(–2; – 1), B(3; 0), C(0; 2) jest wpisany w prostokąt ABDE tak, że C leży na boku DE. Oblicz współrzędne punktów D i E.

**ZAD.3** Prosta o równaniu x– y – 3 = 0 przecina trójkąt ABC, w którym A(0; 0); B(4; 0); C(0; 3). Oblicz stosunek pól figur, na jakie ta prosta dzieli trójkąt.

**ZAD.4** wyznacz współrzędne wierzchołka C trójkąta prostokątnego ABC, jeżeli A(1; 5); B(6; – 5), a wysokość CD opuszczona na przeciwprostokątną ma długość $2\sqrt{5}$.

**ZAD.5** Dane są punkty A(2; 4); B(4; 0); C(6; 0). Wyznacz współrzędne punktu D, tak aby czworokąt ABCD był trapezem równoramiennym nie będącym równoległobokiem.

**ZAD.6** Oblicz współrzędne wierzchołków B i D prostokąta ABCD, jeżeli A(–3; 0), C(1; 0), a kąt przecięcia przekątnych wynosi $45^0$.

**ZAD.7** Przedstaw prostą przechodzącą przez dwa punkty A(1; (–2; 3 ) i B(2; 0; – 1) w postaci parametrycznej.

**ZAD.8** Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty A(– 1; 2); B(2; –3), w postaci parametrycznej a następnie w postaci ogólnej.

## Temat 5; 6: Okrąg w układzie współrzędnych.

Wprowadzenie pojęcia okręgu i jego własności.
Niech S(a; b) jest środkiem okręgu O(S; r) o promieniu r, a M(x; y) dowolny punkt okręgu.
Ponieważ MS = r więc ze wzoru na odległość dwóch punktów otrzymujemy:

$$(*) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Punkt (x; y) leżą na okręgu O(S; r) wtedy i tylko wtedy, gdy x i y spełniają równanie (*)

**Przykład**:
Równanie (**) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ przedstawia okrąg o środku S(1; 3) i promieniu 2.
Równanie $x^2 + y^2 = r^2$ jest równaniem okręgu o środku S(0; 0) i promieniu r.

**WŁASNOSCI:**
Równanie (*) możemy przedstawić w postaci:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Gdy oznaczymy $a^2 + b^2 - r^2$ przez c otrzymamy równanie:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Wracając do przykładu (**) nasze równanie przyjmuje postać:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

Równanie $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ przedstawia okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a^2 + b^2 - c > 0 \text{ i } r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

Jeżeli $a^2 + b^2 - c < 0$, to równanie nie jest spełnione przez żadną wartość x i y gdyż lewa strona nie może mieć wartości ujemnej.

**ZAD.1** Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty A(−1; 0); B(7; 0); C(0; 1)

**ZAD.2** Znajdź środki i promienie okręgów:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x = 0$
e) $x^2 + y^2 - x - y = 0$

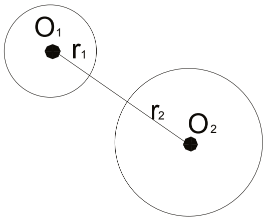
**ZAD.3** Dla każdego z punktów (); (); () zbadaj, czy leżą wewnątrz czy na zewnątrz okręgu $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

**ZAD.4** Znajdź równanie, środek i promień okręgu przechodzącego przez punkty A(1; 0); B(0; 2); C(1; 4).

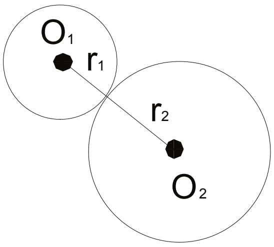
## Temat 7: Wzajemne położenie dwóch okręgów.

Jeżeli w równaniu okręgu znak „=” zastąpimy znakiem „≤”, to otrzymamy nierówność opisującą koło i oznaczamy go symbolem k(O; r). Zakładamy, że dane są dwa punkty $O_1$ i $O_2$ i dwie dodatnie liczby $r_1$ i $r_2$, wówczas zachodzą własności:

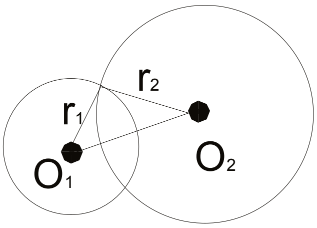
1. Okręgi $O(O_1;\ r_1)$ i $O(O_2;\ r_2)$ są wzajemnie zewnętrzne, gdy koła $k(O_1;\ r_1)$ i $k(O_2;\ r_2)$ są rozłączne.



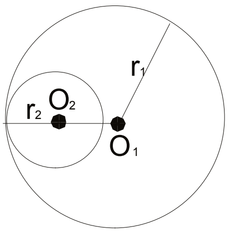

   Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| > r_1 + r_2$.
2. Okręgi $O(O_1;\ r_1)$ i $O(O_2;\ r_2)$ nazywa się zewnętrznie stycznymi, gdy mają dokładnie jeden punkt wspólny. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| = r_1 + r_2$.



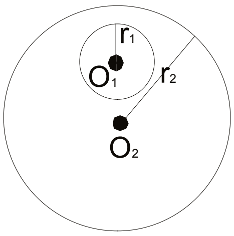

3. Okręgi $O(O_1;\ r_1)$ i $O(O_2;\ r_2)$ przecinają się, gdy koła $k(O_1;\ r_1)$ i $k(O_2;\ r_2)$ mają dokładnie dwa punkt wspólne punkty. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$.

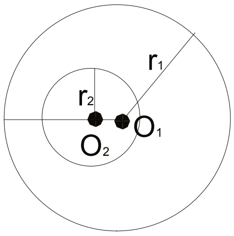



4. Okręgi $O(O_1;\ r_1)$ i $O(O_2;\ r_2)$ nazywa się wewnętrznie stycznymi, gdy mają dokładnie jeden punkt wspólny i koło $k(O_1;\ r_1)$ zawiera się w kole $k(O_2;\ r_2)$ lub koło $k(O_2;\ r_2)$ zawiera się w kole koło $k(O_1;\ r_1)$. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $|O_1O_2| = |r_1 - r_2|$.

