KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROJEKT „SPOSÓB NA NAUKĘ” WSPÓŁFINANSOWANY ZE ŚRODKÓW
UNII EUROPEJSKIEJ W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Program nauczania z matematyki rozszerzony i poradnik dla nauczyciela – klasa II szkoły ponadgimnazjalnej

Spis treści

Wstęp

Ważnym celem nauczania matematyki w liceum i technikum jest wyposażenie przyszłego absolwenta w umiejętności matematyczne niezbędne do sprostania wymogom egzaminu maturalnego z matematyki na wybranym przez niego poziomie. Dodatkowo zakres podstawowy powinien dać absolwentowi umiejętności przydatne w codziennym życiu, zaś zakres rozszerzony – stworzyć solidny fundament do kontynuowania nauki na wymagających tego wyższych studiach. Nauczanie matematyki w sposób szczególny stymuluje rozwój intelektualny ucznia, między innymi wykształca:

• umiejętność czytania tekstu ze zrozumieniem, w tym również tekstu zawierającego dane statystyczne prezentowane w różny sposób;
• umiejętność logicznego myślenia i argumentowania;
• nawyku krytycznej analizy informacji;
• umiejętność formułowania hipotez i ich uzasadniania;
• wyobraźnię przestrzenną;
• umiejętność planowania strategii rozwiązania problemu;
• postawę wykorzystywania narzędzi matematycznych w życiu codziennym, budowania modelu matematycznego dla danego kontekstu praktycznego z uwzględnieniem ograniczeń i zastrzeżeń z niego wynikających.

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
1. PLANIMETRIA			**18**
1. Podstawowe pojęcia geometryczne	▪ zna określenia figur takich jak: punkt, prosta, półprosta, płaszczyzna, okrąg, koło, łuk ▪ wie jak określić figurę wypukła oraz wklęsła; podaje przykłady ▪ potrafi określić położenie prostych na płaszczyźnie ▪ określa odległość na płaszczyźnie	Uczeń: • wie jak zapisać zależności między figurami na płaszczyźnie • wyznacza sumę, różnicę i część wspólną poznanych figur na płaszczyźnie	1
2. Współliniowość punktów własności. Nierówność trójkąta	▪ wie jak określić odległość ▪ wie jak korzystać z nierówności trójkąta aby określić współliniowość punktów , gdy odległości między nimi są opisane z użyciem parametru	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, stosując poznane własności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
3. Kąty i ich rodzaje	▪ zna podział kątów ze względu na ich miarę i rodzaje boków ▪ zna pojęcia: kąt przyległy i kąt wierzchołkowy, kąty naprzemianległe, odpowiadające oraz stosuje ich własności do rozwiązywania zadań	Uczeń: • zna i rozróżnia rodzaje kątów powstałych w wyniku przecięcia dwóch prostych równoległych trzecią prostą • zna własność dotyczącą sumy miar kątów wewnętrznych w trójkąta • wie i potrafi określić kąt zewnętrzny wielokąta • potrafi udowodnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała • stosuje poznane własności do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Wzajemne położenie prostej i okręgu	▪ zna własności stycznej do okręgu ▪ określa przypadki wzajemnego położenie prostej i okręgu ▪ konstruuje styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący na okręgu oraz poza okręgiem ▪ zna twierdzenie o stycznej do okręgu i wykorzystuje go do rozwiązywania zadań ▪ zna pojęcie siecznej okręgu lub koła ▪ zna twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu	Uczeń: • potrafi uzasadnić poprawność konstrukcji stycznych do okręgu • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, związanych ze styczną do okręgu • stosuje twierdzenie o odcinkach stycznych do okręgu w zadaniach • zna dowód twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu	1
5. Wzajemne położenie dwóch okręgów	▪ określa wzajemne położenie dwóch okręgów w zależności od odległości środków tych okręgów i wielkości promieni ▪ zna własności związane z położenie dwóch okręgów	Uczeń: • zna własności kiedy okręgi są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie, rozłączne zewnętrznie lub wewnętrznie, przecinające się • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Kąty związane z okręgiem: środkowe i wpisane oraz własności wynikające z ich wzajemnego położenia	▪ zna określenia: kąt środkowy w okręgu, kąt wpisany w okrąg ▪ zna twierdzenie dotyczące kątów wpisanych i środkowych opartych na tym samym łuku, wykorzystuje własności do rozwiązywania zadań	Uczeń: • potrafi dowieść własności dotyczącej kątów wpisanych i środkowych, opartych na tym samym łuku • rozwiązuje zadania, o podwyższonym stopniu trudności, z zastosowaniem poznanych własności	1
7.Okrąg opisany na trójkącie - własności	▪ zna pojęcie symetralnej odcinka i jej konstrukcję ▪ wyznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ▪ potrafi wykonać konstrukcję okręgu opisanego na trójkącie ▪ zna własność co do poprawności wykonanej konstrukcji	Uczeń: • potrafi obliczyć długość promienia okręgu opisanego na trójkątach: równoramiennym, równobocznym, prostokątnym • rozwiązuje zadania proste i o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
8. Okrąg wpisany w trójkąt i jego własności	▪ zna pojęcie dwusiecznej kąta oraz jej konstrukcję geometryczną ▪ wyznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt i zna konstrukcję ▪ potrafi teoretycznie wyjaśnić poprawność wykonanej konstrukcji	Uczeń: • wie, że dwusieczne kątów trójkąta wyznaczają środek okręgu wpisanego w trójkąt • zna własność dotyczącą promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny w zależności od jego boków • zna i potrafi stosować wzór na pole trójkąta w zależności od jego obwodu i promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	1
9. Twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie	▪ zna twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa ▪ stosuje poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań ▪ zna jeden z dowodów twierdzenie Pitagorasa	Uczeń: • rozróżnia rodzaje trójkątów ze względu na kąty i boki • stosuje poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
10. Twierdzenie Talesa i jego zastosowanie	▪ zna twierdzenie Talesa oraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa oraz jego dowód ▪ stosuje twierdzenia do rozwiązywania zadań	Uczeń: • zna własność równoległości prostych • stosuje poznane własności do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności	1
11.Trójkąty i ich punkty szczególne. Twierdzenie o dwusiecznej kąta	▪ zna pojęcie ortocentrum trójkąta ▪ zna zależności między środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym a środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt ▪ zna pojęcia środkowej, symetralnej, dwusiecznej trójkąta, ▪ zna twierdzenie o środkowych trójkąta ▪ wie co to środka ciężkości trójkąta ▪ zna twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie	Uczeń: • zna własność, że w trójkącie środkowe dzielą się w stosunku 1 : 2 • wykorzystuje powyższą własność do rozwiązywania zadań • stosuje twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trójkąta • stosuje poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności • zna dowód twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion trójkąta • zna dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
12. Trójkąty przystające i ich własności	▪ wie kiedy trójkąty są przystające ▪ zna cechy przystawania trójkątów ▪ rozpoznaje trójkąty przystające w praktyce	Uczeń: • na podstawie twierdzenia o cechach przystawania trójkątów wyjaśnia, które trójkąty są przystające • stosuje poznane własności w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności	1
13. Trójkąty podobne – cechy podobieństwa	▪ wie kiedy trójkąty są podobne ▪ zna cechy podobieństwa trójkątów ▪ rozpoznaje trójkąty podobne ▪ wyjaśnia podobieństwo trójkątów, stosując poznane cechy	Uczeń: • uzasadnia, że w trójkącie prostokątnym długość wysokości jest średnią geometryczną długości odcinków, na które ta wysokość dzieli przeciwprostokątną • korzysta z własności trójkątów podobnych przy rozwiązywaniu zadań • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	1
14. Twierdzenie o odcinkach siecznych	▪ zna twierdzenie o odcinkach stycznej i siecznej ▪ zna twierdzenie o odcinkach siecznych ▪ stosuje poznane twierdzenia w zadaniach	Uczeń: • dowodzi twierdzenie o odcinkach siecznych • stosuje poznane twierdzenia w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	**Zakres treści**	**Uczeń zna**	**Liczba godzin**
15. Powtórzenie wiadomości 16. Praca klasowa i jej omówienie			3
		2. WYRAŻENIA WYMIERNE	**22**
1. Wyrażenia wymierne	▪ odróżnia wyrażenie wymierne od innych wyrażeń algebraicznych ▪ potrafi wyznaczyć dziedzinę wyrażenia wymiernego ▪ oblicza wartość liczbową wyrażenia ▪ skraca i rozszerza wyrażenia wymierne, stosując rozkład wyrażeń na czynniki	Uczeń: • wyznacza dziedzinę wyrażenia wymiernego, którego mianownik jest wielomianem dowolnego stopnia • stosuje wzory skróconego mnożenia przy skracaniu lub rozszerzaniu wyrażeń wymiernych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych	▪ mnoży i dzieli wyrażenia wymierne, redukuje wyrazy podobne ▪ sprowadza wyrażenia wymierne do postaci nieskracalnej ▪ stosuje wzory skróconego mnożenia	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
3.Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych	▪ potrafi dodawać i odejmować wyrażenia wymierne ▪ sprowadza wynik do postaci nieskracalnej ▪ stosuje wzory skróconego mnożenia do zapisywania wyrażenia w postaci nieskracalnej	Uczeń: • sprawnie wykonuje działania na wyrażeniach wymiernych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
4. Przekształcanie wyrażeń wymiernych	▪ przekształca wyrażenia wymierne ▪ wyznacza poszczególne zmienne z wyrażenia wymiernego ▪ przekształca wzory literowe z fizyki, chemii itp.	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • dowodzi tożsamości, w których występują wyrażenia wymierne	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Rozwiązywanie równań wymiernych	▪ odróżnia równania wymierne od innych równań ▪ sprawdza, czy wskazana liczba jest rozwiązaniem równania, uwzględniając dziedzinę równania ▪ wyznacza dziedzinę równania, gdy w mianowniku jest wielomian co najwyżej drugiego stopnia lub wielomian wyższego stopnia zapisany w postaci iloczynowej ▪ rozwiązuje równania wymierne, które sprowadzają się do równań liniowych lub kwadratowych ▪ rozwiązuje równania wymierne, korzystając z własność proporcji ▪ rozwiązuje równania wymierne, sprowadzając je do równań wielomianowych	Uczeń: • rozwiązuje równania wymierne, sprowadzając je do równań wielomianowych dowolnego stopnia • rozwiązuje równania wymierne, sprowadzając je do równań wielomianowych poprzez podstawienie pomocniczej niewiadomej • rozwiązuje równania wymierne, wykorzystując poznane własności – rozkład na czynniki, podstawienie dodatkowej zmiennej, sprowadzanie do postaci trójmianu kwadratowego	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Rozwiązywanie nierówności wymiernych	▪ odczytuje rozwiązania nierówności wymiernych, gdy z wykresu odpowiednich funkcji wymiernych ▪ rozwiązuje nierówności wymierne, sporządzając wykresy odpowiednich funkcji liniowych lub kwadratowych	Uczeń: • rozwiązuje nierówności wymierne, sprowadzając je do nierówności wielomianowych • rozwiązuje nierówności wymierne różnymi metodami	2
7. Wielkości odwrotnie proporcjonalne	▪ wie kiedy wielkości są odwrotnie proporcjonalne ▪ wskazuje przykłady ▪ wyznacza brakującą wielkość proporcjonalną do danej, gdy zna współczynnik proporcjonalności ▪ rozwiązuje zadania tekstowe, stosując własności proporcjonalności odwrotnej	Uczeń: • rozwiązuje zadania tekstowe, w których występują wielkości odwrotnie proporcjonalne • sporządza wykres funkcji opisujący wielkości odwrotnie proporcjonalne • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
8. Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$; $a \neq 0$ i $x \neq 0$ i jego przekształcanie	▪ rysuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$; gdy $a \neq 0$ i $x \neq 0$ i opisuje jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności ▪ wskazuje hiperbolę $xy = a$ wśród wykresów różnych funkcji ▪ szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x} + q; a \neq 0; x \neq 0$ i opisuje jej własności ▪ szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p}; a \neq 0; x \neq p$ i opisuje jej własności	Uczeń: • opisuje własności funkcji: asymptoty, środek symetrii wykresu, osie symetrii wykresu • podaje wzór funkcji wymiernej na podstawie jej wykresu • odczytuje argumenty, dla których funkcja przyjmuje określone wartości lub spełnia określone warunki • szkicuje wykres opisujący wielkości odwrotnie proporcjonalne, uwzględniając dziedzinę • sporządza wykresy funkcji $\mathbf{f(x) = \frac{a}{x-p} + q; a \neq 0; x \neq p}$ • sporządza wykres funkcji y = |f(x)|, gdy funkcja f jest dana wzorem $f(x) = \frac{a}{x-p} + q; a \neq 0; x \neq p$	3
9. Zastosowanie wyrażeń wymiernych w zadaniach	▪ rozwiązuje zadania tekstowe typu: droga, prędkość, czas, prowadzące do rozwiązywania równań zapisanych w postaci proporcji	Uczeń: • rozwiązuje zadania tekstowe prowadzące rozwiązuje zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, korzystając z równań i nierówności wymiernych	3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
10. Powtórzenie wiadomości 11. Praca klasowa i jej omówienie			3
	3. TRYGONOMETRIA II		**25**
1. Miara łukowa kąta	▪ zna pojęcie kąta skierowanego ▪ przedstawia kąt o dowolnej mierze stopniowej w postaci $\alpha = k \cdot 360° + \beta$ gdzie $0 \leq \beta \leq 360^0$ i k jest liczbą całkowitą ▪ zna pojęcie miary łukowej i jej jednostkę – radian ▪ zamienia stopnie na radiany i odwrotnie	Uczeń: • stosuje miary łukową i stopniową kąta • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta	▪ zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta ▪ oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kąta, znając współrzędne punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta ▪ określa znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych ▪ konstruuje kąty w układzie współrzędnych na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych	Uczeń: • wyznacza, wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów • wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, wykorzystując symetrie rozwiązań • stosuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach, przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego • zna i stosuje związki trygonometryczne dowolnego kąta do rozwiązywania zadań problemowych	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
3. Wykresy funkcji trygonometrycznych	▪ szkicuje wykresy funkcji trygonometrycznych ▪ y = sinx; y = cosx; y = tgx y = ctg i na podstawie wykresów określa własności tych funkcji	Uczeń: • szkicuje wykresy funkcji trygonometrycznych opisanych wzorem, stosując przekształcenia: symetrię względem osi układu współrzędnych , symetrię względem punktu (0, 0), przesunięcie o wektor • zapisuje wzór funkcji, której wykres otrzymano po przekształceniach	2
4.Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów	▪ oblicza wartości funkcji trygonometrycznych, stosując wzory na sinus i cosinus sumy oraz różnicy kątów ▪ zna wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta i potrafi je stosować do rozwiązywania zadań ▪ oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest wartość jednej z nich	Uczeń: • uzasadnia wzory na sinus i cosinus sumy oraz różnicy kątów • wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	4