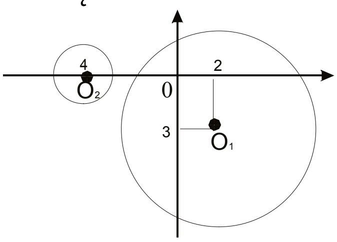



5. Jeżeli $|O_1O_2| < |r_1 - r_2|$, to $k(O_1;\ r_1) \subset k(O_2;\ r_2)$ lub $k(O_2;\ r_2) \subset k(O_1;\ r_1)$.






Przykład: Określ położenie okręgów o równaniach:
$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$ i $x^2 + 8x + y^2 + 15 = 0$
Ponieważ $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$; $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$ i $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$;
więc równania okręgów możemy zapisać w postaci: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$; $(x+4)^2 + y^2 = 1^2$
Zatem mamy do czynienia z okręgami $O(O_1;\ r_1)$ i $O(O_2;\ r_2)$; gdzie $O_1(2;\ -3)$; $O_2(-4;0)$; $r_1 = 4$ i $r_2 = 1$. Skoro $|O_1O_2| = \sqrt{(-4-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; $r_1 + r_2 = 4 + 1 = 5$ to $|O_1O_2| > r_1 - r_2 \Rightarrow 3\sqrt{5} - 5 = \sqrt{5}\left(3 - \sqrt{5}\right) > 0$. Oznacza, że okręgi są wzajemnie zewnętrzne.




**ZAD.1** Zbadaj położenie okręgów:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\ i\ x^2 + 4x + y^2 + 8y = 0$
b) $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 13 = 0$ i $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 5 = 0$

## Temat 8: Wzajemne położenie okręgu i prostej.

Mamy trzy położenia prostej względem okręgu:

1. Prosta i okrąg nie mające punktów wspólnych
2. Prosta i okrąg styczna mająca jeden punkt wspólny z okręgiem i jednocześnie prostopadła do promienia
3. Prosta przecinająca okrąg i mająca z nim dwa wspólne punkty.

**ZAD. 1** Wyznacz współrzędne środka S i promienia r okręgu danego równaniem:

$$x^2 - 10x + y^2 + 24y - 56 = 0$$

**ZAD. 2** Napisz równanie okręgu o środku i stycznego do prostej 6x – 8y + 10 = 0.

**ZAD. 3** Poprowadź styczne do okręgu $x^2 + y^2 = 0$ przechodzące przez punkt A(0; 2)

**ZAD. 4** Napisz równanie stycznych do okręgu $x^2 + 12x + y^2 - 2y + 17 = 0$ i równoległych do prostej 2x + y – 5 = 0.

**ZAD. 5** Z punktu A(4; –4) poprowadzono styczne do okręgu $\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{y} + 5 = 0$. Oblicz długość odcinka łączącego punkty styczności.

## Temat 9; 10: Układy równań, z których przynajmniej jedno jest drugiego stopnia.

**ZAD.1** Rozwiąż układy równań;

a) $\begin{cases} y^2 - 3xy - 5y + 15x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4 = 0 \\ 5x = y^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (y - x)(y - 3x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x - y) - (x^2 - y^2) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$

**ZAD.2** Wyznacz równania stycznych do okręgu $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$ przechodzących przez początek układu współrzędnych i równoległych do prostej $y = 2x - 7$.

**ZAD.3** Wyznacz wierzchołki trapezu wpisanego w okrąg $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 40$, Którego podstawa zawiera się w prostej $y = x + 5$, a wysokość jest równa $6\sqrt{2}$.

**ZAD.3** Dany jest okrąg o środku $S(5; 0)$ i promieniu $r = 3$. Wyznacz styczne do okręgu przechodzące przez początek układu współrzędnych.

## Temat 10; 11: Koło w układzie współrzędnych, rozwiązywanie nierówności.

**ZAD. 1** Co jest brzegiem koła określonego nierównością $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$?

**ZAD. 2** Czy okrąg jest figurą wypukłą? Odpowiedź uzasadnij.

**ZAD. 3** Sprawdź, czy środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ należy do odcinka o końcach $A(-1; -4)$; $B(4; 1)$.

**ZAD. 4** Czy równania są równaniami okręgów?

a) $x^2 + y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 = -3$
c) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

**ZAD. 5** Udowodnij, czy punkt $A(1; -4)$ należą do koła o równaniu $x^2 + y^2 + 4x + 8y \leq 0$?

**ZAD. 6** Wyznacz m tak, aby poniższe równanie $x^2 + y^2 + 2x + m = 0$ było równaniem koła.

**ZAD. 7** Dla jakich wartości $r_1$ i $r_2$ okręgi o środkach $O_1$ i $O_2$ są wewnętrznie styczne?

**ZAD. 8** Obierz tak środki i promienie okręgów, aby były styczne:

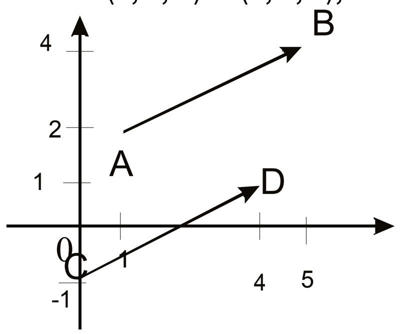
**a)** wewnętrznie
**b)** zewnętrznie
**c)** podaj przykłady

## Temat 12; 13: Pojęcie, własności i działania na wektorach.

Nauczyciel wprowadza pojęcie wektora.
Niech $\mathbf{E^n}$ oznacza przestrzeń Euklidesową n wymiarową, A, B $\in \mathbf{E^n}$
Każdej parze punktów (A; B) przyporządkujemy jeden element należący do $\mathbf{E^n}$**,** który oznaczamy symbolem $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.
Jeżeli n = 1, A = $(a_1)$ i B = $(b_1)$, to $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = $[b_1 - a_1]$
Jeżeli n = 2, A$(a_1;\ a_2)$ i B A$(b_1;\ b_2)$, to $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = $[b_1 - a_1;\ b_2 - a_2]$
Jeżeli n = 3, A$(a_1;\ a_2;\ a_3)$ i B A$(b_1;\ b_2; b_3)$, to $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = $[b_1 - a_1;\ b_2 - a_2; b_3 - a_3\ ]$.
W każdym przypadku możemy zapisać $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = B – A.
Wektor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ interpretujemy jako odcinek skierowany, którego początkiem jest punkt A, zaś końcem jest punkt B.
Graficzne przedstawienie wektora

$$A \xrightarrow{\hspace{4cm}} B$$

Przykład:
Jeżeli A(1; 2) i B(5; 4), to $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = [5-1;\ 4-2]$ = [4; 2] (rys.)
Jeżeli C(0; $-1$) i D(4;1), to $\overrightarrow{\mathbf{CD}} = [4-0;\ 1-(-1)]$ = [4; 2].
Jeżeli E(1; 0; 0) i F(0; 0; 1), to $\overrightarrow{\mathbf{EF}} = [0-1; 0-0;\ 1-0)]$ = $[-1; 0; 1]$.




**ZAD. 1** Oblicz współrzędne punktu A, jeżeli B(1; $-2$) i $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = [3;\ 4]$.

**WŁASNOŚCI:**

1) Dodawanie wektorów
   Jeżeli $\vec{v} = [x_1; y_1; z_1]$; $\vec{w}$ = $[x_2; y_2; z_2]$; to $\vec{v} + \vec{w}$ = $[x_1; y_1; z_1] + [x_2; y_2; z_2]$ =
   = $[x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2]$
2) Dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi:
   a⋅$\vec{v}$ = a⋅$[x_1; y_1; z_1] = \ [ax_1; ay_1; az_1]$
3) $\vec{v} + \vec{w}$ = $\vec{w} + \vec{v}$ - (przemienność dodawania wektorów
4) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ = $\vec{u} + (\vec{w} + \vec{v})$ - (łączność dodawania wektorów)
5) a$(\vec{v} + \vec{w})$ = a$\vec{v}$ + a$\vec{w}$ - (rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów).
6) Jeżeli $\vec{u} = [x; y; z]$ w $E^3$; $\vec{u} + [0; 0; 0] = [x+0; y+0; z+0] = [x; y; z] = \vec{u}$ oraz
   0⋅$\vec{u} = 0 * [x; y; z] = [x*0; y*0; z*0] = [0; 0; 0]$ - (jest to wektor zerowy)
7) Wektor $\vec{w}$ nazywamy przeciwny do wektora $\vec{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} + \vec{w} = 0$.
8) Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy równoległymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rzeczywista t, że $\vec{u} = \ t * \vec{v}$

9) Wektor $\vec{v}$ jest równoległy do prostej do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych różnych punktów A, B ϵ k wektor $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ jest równoległy do wektora $\vec{v}$.

10) Niezerowe wektory $\vec{u} = [u_1;\ u_2]$ i $\vec{v} = [v_1;\ v_2]$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Zatem iloczyn skalarny $\vec{u} \circ \vec{v} = [u_1;\ u_2] \circ [v_1;\ v_2] = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

**ZAD. 2** Oblicz współrzędne wektora $\vec{u}$ o długości $\sqrt{10}$ i zwrocie wyznaczonym przez wektor $\vec{v} = [1; -2]$.

**ZAD. 3** Oblicz: $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$, gdy:

a) A(1; −1); B(0; 2); C(2; −3)

b) A(0; −1; 3); B(2; −1; 0); C(−2; −2; 3)

**ZAD. 4** Oblicz współrzędne punktu B, gdy:

a) $\overrightarrow{AB} = [4;\ -3]$ i A(−1; 2)

b) $\overrightarrow{AB} = [3;\ -4; 5]$ i A(0; −1; 3)

**ZAD.5** Wyznacz wszystkie liczby m takie, by wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równoległe, gdy:

a) $\vec{u} = [2; m]; \vec{v} = [-1; 3]$

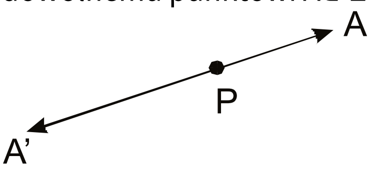
b) $\vec{u} = [2m; -3m]; \vec{v} = [-4; 6]$

**ZADANIE DOMOWE:**

Zbadaj, który z wektorów: $\vec{v} = [2; -3]$, czy $\vec{u} = [-1; 4]$ jest równoległy do prostej o równaniu 3x +2y = 0.

## Temat 14; 15: Pojęcie jednokładności.

W przestrzeni $\mathbf{E}^{\mathbf{n}}$ (n = 1 lub n = 2; lub n = 3) ustalmy punkt P i liczbę rzeczywistą s $\neq 0$.
**Def**. Jednokładnością o środku w punkcie P i skali s nazywamy takie przekształcenie, które dowolnemu punktowi A$\in \mathrm{E}^{\mathrm{n}}$ przyporządkowuje taki punkt A' $\in \mathrm{E}^{\mathrm{n}}$, że $\overrightarrow{\mathrm{PA}'} = s * \overrightarrow{\mathrm{PA}}$.




$$\overrightarrow{\mathrm{PA}'} = \mathrm{s} * \overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

**PRZYKŁAD:**
Sprawdźmy, jednokładność o skali s = −2 i środku P(0; 0) jest opisana wzorem:
$$\begin{cases} \mathrm{x}' = -2\mathrm{x} \\ \mathrm{y}' = -2\mathrm{y} \end{cases}$$
gdzie punkt A'(x'; y') jest obrazem w tym przekształceniu punktu A(x; y). Stąd
$\overrightarrow{\mathrm{PA}'} = [\mathrm{x}'; \mathrm{y}'] = [-2\mathrm{x}; -2\mathrm{y}] = (-2)* [\mathrm{x}; \mathrm{y}] = (-2)* \overrightarrow{\mathrm{PA}}$.

**ZAD. 1** Wykazać, że jednokładność o skali s $\neq 0$ i środku w punkcie P(0; 0) jest opisana wzorem:
$$\begin{cases} \mathrm{x}' = \mathrm{s} * \mathrm{x} \\ \mathrm{y}' = \mathrm{s} * \mathrm{y} \end{cases}$$

**ZAD. 2** Dane są trzy różne punkty A, B, C. Narysuj obraz punktów A i B w jednokładności o środku w C i skali 2 oraz -2.

**ZAD. 3** zbadaj, który z poniższych wzorów opisuje jednokładność i wyznacz ewentualnie środek i skalę jednokładności:

a) $\begin{cases} x' = 3x + 2 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y - 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$

**ZAD. 4** Wyznacz równanie okręgu będącego obrazem okręgu o równaniu $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - 2\mathrm{x} = 0$ w podobieństwie opisanym wzorem:

a) $\begin{cases} x' = 3y - 2 \\ y' = 3x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{2}\, x + \sqrt{2}\, \mathrm{y} \\ \sqrt{2}\, x - \sqrt{2}\, \mathrm{y} \end{cases}$

**ZAD. 5** Napisz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 6\mathrm{y} + 4 = 0$ w przekształceniach:
a) przesunięcie o wektor $\vec{\mathrm{u}} = [1; -3]$
b) jednokładności o środku w P(0; 0) i skali k = $\frac{3}{2}$

## Temat 16; 17; 18: Symetria osiowa i środkowa, własności.

Nauczyciel wyjaśnia i analizuje pojęcia przesunięcia równoległego i symetrii.