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5.Tożsamości trygonometryczne	▪ udowadnia tożsamości trygonometryczne, stosując poznane wzory	Uczeń: • przeprowadza trudniejsze dowody tożsamości trygonometrycznych, stosując poznane wzory na sinus i cosinus sumy oraz różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów • wyznacza dziedzinę równości będących tożsamościami trygonometrycznymi	3
6. Wykresy funkcji trygonometrycznych y = k*f(x) oraz y = f(k*x) gdzie f jest funkcją trygonometryczną	▪ szkicuje wykresy funkcji typu y = k*f(x) oraz y = f(k*x) gdzie f jest funkcją trygonometryczną ▪ odczytuje z wykresów własności tych funkcji wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych ▪ wskazuje okres podstawowy funkcji trygonometrycznej	Uczeń: • wskazuje wspólne własności funkcji f(x); y = k*f(x) oraz y = f(k*x) • własności różniące te funkcje • wykorzystuje przekształcenia: symetrie, przesunięcie o wektor, do szkicowania wykresów funkcji trygonometrycznych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
7. Równania trygonometryczne - własności	▪ rozpoznaje równania trygonometryczne ▪ rozwiązuje równania trygonometryczne z wykorzystaniem wykresów funkcji trygonometrycznych rozwiązuje proste równania trygonometryczne typu sin2x= 1/2; sin2x+cosx=1; sinx + cosx =1	Uczeń: • rozwiązuje proste równania trygonometryczne z wykorzystaniem wykresów funkcji trygonometrycznych w zbiorze liczb rzeczywistych *R* oraz zapisuje ogólne rozwiązania równań i nierówności • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	3
8.Nierówności trygonometryczne	▪ rozpoznaje nierówności trygonometryczne typu $\sin x > a;\ \cos x \leq a;\ \tan x > a$ i rozwiązuje je ▪ posługując się wykresami funkcji trygonometrycznych w określonych przedziałach	Uczeń: • rozwiązuje nierówności trygonometryczne, posługując się wykresami funkcji trygonometrycznych w zbiorze *R* oraz zapisuje ogólne rozwiązania równań i nierówności • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, stosując różne metody	3
9. Powtórzenie wiadomości 10. Praca klasowa i jej omówienie			3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. CIĄGI			**28**
1. Ciąg liczbowy i jego własności	▪ wie kiedy liczby tworzą ciąg liczbowy ▪ odróżnia ciągi skończone od ciągów nieskończonych ▪ oblicza dowolny wyraz ciągu, gdy dany jest wzór ogólny ciągu ▪ sporządza wykres ciągu ▪ sprawdza, czy podana liczba jest wyrazem ciągu, gdy prowadzi to do rozwiązania równania liniowego, kwadratowego lub prostego równania wielomianowego bądź wymiernego ▪ rozumie różnicę między symbolem ciągu (a_n) a symbolem *n*- tego wyrazu ciągu - a_n wyznacza wyrazy ciągu, które spełniają opisany warunek	Uczeń: • zapisuje wzór ciągu na podstawie jego kilku początkowych wyrazów • sprawdza, czy podana liczba jest wyrazem ciągu • sprawdza, które wyrazy ciągu należą do danego przedziału • wyznacza wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym • podaje wzór rekurencyjny, gdy ciąg dany jest wzorem ogólnym • podaje wzór ogólny, gdy ciąg dany jest wzorem rekurencyjnym • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Ciągi monotoniczne	▪ rozpoznaje ciągi: rosnący, malejący, stały, na podstawie ich wykresów w układzie współrzędnych ▪ określa monotoniczność ciągu z definicji, określając znak różnicy $a_{n+1} - a_n$	Uczeń: • określa monotoniczność ciągu, badając iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ • rozwiązuje zadania związane z monotonicznością ciągów	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
3. Ciąg arytmetyczny	▪ rozpoznaje ciąg arytmetyczny na podstawie opisu słownego, wykresu lub kilku wypisanych wyrazów ▪ zna i stosuje wzór na *n* - ty wyraz ciągu arytmetycznego ▪ wyznacza pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę na podstawie dwóch dowolnych wyrazów ciągu ▪ rozwiązuje zadania, które dotyczą ciągu arytmetycznego, a ich rozwiązanie sprowadza się do układów równań liniowych lub do równań kwadratowych ▪ sprawdza, z definicji, czy ciąg dany wzorem ogólnym jest ciągiem arytmetycznym ▪ wyznacza różnicę ciągu arytmetycznego na podstawie *n* -tego wyraz ciągu ▪ wyznacza pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego i jego różnicę na podstawie dwóch dowolnych wyrazów ciągu. ▪ oblicza wyraz środkowy skończonego ciągu. ▪ rozwiązuje zadania dotyczące	Uczeń: • zna dowody własności ciągu arytmetycznego • określa monotoniczność ciągu arytmetycznego • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące ciągu arytmetycznego	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	▪ zna wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu. ▪ stosuje wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu ▪ rozpoznaje ciągi arytmetyczne występujące w zadaniach tekstowych	Uczeń: • wyznacza dowolny wyraz, różnicę lub liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego • zna wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu • wyprowadza wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Ciąg geometryczny	▪ rozpoznaje ciąg geometryczny na podstawie opisu słownego lub kilku wypisanych wyrazów ▪ zna i potrafi zastosować wzór na *n* - ty wyraz ciągu geometrycznego ▪ wyznacza pierwszy wyraz ciągu geometrycznego i jego iloraz na podstawie dwóch dowolnych wyrazów ciągu ▪ rozwiązuje zadania związane z ciągiem geometrycznym ▪ wyznacza iloraz ciągu geometrycznego na podstawie wzoru na *n* - ty wyraz ciągu ▪ wyznacza pierwszy wyraz ciągu i jego iloraz na podstawie dwóch dowolnych wyrazów ciągu za pomocą poznanych wzorów ▪ wykorzystuje średnią geometryczną do obliczania wyrazu środkowego skończonego ciągu geometrycznego	Uczeń: • potrafi określić z definicji, czy ciąg dany wzorem ogólnym jest ciągiem geometrycznym • zna i dowodzi własności ciągu geometrycznego • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące ciągu geometrycznego	3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	▪ zna wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego ▪ stosuje wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu ▪ rozpoznaje ciągi geometryczne występujące w zadaniach tekstowych	Uczeń: • wyprowadza wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
7. Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zastosowaniach praktycznych	▪ rozwiązuje zadania dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego, korzystając z układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi, równań kwadratowych, wielomianowych, wymiernych	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • wykorzystuje własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego w rozwiązywaniu zadań	3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
8. Obliczenia procentowe a ciąg geometryczny	▪ zna pojęcie procentu prostego i składanego ▪ wykorzystuje procent składany przy rozwiązywaniu zadań ▪ oblicza odsetki od kwoty ulokowanej na kilka lat przy stałym oprocentowaniu w dowolnym okresie kapitalizacji ▪ oblicza kapitał zgromadzony po kilku latach, jeśli zna kapitał początkowy i oprocentowanie w podanym okresie kapitalizacji	Uczeń: • wyznacza roczną stopę procentową, jeśli zna kapitał początkowy, liczbę okresów kapitalizacji odsetek i kapitał końcowy • wyznacza liczbę lat, po których kapitał początkowy, przy znanej stopie oprocentowania i okresie kapitalizacji odsetek, osiągnie daną wartość • rozwiązuje zadania dotyczące lokat i kredytów • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
9. Granica ciągu	▪ zna pojęcia otoczenia liczby o danym promieniu ▪ wyznacza wyrazy ciągu, które należą do otoczenia granicy o zadanym promieniu ▪ rozumie intuicyjnie pojęcie granicy ciągu ▪ rozpoznaje ciągi zbieżne do 0 typu $\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}$	Uczeń: • wyznacza wyrazy ciągu, które należą do otoczenia granicy o zadanym promieniu • wie kiedy ciąg jest zbieżny do 0	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
10. Obliczanie granic ciągów. Granice niewłaściwe	▪ stosuje twierdzenia o granicach ciągu ▪ oblicza granice ciągów, korzystając z granic już znanych ciągów i stosując własności o działaniach na granicach ▪ potrafi określić ciągi, które nie mają granic ▪ oblicza granice niewłaściwe ciągów	Uczeń: • zna i uzasadnia twierdzenia o działaniach na granicach ciągów • wie kiedy ciąg nie ma granicy • rozwiązuje przykłady o podwyższonym stopniu trudności	3
11. Granice geometryczne	▪ uczeń rozpoznaje szereg geometryczny ▪ zna warunek zbieżności szeregu geometrycznego i potrafi obliczyć zbieżność szeregu ▪ oblicza sumę szeregu geometrycznego zbieżnego ▪ zamienia ułamek okresowy na ułamek zwykły stosując odpowiednie wzory dotyczące ciągów	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, w których wykorzystuje zbieżność szeregu geometrycznego	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
12. Powtórzenie wiadomości 13. Praca klasowa i jej omówienie			3
5. FUNKCJA LOGARYTMICZNA I WYKŁADNICZA			**26**
1.Potęga o wykładniku rzeczywistym	▪ zna pojęcie potęgi o wykładnik naturalnym, całkowitym, wymiernym oraz o wykładniku rzeczywistym ▪ stosuje poznane prawa działań na potęgach ▪ zna definicję i własności pierwiastka arytmetycznego	Uczeń: • oblicza wartości liczbowe wyrażeń zawierających potęgi oraz pierwiastki • przekształca wyrażenia zawierające potęgi oraz pierwiastki • stosuje wzory skróconego mnożenia do wykonywania obliczeń zawierających potęgi oraz pierwiastki • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Funkcja wykładnicza i jej własności	▪ zna definicję funkcji wykładniczej ▪ rozpoznaje funkcję wykładniczą ▪ szkicuje wykresy funkcji typu $y = a^x$ dla a > 0 oraz $0 < a < 11$ ▪ sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji wykładniczej ▪ podaje własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu	Uczeń: • wyznacza wzór funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu • wyznacza argumenty, dla których funkcja osiąga określone wartości lub spełnia podane warunki • określa, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych: parzystość, nieparzystość, monotoniczność, różnowartościowość	2
3. Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych	▪ przekształca wykres funkcji wykładniczej, stosując: symetrię względem osi układu współrzędnych, symetrię względem punktu (0, 0) ▪ przekształca wykres funkcji wykładniczej, stosując przesunięcie równoległe do osi układu ▪ przekształca wykres funkcji wykładniczej, stosując przesunięcie o dany wektor	Uczeń: • sporządza wykresy funkcji y = (x + a); y = f(x) + a; y = f(x) + a; y = - f(x); y = f(-x) na podstawie równania funkcji wykładniczej y = f(x), stosując odpowiednie przekształcenia • szkicuje wykresy funkcji wykładniczych otrzymanych w wyniku złożenia kilku przekształceń • zapisuje wzór funkcji wykładniczej, po dokonanych przekształceniach • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4.Logarytm liczby dodatniej oraz ich własności	▪ zna pojęcie logarytmu ▪ oblicza logarytmy liczb dodatnich ▪ stosuje poznane prawa działań na logarytmach ▪ zna i stosuje własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń	Uczeń: • stosuje w obliczeniach wzór na zamianę podstawy logarytmu • dowodzi prostych własności logarytmów • przekształca wyrażenia o podwyższonym stopniu trudności zawierające logarytmy	2
5. Funkcja logarytmiczna i jej własności	▪ zna definicję funkcji logarytmicznej ▪ odróżnia funkcję logarytmiczną od innych funkcji ▪ określa dziedzinę funkcji logarytmicznej ▪ szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla $a > 11$ oraz $0 < a < 11$	Uczeń: • opisuje własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych	▪ przekształca wykres funkcji logarytmicznej, stosując: symetrię względem osi układu współrzędnych oraz symetrię względem punktu (0, 0) i przesunięcie o wektor ▪ opisuje własności funkcji na podstawie jej wykresu	Uczeń: • szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$; $y = -f(x)$; $y = f(-x)$ na podstawie wykresu funkcji logarytmicznej, stosując odpowiednie przekształcenia • szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych otrzymanych w wyniku złożenia kilku przekształceń • zapisuje wzór funkcji wykładniczej, której wykres otrzymuje w wyniku dokonanych przekształceń • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	3
7. Równania i nierówności wykładnicze	▪ rozwiązuje algebraicznie i graficznie równania oraz nierówności wykładnicze, stosując poznane własności	Uczeń: • rozwiązuje równania i nierówności wykładnicze z wartością bezwzględną • bada liczbę rozwiązań równania lub nierówności wykładniczych w zależności od wartości parametru	2
8. Równania i nierówności logarytmiczne	▪ rozwiązuje algebraicznie i graficznie równania oraz nierówności logarytmiczne, stosując poznane własności	Uczeń: • rozwiązuje proste równania i nierówności logarytmiczne z wartością bezwzględną • oblicza liczbę rozwiązań równania lub nierówności logarytmicznych w zależności od wartości parametru	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
9. Zastosowanie funkcji wykładniczej w praktyce	▪ opisuje zjawiska fizyczne, chemiczne, za pomocą funkcji wykładniczej	Uczeń: • stosuje wiadomości o funkcji wykładniczej do rozwiązywania problemów matematycznych o podwyższonym stopniu trudności	3
10. Zastosowanie funkcji logarytmicznej w praktyce	▪ opisuje zjawiska fizyczne, chemiczne, za pomocą funkcji logarytmicznej ▪ stosuje w obliczeniach wzór na zamianę podstawy logarytmu	Uczeń: • stosuje wiadomości o funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań o podwyższonym stopniu trudności	3
11. Powtórzenie wiadomości 12. Praca klasowa i jej omówienie			3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. PLANIMETRIA II			**19**
1. Figury jednokładne	▪ zna definicję jednokładności ▪ wyznacza obraz punktu, odcinka, prostej, kąta, wielokąta, koła w jednokładności o danym środku i danej skali ▪ zna szczególny przypadek jednokładności o skali k = 1 i skali k = -1 ▪ stosuje własności jednokładności przy rozwiązywaniu zadań	Uczeń: • wyznacza w układzie współrzędnych punkty jednokładne w danej skali *k* i o danym środku jednokładności • wyznacza wzór funkcji, której wykres jest figurą jednokładną do wykresu danej funkcji • rozwiązuje nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem własności jednokładności	2

Temat lekcji	**Zakres treści**	**Uczeń zna**	**Liczba godzin**
2.Figury podobne	▪ zna definicję podobieństwa ▪ podaje przykłady figur podobnych ▪ zna związek między jednokładnością a podobieństwem ▪ stosuje twierdzenie o obwodach i polach figur podobnych rozwiązywania zadań	Uczeń: • uzasadnia, że odcinek równoległy do podstawy danego trójkąta o końcach zawartych w ramionach tego trójkąta wyznacza trójkąt podobny do danego trójkąta • rozwiązuje nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem własności figur podobnych	2
3. Czworokąty opisane na okręgu	▪ rozumie, co to znaczy, że wielokąt jest opisany na okręgu ▪ zna warunki, jakie musi spełniać czworokąt, aby można było wpisać w niego okrąg ▪ oblicza pole wielokąta opisanego na okręgu ▪ wyznacza długość odcinka łączącego środki ramion trapezu opisanego na okręgu	Uczeń: • dowodzi twierdzenia dotyczące wielokątów opisanych na okręgu • stosuje twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt przy rozwiązywaniu zadań • rozwiązuje nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące czworokątów opisanych na okręgu, z zastosowaniem poznanych twierdzeń	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Czworokąty wpisane w okrąg	▪ wie, co to znaczy, że wielokąt jest wpisany w okrąg ▪ zna warunki, jakie musi spełniać czworokąt, aby można było opisać na nim okrąg ▪ stosuje poznane warunki przy rozwiązywaniu zadań	Uczeń: • dowodzi poznane twierdzenia dotyczące wielokątów wpisanych w okrąg • stosuje twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie przy rozwiązywaniu zadań • rozwiązuje nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów wpisanych w okrąg z zastosowaniem poznanych twierdzeń	2
5. Twierdzenie sinusów	▪ zna twierdzenie sinusów ▪ stosuje twierdzenie sinusów do wyznaczenia długości boku trójkąta, sinusa kąta w trójkącie lub długości promienia okręgu opisanego na trójkącie	Uczeń: • zna dowód twierdzenia sinusów • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, z zastosowaniem twierdzenia sinusów	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Twierdzenie cosinusów	▪ zna twierdzenie cosinusów ▪ stosuje twierdzenie cosinusów do wyznaczenia długości boku trójkąta lub cosinusa kąta w trójkącie ▪ rozwiązuje zadania geometryczne z zastosowaniem twierdzenia sinusów lub twierdzenia cosinusów	Uczeń: • zna dowód twierdzenia cosinusów • rozwiązuje zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów • rozwiązuje zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem poznanych twierdzeń	2
7. Pola i obwody wielokątów	▪ zna i stosuje wzory na pole trójkąta: P = ab* sinx $P = \frac{abc}{4R}$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	Uczeń: • rozwiązuje zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem poznanych wzorów i twierdzeń	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
8. Przykłady zastosowań trygonometrii	▪ oblicza pola figur płaskich, w tym: trójkątów, czworokątów, kół, stosując wzory trygonometryczne oraz twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
9. Powtórzenie wiadomości 10. Praca klasowa i jej omówienie			3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
7. GEOMETRIA ANALITYCZNA			**20**

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
1. Proste w układzie współrzędnych	▪ rozpoznaje równanie prostej w postaci kierunkowej oraz w postaci ogólnej ▪ zapisuje równanie prostej, gdy zna jej współczynnik kierunkowy i współrzędne punktu do niej należącego ▪ zapisuje równanie prostej w dowolnej postaci, gdy zna współrzędne dwóch różnych punktów należących do niej ▪ bada współliniowość punktów ▪ wyznacza współrzędne punktu przecięcia prostych ▪ znajduje równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danej prostej ▪ znajduje równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej ▪ bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych oraz własności ▪ rozwiązuje zadania dotyczące figur geometrycznych o danych współrzędnych	Uczeń: • znajduje równanie prostej na podstawie podanych jej własności • rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące prostych i punktów w układzie współrzędnych • znajduje równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danej prostej • znajduje równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej • rozwiązuje zadania dotyczące figur geometrycznych umieszczonych w układzie współrzędnych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Odległość dwóch punktów, środek odcinka. Odległość punktu od prostej	▪ wyznacza współrzędne środka odcinka ▪ wyznacza jeden z końców odcinka, gdy zna współrzędne drugiego końca i środka odcinka ▪ oblicza długość odcinka ▪ oblicza odległość dwóch punktów ▪ oblicza odległość punktu od prostej ▪ rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje poznane własności	Uczeń: • rozwiązuje zadania dotyczące figur geometrycznych, w których wykorzystuje znajomość obliczania odległości dwóch punktów, środka odcinka i znajdowania równań prostych równoległych do danej prostej lub prostopadłej do danej prostej • oblicza odległość punktu od prostej • oblicza odległość prostych równoległych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	3
3. Symetria względem osi oraz początku układu współrzędnych	▪ przekształca figury (punkty, odcinki, proste, okręgi i wielokąty) w symetrii względem osi układu współrzędnych lub względem początku układu współrzędnych	Uczeń: • wyznacza współrzędne punktów należących do przekształcanych figur, gdy ma dane dotyczące ich obrazów w pewnej symetrii • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Symetria względem osi oraz początku układu współrzędnych	▪ przekształca figury (punkty, odcinki, proste, okręgi i wielokąty) w symetrii względem osi układu współrzędnych lub względem początku układu współrzędnych	Uczeń: • wyznacza współrzędne punktów należących do przekształcanych figur, gdy ma dane dotyczące ich obrazów w pewnej symetrii • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Równanie okręgu w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej	▪ rozpoznaje równanie kanoniczne okręgu ▪ odczytuje współrzędne środka i długość promienia z równania okręgu w postaci kanonicznej ▪ sprawdza położenie punktu o danych współrzędnych względem danego okręgu ▪ zapisuje równanie okręgu, gdy zna współrzędne jego środka i długość promienia ▪ zapisuje równania okręgu opisanego na trójkącie i okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ▪ rozpoznaje równanie ogólne okręgu ▪ zamienia równanie ogólne okręgu na równanie kanoniczne	Uczeń: • rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje umiejętność wyznaczania środka okręgu i długości jego promienia • zapisuje równania okręgu opisanego na dowolnym trójkącie lub wpisanego w dowolny trójkąt • rozwiązuje zadania z parametrem dotyczące okręgu, którego równanie jest zapisane w dowolnej postaci • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Opisywanie koła za pomocą nierówności	▪ rozpoznaje nierówność opisującą koło ▪ zapisuje nierówność opisującą koło, gdy zna współrzędne środka i długość promienia koła ▪ bada położenie danego punktu względem danego koła	Uczeń: • bada wzajemne położenie dwóch kół • opisuje figury geometryczne na płaszczyźnie wykorzystując nierówność opisującą koło oraz sumę, iloczyn i różnicę zbiorów • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
6. Wzajemne położenie prostej i okręgu w układzie współrzędnych	▪ wyznacza punkt wspólny okręgu i prostej, gdy prosta jest styczna do okręgu ▪ sprawdza położenie danej prostej względem danego okręgu	Uczeń: • sprawdza położenie prostej i okręgu, gdy prosta i okrąg są podane w dowolnej postaci • wyznacza równanie stycznej do okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ gdy zna współrzędne punktu styczności • zapisuje równanie stycznej do dowolnego okręgu, gdy zna punkt należący do tej prostej lub jej współczynnik kierunkowy • wyznacza współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu • bada położenie danego odcinka względem danego koła • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
7. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem układu współrzędnych	▪ rozwiązuje zadania dotyczące punktów, odcinków, prostych, okręgów i wielokątów w układzie współrzędnych	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, w których wykorzystuje poznane własności	3
8. Powtórzenie wiadomości 9. Praca klasowa i jej omówienie			3

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
	8. STEREOMETRIA		**24**
1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni	▪ zna położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni ▪ określa położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni ▪ zna położenie dwóch prostych w przestrzeni ▪ rozróżnia proste prostopadłe, równoległe, skośne ▪ charakteryzuje prostopadłość i równoległość prostej i płaszczyzny ▪ charakteryzuje prostopadłość i równoległość dwóch płaszczyzn ▪ rozumie pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny ▪ wyznacza rzut prostokątny punktu, odcinka, prostej na płaszczyznę	Uczeń: • uzasadnia warunek prostopadłości oraz równoległości prostej i płaszczyzny, dwóch prostych, dwóch płaszczyzn • wyznacza rzuty prostokątne różnych figur płaskich na płaszczyznę • stosuje rzuty prostokątne przy określaniu odległości dwóch płaszczyzn równoległych oraz prostej równoległej do płaszczyzny • stosuje rzut prostokątny przy określaniu kąta nachylenia prostej do płaszczyzny	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Graniastosłupy i ich rodzaje	▪ zna definicję graniastosłupa ▪ wskazuje: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość, wierzchołki graniastosłupa ▪ rozróżnia graniastosłupy proste i pochyłe ▪ zna i rozumie pojęcie graniastosłupa prawidłowego, prostego i foremnego ▪ wskazuje przekątne graniastosłupa	Uczeń: • opisuje własności prostopadłościanu • bada zależność między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu • wykorzystuje wzór Eulera do sprawdzenia, czy istnieje wielościan wypukły o danej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian	1
3. Krawędzie i przekątne w graniastosłupie	▪ oblicza długość krawędzi i przekątnych graniastosłupa, stosując poznane twierdzenia i funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym ▪ wskazuje kąty między krawędziami graniastosłupa, krawędziami a przekątnymi ▪ określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu	Uczeń: • oblicza miary kątów między krawędziami graniastosłupa a jego ścianami, przekątnymi a ścianami • bada istnienie danego przekroju prostopadłościanu • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa	▪ oblicza pola powierzchni całkowitej i objętość poznanych graniastosłupów ▪ określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa płaszczyzną	Uczeń: • rozwiązuje zadania złożone, dotyczące graniastosłupów, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Ostrosłupy i ich rodzaje	▪ zna definicję ostrosłupa ▪ wskazuje: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstawy, krawędzie boczne, wysokość, spadek wysokości, wierzchołek ostrosłupa ▪ zna i rozumie podział ostrosłupów ▪ wskazuje kąty między krawędziami ostrosłupa, krawędziami a przekątnymi podstawy ostrosłupa oraz oblicza miary tych kątów ▪ wskazuje kąty między krawędziami ostrosłupa a jego ścianami, przekątnymi podstawy ostrosłupa a jego ścianami	Uczeń: • wyznacza podstawowe zależności w ostrosłupie, w tym w czworościanie foremnym • oblicza miary kątów między krawędziami ostrosłupa a jego ścianami, przekątnymi podstawy ostrosłupa a jego ścianami • określa, jaką figurę otrzymamy w przekroju ostrosłupa płaszczyzną	1

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa	▪ oblicza pole powierzchni całkowitej i objętość poznanych ostrosłupów ▪ rozwiązuje zadania geometryczne dotyczące ostrosłupów, z wykorzystaniem i poznanych własności	Uczeń: • rozwiązuje zadania złożone dotyczące ostrosłupów, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń	2
7. Kąt dwuścienny	▪ zna i rozumie pojęcie kąta dwuściennego ▪ rozpoznaje kąt między ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach	Uczeń: • wyznacza miary kątów dwuściennych między ścianami graniastosłupów i ostrosłupów • rozwiązuje zadania nietypowe o podwyższonym stopniu trudności	2
8. Wielościany foremne	▪ wie kiedy wielościan jest foremny ▪ zna klasyfikację wielościanów foremnych i ich podstawowe własności ▪ wykorzystuje wzory na obliczanie pola powierzchni całkowitej i objętości wielościanów foremnych	Uczeń: • uzasadnia i stosuje zależności między wielościanami foremnymi • rozwiązuje zadania dotyczące wielościanów foremnych, o podwyższonym stopniu trudności, stosując poznane twierdzenia	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
9. Pole powierzchni całkowitej i objętość walca	▪ zna definicję walca ▪ wskazuje: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś walca ▪ rozumie pojęcia: przekrój osiowy walca, przekrój poprzeczny walca ▪ oblicza pole powierzchni całkowitej i objętość walca ▪ rozpoznaje w walcach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami a płaszczyznami i oblicza miary tych kątów	Uczeń: • rozwiązuje zadania dotyczące walców, o podwyższonym stopniu trudności, poznanych twierdzeń	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
10. Pole powierzchni i objętość stożka	▪ zna definicję stożka ▪ wskazuje: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś stożka ▪ rozumie pojęcia: przekrój osiowy stożka, przekrój poprzeczny stożka i kąt rozwarcia stożka ▪ oblicza pole powierzchni całkowitej i objętość stożka ▪ rozpoznaje w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami a płaszczyznami, w tym kąt między tworzącą a podstawą, kąt rozwarcia stożka, oraz oblicza miary tych kątów	Uczeń: • rozwiązuje zadania złożone dotyczące stożków, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
11. Pole powierzchni i objętość kuli	▪ zna definicje kuli i sfery ▪ wskazuje: środek i promień kuli i sfery, koło wielkie kuli, pas kulisty, warstwę kulistą ▪ oblicza pole powierzchni i objętość kuli ▪ określa jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną	Uczeń: • rozwiązuje nietypowe zadania dotyczące kul, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń	2
12. Bryły podobne	▪ zna definicję brył podobnych ▪ charakteryzuje własności brył podobnych ▪ stosuje twierdzenia o polu powierzchni całkowitej i objętości brył podobnych	Uczeń: • rozwiązuje nietypowe zadania dotyczące brył podobnych, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
13. Bryły wpisane i opisane	▪ rozumie pojęcia: graniastosłup wpisany w walec, graniastosłup opisany na walcu ▪ rozumie pojęcia: stożek wpisany w walec, walec opisany na stożku ▪ rozumie pojęcia: kula wpisana w wielościan, kula opisana na wielościanie ▪ rozwiązuje zadania dotyczące brył wpisanych i opisanych	Uczeń: • wyznacza promień kuli wpisanej w wielościan wypukły w zależności od pola powierzchni całkowitej i objętości tego wielościanu • rozwiązuje nietypowe zadania dotyczące brył wpisanych i opisanych, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń i trygonometrii	2
14. Powtórzenie wiadomości 15. Praca klasowa i jej omówienie			3
		Godziny do dyspozycji nauczyciela	**12**
		RAZEM	**180**

Scenariusze do klasy II

1. Planimetria

Temat 1: Podstawowe pojęcia geometryczne

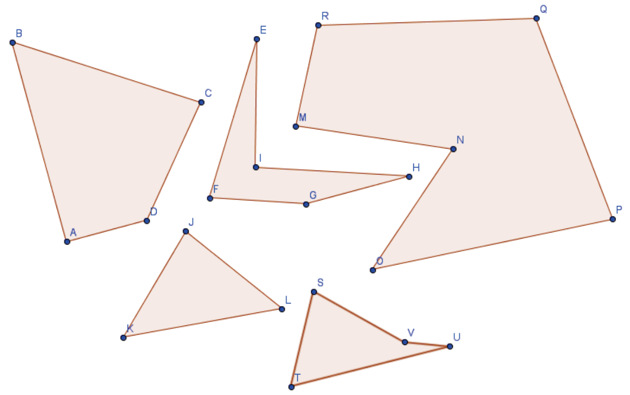
Cel lekcji: poznanie podstawowych pojęć z geometrii punkt, prosta, półprosta, płaszczyzna, okrąg, koło, łuk, figura wypukła i wklęsła.