**Przesunięcie równoległe:**
Rozważmy przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u} = [a; b]$. Niech obrazem punktu A(x; y) w przesunięciu będzie punkt A'(x'; y'). Zgodnie z własnościami przesunięcia, otrzymujemy równość $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$, czyli
$[x' - x; y' - y] = [a; b]$. Stąd
$$\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$$
Stąd otrzymaliśmy związek miedzy współrzędnymi punktu a współrzędnymi jego obrazu w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}$.

**Symetria osiowa:**
Symetrię osiową względem (prostej) osi OX opisują wzory:
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$
zaś względem osi OY
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

**Symetria środkowa** (względem punktu) jest jednokładnością względem środka symetrii w skali k $= -1$. Zatem symetrię środkową względem początku układu współrzędnych opisują wzory:
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

**Przykład:**
Znajdź równanie prostej l', która jest obrazem prostej l: $x - 2y + 3 = 0$, w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u} = [-2; 3]$.
Przesunięcie równoległe opisują wzory:
$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$
Otrzymane wyrażenie podstawiamy do równania prostej l. Stąd otrzymujemy
$x' + 2 - 2(y' - 3) + 3 = 0$, czyli $x' - 2y' + 11 = 0$. Opuszczając „primy” otrzymujemy
$x - 2y + 11 = 0$.

**ZAD.1** Który ze wzorów przedstawia symetrie środkową?

a) $\begin{cases} x' = 4x - x \\ y' = -y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = -2 - y \end{cases}$

**ZAD.2** Wyznacz równanie prostej będącej obrazem prostej $2x - 3y - 6 = 0$ w symetrii środkowej względem punktu P(1; 1)

**ZAD.3** Wykaż, że symetria osiowa względem osi OX jest przekształceniem, które punktowi K(a; b) przyporządkowuje punkt K'(a; $-b$ ).

**ZAD.4** Wyznacz równanie obrazu prostej o równaniu $3x-4y-2=0$ w symetrii względem osi OY.

**ZAD.5** Oblicz współrzędne obrazu punktu $A(-2;\ -3)$ w symetrii środkowej względem punktu $K(1;-1)$.

**ZAD.6** Wyznacz symetrię środkową względem punktu $P(p_1;p_2;p_3)$ za pomocą współrzędnych.

**ZAD.7** Wyznacz równanie prostej o równaniu $2x+5y-1=0$ w symetrii względem osi OX.

**ZAD.8** Napisz równanie okręgu, który jest obrazem okręgu $x^2+y^2+6y+4=0$ w przesunięciu o wektor $\vec{u}=[-2;3]$ względem osi OX.

**ZAD.9** Znajdź punkt B symetryczny do punktu $A(-1;-3)$względem prostej $2x+y-2=0$

**ZAD.10** Znajdź równanie prostej h’, która jest obrazem prostej h o równaniu $x-2y+3=0$, przesunięciu równoległym o wektor $\vec{u}=[-1;3]$, i symetrii względem osi OX.

## Temat 19: Utrwalenie wiadomości.

**ZAD. 1** Dany jest ciąg punktów $A_n(2n; 4-n)$, n∈ N. który z nich leży najbliżej prostej y = x – 3?

**ZAD. 2** Dane są punkty A($-3$; 2); B($-1$; 0); C(2; 1), które są wierzchołkami równoległoboku ABCD.

a) wyznacz współrzędne punktu przecięcia przekątnych
b) wyznacz wierzchołek D
c) oblicz pole równoległoboku

**ZAD. 3** Zbadaj położenie okręgów:

a) $x^2+y^2-2x-4y=0$ i $x^2+y^2+4x+8y=0$
b) $x^2+y^2-2x-4y-13=0$ i $x^2+y^2-4x-6y+5=0$

**ZAD. 4** Oblicz współrzędne punktu B, gdy A(1; 2; $-3$) i $\overrightarrow{AB}=[-3;8;1]$

**ZAD. 5** Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste m takie, by wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ były równoległe, gdy:

a) $\vec{u}=[2;m];\vec{v}=[-1;3]$
b) $\vec{u}=[1+m;4];\vec{v}=[1;4]$
c) $\vec{u}=[2m;-3m];\vec{v}=[-4;6]$

**ZAD. 6** Wyznacz współrzędne obrazu trójkąta o wierzchołkach A(1; 0); B(3; 2); C($-1$; 4) w podobieństwie, które jest złożeniem przesunięcia równoległego o wektor $\vec{u}=[-3;1]$ i jednokładności o środku w punkcie P(1; 1) i skali s = 2.

## Praca klasowa nr 8

**GEOMETRIA ANALITYCZNA**

**Imię i nazwisko** ………………………………………………………….. **klasa** ………………..

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 1** Na prostej o równaniu y = 4x znajdź punkty, których odległość od prostej $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ jest równa 3.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |

**Zad.2** Czy równania są równaniami okręgów:

a) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$

| **Pyt nr 2** | |
|---|---|
| Typ pytania | Prawda/Fałsz |
| Treść pytania | Czy równanie jest równaniem okręgu? |
| Odpowiedzi | a), b) |
| | c); d) |
| Multimedia do odpowiedzi: | |
| Grafika | Rozdzielczość 640x480 |
| Równanie matematyczne | Wzory matematyczne |
| Audio | |
| Wideo | Rozdzielczość 800x600 |
| Odpowiedź zwrotna | Równanie możemy zapisać w postaci ogólnej |
| | Odpowiedź nieprawidłowa, ponieważ r=0 |

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 3** Zbadaj położenie okręgów o równaniach:
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ i $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 4** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x + y + xy = 34 \\ 4x + 4y + xy = 0 \end{cases}$$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |

**Zad. 5** Przez punkt A(0; 2) poprowadź styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

| Ilość punktów | 1 – 7 | 8 – 10 | 14 – 16 | 17 – 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## ROZWIĄZANIA