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wiedzieć co to jest prosta, punkt, półprosta, płaszczyzna, okrąg, koło łuk
- Znać pojęcia figury wklęsłej i wypukłej oraz podawać ich przykłady
- Rozumie pojęcie odległości na płaszczyźnie
- Wyznaczać iloczyn, sumę i różnicę figur na płaszczyźnie
- Obliczać odległość punktów na płaszczyźnie

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie następujących pojęć: punkt, prosta, półprosta, płaszczyzna, odległość na płaszczyźnie, okrąg, koło, łuk, figura wklęsła i wypukła
3. Uczniowie podają przykłady figur wklęsłych i wypukłych
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Ile prostych można poprowadzić przez 3 różne punkty?
Zad. 2

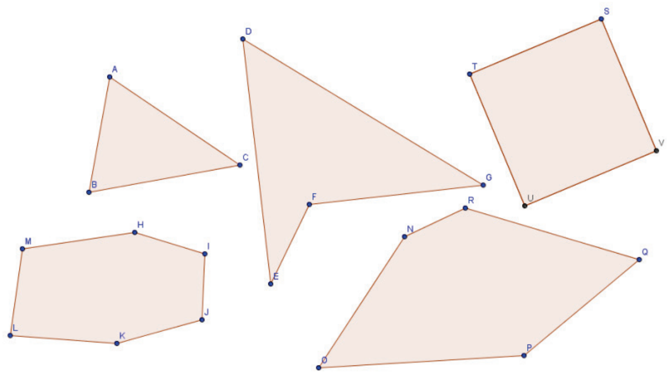
Wśród podanych wielokątów wskaż wielokąty wypukłe:



Zad. 3
Na ile części podzielą płaszczyznę trzy proste?

Zad. 4
Które zdanie jest prawdziwe?
1. Proste równoległe są to proste, które leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych
2. Przez jeden punkt płaszczyzny można poprowadzić tylko dwie proste
3. Przez dowolny punkt płaszczyzny, nie należący do danej prostej, można poprowadzić tylko jedną prostą do niej równoległą
4. Przez dwa punkty płaszczyzny można poprowadzić nieskończenie wiele prostych

Zad. 5
Wśród podanych wielokątów wskaż wielokąt wklęsły.



Zad. 6
Punkty A, B, C są współliniowe. Odległość punktów A i B wynosi 6, a punktów B i C jest równa 4. Oblicz odległość punktów A i C.
Zad. 7
Znajdź taka wartość zmiennej x, aby punkty A, B, C były współliniowe.
$|AB| = 8$
$|BC| = 6$
$|AC| = x$

Temat 2: Współliniowość punktów. Nierówność trójkąta

Cel lekcji: poznanie pojęć związanych z odległością – współliniowość punktów oraz stosowanie nierówności trójkąta udowadniania współliniowości punktów i rozwiązywania zadań.
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać pojęcie odległości i współliniowości punktów
- Znać nierówność trójkąta i stosować ją do badania współliniowości punktów
- Rozstrzygać jakim trójkątem (prostokątnym, ostrokątnym, rozwartokątnym) jest trójkąt o danych bokach
- Stosować nierówność trójkąta do rozwiązywania zadań z parametrem

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie następujących pojęć: współliniowość punktów, nierówność trójkąta (suma długości dwóch boków trójkąta musi być większa niż długość trzeciego boku)

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Ustal kolejność, w której położone są punkty A, B, C, D, jeśli są one współliniowe.
$|AC| = 8$
$|BC| = 11$
$|CD| = 6$
$|BD| = 5$
Zad. 2
Czy punkty A, B, C są współliniowe?
$|AB| = 3$
$|AC| = 10$
$|BC| = 13$

Zad. 3
Ile trójkątów można zbudować z odcinków długości: 1, 2, 3, 4, 5? (każdego odcinka można użyć tylko raz)

Zad. 4
Ile wynosi obwód trójkąta równoramiennego, którego boki mają długość 3 cm i 7 cm?
Zad. 5
Czy z odcinków długości: 1 cm, 2 cm, 3 cm można zbudować trójkąt?

Zad. 6
Dwa boki pewnego trójkąta prostokątnego mają długości 12 i 5. Ile wynosi długość trzeciego boku?

Temat 3: Współliniowość punktów. Nierówność trójkąta

Zad. 1
Określ jakim trójkątem jest trójkąt o bokach długości: $11\ cm, 13\ cm, 16\ cm$.

Zad. 2
Czy trójkąt o bokach $a = 8\ cm, b = 10\ cm, c = 6\ cm$ jest prostokątny?

Zad. 3
Jakim trójkątem jest trójkąt o bokach długości:
a) $10\ cm, 7\ cm, 11\ cm$
b) $3\ cm, 4\ cm, 5\ cm$
c) $5\ cm, 8\ cm, 13\ cm$

Zad. 4
Dla jakiej wartości x podane odcinki są bokami trójkąta?
$2x - 1$
$x + 4$
$3x + 2$

Zad. 5
Dla jakiej wartości parametru m odcinki: $2m, m+2, 4-m$ są bokami trójkąta?
Zad. 6
Dla jakiej wartości zmiennej x odcinki: $x+1, 6, 6$ są bokami trójkąta równoramiennego?

Temat 4: Kąty i ich rodzaje

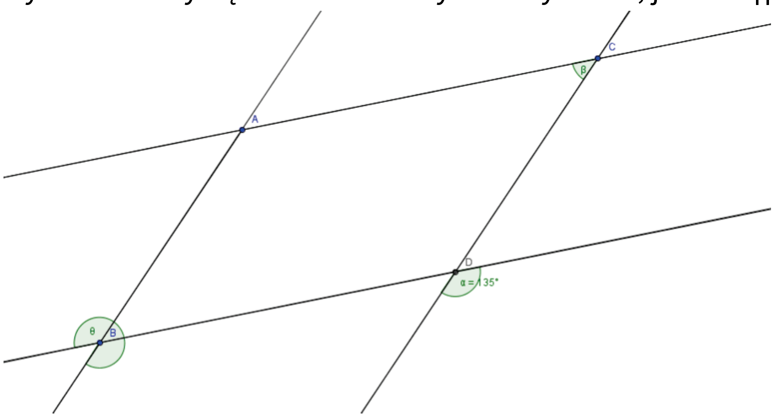
Cel lekcji: poznanie podstawowych rodzajów kątów i zastosowanie własności kątów do obliczania ich miar

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać podział kątów ze względu na ich miarę: kąty wklęsłe i wypukłe, kąt prosty, ostry, rozwarty, pełny, półpełny.
- Znać pojęcia kątów przyległych i wierzchołkowych oraz stosować ich własności do rozwiązywania zadań
- Wiedzieć, że suma miar kątów w trójkącie jest równa $180°$, a suma miar kątów w wielokącie jest stała
- Obliczać miary kątów powstałych w wyniku przecięcia dwóch prostych równoległych trzecią prostą
- Obliczać miary kątów w wielokącie o n bokach
-

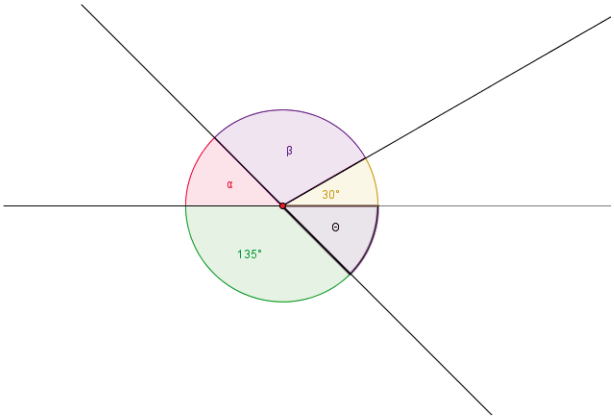
Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Nauczyciel podaje podstawowy podział kątów oraz ich definicje: kąt wklęsły, wypukły, prosty, ostry, rozwarty, pełny, półpełny
3. Podanie wzoru na obliczanie sumy miar kątów w wielokącie o n bokach $(n-2)\cdot 180°$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Miara jednego z kątów przyległych jest osiem razy większa od drugiego. Wyznacz te kąty.

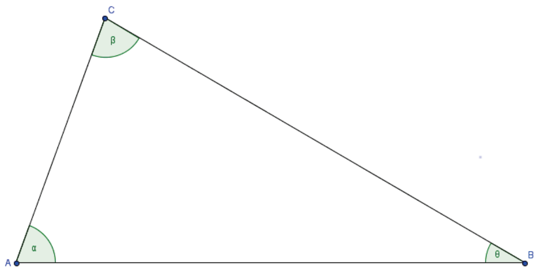
Zad. 2
Wyznacz miary kątów zaznaczonych na rysunku, jeśli $AC||BD, AB||DC$



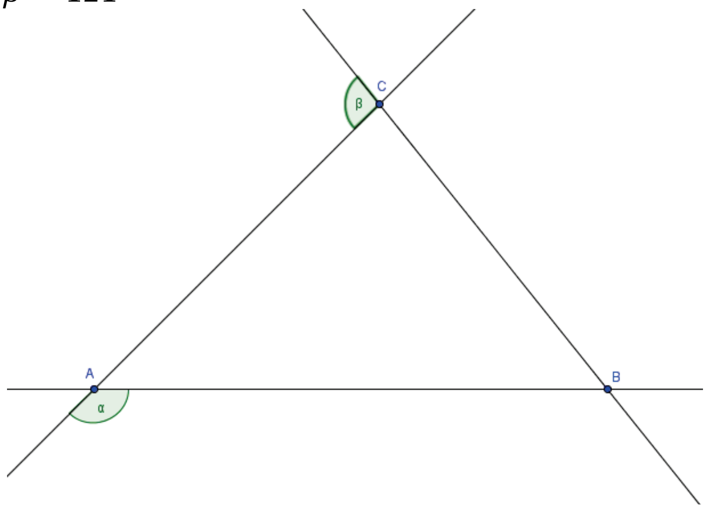
Zad. 3
Wyznacz miary pozostałych kątów:



Zad. 4
Wyznacz miary kątów trójkąta, jeśli kąt β jest dwa razy większy niż kąt θ, a kąt α ma miarę 66˚.



Zad. 5
Ile wynosi miara kąta przy wierzchołki B trójkąta ABC, jeśli:
$\alpha = 112^{\circ}$
$\beta = 121^{\circ}$



Zad. 6
Ile wynosi suma kątów wewnętrznych w siedmiokącie?

Zad. 7
Ile boków ma wielokąt, w którym suma miar kątów wewnętrznych wynosi 2160˚?

Temat 5:Wzajemne położenie prostej i okręgu

Cel lekcji: poznanie pojęcia stycznej do okręgu oraz zastosowanie twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Umieć badać wzajemne położenie prostej i okręgu na podstawie danej odległości prostej od środka okręgu i znanego promienia okręgu
- Znać pojęcie stycznej do okręgu i umieć konstruować styczną do okręgu przechodzącą przez dany punkt
- Znać pojęcie siecznej okręgu
- Znać twierdzenie oraz dowód twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie następujących pojęć: styczna i sieczna okręgu
3. Nauczyciel pokazuje jak poprawnie skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt leżący poza danym okręgiem
4. Podanie twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu - „odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności są równej długości”
5. Uczniowie przeprowadzają dowód twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu
6. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Określ wzajemne położenie prostej k i okręgu o środku w punkcie S i promieniu r. Niech $d(S,k)$ będzie odległością prostej k od punktu S.

a) $d(S,k)=2\sqrt{3}$, $r=3\sqrt{2}$

b) $d(S,k)=3$, $r=3$

c) $d(S,k)=5\sqrt{2}-1$, $r=2,5$

Zad. 2

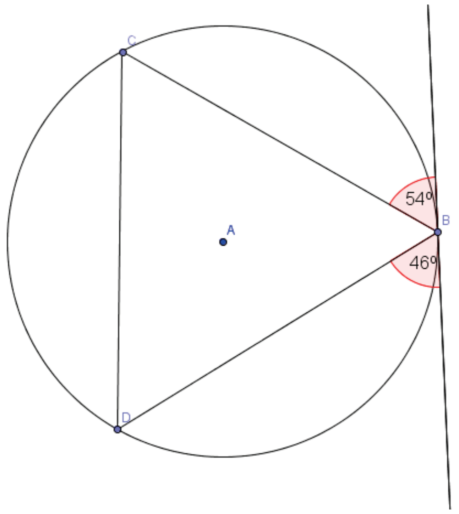
Dla jakiej wartości parametru m prosta k ma dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie S

$d(S,k)=m^2+2m+1$

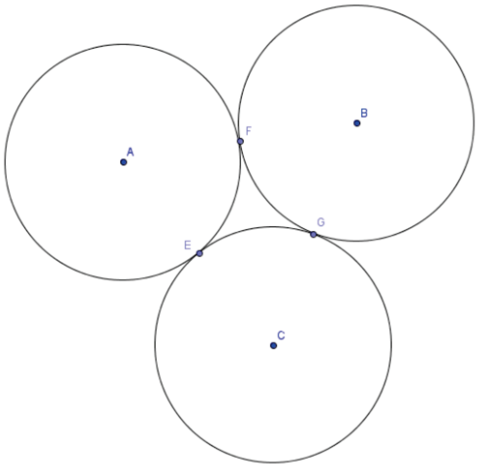
$r=-m-1$

Zad. 3

Na trójkącie BCD opisano okrąg i poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie B. Wyznacz miary kątów trójkąta.



Zad. 4
Trzy okręgi o promieniu równym 4 cm są styczne zewnętrznie. Wyznacz boki i kąty trójkąta EFG.



Temat 6: Wzajemne położenie dwóch okręgów

Cel lekcji: badanie wzajemnego położenia dwóch okręgów w zależności od długości ich promieni i odległości między ich środkami

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Określać położenie dwóch okręgów w zależności od odległości ich środków i długości promieni
- Badać jakie warunki muszą być spełnione, aby okręgi były: styczne zewnętrznie, styczne wewnętrznie, rozłączne zewnętrznie lub wewnętrznie, przecinające się
- Rozwiązywać zadania z parametrem

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Podanie warunków , jakie muszą spełniać okręgi, aby były styczne zewnętrznie, styczne wewnętrznie, rozłączne zewnętrznie lub wewnętrznie, przecinające się
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Określ wzajemne położenie okręgów o środkach w punktach A i B oraz promieniach długości $a\ i\ b, a > b$.
a) $a-b<|AB|<a+b$
b) $|AB|>a+b$
c) $|AB|=0$
d) $|AB|=a-b$
e) $|AB|=a+b$
f) $|AB|<a-b$

Zad. 2
Określ wzajemne położenie okręgów o środkach w punktach A i B oraz danych promieniach:
a)
$|AB|=5$
$r_1=3$
$r_2=2$
b)
$|AB|=8$
$r_1=6$
$r_2=4$
c)
$|AB|=6$
$r_1=10$
$r_2=4$
d)
$|AB|=5$
$r_1=6$
$r_2=4$

Zad. 3
Jak położone są okręgi jeśli promień pierwszego okręgu jest dwa razy większy niż promień drugiego okręgu, a odległość między środkami okręgów jest średnią arytmetyczną ich promieni?

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru k okręgi są styczne zewnętrznie?
$|AB|=2k-1$
$r_1=k+3$
$r_2=6-2k$

Zad. 5
Określ wzajemne położenie okręgów o środkach w punktach A i B oraz danych promieniach:
$|AB| = 3{,}5$
$r_1 = 6\sqrt{2}$
$r_2 = \sqrt{3}$

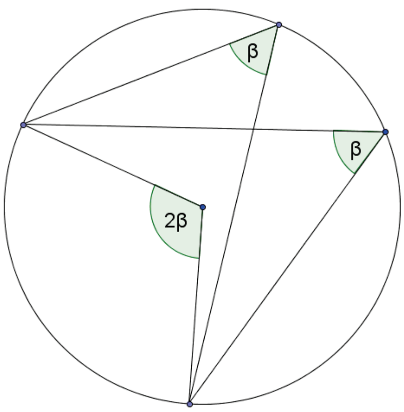
Zad. 6
W zależności od parametru m określ wzajemne położenie okręgów:
$|AB| = 6 - k$
$r_1 = k + 2$
$r_2 = k - 1$

Temat 7: Katy związane z okręgiem: środkowe i wpisane

Cel lekcji: poznanie podstawowych rodzajów kątów związanych z okręgiem i stosowanie ich własności do rozwiązywania zadań

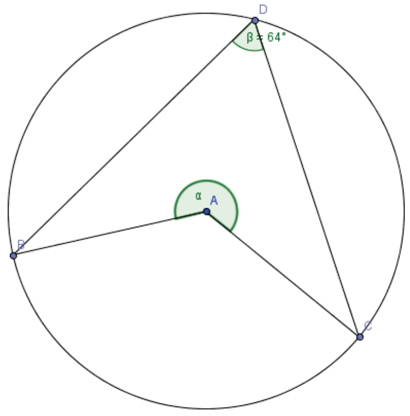
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wiedzieć, co to jest kąt środkowy okręgu i kąt wpisany w okrąg
- Znać zależność między kątem wpisanym w okrąg a kątem środkowym okręgu opartym na tym samym łuku i stosować ją do obliczania miar tych kątów
- Dowodzić twierdzenie o kątach wpisanym i środkowym okręgu opartych na tym samym łuku

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie i zdefiniowanie pojęć: kąt wpisany w okrąg, kąt opisany na okręgu
3. Nauczyciel podaje i dowodzi twierdzenie o kątach wpisanych i opisanych na tym samym łuku

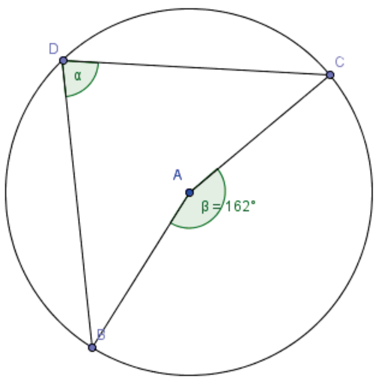


4. Rozwiązywanie zadań

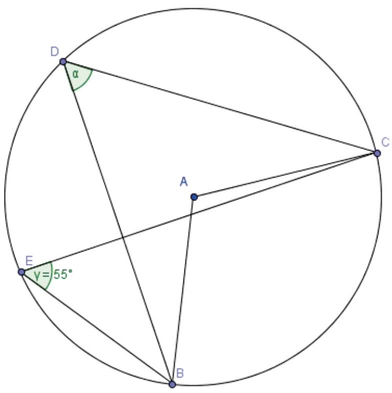
Zad. 1
Wyznacz miary kątów zaznaczonych na rysunku:
1.



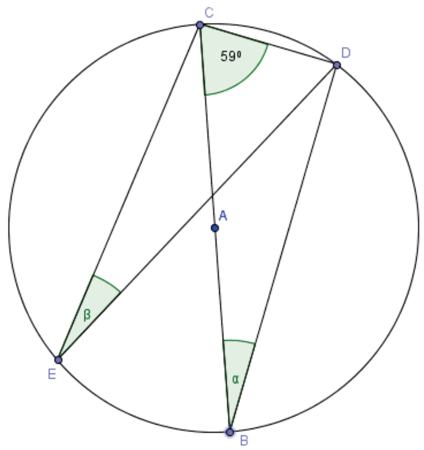
2.



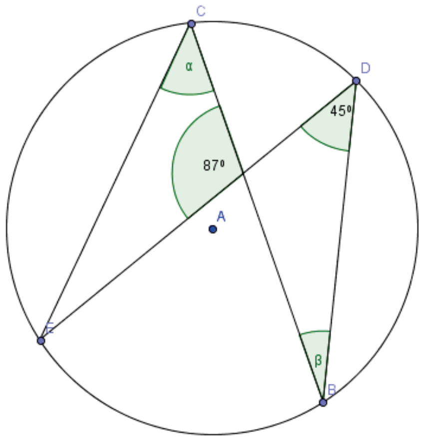
3.



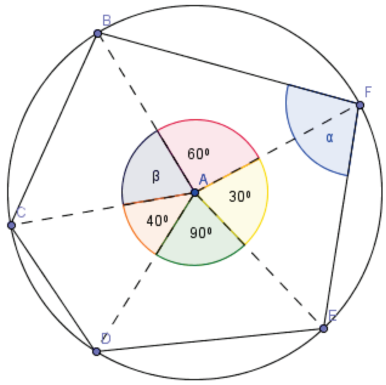
Zad. 2
Wyznacz miary kątów zaznaczonych na rysunku:
1.



2.

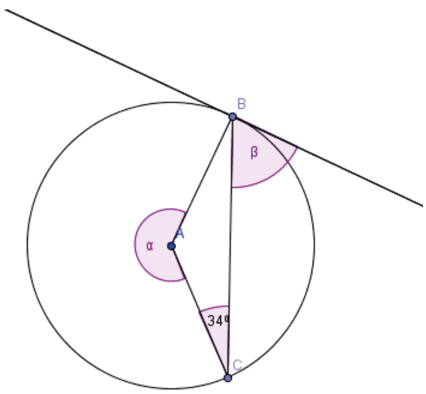


3.