**Zad.1** Na prostej o równaniu y = 4x znajdź punkty, których odległość od prostej x + 2y = 1 jest równa3.

Oznaczmy szukany punkt $P(x_0;\ y_0)$. Ponieważ punkt leży na prostej o równaniu y = 4x, więc $y_0 = 4x_0$. Z drugiej strony odległość tego punktu od prostej x + 2y = 1, której równanie w postaci ogólnej to x +2y $-1 = 0$wyraża się wzorem:

$$\frac{|x_0 + 2y_0 - 1|}{\sqrt{5}} = 3$$

Stąd $|x_0 + 2y_0 - 1| = 3\sqrt{5}$, a dalej mamy $x_0 + 2y_0 - 1 = 3\sqrt{5}$ lub $x_0 + 2y_0 - 1 = -3\sqrt{5}$
$x_0 + 8y_0 - 1 = 3\sqrt{5}$ lub $x_0 + 8y_0 - 1 = -3\sqrt{5} \Rightarrow 9x_0 = 1 + 3\sqrt{5}$ lub $9x_0 = 1 - 3\sqrt{5}$

Dalej mamy: $x_0 = \frac{1+3\sqrt{5}}{9}$; $y_0 = \frac{1-3\sqrt{5}}{9}$ stąd mamy

$\begin{cases} x_0 = \frac{1+3\sqrt{5}}{9} \\ y_0 = \frac{4+12\sqrt{5}}{9} \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_0 = \frac{1-3\sqrt{5}}{9} \\ y_0 = \frac{4-12\sqrt{5}}{9} \end{cases}$

Stąd szukane współrzędne są postaci: $P_1\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{9};\ \frac{4+12\sqrt{5}}{9}\right)$; $P_2\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{9};\ \frac{4-12\sqrt{5}}{9}\right)$.

**ZAD. 2** Czy równania są równaniami okręgów: $x^2 + y^2 + 4x = 0$

a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$

**ZAD.3** Zbadaj położenie okręgów o równaniach:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ i $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

Ponieważ $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$; $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$ i $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$;
Stąd wynika, że równania okręgów możemy zapisać w postaci:
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ i $(x+4)^2 + y^2 = 1^2$. Zatem mamy okręgi $O(O_1; r_1)$ i $O(O_2; r_2)$, gdzie $O_1(2;\ -3)$; $O_2(-4; 0)$ zaś $r_1 = 4$ i $r_2 = 1$. Stąd

$|O_1O_2| = \sqrt{(-4-2)^2 + \left(0-(-3)\right)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; zaś $r_1 + r_2 = 4 + 1 = 5$;

wówczas

$|O_1O_2| > r_1 + r_2$ czyli $\left(3\sqrt{5} - 5 = \sqrt{5}\left(3 - \sqrt{5}\right)\right) > 0$. Wynika stąd, że okręgi są wzajemnie zewnętrzne (rozłączne zewnętrznie).

**ZAD.4** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x + y + xy = 34 \\ 4x + 4y + xy = 0 \end{cases}$$

Przekształcamy równanie pierwsze, tak aby wystąpiły wszędzie wyrażenia postaci: x + y i xy.
Grupując wyrazy otrzymujemy:
$(2x^2 + 4xy + 2y^2) - 3xy + (x + y) = 34$;

(*) $\begin{cases} 2(x+y)^2 - 3xy + (x+y) = 34 \\ 4(x+y) + xy = 0 \end{cases}$

wykonujemy podstawienie:

(**) $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$

Układ (*) i (**) jest równoważny układowi:
$$\begin{cases} 2u^2 - 3v + u = 34 \\ 4u + v = 0 \end{cases}$$
Po podstawieniu v = −4u otrzymujemy:
$2u^2 + 13v - 34 = 0;$
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = -8 \end{cases};$$
$$\begin{cases} u_2 = -8{,}5 \\ v_2 = 34 \end{cases}$$
Po podstawieniu wartości u i v otrzymujemy:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -8 \end{cases}$ lub b) $\begin{cases} x + y = -8{,}5 \\ xy = 34 \end{cases}$

Z układu a) otrzymujemy: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$. Układ b) jest sprzeczny.

**ZAD.5** Przez punkt A(0; 2) poprowadź styczne do okręgu $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Poprowadźmy przez punkt A(0; 2) prostą o współczynniku kątowym m, tzn. y = mx + 2.
Wyrugujmy z równania prostej i równania okręgu zmienną y. Po podstawieniu otrzymujemy:
$$(m^2 + 1)x^2 + 4mx + 3 = 0.$$
Dla $\Delta = 4m^2 - 12 = 0 \Rightarrow$ otrzymujemy warunek styczności, a więc dla $m_1 = \sqrt{3}$ lub $m_2 = -\sqrt{3}$ stąd nasze styczne są postaci: $y = \sqrt{3}x + 2$ lub $y = -\sqrt{3}x + 2$.

# 17. WIELOMIANY

## 1. Liczby naturalne

**Umiejętności konieczne:**

- wykonuje działania na wielomianach
- stosowanie kolejności wykonywania działań
- zna metodę rozkładania wielomianów na czynniki
- wykorzystuje poznane metody w praktyce
- potrafi dzielić wielomiany przez dwumian
  zna metodę wyznaczania reszty bez dzielenia wielomianu
- zna twierdzenie Be'zuta
- rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe

Pojęcia i fakty:

- podaje przykłady wielomianów
- podaje dzielniki danego wielomianu
- przedstawia wielomian w postaci iloczynowej
- oblicza pierwiastki równań i nierówności wielomianowych

Ad. Podstawy programowej

1. Poznajemy definicję wielomianu
2. Wyszukuje dzielniki wielomianów
3. Stosuje wzory skróconego mnożenia
4. Stosuje działania na wielomianach

## Temat 1; 2: Podstawowe działania na wielomianach jednej zmiennej i ich własności.

**Nauczyciel podaje niezbędne informacje o wielomianach.**

Funkcję określoną wzorem:

W(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$; $x \in R$, zaś $a_0;\ a_1;\ a_2; ... ; a_n$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi zwanymi współczynnikami wielomianu, nazywamy funkcją wielomianową.

Wyrażenie $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ nazywamy wielomianem zmiennej x.

Jeżeli $a_n \neq 0$, to n nazywamy stopniem wielomianu.

Wielomian W(x) i V(x) nazywamy równymi jeżeli W(x) = V(x) dla każdego x$\in$ R.

Suma, różnica, iloczyn dwóch wielomianów jest również wielomianem. Ponadto

**1)** Stopień sumy i różnicy dwóch wielomianów nie jest większy od stopnia obu tych wielomianów.

**2)** Stopień iloczynu dwóch wielomianów niezerowych jest równy sumie stopni tych wielomianów.

Funkcję stałą

W(x) = $a_0$ i $a_0 \neq 0$ nazywamy wielomianem stopnia 0.