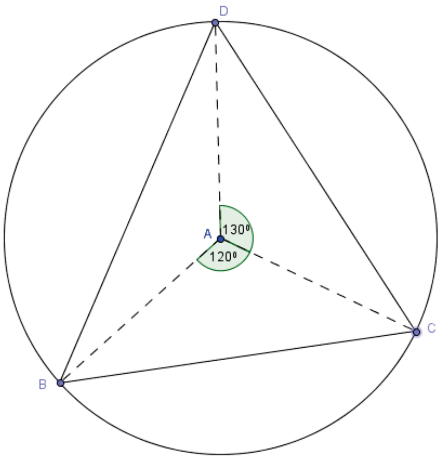
Zad. 3

Wyznacz miary kątów α i β.

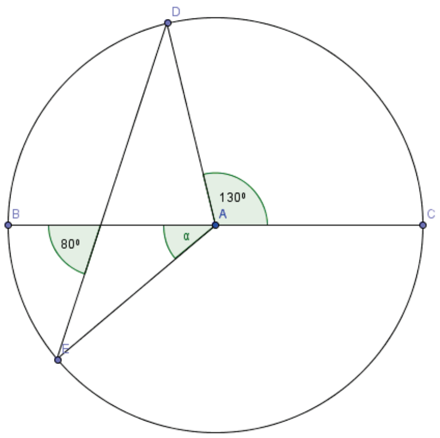


Zad. 4
Okrąg podzielono na trzy części w stosunku 1: 3: 6, a przez punkty podziału poprowadzono styczne do okręgu. Podaj miary kątów utworzone przez styczne.

Zad. 5
Wyznacz miary kątów trójkąta ABC:



Zad. 6
Wyznacz miarę kąta α.



Temat 8: Okrąg opisany na trójkącie

Cel lekcji: poznanie własności okręgu opisanego na trójkącie

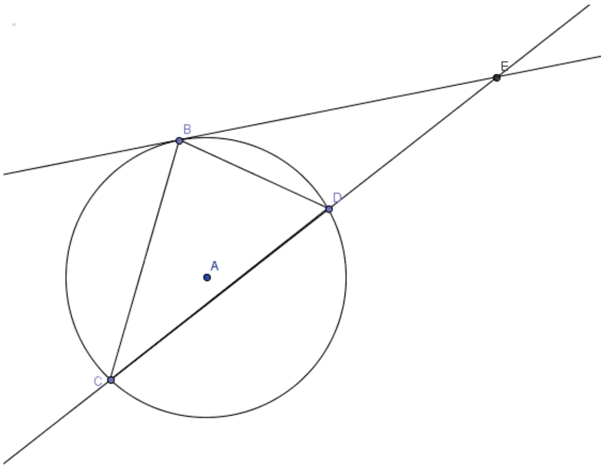
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać pojecie i umieć konstruować symetralną odcinka
- Wiedzieć, że środek okręgu opisanego na trójkącie leży na przecięciu symetralnych boków
- Konstruować okrąg opisany na trójkącie
- Wyznaczać promień okręgu opisanego na trójkącie, w szczególności na trójkątach prostokątnym, równoramiennym i równobocznym
- Znać zależność między promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym a wysokością trójkąta

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Podanie pojęcia symetralnej odcinka
3. Nauczyciel konstruuje okrąg opisany na trójkącie
4. Podanie sposobów wyznaczania długości promienia okręgu opisanego na trójkącie, jeśli dane są jego boki (w trójkącie równobocznym $R = \frac{2}{3}h$, w dowolnym trójkącie wykorzystanie wzoru na pole trójkąta $P = \frac{abc}{4R}$)
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz długość promienia opisanego na trójkącie o bokach długości:
a) $4,6,8$
b) $\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$

Zad. 2
Ile wynosi długość promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o podstawie równej 4?

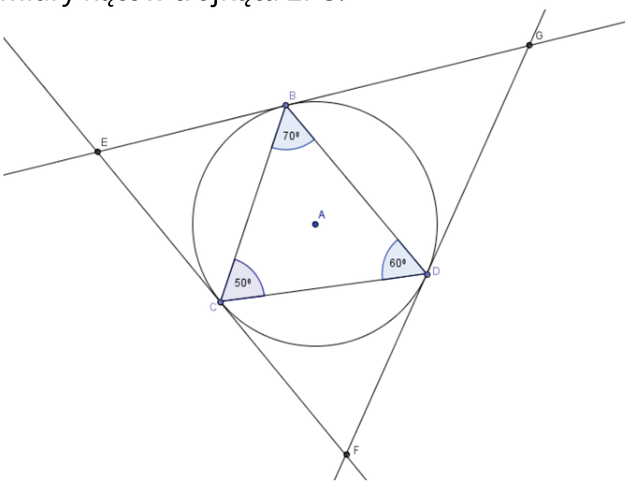
Zad. 3
W okrąg wpisano trójkąt BCD, w którym $|\angle C| = 50^\circ, |\angle D| = 70^\circ$. Przez wierzchołek B poprowadzono styczną do okręgu (jak na rysunku). Oblicz miary kątów trójkąta DBE.



Zad. 4
Długość ramienia trójkąta równoramiennego wynosi 6 cm, a kąt między ramionami ma miarę 120 ˚. Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 5
Dany jest trójkąt prostokątny, w którym jedna przy prostokątna ma długość 5, a wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego wynosi 4. Wyznacz promień okręgu opisanego na trójkącie.

Zad. 6
Na trójkącie BCD opisano okrąg, a w punktach B, C, D poprowadzono styczne. Wyznacz miary kątów trójkąta EFG.



Temat 9: Okrąg wpisany w trójkąt

Cel lekcji: poznanie pojęcia dwusiecznej kąta oraz zastosowanie jej do konstrukcji okręgu wpisanego w trójkąt

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać pojęcie dwusiecznej kąta i umieć ją konstruować
- Wyznaczać środek okręgu wpisanego w trójkąt leżący na przecięciu dwusiecznych kątów trójkąta
- Konstruować okrąg wpisany w trójkąt

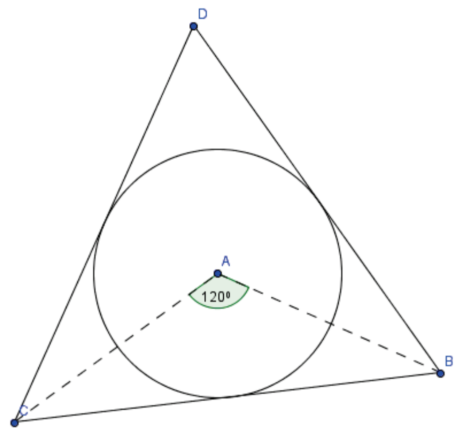
- Umieć wyznaczać długość okręgu wpisanego w trójkąt mając dane długości boków trójkąta
- Znać i umieć stosować wzór na pole trójkąta z wykorzystaniem długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt
- Znać zależność między promieniem okręgu wpisanego a opisanego na trójkącie równobocznym
-

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia dwusiecznej kąta i pokazanie uczniom jej prawidłowej konstrukcji
3. Nauczyciel konstruuje okrąg wpisany w trójkąt. Środek okręgu wpisanego w trójkąt to punkt przecięcia dwusiecznych kątów
4. Podanie zależności między promieniem okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny a wysokością trójkąta $r = \frac{1}{3}h$ oraz wprowadzenie wzoru na pole dowolnego trójkąta $P = rp$
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wyznacz promień okręgu wpisanego w trójkąt, w którym boki mają długości:
a) $4, 4, 4$
b) $4\sqrt{2},\ 6\sqrt{2},\ 8\sqrt{2}$
c) $3, 3, 5$

Zad. 2
Dany jest trójkąt równoramienny CBD, w którym $|CD| = |BD|$. Wyznacz miary kątów trójkąta.



Zad. 3
Trójkąt ABC o bokach długości $|AB| = 16, |BC| = 24, |AC| = 12$ opisano na okręgu. Znajdź długości odcinków, na które punkty styczności podzieliły boki trójkąta.

Zad. 4
W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 13 cm i jest o 1 cm dłuższa od przyprostokątnej. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
Zad. 5
Czy prawdą jest, że punkt przecięcia się dwusiecznych dwóch dowolnych kątów trójkąta jest jednakowo oddalony od jego boków?
Zad. 6
W trójkącie prostokątnym przyprostokątna ma długość 4 cm, a przeciwprostokątna 5 cm. Wyznacz sumę promieni okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Temat 10:Twierdzenie Pitagorasa

Cel lekcji: poznanie twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa

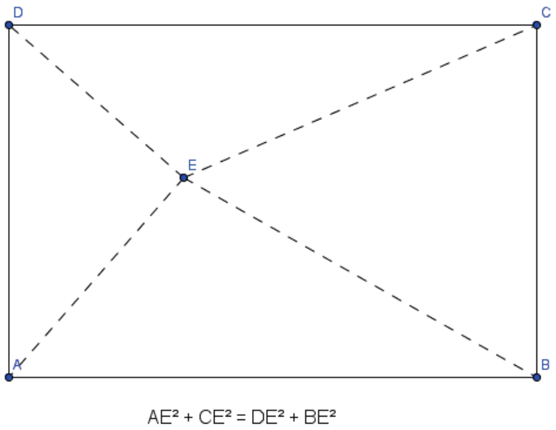
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa oraz ich dowody
- Umieć zastosować twierdzenie Pitagorasa do obliczania boków w trójkącie prostokątnym
- Sprawdzać, czy trójkąt o danych bokach jest prostokątny, ostrokątny czy rozwartokątny

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Nauczyciel podaje twierdzenie Pitagorasa i jego dowód
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Dane są długości boków pewnych trójkątów. Wskaż trójkąty prostokątne:
a) $6, 8, 10$
b) $7, 22, 25$
c) $5, 8, 10$
d) $13, 12, 5$
e) $3, 4, 5$
f) $11, 13, 16$

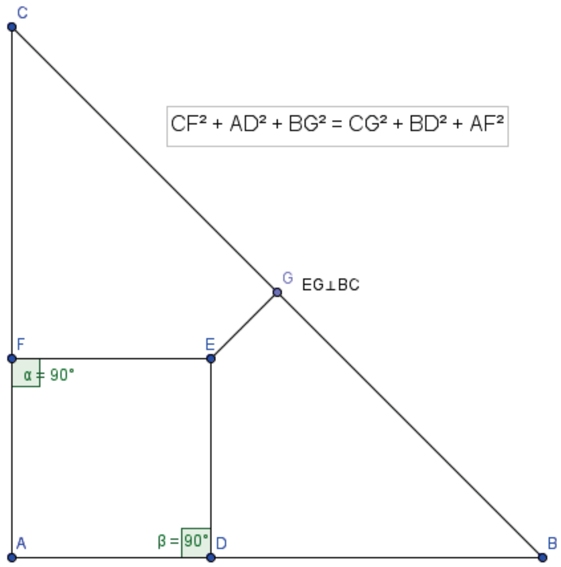
Zad. 2
W trójkącie prostokątnym z kąta prostego poprowadzono wysokość równą 4 cm, która podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 2 cm i 8 cm. Wyznacz długości przyprostokątnych.

Zad. 3
Dany jest prostokąt ABCD (patrz rysunek). Czy prawdziwe jest podane równanie?



Zad. 4
W trójkącie ABC o bokach długości $|AB| = 8, |AC| = 6, |BC| = 12$ poprowadzono wysokość AE oraz środkową AD. Wyznacz długość środkowej.

Zad. 5
Punkt E należy do wnętrza trójkąta prostokątnego ABC. Czy prawdziwa jest równość:



Zad. 6
Przyprostokątna AC trójkąta prostokątnego ABC (kąt prosty przy wierzchołku A) ma długość 3 cm i jest 5 razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz długość środkowej CD.

Temat 11: Twierdzenie Talesa

Cel lekcji: wprowadzenie twierdzenia Talesa oraz zastosowanie go do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać twierdzenie Talesa oraz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa
- Dowodzić twierdzenie Talesa oraz umieć je zastosować do rozwiązywania zadań

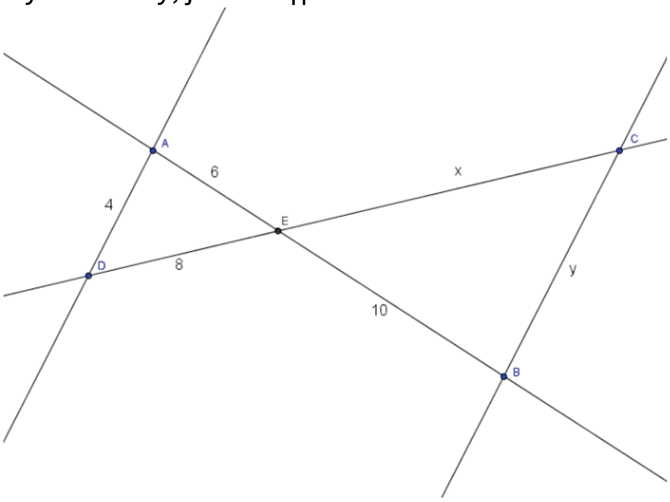
– Uzasadniać za pomocą twierdzenie Talesa równoległość prostych
– Wykorzystać twierdzenie Talesa do obliczania długości boków i pól trójkątów i trapezów

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie twierdzenia Talesa oraz podanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa
3. Nauczyciel przeprowadza dowód twierdzenia Talesa
4. Uczniowie rozwiązują w grupach poniższe zadania, a następnie prezentują rozwiązania na tablicy

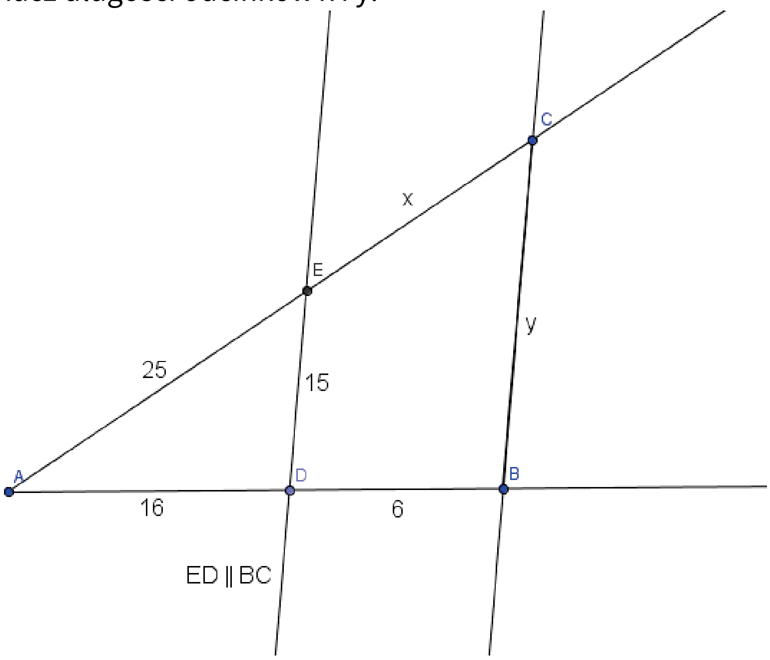
Zad. 1

Wyznacz x i y, jeśli $AD||CB$.



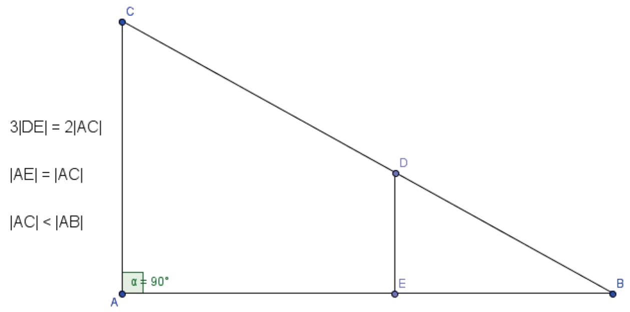
Zad. 2

Wyznacz długości odcinków x i y:



Zad. 3
W trapezie ABCD przedłużenia ramion przecięły się w punkcie S. Wyznacz długość podstawy AB tego trapezu, jeśli $|AD| = 6, |DS| = 2, |DC| = 5$.
Zad. 4

Oblicz pole trójkąta wiedząc, że $|BC| = 6$.



Zad. 5
Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest poniższe zdanie:
Jeśli w trójkącie ABC prosta m równoległa do boku BC przechodzi przez środek boku AB, to jednocześnie przecina bok AC w połowie.

Zad. 6
W trójkącie ABC odcinek DE jest równoległy do boku BC, punkt D należy do boku AB, a punkt E należy do boku AC. Wyznacz długość boku AC, jeśli:
$|AB| + |AC| = 12$
$|AD| = 2$
$|AE| = 4$

Temat 12: Trójkąty i ich punkty szczególne. Twierdzenie o dwusiecznej kąta

Cel lekcji: zapoznanie uczniów z podstawowymi własnościami trójkątów oraz z ich punktami szczególnymi (środek ciężkości, środkowa, wysokość, dwusieczna)

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać pojęcie środka ciężkości trójkąta, środkowej, dwusiecznej kąta
- Znać twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie i środkowych trójkąta oraz umieć przeprowadzić dowody tych twierdzeń
- Znać i stosować twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trójkąta
- Wykorzystywać związek między środkiem okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie równobocznym
- Stosować poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie, środkowych w trójkącie i twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion w trójkącie
3. Wprowadzenie własności, że w trójkącie środkowe dzielą się w stosunku 1:2

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
W trójkącie równobocznym bok ma długość 6 cm. Wyznacz sumę promieni okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Zad. 2
W trójkącie ABC z wierzchołka C poprowadzono środkową. Wyznacz długość tej środkowej wiedząc, że:
$|AB| = 10$
$|BC| = 9$
$|AC| = 5$

Zad. 3
W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 6, |BC| = 10, |CA| = 14$. Z wierzchołka B poprowadzono dwusieczną, która przecięła bok AC w punkcie D. Wyznacz długości odcinków AD i DC.

Zad. 4
W trójkącie dane są długości boków: $|AB| = 8, |BC| = 6, |AC| = 4$. Wyznacz długość dwusiecznej CD.

Zad. 5
W trójkącie ABC z wierzchołków A i B poprowadzono środkowe długości odpowiednio: 18 cm i 7,5 cm. Wyznacz długości boków trójkąta.

Temat 13: Trójkąty przystające

Cel lekcji: zastosowanie własności trójkątów przystających do rozwiązywania zadań

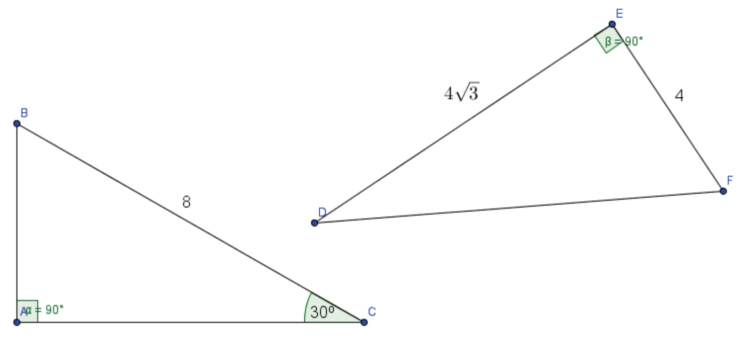
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję trójkątów przystających i stosować twierdzenie o cechach przystawania trójkątów do rozwiązywania zadań praktycznych
- Rozpoznawać pary trójkątów przystających

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia trójkątów przystających i podanie twierdzenia o cechach przystawania trójkątów
3. Zastosowanie poznanych twierdzeń do rozwiązywania zadań

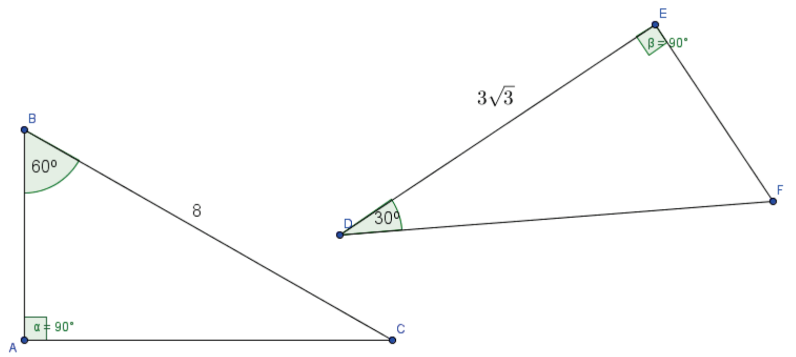
Zad. 1
W okręgu poprowadzono średnice AB i CD. Czy prawdą jest, że odcinki AD i BC są przystające?

Zad. 2
Rozstrzygnij czy trójkąty przedstawione na rysunkach są przystające:

a)

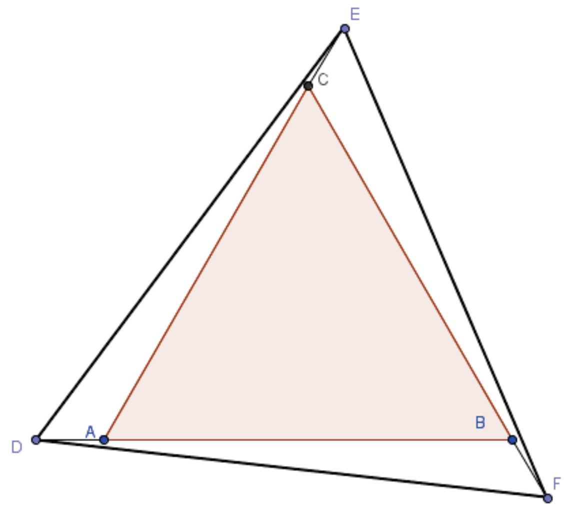


b)



Zad. 3

W trójkącie równobocznym ABC o boku długości 4 przedłużono odpowiednie boki (jak na rysunku) - czy trójkąt jest trójkątem równobocznym?