Funkcję tożsamościową

W(x) = 0

Nazywamy wielomianem zerowym.

**Twierdzenie o równości wielomianów.**

Dwa wielomiany W(x) i P(x) są równe dla każdej wartości x wtedy i tylko wtedy gdy są tego samego stopnia i współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej są równe.

**Przykład**:

Dany jest wielomian W(x) = $x^3 + ax^2 + bx + c$. Wyznacz a, b, c wiedząc, że W($-1$) = 1; W(2) = 13; W($\frac{1}{2}$) = $-\frac{43}{8}$;

**Rozwiązanie**:

$(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 1$

$2^3 + a2^2 + b2 + c = 13$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\frac{1}{2} + c = -\frac{43}{8}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ a + 2b + 4c = -22 \end{cases} \Rightarrow a = 4;\ b = -3;\ c = -5;$$

Stąd W(x) = $x^3 + 4x^2 - 3x - 5$.

**ZAD. 1** Dodaj wielomiany:

a) $A(x) = 5x^3 + 2x^2 - 6x + 2$; $B(x) = -4x^3 + x$;

b) $C(x) = -6x^3 + x^2 + x + 5$; $D(x) = 6x^5 + x^2 - x + 2$;

**ZAD. 2** Wykonaj mnożenie wielomianów:

a) $(x - 3)(2x^2 + x + 5)$

b) $(x^3 - x + 2)(3x^2 - x + 4)$

c) $(x^2 - 2x + 3)(x^3 - x^2 + 6x + 1)$

d) $(x^2 - 8)(x^2 + 8x + 8)$

**ZADANIE DOMOWE**

Rozłóż na czynniki pierwszego stopnia wielomian $W(x) = x^4 - 10x^2 + 25$.

## Temat 3; 4: Rozkład wielomianu na czynniki.

Przedstawiamy wielomiany w postaci iloczynu wielomianów niższych stopni.

**Przykłady**:

**a)** $2x^3 - 3x^2 + x = x(2x^2 - 3x + 1)$

**b)** $2x^2 - 2ab - 3a + 3b = 2a(a-b) - 3(a-b) = (a-b)(2a-3)$

**ZAD. 1** Rozłóż na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie czynników oraz wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias.

**a)** $x^4 - 1$

**b)** $x^2 - 5x + 6$

**c)** $3a(r+b) - 3c(r+b)$

**d)** $rx + 2ry - sx + 2sy$

**e)** $a^2x^2 - 2a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2y^2$

**f)** $2x^2 - 8y^2$

**g)** $a^2 + 3a + 2$

**h)** $x^2 - 11x - 60$

**i)** $x^3 + x^2 - x - 1$

**j)** $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

**k)** $2x^3 - 2x^2 - 3$

**l)** $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

**m)** $4a^2r + 12a^2s - 3b^2r - 9b^2s$

## Temat 5; 6; 7: Dzielenie wielomianów.

Załóżmy, że dane są liczby rzeczywiste: $a_0;\ a_1;\ a_2; \dots; a_n$, gdzie $a_n \neq 0$ i $n \in N$ wówczas równanie $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ nazywamy równaniem stopnia n. Rozwiązaniem tego równania jest liczba k taka, że $a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + \ \dots + a_2k^2 + a_1k^1 + a_0 = 0$. Jeżeli liczba k jest rozwiązaniem powyższego równania, to mówimy, że spełnia to równanie.

**Przykład 1**:
Miejscem zerowym wielomianu f(x) = x −2 jest liczba 2, gdyż f(2) = 0. Ponieważ funkcja ma jedno miejsce zerowe, więc $\{x: x \in R \wedge x - 2 = 0\} = \{2\}$ wobec tego $x_1 = 2$ jest jedynym rozwiązaniem równania $x - 2 = 0$.
Przykład 2:
Miejscami zerowymi wielomianu f(x) = $(x + 1)\ (x - 1\ )^2\ (\ x - 3)^3$ są liczby $x_1 = -1; x_2 = 1; x_3 = 3$, ponieważ f(−1) = 0; f(1) = 0 i f(3) = 0; wobec tego $\{x: x \in R \wedge (x\ +\ 1)\ (x - 1\ )^2\ (\ x - 3)^3 = 0\} = \{-1; 1; 3\}$

**Twierdzenie Be'zout'a**
Jeżeli liczba a jest miejscem zerowym wielomianu f stopnia n ($n \in N$), to istnieje taki wielomian g stopnia (n−1 ), że f(x) = (x−a)g(x), dla $x \in R$.

**Przykład**: Znajdź pierwiastki wielomianu f(x) = $4x^3 - x + 3; x \in R$
Pierwiastkami tego wielomianu mogą być podzielniki wyrazu wolnego, czyli liczby: $-1; 1;\ -3; 3$
Obliczamy wartość wielomianu w tych punktach:
f(−1) = 0
f(1) = 6
f(−2) = −102
f(2) = −108

Wynika stąd, że $x_1 = -1$jest miejscem zerowym należącym do zbioru $\{-1; 1; -3; 3\}$ tj. do zbioru wszystkich dzielników całkowitych.

**ZAD. 1** Wykonaj dzielenie wielomianu $2x^3 - x^2 + 2x - 3$ przez dwumian x −1

**ZAD. 2** Podziel wielomian $(3x^5 - x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8) : (x^3 - x + 2)$

**ZAD. 3** Wykonaj dzielenie $(x^3 + x + 1) : (x - 1)$

**ZAD. 4** Zbadaj czy wielomian W(x) = $29x^5 - 16x^3 + 3x^2 - 16$ jest podzielny przez x −1.

**ZAD. 5** Podziel:

a) $(x^6 + y^6) : (x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$.
b) $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 2)$
c) $(x^4 - 3x^3 - x^2 - 4x + 5) : (x - 1)$
d) $(a^8 - b^8) : ) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
e) $(6t^4 - 7x^3 - 13x^2 + 23t - 12) : (2t - 3)$

f) $(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3) : (2x + y)$
g) $\left(x^3 - 0{,}5x^2 - 8x + 4 + \sqrt{3}\right) : \left(x - \sqrt{5}\right)$
h) $[x^3 - (a - b)x^2 + (a^2 + b^2)x + (a + b)^3] : [x - (a + b)]$

**ZAD. 8** Oblicz resztę z dzielenia wielomianu
a) W(x) = $x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ przez dwumian F(x) =(x−3 ) nie wykonując dzielenia.
b) W(x) = $x^4 + 6x^2 - x - 2$ przez dwumian F(x) =(x+1 ) nie wykonując dzielenia.
c) W(x) = $x^{10} - 4x^6 + 2x^2 + x + 3$ przez dwumian F(x) =(x+1 ) nie wykonując dzielenia.
d) W(x) = $x^3 - 5x^2 + 10x - 2$ przez dwumian F(x) =(x−5 ) nie wykonując dzielenia.
e) W(x) = $x^4 - 3x^2 - x - 2$ przez dwumian F(x) =(x−2 ) nie wykonując dzielenia.

## Temat 8; 9: Zastosowanie twierdzenia Be'zout'a w zadaniach.

**ZAD. 1** Dla jakich wartości a i b wielomian W(x) = $(x^4 + x^3 - x^2 + ax + b)$ jest podzielny przez $(x^2 - x - 2)$.

**ZAD. 2** Kiedy wielomian W(x) = $(x^4 - 12x^2 - 13x - 12)$ jest podzielny przez (x−4 ) oraz przez (x+3 )?

**ZAD. 3** Dla jakich parametrów m, n, p, q wielomian P(x) = $(x^4 + mx^3 + nx^2 = 12x = 4)$ jest równy wielomianowi $Q(x) = (x^2 + px + q)^2$.

**ZAD. 4** Dla jakich parametrów m, n, p, q wielomian P(x) = $(x^4 + mx^3 + 13x^2 + nx = 4)$ jest równy wielomianowi $Q(x) = (x^2 + px + q)^2$.

**ZAD. 5** Oblicz reszty z dzielenia wielomianów:

a) $(x^3 - 5x^2 + 2x^2 - 1)$: (x+1)
b) $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1)$: (x+2)
c) $(5x^3 + 6x^2 - 2x + 3)(x + 1)$

**ZAD. 6** Dowieść, że wielomian $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych.

**ZAD. 7** Udowodnij, że wielomian $px^6 + qx^5 = rx^4 - rx^2 - qx - p$ jest podzielny przez (x +1).

**ZAD. 8** Pewien wielomian daje przy dzieleniu przez (x−1) resztę 2, zaś przy dzieleniu przez (x−2) resztę 5. Jaką resztę otrzymamy przy dzieleniu tego wielomianu przez (x−1) (x−2)?

**ZAD. 9** Znaleźć wielomian czwartego stopnia, którego pierwiastkami są liczby: 1; 2; 3; 4. Zaś dla x = 5 przyjmuje wartość 1.

## Temat 10; 11; 12; 13; 14: Rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych

**ZAD. 1** Wiedząc, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu W(x) = $x^3 - x^2 - 4x + 4$, rozłożyć na czynniki wielomian.

**ZAD. 2** Rozłożyć na czynniki pierwsze wielomian
a) $x^4 - 10x^2 + 25$.
b) $x^4 + x^2 + 1$

**ZAD. 3** Wykazać, że pierwiastkiem wielomianu P(x) = $x^5 - 5x^4 + 13x - 65$ jest liczba 5.

**ZAD. 4** Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Znajdź wszystkie pierwiastki tego wielomianu.

**ZAD. 5** Rozwiąż równanie:
a) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.
b) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.
c) $x^6 - 9x^3 + 20 = 0$
d) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$
e) $x^4 - 5x^3 + 4 = 0$

**ZAD. 6** Rozwiąż nierówność:
a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$
b) $(x+2)(x-1)(x-5) > 0$ (Wskazówka: ustal znak iloczynu w tabelce)
c) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 50x + 24 \leq 0$
d) $x(x^2 + 1)(x-1)(x-x^2 - 1) > 0$
e) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 > 0$
f) $(x^4 + x^2 + 1)(x^2 - 1) \leq 0$
g) $(x^2 - 11)(x^2 - x + 3) > 0$
h) $(x+2)(x-1)(x-3)(x+4) > 0$
i) $(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)(x+2) \leq 0$
j) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$
k) $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

**ZAD. 7** Wyznacz dziedzinę funkcji:
a) $y = \sqrt{(x^2 - 4)(x + 1)(x + 3)}$
b) $y = \sqrt{(x^2 - 5x + 6)|x + 1|}$

## Temat 15: Powtórzenie wiadomości.

**ZAD. 1** Wykonaj dzielenie $(6x^3 + 5x^2 - 13xb^2 - 12b^3)$(3x + 4b)

**ZAD. 2** Bez wykonywania dzielenia określ wartość reszty:

a) $((x^{10} - 4x^6 + 2x^2 + x + 3))$(x + 1)

b) $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4)$: (x + 2)

**ZAD. 3** Rozwiąż równanie: $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

**ZAD. 4** Rozłóż wielomian na czynniki:

a) $2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

b) $x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$

**ZAD. 5** Rozwiąż nierówność: $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 \geq 0$

**ZAD. 6** Wyznacz przedziały, w których funkcja y = $x^3 + 3x^2 - x - 3$ przyjmuje wartości dodatnie.

Praca klasowa nr 9

## WIELOMIANY I DZIAŁANIA NA NICH

**Imię i nazwisko** ........................................................... **klasa** ....................

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 1** Znajdź miejsca zerowe wielomianu $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

**Zad.2** Dla jakich wartości a wielomian P(x) = $x^2 + x - 1$ jest podzielnikiem wielomianu W(x) = $x^4 + 4x^3 + x^2 + ax + 1$ i oblicz iloraz.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 3** Rozwiąż równanie: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |

**Zad. 4** Wykonaj dzielenie: $[(m + n)^3 - (2m - n)^3]:(2n - m)$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 0 | 4 |
| 0 | 5 |
| 0 | 6 |

**Zad. 5** Zbadaj liczbę miejsc zerowych wielomianu $x^3 - (m + 2)x^2 + (3m - 2)x$ w zależności od parametru m.

| Ilość punktów | 1 – 9 | 10 – 12 | 13 – 20 | 21 – 23 | 24 – 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ocena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## ROZWIĄZANIA