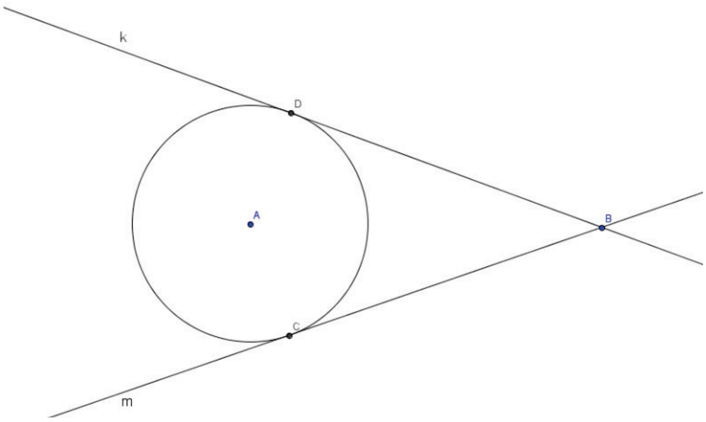
|AD| = |CE| = |BF| = 1

Zad. 4

Przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty. Czy są one przystające?

Zad. 5

Proste k i m są styczne do okręgu (patrz rysunek). Czy odcinki BD i CD są przystające?



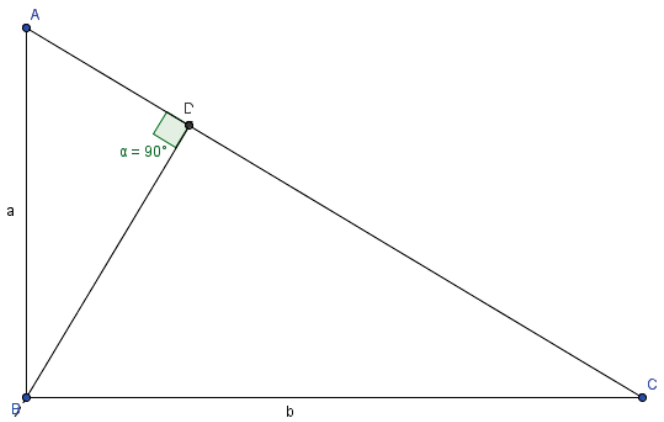
Zad. 6
W trójkącie ABC kat przy wierzchołku A jest równy różnicy kąta przy wierzchołku B i kąta przy wierzchołku C. Wyznacz miarę największego kąta.

Temat 14: Trójkąty podobne

Cel lekcji: zastosowanie cech podobieństwa trójkątów do rozwiązywania różnych zadań

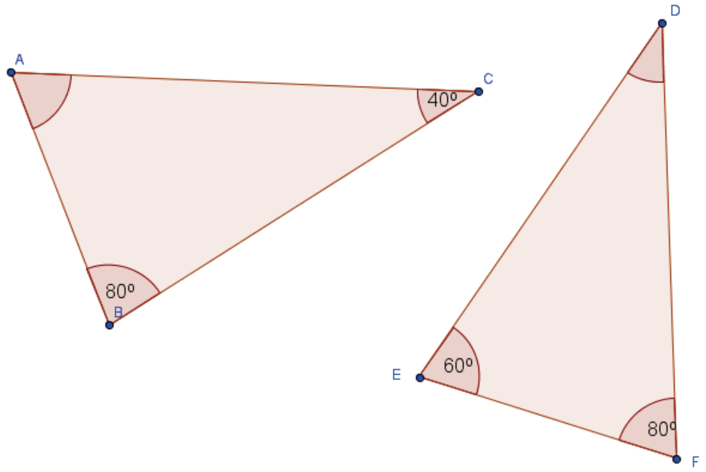
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję trójkątów podobnych oraz twierdzenie o cechach podobieństwa trójkątów
- Rozpoznawać trójkąty podobne
- Uzasadniać, że w trójkącie prostokątnym wysokość jest średnią geometryczną długości odcinków, na które wysokość dzieli przeciwprostokątną

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia trójkątów podobnych
3. Udowodnienie twierdzenia o cechach podobieństwa trójkątów
4. Wprowadzenie wzorów na wysokość w trójkącie prostokątnym $h = \frac{ab}{c}, h^2 = |AD| \cdot |DC|$

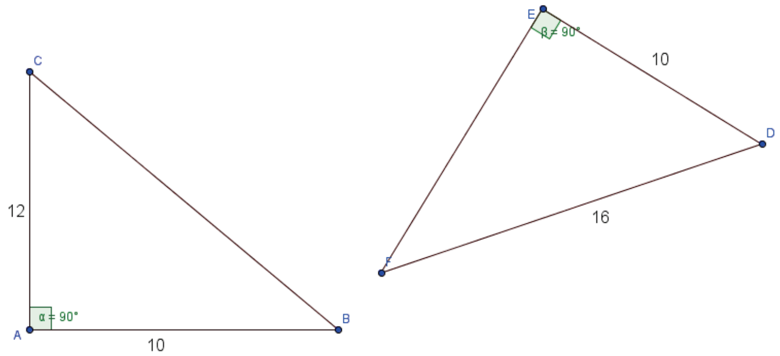


5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Sprawdź, czy podane trójkąty są podobne:
a)



b)

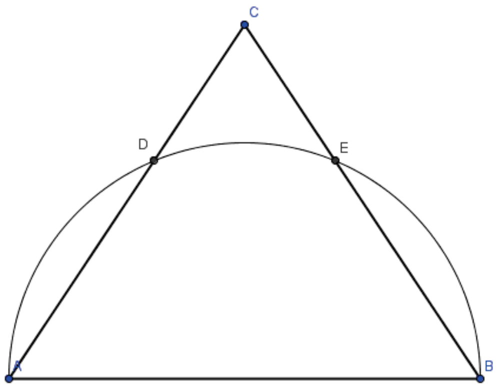


Zad. 2
Czy prawdą jest, że wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli trójkąt prostokątny na 2 trójkąty podobne?

Zad. 3
Trójkąty ABC i DEF są podobne. Długości boków trójkąta ABC są odpowiednio równe: 5 cm, 6 cm, 9 cm, a obwód trójkąta DEF wynosi 60 cm. Wyznacz długości boków trójkąta DEF.

Zad. 4
W trójkącie prostokątnym dana jest wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego równa 12 cm oraz obwód trójkąta wynoszący 60 cm. Wyznacz długości boków trójkąta.

Zad. 5
Trójkąt ABC jest równoramienny ($|AC| = |BD|$). Na podstawie trójkąta zbudowano półkole o średnicy 8 cm. Jaką długość mają odcinki AD i BE, jeśli ramię trójkąta jest równe 16 cm?



Zad. 6
Wyznacz długość kwadratu wpisanego w trójkąt równoramienny o bokach długości: 20 cm, 26 cm, 26 cm.

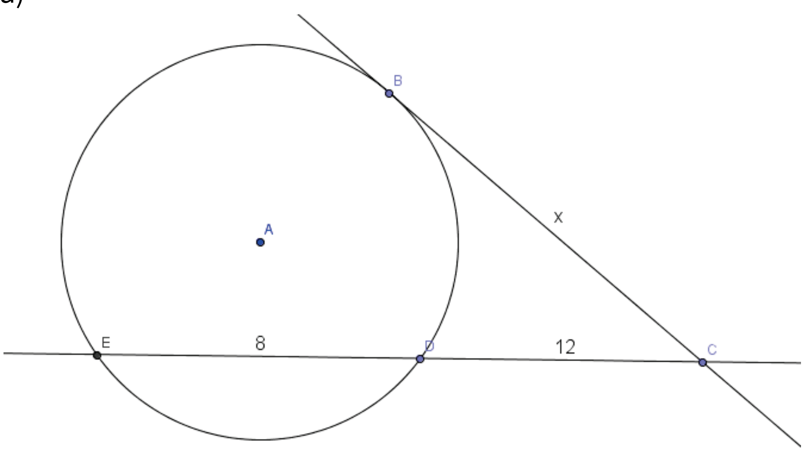
Temat 15: Twierdzenie o odcinkach siecznych

Cel lekcji: zastosowanie twierdzenia o odcinkach siecznych do rozwiązywania zadań praktycznych

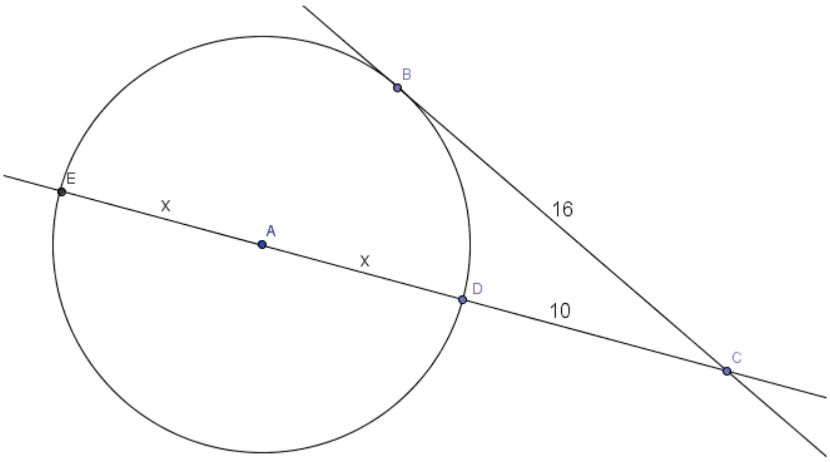
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać i dowodzić twierdzenie o odcinkach siecznych
- Stosować poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia siecznej
3. Wprowadzenie twierdzenia i dowodu twierdzenia o odcinkach siecznych
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz x:
a)



b)



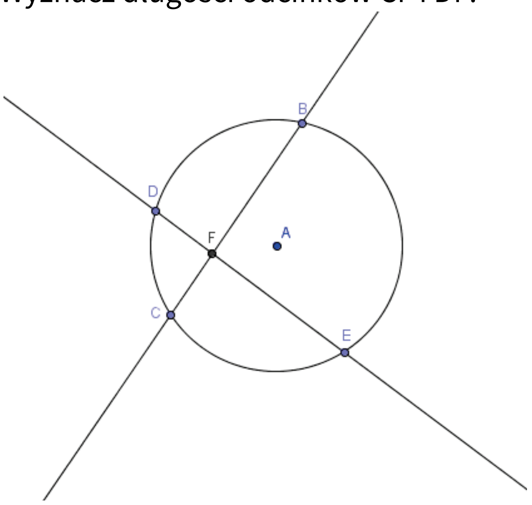
Zad. 2

Dane są:

$|CF| - |DF| = 6$

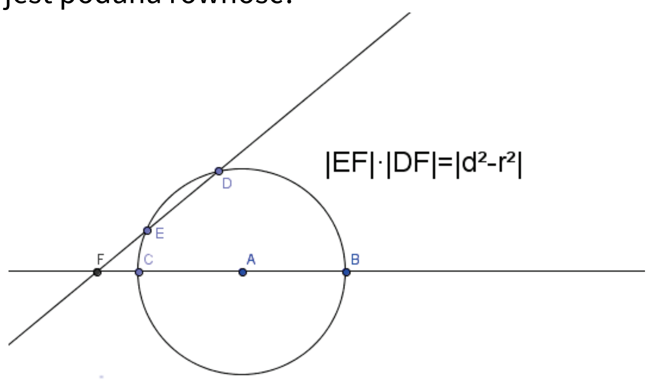
$|EF|:|BF| = 3:2$

Wyznacz długości odcinków CF i DF.

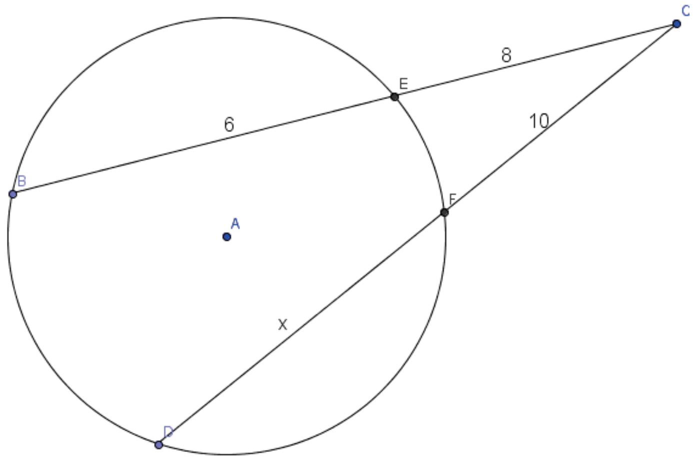


Zad. 3

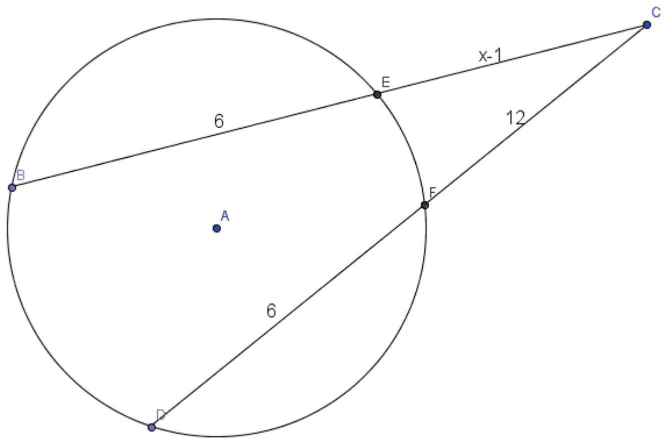
Dany jest okrąg o środku w punkcie A i promieniu r. Odległość punktu F od środka okręgu wynosi d. Jeśli DF jest sieczną, która przecina okrąg w punktach D i E, to czy prawdziwa jest podana równość?



Zad. 4
Wyznacz x:
a)

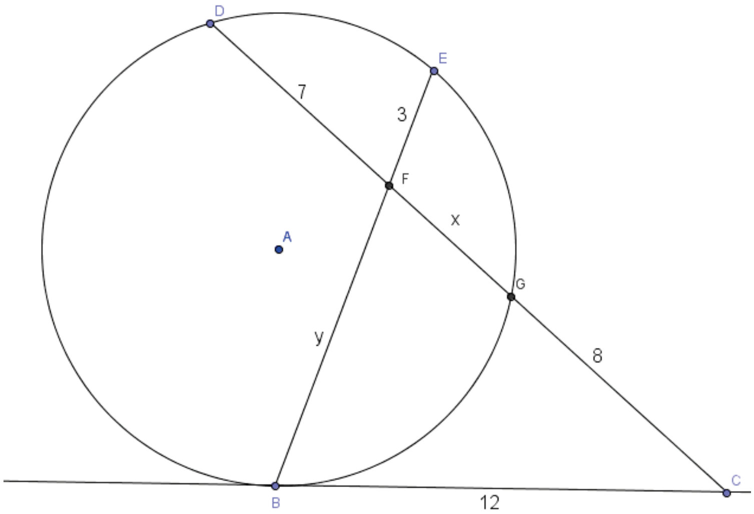


b)



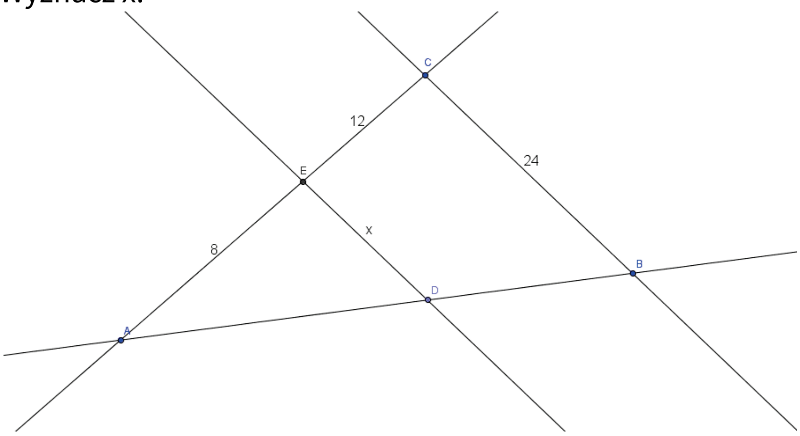
Zad. 5
Dany jest czworokąt ABCD oraz:
|AD|=13
|DE|=15
|BC|=15
|BE|=21
Czy na czworokącie ABCD można opisać okrąg?

Zad. 6
Znajdź x i y:



Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Wyznacz x:



Zad. 2
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną CD. Wyznacz długość odcinka DB, jeśli $|AD| = 2, |AC| = 10, |BC| = 8.$

Zad. 3
Dane są długości boków trójkąta: 6, 10, 12. Wyznacz promień okręgu wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

Zad. 4
W trójkącie prostokątnym ABC (kąt prosty przy wierzchołku A) $|AB| = 2|AC|$. Wyznacz stosunek odcinków, na jakie podzieliła przeciwprostokątną wysokość poprowadzona z wierzchołka A.

Zad. 5
Miara jednego z kątów przyległych jest pięć razy większa od drugiego. Wyznacz te kąty.
Zad. 6

W trójkącie ABC o bokach długości $|AB| = 10, |AC| = 12, |BC| = 16$ poprowadzono wysokość AE oraz środkową AD. Wyznacz długość środkowej.

Sprawdzian

Zad. 1
Suma kątów pewnego wielokąta wypukłego jest równa 2160°. Ile boków ma ten wielokąt?

Zad. 2
Dla jakiej wartości parametru m z odcinków: $2m + 4, 6 - m, m + 2$ można zbudować trójkąt?

Zad. 3
Określ wzajemne położenie okręgów o promieniach długości a i b i środkach w punktach A i B.
a)
$a = 9$
$b = 4$
$|AB| = 5$
b)
$a = 3$
$b = 2$
$|AB| = 7$
c)
$a = 11$
$b = 7$
$|AB| = 6$
d)
$a = 2,5$
$b = 1,5$
$|AB| = 4$

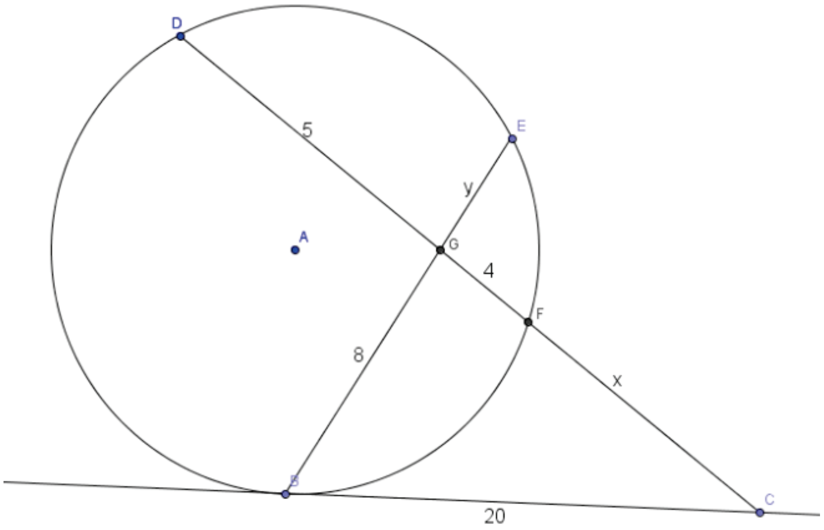
Zad. 4
Wyznacz długość boku kwadratu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnej równej 8 i przeciwprostokątnej długości 17.

Zad. 5
Dwa kąty trójkąta ABC mają miary 30° i 40°. Wyznacz miarę kąta między wysokością poprowadzoną z wierzchołka trzeciego kąta w jego dwusieczną.

Zad. 6
Punty ABC podzieliły okrąg na łuki, których stosunek wynosi 2:3:4. Wyznacz miary kątów trójkąta ABC.

Zad. 7

Wyznacz długości zmiennych x i y



Poprawa pracy klasowej

Zad. 1

Odp. 14

Zad. 2

Odp. $m \in (0,2)$

Zad. 3

a) okręgi są styczne wewnętrznie
b) okręgi nie mają żadnych punktów wspólnych
c) okręgi przecinają się w dwóch punktach
d) okręgi są styczne zewnętrznie

Zad. 4

Odp. $5\frac{5}{23}$

Zad. 5

Odp. $5°$

Zad. 6

Odp. $40°, 60°, 80°$

Zad. 7

Odp. $\begin{array}{l} x = 16 \\ y = 2{,}5 \end{array}$

Temat 1: Wyrażenia wymierne

Cel lekcji: poznanie podstawowych własności wyrażeń wymiernych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Odróżniać wyrażenia wymierne od innych wyrażeń algebraicznych
- Wyznaczać dziedzinę wyrażeń wymiernych
- Umieć rozszerzać oraz skracać wyrażenia wymierne przy zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia
- Obliczać wartość liczbową wyrażeń dla danych wartości zmiennych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia wyrażenia wymiernego oraz podanie przykładów takich wyrażeń
3. Przypomnienie wzorów skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz wartość wyrażeń dla podanej wartości zmiennej x, a następnie uszereguj je w kolejności rosnącej:

$\frac{4x-2}{2x^2-6x-1}, x=-1$

$\frac{-x-2x^2}{x^2+8x+1{,}5}, x=1$

$\frac{-0{,}5x}{4x^2+1}, x=\frac{3}{2}$

$\frac{4x^3+x+4}{-x^2+x-1}, x=-1$

Zad. 2
Podaj dziedzinę wyrażeń:

a) $\frac{2}{x-3}$

b) $\frac{3x}{2x-4}$

c) $\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+1}$

d) $\dfrac{x+3}{x^2+9}$

Zad. 3

Wyznacz dziedzinę wyrażenia: $\dfrac{x-13}{2x^3-5x^2-8x+20}$

Zad. 4

Czy podane wyrażenia są sobie równe?

$\dfrac{x-3}{x^2-9}$ i $\dfrac{1}{x+3}$

Zad. 5

Doprowadź podane wyrażenie do prostszej postaci: $-\dfrac{5x^3z^2y}{xz^2y^3}$

Zad. 6

Dla jakich wartości m i n podane funkcje są równe?

$f(x)=\dfrac{1}{(x+n)(x-m)}$ i $g(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$

Zad. 7

Ile musi wynosić parametr m, aby równanie było prawdziwe?

$\dfrac{x-1}{3x}=\dfrac{m}{3x^3-6x^2+3x}$

Zad. 8

Skróć ułamek: $\dfrac{-x^2-15x-36}{x^2+7x-60}$

Temat 2: Wyrażenia wymierne

Kontynuowanie rozwiązywania zadań praktycznych

Zad. 1

Podaj dziedzinę wyrażeń:

a) $\dfrac{10x-12}{x^3-3x^2+6x-18}$

b) $\dfrac{x^2-4x+1}{3x^2-3x}$

c) $\dfrac{5x^5-3x}{-x^2-4x-3}$

d) $\dfrac{x-3}{2x^4+2x^3-12x^2}$

Zad. 2

Doprowadź podane wyrażenie do prostszej postaci: $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^6+a^3b^3}$

Zad. 3

Podaj dziedzinę wyrażenia: $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-9x}$

Zad. 4

Skróć ułamek: $\frac{x^4-2x^3-x+2}{x^3-x^2-6x+6}$

Zad. 5

Zapisz w prostszej postaci:

a) $\frac{2x+6}{x^2+x-6}$

b) $\frac{2x^2-8x-10}{x^2-8x+15}$

c) $\frac{-6x^2+6x+12}{x^2-4}$

d) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x+3}$

Zad. 6

Czy podane wyrażenia są równe?

$\frac{(x+3)(x+1)}{x-5}$ i $\frac{x^2+4x+3}{x-5}$

Temat 3: Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Cel lekcji: zastosowanie wzorów skróconego mnożenia oraz postaci iloczynowej funkcji kwadratowej do mnożenia i dzielenia wyrażeń wymiernych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne
- Sprowadzać otrzymane wyniki mnożenia i dzielenia do najprostszej, nieskracalnej postaci
- Stosować wzory skróconego mnożenia, postać iloczynowa funkcji kwadratowej i rozkładu wielomianu na czynniki do mnożenia i dzielenia wyrażeń wymiernych

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej i rozkładzie wielomianu na czynniki
3. Przypomnienie schematu Chornera
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Wykonaj mnożenie, a następnie oblicz wartość wyrażenia dla podanych zmiennych a, b i c. Uszereguj wyrażenia w kolejności malejącej:

$$\frac{2a^2b}{3bc^2}\cdot\frac{6ab^2}{2a^3b}, a=2, b=1, c=-1$$

$$\frac{ab^2-a^3}{b}\cdot\frac{3b^2}{a+b}, a=0, b=5$$

$$\frac{ab-b^2}{a^3}\cdot\frac{a^2}{b^2}, a=2, b=1$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a-b}{a+b}, a=-2, b=4$$

Zad. 2

Wykonaj mnożenie:

a) $\frac{x^3+2x^2}{x^2-9}\cdot\frac{x-3}{2x^2-8}$

b) $\frac{x^2-x-2}{2-x}\cdot\frac{-3x-6}{18x+18}$

c) $\frac{x^3+8}{4-x^2}\cdot\frac{3-2x}{4x-6}$

d) $\frac{x^2+2x}{2x^2+4x}\cdot\frac{x^2+2x}{-x^2+4}$

Zad. 3

Wykonaj mnożenie:

$$\frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2-3x-18}$$

Zad. 4

Wykonaj mnożenie, a następnie oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x=-1$

$$\frac{3x+6-3x^2}{12x^2+12x-24}\cdot\frac{3x^2+9x+9}{-x^2+x+2}$$

Zad. 5

Doprowadź podane wyrażenie do prostszej postaci:

$$\frac{x^3+5x^2+5x-2}{x^3-x^2-9x+9}\cdot\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^3+8x^2+20x+16}$$

Zad. 6

Czy poprawnie wykonano mnożenie?

$$\frac{3x^3+6x^2-9x}{-3x^2-2x+1}\cdot\frac{-3x^2-11x+4}{x^2+3x-4}=\frac{3x(x+3)}{x+1}$$

Temat 4: Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Zad. 1

Czy uczeń prawidłowo wykonał dzielenie podanych wyrażeń?

$$\frac{x^3+8x^2-x-8}{x^2+7x-18} \div \frac{-x^2-7x+8}{x^3+9x^2-9x-81} = \frac{(x+1)(x+3)}{x-2}$$

Zad. 2

Wykonaj dzielenie:

a) $\frac{y^2-9x^2}{2y} \div (y^2+3xy)$

b) $\frac{2x-y}{2y} \div \frac{4x^2-y^2}{6x^2y}$

c) $\frac{x^2-x}{x^2+x} \div \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2+5x+6}$

d) $\frac{2-2x}{x^2+4x+4} \div \frac{1-x}{x^2-x-6}$

Zad. 3

Wykonaj działania:

$$\frac{x^3-8}{x^2+3x+2} \cdot \frac{2x-3}{x^2+2x+4} \div \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$$

Zad. 4

Doprowadź do prostszej postaci:

$$\frac{1}{x-\frac{1}{x-\frac{1}{x-1}}}$$

Zad. 5

Wykonaj działania, a następnie podaj wartość wyrażenia dla $x = 1, y = 3$

$$\frac{x-y}{2x^2+2xy-4y^2} \div \frac{2xy^2}{x^2+3xy+2y^2}$$

Zad. 6

Zapisz w prostszej postaci:

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} \div \frac{x-1}{x^2+2x-3}$$

Temat 5: Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Cel lekcji: stosowanie zasad dodawania i odejmowania wyrażeń wymiernych w zadaniach praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Umieć dodawać i odejmować wyrażenia wymierne o takim samym mianowniku oraz sprowadzać wyrażenia wymierne do wspólnego mianownika
- Sprowadzać wyrażenia wymierne do nieskracalnej postaci
- Stosować wzory skróconego mnożenia i rozkład wielomianu dowolnego stopnia na czynniki
- Obliczać wartość dumy bądź różnicy wyrażeń dla danej wartości liczbowej zmiennej
- Znać kolejność wykonywania działań

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie zasad sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika oraz wzorów skróconego mnożenia
3. Rozwiązywanie zadań praktycznych

Zad. 1

Wykonaj działania:

a) $\frac{2ab-1}{a+b}-\frac{2-b}{a+b}$

b) $\frac{a+b}{3a-1}+\frac{a+b}{3a-1}$

c) $\frac{a^2+2ab}{a+b^2}-\frac{-6a}{a+b^2}$

d) $\frac{a-b^2}{1-a}+\frac{5-3a^2}{a-1}$

Zad. 2

Wykonaj działania: $\frac{3a-2b}{ax}+\frac{2a-ab}{ab}-\frac{b-3ax}{bx}$

Zad. 3

Czy poprawnie wykonano podane działania?

$$\frac{3a-b^2}{a^2-b^2}+\frac{2}{b-a}-(2a-3b)=\frac{a-2b-b^2+3a^2b-3b^3}{(a-b)(a+b)}$$

Zad. 4

Zapisz w postaci jednego ułamka:

$$\frac{7(a-b)}{6}-\frac{5(2b-3a)}{8}+\frac{3(b+6a)}{2}$$

Zad. 5
Wykonaj podane działania, oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 1, y = -4$

$$\frac{(x+y)^2}{12}+\frac{(x-y)^2}{4}-\frac{(x+y)(x+2y)}{2}+\frac{x^2-y^2}{6}$$

Zad. 6
Ułamek $\frac{5}{6}$ przedstaw w postaci sumy lub różnicy dwóch ułamków, z których jeden ma mianownik równy 3, a drugi 12.

Zad. 7
Uprość podane wyrażenie. Pamiętaj o kolejności wykonywania działań.

$$\left[\frac{x+1}{1-x}-\frac{x+2}{x-1}+\frac{2x-3}{x^2-1}\right]\div\left[-2\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1-x}{x-1}\right)\right]$$

Temat 6: Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Zad. 1
Wykonaj działania, a następnie oblicz wartości otrzymanych wyrażeń dla $a = 1, b = 2, x = -1$ i uszereguj je w kolejności rosnącej.

$$\frac{1-b^3}{a^2+1}-\frac{1-a^2}{-a^2-1}$$

$$\frac{2a-6}{2}+\frac{8x-2}{3}$$

$$\frac{3a-2b}{ab}-\frac{4a^2-5b^2}{a}$$

Zad. 2
Czy podane równanie jest prawdziwe?

$$\frac{x+1}{a-b}+\frac{x+2}{b-a}-\frac{x+3}{a-b}=\frac{-x-4}{a-b}$$

Zad. 3
Wykonaj działania:

$$\frac{2}{x^2+4x+4}+\frac{1-x}{x}-\frac{2-x}{x+2}$$

Zad. 4
Zapisz w prostszej postaci:

$$\frac{x^2+1}{x^2+3x}-\frac{x-2}{3}-\frac{2}{-x-3}$$

Zad. 5
Czy podane równanie jest prawdziwe?

$$\frac{(x-y)^3}{xy}-\frac{x-xy^2}{x^2}+\frac{y^3-xy}{2y}+\frac{2y-1}{x}=\frac{2x^3-7x^2y+6xy^2-4y+xy^3+4y^2}{2xy}$$

Temat 7: Przekształcanie wyrażeń wymiernych

Cel lekcji: zastosowanie poznanych działań na wyrażeniach wymiernych do przekształcania wzorów matematycznych, fizycznych i chemicznych w celu wyliczenia z nich podanej zmiennej

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Przekształcać wyrażenia wymierne w celu wyznaczenia podanej zmiennej
- Stosować poznane działania do przekształcania wzorów fizycznych i chemicznych

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie kolejności wykonywania działań
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Z podanego wzoru wyznacz zmienną b:

$$-(2a-6)-\frac{2ab}{3}=2b$$

Zad. 2

Czy z podanego wzoru poprawnie wyznaczono n?

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

$$n=\frac{a_n-a_1+r}{r}$$

Zad. 3

Czy z podanego wzoru poprawnie wyznaczono x?

$$2xy=\frac{x-2}{y}+1$$

$$x=\frac{2y^2-1}{y-2}$$

Zad. 4

Wyznacz zmienną p:

$$K_n=K(1+\frac{pn}{100})$$

Zad. 5

Z podanych wzorów wyznacz zmienną y:

a) $\frac{1}{2y}-2x=4$

b) $x^2-2xy-6=2x$

c) $\frac{x^2-1}{2y}=\frac{1-x}{4}$

Temat 8: Przekształcanie wyrażeń wymiernych

Zad. 1

Z podanych wzorów wyznacz zmienną x:

a) $\frac{(x-1)^3}{2y}=6$

b) $2xy^2-xy=4$

c) $\frac{x+y}{x}=2$

Zad. 2

Czy z podanego wzoru poprawnie wyznaczono b?

$$P=\frac{abc}{4R}$$

$$b=\frac{4PR}{ac}$$

Zad. 3

Z podanego wzoru wyznacz zmienną r: $P=\pi r^2\frac{\alpha}{360°}$

Zad. 4

Wyznacz zmienną c: $K=\frac{c\alpha^2}{1-\alpha}$

Zad. 5

Czy z podanego wzoru poprawnie wyznaczono a?

$$r=\frac{a+b-c}{2}$$

$$a=\frac{2r}{b-c}$$

Zad. 6

Z podanego wzoru wyznacz zmienną x $(x>0)$:

$$E=\frac{kx^2}{2}$$

Zad. 7

Ze wzoru na stężenie procentowe wyznacz podaną obok zmienną:

$$C\% = \frac{m_s}{m_r}100\%, \quad m_r$$

Temat 9: Rozwiązywanie równań wymiernych

Cel lekcji: zastosowanie dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia wyrażeń wymiernych do rozwiązywania równań wymiernych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Rozpoznawać równania wymierne
- Wyznaczać dziedzinę równania, jeśli w mianowniku jest wielomian co najmniej pierwszego stopnia
- Umieć sprawdzić, czy podana liczba jest rozwiązaniem równania
- Sprawdzać, czy otrzymana w wyniku rozwiązywania równania liczba należy do dziedziny równania
- Umieć rozwiązywać równania wymierne sprowadzając je do równań liniowych, kwadratowych lub wielomianowych stopnia wyższego niż dwa
- Stosować zmienną pomocniczą do sprowadzania równania do prostszej postaci
- Wyznaczać wartość parametru, dla którego równanie spełnia określone warunki

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej i rozkładzie wielomianu an czynniki
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Podaj dziedzinę równania:

a) $\frac{x-2}{3-x} = 1$

b) $\frac{2-x}{2-x-x^2} = 2$

c) $\frac{-3x+18}{x^2-6x} = 0$

Zad. 2

Podaj rozwiązanie równania (pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny wyrażenia)

$$\frac{-x^2+2x+3}{x^2-x-6} = 0$$

Zad. 3

Rozwiąż równanie: $\frac{-2}{x^2-2x+6} + \frac{1}{x^2} = -2$

Zad. 4

Uszereguj podane równania w kolejności rosnącej biorąc pod uwagę sumę liczb spełniających to równanie:

$$\frac{x^2-4}{x}=-3$$

$$\frac{x^2-4x+2}{2x^2+3x-1}=-2$$

$$\frac{-x^2+2x-3}{x^2+x-4}=1$$

Zad. 5

Rozwiąż równania:

a) $\frac{8x+4}{x}=16$

b) $\frac{-2x^2+2x+12}{-2x^2-5x-2}=0$

c) $\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x}{2x^3-5x^2+3x}=0$

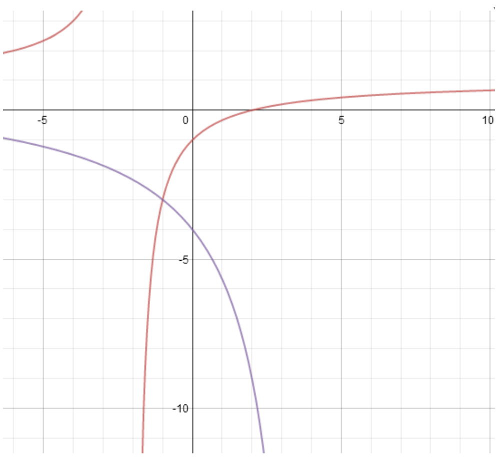
Zad. 6

Podaj rozwiązanie równania: $\frac{x+3}{x+2}-1-\frac{x-3}{x-2}=\frac{x^2}{x^2-4}$

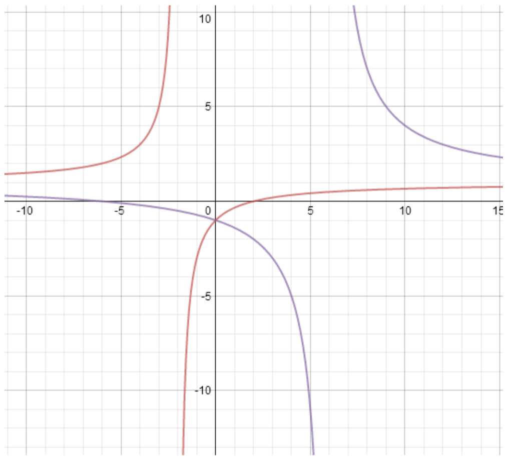
Zad. 7

Który wykres przedstawia rozwiązanie równania: $\frac{x-2}{x+2}=\frac{x+6}{x-6}$

a)



b)



Temat 10: Rozwiązywanie równań wymiernych

Zad. 1

Uszereguj podane równania w kolejności rosnącej biorąc pod uwagę rozwiązanie równania:

$$\frac{1}{x}=3+\frac{4}{x}$$

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{x+2}$$

$$\frac{16}{x+4}=1$$

Zad. 2

Rozwiąż równania:

a) $\frac{1}{x}=\frac{2}{x-2}$

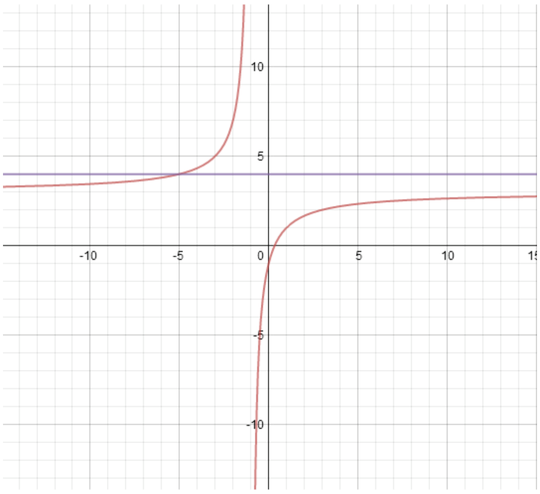
b) $\frac{x-6}{x+9}-3=\frac{117-2x^2}{x^2-81}$

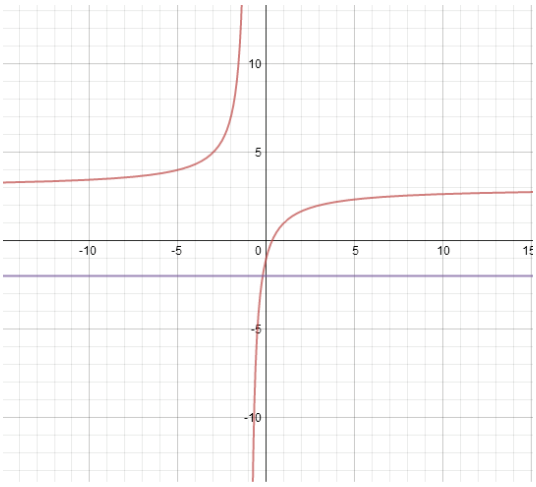
c) $1-\frac{6}{x-2}=\frac{-5}{4+x^2-4x}$

Zad. 3

Który wykres przedstawia rozwiązanie równania: $\frac{3x-1}{x+1}=4$

a)





b)

Zad. 4

Podaj rozwiązanie równania (pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny wyrażenia)

$$\frac{3}{2x-4}+\frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x}=\frac{1}{x}$$

Zad. 5

Dla jakiej wartości parametru m równanie ma jedno rozwiązanie?

$$\frac{2x-3}{m-x}=x+m-4$$

Zad. 6

Rozwiąż równania:

a) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|=1$

b) $\frac{2|x|-2}{3|x|+1}=0$

c) $\left|\frac{2x^2-3}{x^2+1}\right|=3$

Zad. 7

Dla jakich wartości parametru $a$podane równanie $x^2+(a+1)x+2a+4=0$ ma dwa pierwiastki spełniające warunek:

$$x_1^2+x_2^2=x_1+x_2$$

Temat 11: Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Cel lekcji: praktyczne rozwiązywanie nierówności wymiernych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Umieć rozwiązywać nierówności wymierne i zaznaczać otrzymane zbiory rozwiązań na osi liczbowej
- Zapisywać zbiór rozwiązań nierówności w postaci sumy przedziałów
- Stosować wiadomości z poprzednich zajęć do rozwiązywania nierówności wymiernych
- Uwzględniać w rozwiązaniu nierówności dziedzinę podanych wyrażeń
- Rozwiązywać nierówności wymierne z parametrem
- Sprowadzać nierówności wymierne do postaci funkcji liniowej, kwadratowej i wielomianowej stopnia większego niż 2

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o rozwiązywaniu równań wymiernych i zastosowanie ich do rozwiązywania nierówności
3. Podanie różnych sposobów rozwiązywania nierówności: sprowadzanie do wspólnego mianownika, mnożenie obu stron nierówności przez kwadrat mianownika, metoda graficzna
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{2}{x+1} \geq 0$

b) $\frac{1}{x^2+4} < 0$

c) $\frac{2x+3}{x-1} > 0$

d) $\frac{-x+1}{x+3} \geq 0$

Zad. 2

Rozwiąż nierówność: $\frac{x}{x-1} < 2$

Zad. 3

Czy podana nierówność została prawidłowo rozwiązana?

$$\frac{2}{2x-2} \leq \frac{4x-2}{x-1} - 2$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

Zad. 4

Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{8x^2+3}{x-8} < 0$

b) $\frac{2x+4}{2-x} \geq 0$

c) $\frac{x^2-1}{x+1} < 0$

Zad. 5

Czy podana nierówność została prawidłowo rozwiązana?

$$\frac{3-2x}{3x+1} \leq 0$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right)$$

Zad. 6

Rozwiąż nierówność: $\frac{x-1}{x+4} \leq 2x+2$

Temat 12: Rozwiązywanie nierówności wymiernych

Zad. 1

Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{-2x}{3x-2} > -2$

b) $\frac{(x-6)(x+2)}{x(x-1)} < 0$

c) $\frac{(8-x)^2}{(x+1)^3(x^2-1)} \leq 0$

Zad. 2

Znajdź zbiór rozwiązań podanej nierówności: $\frac{-8x^2+4x+4}{2x^2-3x+1} \geq 0$

Zad. 3

Czy uczeń prawidłowo rozwiązał podaną nierówność?

$$\frac{x^3+x^2}{x^2-2x+1} > 0$$

$$x \in (-1,+\infty) \setminus \{0,1\}$$

Zad. 4

Rozwiąż nierówność: $\left|\frac{6-2x}{3x-2}\right| < 4$

Zad. 5

Dopasuj podane nierówności do zbioru ich rozwiązań:

a) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$

b) $\left|\frac{x^2+3}{x+6}\right| < 0$

Zad. 6

Rozwiąż nierówność: $\frac{x^2-36}{x^3+x^2-36x-36} > 0$

Temat 13: Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia wielkości odwrotnie proporcjonalnej i zastosowanie jej do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Sprawdzać, czy podane wielkości są odwrotnie proporcjonalne
- Podawać przykłady wielkości, które są odwrotnie proporcjonalne
- Wyznaczać współczynnik proporcjonalności
- Wyznaczać brakujące wielkości do podanych, jeśli znany jest współczynnik proporcjonalności
- Rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności proporcjonalności odwrotnej
- Rysować wykres proporcjonalności odwrotnej

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia proporcjonalności odwrotnej
3. Uczniowie podają przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych
4. Rozwiązywanie zadań

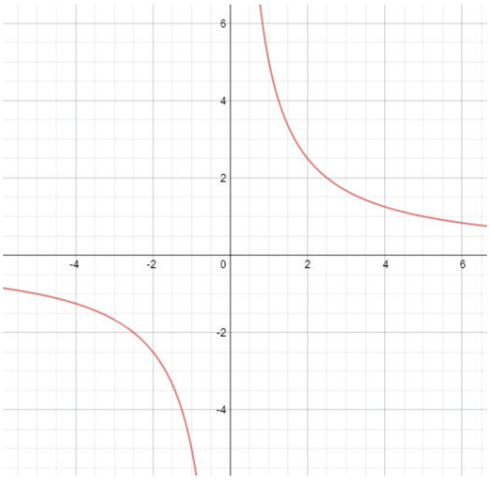
Zad. 1
Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne. Uzupełnij tabelkę:

x	1	b	c	10	20	e
y	a	10	5	4	d	1

Zad. 2
Uzupełnij tabelkę wiedząc, że wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne:

x	6	1	4	12	18	36
y	6	a	b	c	d	e

Zad. 3
Dany jest wykres proporcjonalności odwrotnej:



Odczytaj z wykresu współczynnik proporcjonalności.