**Zad. 1** Znajdź miejsca zerowe wielomianu $x^3-2x^2-5x+6$.
Jeżeli wielomian ma współczynniki całkowite to miejsca zerowe są liczbami całkowitymi, to miejsce zerowe jest podzielnikiem wyrazu wolnego. Znajdujemy dzielniki liczby 6 czyli: 1; − 1; 2; −2; 3; −3.
Sprawdzamy W(1) = 1− 2 ⋅ 1− 5⋅ 1 + 6 = 0. Stąd $x_1$= 1. Na podstawie twierdzenia Be'zouta wielomian jest podzielny przez (x− 1) i mamy $(x^3-2x^2-5x+6)$: (x− 1)

$$
\begin{array}{l}
(x^3-2x^2-5x+6):(x-1)=x^2-x-6\\
\underline{-x^3+x^2\qquad}\\
=\quad -x^2-5x\\
\qquad \underline{x^2-x\qquad\qquad}\\
\qquad\qquad -6x+6\\
\qquad\qquad \underline{\ 6x-6}\\
\qquad\qquad\ \ =
\end{array}
$$

= Stąd otrzymujemy $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$.
Pozostałe miejsca zerowe mogą być miejsca zerowe trójmianu $x^2-x-6$. $\Delta=1+24$ stąd $\sqrt{\Delta}$ = 5 i −5
Otrzymujemy $x_2$= −2 i $x_3$= 3. Zatem wielomian zapisujemy $x^3-2x^2-5x+6$ = (x− 1) (x+2) (x− 3).

**Zad. 2** Dla jakich wartości a wielomian $P(x)=x^2+x-1$ jest podzielnikiem wielomianu $W(x)=x^4+4x^3+x^2+ax+1$ i oblicz iloraz.

$$
\begin{array}{l}
(x^4+4x^3+x^2+ax+1):(x^2+x-1)=x^2+3x-1\\
\underline{\ x^4+x^3-x^2\qquad\qquad}\\
\qquad\quad 3x^3+2x^2+ax\\
\qquad\quad \underline{3x^3+3x^2-3x\qquad\quad}\\
\qquad\qquad -x^2+(a+3)x+1\\
\qquad\qquad \underline{-x^2-x+1\qquad\ \ }\\
\qquad\qquad\qquad\quad (a+4)x\ \text{– reszta}
\end{array}
$$

Aby wielomian P(x) był podzielnikiem W(x) potrzeba i wystarcza aby reszta (a + 4)x była równa zero. Stąd wynika, że a + 4 = 0 gdy a = −4.

**Zad. 3** Rozwiąż równanie: $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0$.
Dzieląc równanie przez $x^2$ mamy: $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0/:x^2$ stąd otrzymujemy równość:

$$x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$$

Podstawiając $z=x+\frac{1}{x}$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$z^2-5z+4=0 \text{ stąd}$$

$$z_1=1;\ z_2=4$$

Podstawiając $1=x+\frac{1}{x}$ rozwiązujemy równanie, które nie ma pierwiastków oraz równanie $4=x+\frac{1}{x}$ mamy: $x_1=2-\sqrt{3}$ oraz $x_2=2+\sqrt{3}$

**Zad. 4** Wykonaj dzielenie: $[(m+n)^3-(2m-n)^3]:(2n-m)$
$[(m+n)^3-(2m-n)^3]=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-8m^3+12m^2n-6mn^2+n^3=$
$=2n^3-3mn^2+15m^2n-7m^3$ ostatecznie mamy:

$$
\begin{array}{l}
(2n^3-3mn^2+15m^2n-7m^3):(2n-m)=n^2-mn+7m^2 \\
\underline{-2n^3+n^2m} \\
= \quad -2mn^2+15m^2n \\
\quad\ \underline{2mn^2-m^2n\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 14m^2n-7m^3 \\
\qquad\quad \underline{-14m^2n+7m^3} \\
\qquad\qquad = \qquad =
\end{array}
$$

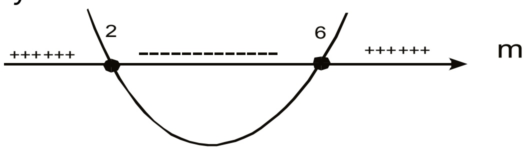
**Stąd iloraz wynosi $\mathbf{n^2-mn+7m^2}$.**

**ZAD. 5** Zbadaj liczbę miejsc zerowych wielomianu $x^3-(m+2)x^2+(3m-2)x$ w zależności od parametru m.

Wielomian $x^3-(m+2)x^2+(3m-2)x$ możemy przedstawić w postaci:
$x^3-(m+2)x^2+(3m-2)x=x[x^2-(m+2)x+3m-2]$, stąd wynika, że miejscami zerowymi wielomianu są x = 0 i miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $x^2-(m+2)x+3m-2$.
Sprawdźmy dla jakiej wartości parametru liczba x = 0 jest również miejscem zerowym trójmianu. W tym celu podstawmy x = 0 do trójmianu i przyrównajmy do zera. Stąd otrzymujemy:
$3m-2=0$ i dalej $m=\frac{2}{3}$. Zbadajmy istnienie miejsc zerowych trójmianu.

$$\Delta=(m+2)^2-4(3m-2)=m^2+4m+4-12m+8=m^2-8m+12.$$

Znak wyróżnika przedstawia wykres:




**Rozpatrzymy trzy przypadki:**

1) $\Delta<0$, zachodzi, gdy $m\in(2;6)$. Dla tego przypadku trójmian nie ma miejsc zerowych z wyjątkiem $x_1=0$.
2) $\Delta=0$, zachodzi, gdy $m\in\langle 2;6\rangle$. Tu trójmian ma jedno miejsce zerowe. Rozpatrzmy każdą wartość osobno.
   a) dla m = 2 mamy $x=\frac{m+2}{2}$; stąd x = 2
   b) dla m = 6 jest $x=\frac{m+2}{2}$; stąd x = 4. Wynika stąd, że dany wielomian ma dwa miejsca zerowe
3) $\Delta>0$, co z wykresu widać, że zachodzi dla $m\in(-\infty;2)\cup\langle 6;+\infty)$ w tym przypadku trójmian ma dwa miejsca zerowe, ale dla $m=\frac{2}{3}$; x = 0. Zatem dla $m\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(6;+\infty)$
   dany wielomian ma trzy miejsca zerowe, zaś dla $m=\frac{2}{3}$ ma tylko dwa miejsca zerowe.

Ostatecznie wielomian $x^3-(m+2)x^2+(3m-2)x$ ma

1) jedno miejsce zerowe dla $m\in(2;6)$;
2) dwa miejsca zerowe dla $m\in\left\{\frac{2}{3};2;6\right\}$
3) trzy miejsca zerowe dla $m\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};2\right)\cup(6;+\infty)$.