Zad. 5
Pole prostokąta jest równe 15, podaj współrzędne punktów (x,y), które są długościami boków danego prostokąta, takimi, że: $x \in N$, $y \in N$

Zad. 6
Pani Zofia ma działkę w kształcie prostokąta (o wymiarach axb) o powierzchni 1800 m2. Wskaż wzór, który wyraża zależność między wymiarami działki a jej polem.

Zad. 7
W firmie jest zatrudnionych ośmiu pracowników, którzy pracując z taką samą wydajnością wykonują pracę w czasie 3 godzin. Ilu pracowników należałoby dodatkowo zatrudnić, aby ta praca została wykonana w ciągu 2 godzin?

Temat 14: Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq 0$ i jego przekształcenie

Cel lekcji: szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ oraz poddawanie wykresu tej funkcji różnym przekształceniom

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Umieć szkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq 0$
- Opisywać własności wyżej wymienionej funkcji oraz wskazywać równania asymptot wykresu, osie oraz środek symetrii
- Podawać zbiór wartości, dziedzinę, przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq 0$
- Szkicować wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x} + q, a \neq 0 \; i \; x \neq 0, f(x) = \frac{a}{x-p}, a \neq 0 \; i \; x \neq p$, $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0 \; i \; x \neq p$ i opisywać ich własności
- Odczytywać z wykresu funkcji argumenty, dla których funkcja spełnia określone warunki
- Rozwiązywać graficznie nierówności wymierne
- Szkicować wykres funkcji $|f(x)|$, gdy $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0 \; i \; xp0$

– Na podstawie wykresu wskazać wzór funkcji

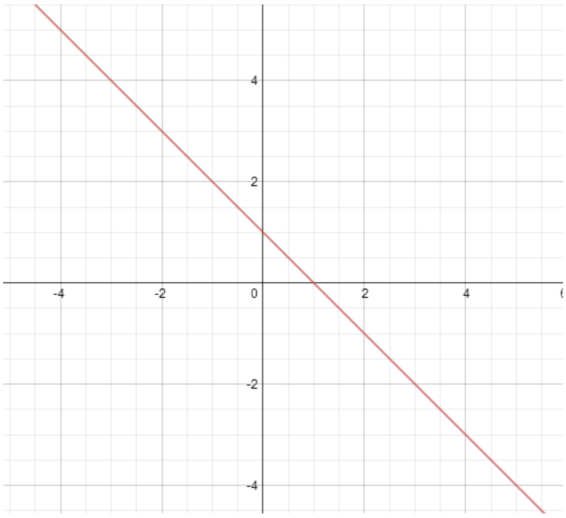
Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie pojęcia funkcji wymiernej $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq p$ i naszkicowanie jej wykresu
3. Podanie podstawowych własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq 0$
4. Podanie sposobów przekształcania wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0 \; i \; x \neq p$: przesunięcie funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ o wektor $[p, q]$
5. Rozwiązywanie zadań

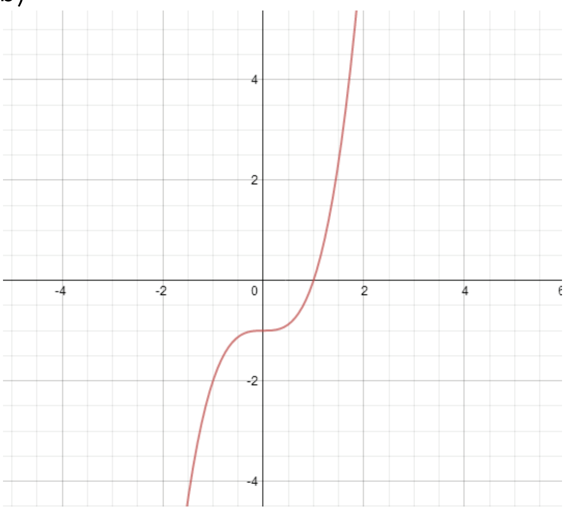
Zad. 1

Wśród wykresów różnych funkcji wskaż wykres funkcji homograficznej:

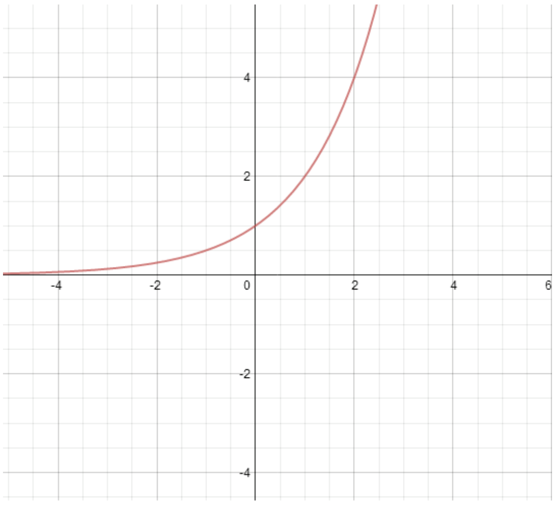
a)



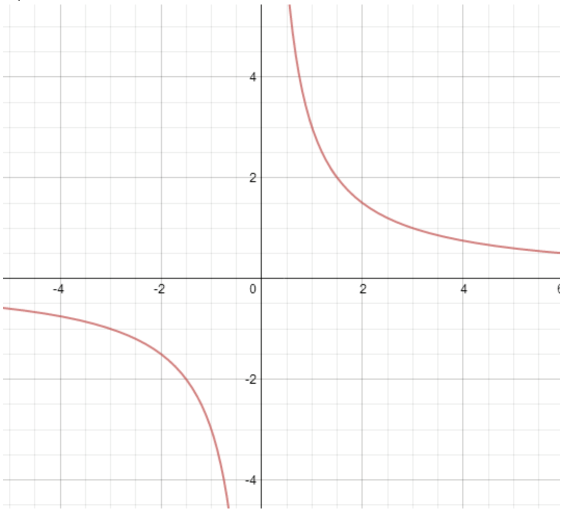
b)



c)



d)



Zad. 2

Wśród podanych funkcji wybierz te, które nie są funkcjami homograficznymi:

a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

b) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{2x-2}{x-1}$

e) $f(x) = -\frac{3}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

g) $f(x) = \frac{1}{x-10}$

Zad. 3

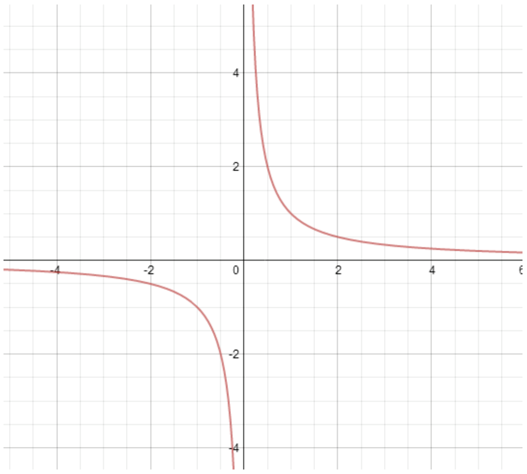
Dana jest funkcja homograficzna $f(x)=-\frac{3}{x+1}$. Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.

Zad. 4

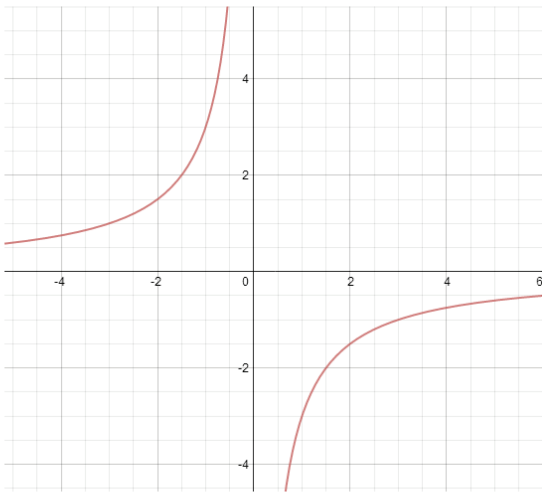
Dopasuj wykres funkcji homograficznej do jej wzoru:

1. $f(x)=\frac{1}{x}$
2. $f(x)=-\frac{3}{x}$
3. $f(x)=-\frac{3}{x}$
4. $f(x)=-\frac{8}{x}$

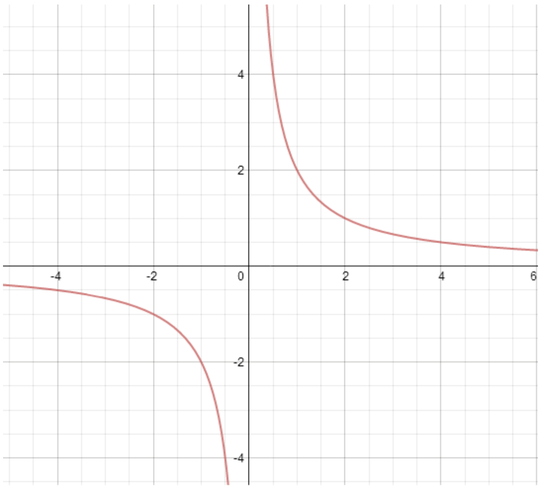
A.



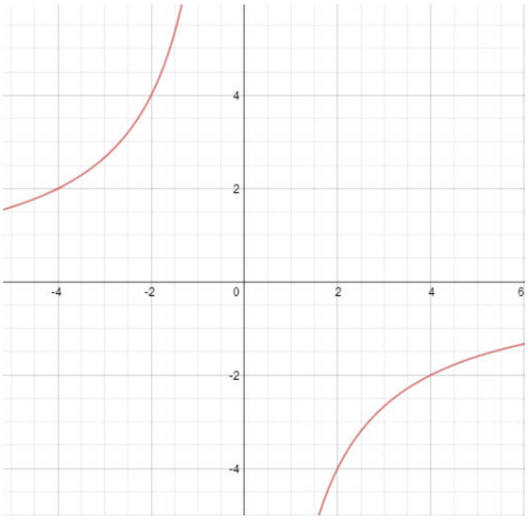
B.



C.



D.



Zad. 5

Dane są funkcje $f(x)$ i $g(x)$. O jaki wektor należy przesunąć funkcję $f(x)$, aby otrzymać funkcję $g(x)$?

a)
$$f(x)=\frac{1}{x}$$
$$g(x)=\frac{1}{x}-2$$

b)
$$f(x)=-\frac{1}{x}$$
$$g(x)=2-\frac{1}{x-1}$$

c)
$$f(x)=\frac{4}{x}$$
$$g(x)=\frac{4}{x+2}$$

d) $f(x) = -\frac{4}{x}$

$g(x) = -\frac{4}{x-1} - 2$

Zad. 6

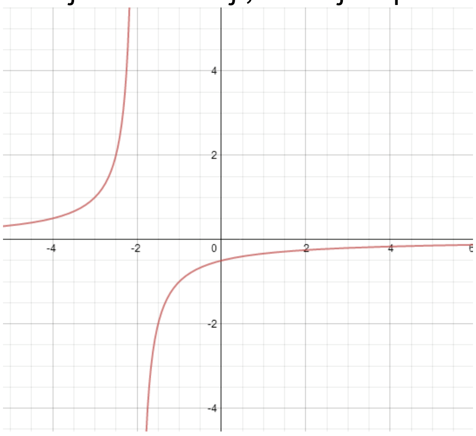
Dana jest funkcja homograficzna $f(x)$. O jaki wektor należy przesunąć funkcję $f(x)$, aby otrzymać funkcję $g(x)$?

$f(x) = \frac{3}{x}$

$g(x) = \frac{3}{x-1} + 4$

Zad. 7

Podaj wzór funkcji, która jest przedstawiona na wykresie:



Zad. 8

Funkcję f(x) przesunięto o wektor $[1, -3]$ i otrzymano funkcję:

A. $g(x) = -\frac{9}{x-1} - 3$

B. $g(x) = -\frac{9}{x+1} - 3$

C. $g(x) = -\frac{9}{x-1} + 3$

D. $g(x) = -\frac{9}{x+1} + 3$

Temat 15: Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$ i $x \neq 0$ i jego przekształcenie

Zad. 1

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2}{x-1} + 4$. Naszkicuj jej wykres, a następnie omów jej własności:

Zad. 2

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = -\frac{3}{x+2} - 4$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{x-7}$

d) $f(x) = \frac{2}{x-1} + 7$

Zad. 3

Narysuj wykres funkcji: $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$

Zad. 4

Funkcję $f(x)$ przesunięto o pewien wektor i otrzymano funkcji $g(x)$. Wyznacz współrzędne wektora.

a) $f(x) = \frac{-4}{x}$, $g(x) = \frac{x-3}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{7}{x}$, $g(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{-7}{x}$, $g(x) = \frac{x-4}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{-3}{x}$, $g(x) = \frac{3x}{x+1}$

Zad. 5

Funkcję $f(x) = \frac{-3x}{x-1}$ zapisz w postaci: $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$

Zad. 6

Czy poprawnie przekształcono funkcję $f(x) = \frac{4x-2}{x+4} = 4 - \frac{16}{x+4}$?

Zad. 7

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{4x+1}{x-3}$. Podaj równania asymptot funkcji.

Temat 16: Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0 \; i \; x \neq 0$ i jego przekształcenie

Zad. 1

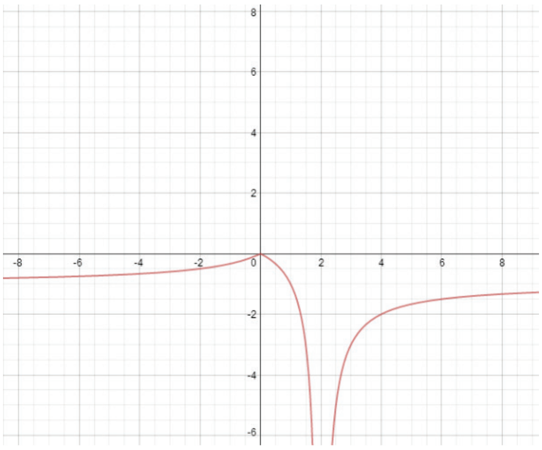
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{2}{x-1} + 3\right|$

Zad. 2

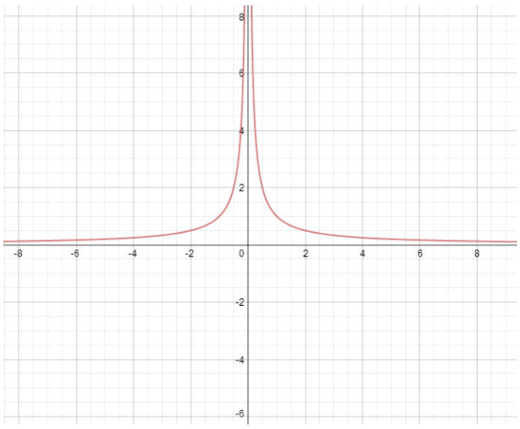
Dopasuj wzór funkcji do jej wykresu

1. $f(x) = -\left|\frac{x}{x-2}\right|$
2. $f(x) = \frac{1}{|x|}$
3. $f(x) = \left|\frac{2x-1}{x+3}\right|$
4. $f(x) = \left|-\frac{3}{x-1}\right| + 2$

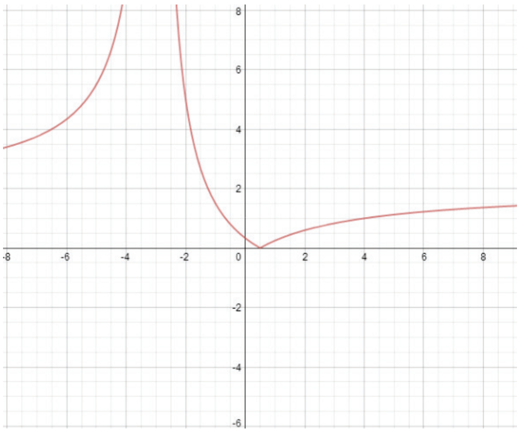
A.



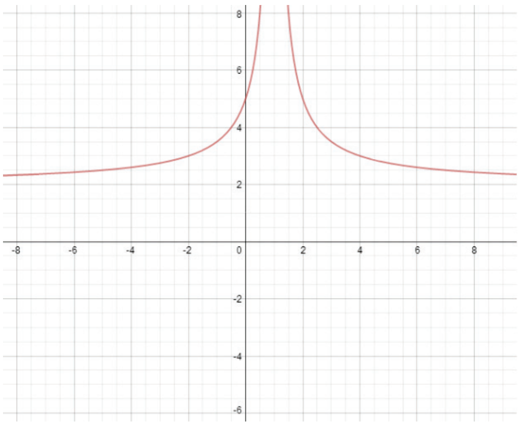
B.



C.



D.



Zad. 3

Omów własności funkcji $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

Zad. 4

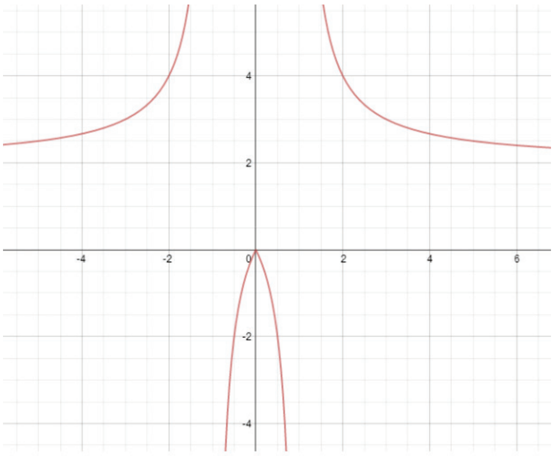
Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{3x-12}{x+4}$. Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?

Zad. 5

Dane są funkcje $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ i $g(x)=\dfrac{3x+6}{x-1}$. Dla jakich argumentów funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $g(x)$?

Zad. 6

Dany jest wykres pewnej funkcji:



Jaka to funkcja?

A. $f(x)=\left|\dfrac{2}{x-1}\right|+2$

B. $f(x)=\dfrac{2}{|x|-1}+2$

C. $f(x)=\left|\dfrac{2}{x-1}+2\right|$

D. $f(x)=\dfrac{2}{|x|+1}-2$

Temat 17: Zastosowanie wyrażeń wymiernych w zadaniach praktycznych

Cel lekcji: zastosowanie wiadomości o wyrażeniach do rozwiązywania zadań praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Stosować poznane wiadomości o wyrażeniach wymiernych do rozwiązywania zadań tekstowych typu: droga, czas, prędkość prowadzące do rozwiązywania równań bądź układów równań wymiernych
- Wyznaczać wartości parametrów równania, które spełniają określone warunki

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wzorów na prędkość, drogę, czas
3. Przypomnienie wzorów Viete'a
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Dominika przygotowywała się do matury z biologii, codziennie rozwiązywała taką samą liczbę zadań. W sumie rozwiązała 480 zadań. Jeśli każdego dnia rozwiązywałaby o 2 zadania więcej, to rozwiązałaby je osiem dni wcześniej. Ile zadań dziennie rozwiązywała Dominika i ile dni zajęło jej rozwiązanie wszystkich zadań?

Zad. 2
Samochód przejechał trasę długości 120 km. Gdyby jechał z prędkością o 10 km\h większą, to przejechałby tę trasę w czasie o godzinę krótszym. Oblicz średnią prędkość (V) samochodu oraz czas (t), w jakim przejechał podaną trasę.

Zad. 3
Robotnicy mogą wykonać daną pracę w ciągu określonej liczby dni. Jeśli zwiększymy zespół robotników o dwie osoby, to tę samą pracę wykonają trzy dni wcześniej. Natomiast gdyby robotników było o czterech więcej, to pracowaliby siedem dni dłużej. Ilu było robotników, ile dni pracowali?

Zad. 4
Zosia zbierała maliny, codziennie taką samą ilość i w sumie zebrała 120 kg malin. Gdyby zbierała codziennie o 9 kg więcej malin, to zebrałaby je 12 dni krócej. Ile kilogramów malin dziennie zbierała Zosia i ile dni je zbierała?

Temat 18: Zastosowanie wyrażeń wymiernych w zadaniach praktycznych

Zad. 1
Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $(2m+1)x^2+(m-1)x+1-m=0$ ma dwa pierwiastki różnych znaków:

Zad. 2
Wyznacz te wartości parametru m, dla których pierwiastki równania $(m-2)x^2+(2m-2)x+m+1=0$ spełniają warunek $x_1^2+x_2^2=2$.

Zad. 3
Dany jest prostokąt o bokach długości a i b, którego pole wynosi 60 cm2. Jeśli długość jednego boku zwiększymy o 4 cm, a długość drugiego boku zwiększymy o 2 cm, to pole zwiększy się dwukrotnie. Oblicz długość boków prostokąta:

Zad. 4
Z miast A i B odległych od siebie o 360 km wyruszyły dwa samochody, które spotkały się w połowie drogi. Samochód jadący z miasta A do B wyjechał godzinę później i jechał ze średnią prędkością o 30km\h większą niż samochód jadący z miasta B do miasta A. Oblicz średnie prędkości obu samochodów.

Temat 19: Zastosowanie wyrażeń wymiernych w zadaniach praktycznych

Zad. 1
Pewien turysta przebył pieszo 400 km. Każdego dnia pokonywał taką samą drogę (mierzoną w km). Gdyby codziennie przebywał o dwa kilometry więcej, to trasę 400 km pokonałby w czasie o 10 dni krótszym. Ile dni zajęło turyście pokonanie tej trasy?

Zad. 2
Z miast A i B odległych o 24 km wyruszyli dwaj turyści. Turysta idący z miasta B do miasta A wyruszył godzinę wcześniej i szedł ze średnią prędkością o 3 km\h większą niż turysta idący z miasta A do miasta B. Jaka była średnia prędkość dwóch turystów?

Zad. 3
Marcin i Tomek pracując razem wykonali pracę w ciągu dwunastu godzin. Gdyby Marcin pracując sam wykonał połowę pracy, a druga połowę wykonałby Tomek, to zajęłoby im to 25 godzin. W ciągu ilu godzin Marcin i Tomek mogą wykonać tę pracę (pracując oddzielnie)?

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Wykonaj działania:

a) $\frac{2}{x}-\frac{5}{x-2}+\frac{2x}{-x+3}$

b) $\frac{2x^2+6x}{-x-3}\div\frac{8x^2}{2x+1}$

c) $\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\cdot\frac{x^2+3x+2}{12x^2+24x-36}$

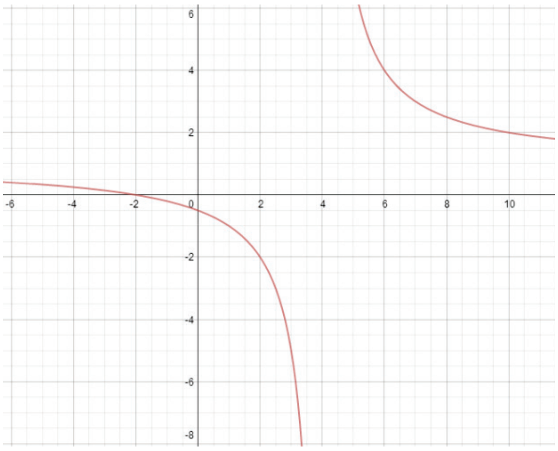
Zad. 2
Wyznacz dziedzinę wyrażenia:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^2+9}+\frac{x^2-9}{x^2+8x-9}+\frac{1}{x}$$

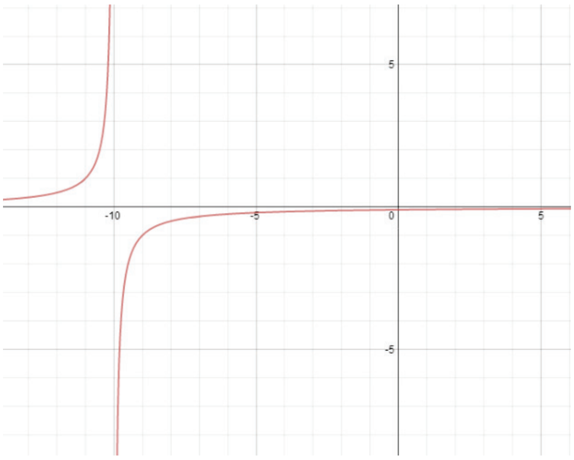
Zad. 3
Dopasuj wzór funkcji do jej wykresu:

1. $f(x)=2+\frac{1}{x-1}$
2. $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$
3. $f(x)=-\frac{1}{x+10}$
4. $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$

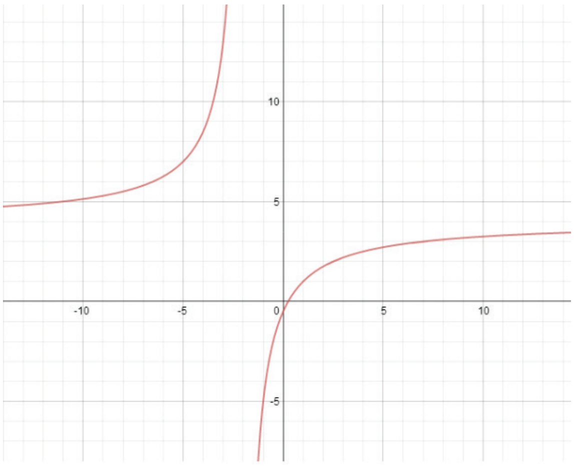
A.



B.



C.



Zad. 4

Podaj rozwiązanie równania: $\frac{x^3+1}{x-1}-\frac{x^3-1}{x+1}=x$

Zad. 5

Rozwiąż nierówność: $\frac{x-1}{x}>\frac{x+1}{x+4}$

Zad. 6

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|+4$

Sprawdzian

Zad. 1
Wykonaj działania:

a) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}\cdot\dfrac{2x+4}{4x+4}$

b) $\dfrac{x+1}{2x^2+8x+8}\div\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+8}$

c) $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1-x}{x}$

Zad. 2

Wyznacz dziedzinę wyrażenia: $\dfrac{2x-7}{x^2-4}+\dfrac{8x^2-1}{x^2-6x-18}-\dfrac{2}{x}$

Zad. 3

Podaj rozwiązanie równania $\dfrac{8}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x+6}=0$.

Zad. 4

Rozwiąż nierówność: $\dfrac{2x-1}{x+4}+\dfrac{1}{x}\leq 1$

Zad. 5
Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$

c) $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x+2}{2x-1}$

Zad. 6
Damian wyruszył w podróż samochodem, codziennie przebywał taką samą drogę i w sumie przejechał 1300 km. Jeśli każdego dnia pokonywałby trasę o 80 km dłuższą, to tę samą drogę przejechałby w czasie o 16 dni krótszym. Ile kilometrów dziennie przejeżdżał Damian i ile dni trwała jego podróż?

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1

a) $\frac{x-3}{2}$

b) $\frac{x+1}{2x+4}$

c) $\frac{-x^3-3x^2+x+1}{x-x^3}$

Zad. 2

Odp. $x \in R \setminus \{-2,0,2,8\}$

Zad. 3

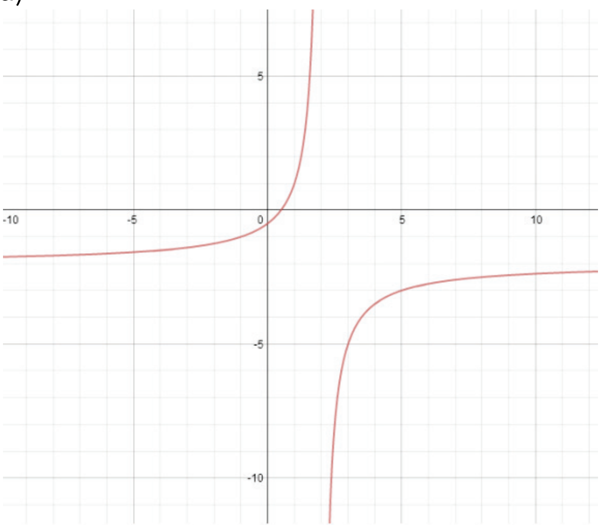
Odp. $\begin{matrix} x=1 \\ x=-2 \end{matrix}$

Zad. 4

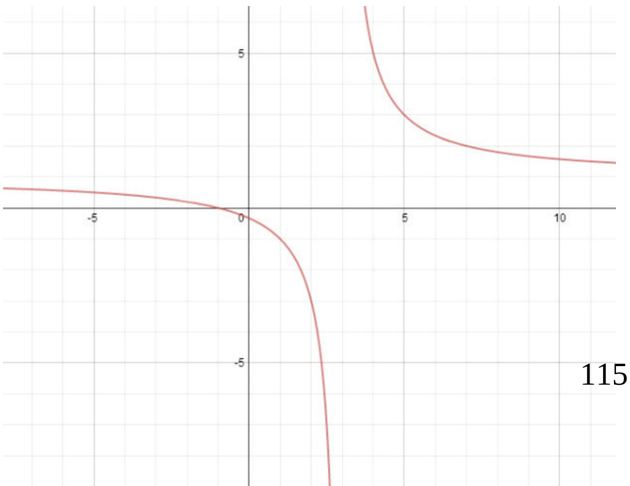
Odp. $x \in (-4,0)$

Zad. 5

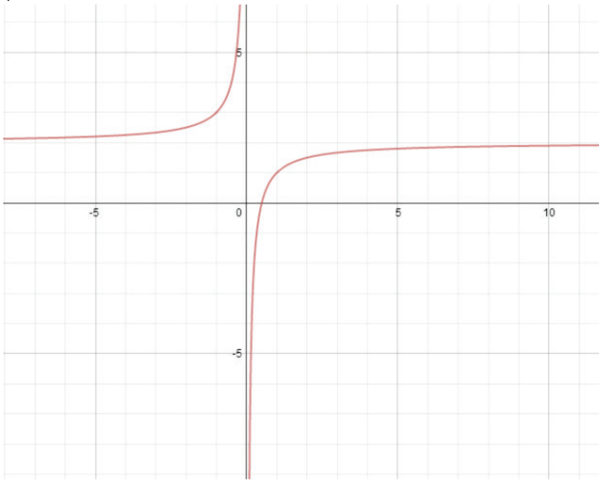
a)



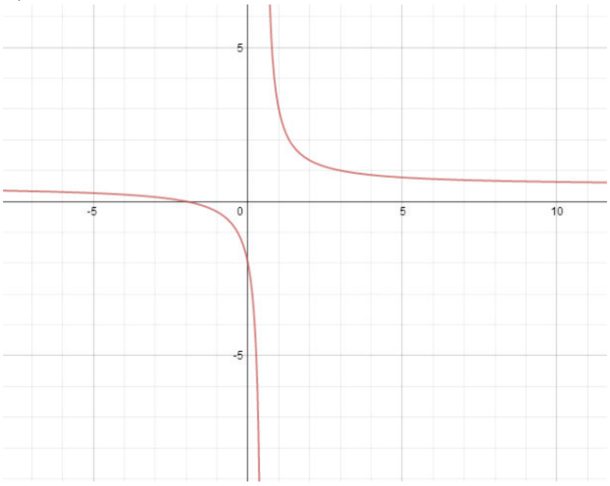
b)



c)



d)



Zad. 6

Odp. Damian codziennie przejeżdżał 50km\h, podróż trwała 26 dni.

2. Trygonometria II

Temat 1: Miara łukowa kąta

Cel lekcji: poznanie podstawowych pojęć związanych z miarą kąta oraz zastosowanie ich do wyznaczania kątów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać pojęcia kąta skierowanego i umieszczonego w układzie współrzędnych
- Przedstawiać podany kąt jako sumę dowolnego kąta o mierze dodatniej (mniejszego od 360°) i wielokrotności kąta 360°
- Znać pojęcie miary łukowej i jej jednostkę – radiany
- Zamieniać radiany na stopnie i stopnie na radiany
- Podawać godzinę, którą wskazuje zegar, jeśli wskazówka minutowa obróciła się od północy o podany kąt

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęć: kąt skierowany, kąt umieszczony w układzie współrzędnych, miara łukowa kąta, radian, miara stopniowa
3. Pokazanie sposobu zamiany radianów na stopnie i stopni an radiany
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Oblicz miarę łukową kąta ABC, jeśli r jest promieniem, a l długością łuku:

a) $r = 2, l = 2$

b) $r = \frac{1}{2}, l = 3$

c) $r = \pi, l = 3\pi$

d) $r = \frac{3}{2}, l = 2\pi$

e) $r = \frac{1}{3}, l = \frac{2}{3}$

f) $r = 1, l = \pi$

Zad. 2

Zamień miarę kąta w stopniach na radiany: 15°

Zad. 3

Zamień miarę kąta w stopniach na radiany: -200°

Zad. 4

Którą godzinę wskazuje zegar, jeśli od północy wskazówka minutowa obróciła się o podany kąt?

$-\frac{28}{3}\pi$

Zad. 5

Zamień podaną w stopniach miarę kąta na radiany.

30°

Zad. 6

Zamień podaną w stopniach miarę kąta na radiany.

-270°

Zad. 7

Od północy wskazówka minutowa obróciła się o podany obok kąt, więc zegar wskazuje godzinę 2:30

$-\frac{9}{2}\pi$

Temat 2: Miara łukowa kąta

Zad. 1
Zamień miary kątów podane w radianach na stopnie:

a) $-\frac{1}{2}\pi$

b) $\frac{5}{2}\pi$

c) $-\frac{6}{5}\pi$

d) $\frac{11}{12}\pi$

e) $-\frac{4}{9}\pi$

f) $\frac{21}{6}\pi$

Zad. 2
Od północy wskazówka minutowa obróciła się o podany obok kąt, więc zegar wskazuje godzinę 9:15

$-\frac{115\pi}{6}$

Zad. 3
Dopasuj miary kątów wyrażone w stopniach i w radianach:

1. $20°$
2. $210°$
3. $330°$
4. $450°$
5. $570°$

A. $\frac{\pi}{9}$

B. $\frac{7}{6}\pi$

C. $\frac{11}{6}\pi$

D. $\frac{5}{2}\pi$

E. $\frac{19}{6}\pi$

Zad. 4
O godzinie 12:30 wskazówki zegara tworzą kąt o mierze (w stopniach):…

Zad. 5
Dopasuj miary kątów w stopniach i w radianach:

1. $\frac{1}{6}\pi$
2. $\frac{3}{4}\pi$
3. $\frac{7}{12}\pi$
4. $\frac{1}{12}\pi$
5. $\frac{5}{18}\pi$

A. $30°$
B. $135°$
C. $105°$
D. $15°$
E. $50°$

Zad. 6
O godzinie 17:20 wskazówki zegara tworzą kąt ostry o mierze (w stopniach):…

Zad. 7
O godzinie 9:55 wskazówki zegara tworzą kąt ostry o mierze (w stopniach):…

Zad. 8
Ile obrotów w ciągu minuty wykona koło, które obraca się z prędkością:

a) $\frac{\pi}{2} rad/s$
b) $\pi rad/s$
c) $\frac{\pi}{3} rad/s$

Temat 3: Funkcje trygonometryczne dowolnego kata

Cel lekcji: przypomnienie wiadomości z klasy pierwszej o funkcjach trygonometrycznych oraz obliczanie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicje funkcji trygonometrycznych kata o dowolnej mierze
- Obliczać wartości poszczególnych funkcji trygonometrycznych danego kąta, jeśli znane są współrzędne punktu leżącego na końcowym ramieniu kąta
- Znać znaki poszczególnych funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych
- Konstruować kąt w układzie współrzędnych, jeśli znane są funkcje trygonometryczne tego kąta

– Podawać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, sprowadzając do przypadku kąta ostrego
– Obliczać wartości wyrażeń z zastosowanie funkcji trygonometrycznych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie definicji poszczególnych funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens i cotangens
3. Przypomnienie wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych dla podstawowych miar kątów: $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 360°$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się ramię kąta, jeśli
$\sin\alpha > 0$ oraz $ctg\alpha < 0$

Zad. 2
Czy $cos\alpha$ może być równy $\frac{-9}{11}$

Zad. 3
W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się ramię kąta, jeśli
$\sin\alpha < 0$ oraz $\cos\alpha > 0$

Zad. 4
W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się ramię kąta, jeśli
$\sin\alpha > 0$ oraz $\cos\alpha > 0$

Zad. 5
W której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się ramię kąta, jeśli
$\cos\alpha < 0$ oraz $tg\alpha > 0$

Zad. 6
Czy $sin\alpha$ może być równy $\frac{21}{19}$?

Zad. 7
W prostokącie ABCD długości przekątnych wynoszą 6 cm i przecinają się pod kątem 60 stopni. Oblicz obwód prostokąta.

Zad. 8
W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę 45 stopni, a długość podstawy wynosi 4 cm. Ile wynoszą długości ramion trójkąta?

Zad. 9
Oblicz wartości wyrażeń:
a) $2\sin 30° \cdot \cos 60° - \sin 60° \cdot \cos 30°$

b) $6\cos 45° \cdot tg45° \div (ctg60° \cdot tg30°)$
c) $(\sin 30° - \cos 60°) \div (tg30° + \cos 30°)$

Zad. 10

Ile wynosi miara kąta α, $\alpha \in (0, \pi/2)$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

Zad. 11

Ile wynosi miara kąta α, $\alpha \in (0, \pi/2)$, jeśli $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Zad. 12
$Cos\alpha = 0{,}5$, czy prawdą jest, że kąt α ma miarę 30 stopni?

Temat 4:Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Zad. 1
Wyznacz miarę kąta α, $\alpha \in (0{,}2\pi)$ wiedząc, że
$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$tg\alpha > 0$
Zad. 2

Czy prawdą jest, że miara kąt α wynosi 60 stopni, jeśli: $tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos\alpha > 0$

Zad. 3
Uszereguj rosnąco wartości kątów:
A.
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$tg\alpha > 0$
B.
$tg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\alpha > 0$
C.
$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$ctg\alpha < 0$
D.
$ctg\alpha = -1$
$\sin\alpha < 0$

Zad. 4

Dopasuj miarę kąta α z odpowiednią wartością funkcji trygonometrycznej:

A. $\alpha = 390°$

B. $\alpha = 225°$

C. $\alpha = 300°$

D. $\alpha = 210°$

1. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$

2. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$

Zad. 5

Podaj wartości pozostałych wartości funkcji trygonometrycznych wiedząc, że: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

Zad. 6

Czy prawdziwe jest następujące zdanie:

Dana jest wartość $\cos\alpha = -\frac{2}{5}, \cos\alpha \in (\pi, \frac{\pi}{2})$, wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych wynoszą odpowiednio:

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$tg\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

$ctg\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Zad. 7

Oblicz pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli końcowe ramię kąta leży w drugiej ćwiartce układu współrzędnych oraz $\sin\alpha = \frac{9}{11}$.

Zad. 8

Oblicz wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych wiedząc, że na końcowym ramieniu kąta leży punkt o współrzędnych (1,-√3)

Zad. 9

Dopasuj wartości wyrażeń wiedząc, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$

A. $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

B. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

C. $|\sin\alpha - \cos\alpha|$

D. $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

1. $\frac{12}{5}$
2. 1
3. $\frac{1}{5}$
4. $\frac{91}{125}$

Zad. 10

Uporządkuj wartości wyrażeń w kolejności malejącej:

$ctg25^\circ \cdot ctg35^\circ \cdot ctg45^\circ \cdot ctg55^\circ \cdot ctg65^\circ$

$\frac{tg47^\circ - tg17^\circ}{1 + tg47^\circ \cdot tg17^\circ}$

$\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ - \sin 40^\circ \cdot \sin 50^\circ$

Zad. 11

Bez użycia tablic trygonometrycznych oblicz wartości wyrażeń:

a) $tg300^\circ$

b) $\sin(-30^\circ)$

c) $ctg135^\circ$

d) $\cos 210^\circ$

e) $\sin 150^\circ$

Zad. 12

Czy prawdą jest, że $tg43^\circ \cdot tg44^\circ \cdot tg45^\circ \cdot tg46^\circ \cdot tg47^\circ = -1$

Temat 5: Wykresy funkcji trygonometrycznych

Cel lekcji: szkicowanie podstawowych wykresów funkcji trygonometrycznych oraz określanie ich własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Szkicować wykresy funkcji $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$ i określać ich zbiory wartości, dziedzinę oraz inne własności funkcji
- Przekształcanie podstawowych wykresów funkcji trygonometrycznych w symetrii względem osi OX, osi OY oraz początku układu współrzędnych
- Przesuwać wykresy funkcji trygonometrycznych o podany wektor, a następnie podawać wzór funkcji otrzymanej w wyniku takiego przekształcenia
- Szkicuje wykresy funkcji trygonometrycznych $|f(x)|$, gdzie $f(x)$ jest funkcją trygonometryczną
- Określać parzystość funkcji

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie wykresów funkcji $y = sinx, y = cosx, y = tgx, y = ctgx$ oraz omówienie ich własności
3. Przypomnienie wiadomości o przekształcenia wykresów funkcji: $-f(x), f(-x), -f(-x), |f(x)|$
4. Podanie definicji funkcji parzystej i nieparzystej
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Określ zbiór wartości funkcji $y = 1 - \cos^2 x$

Zad. 2

Czy funkcja $y = |\sin x| + |\cos x|$ jest:

a) okresowa
b) rosnąca w całej dziedzinie
c) parzysta
d) nieparzysta
e) przyjmuje wartości z przedziału [-1,1]
f) nie ma miejsc zerowych

Zad. 3

Określ parzystość funkcji $y = \sin x$

Zad. 4

Określ parzystość funkcji $y = tgx \cdot ctgx$

Zad. 5

Określ parzystość funkcji $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

Zad. 6

Wśród podanych funkcji wskaż zestaw funkcji parzystych

1.
$y = \cos x - 3$
$y = 2\sin x - \cos x$
$y = tgx + ctgx$

2.
$y = 2 + \cos x$
$y = tgx + 3$
$y = ctgx \cdot tgx$

3.
$y = \sin x + 1$
$y = \sin^2 x + \cos x$
$y = 1 - \cos x$

4.
$y = 2\cos x - 1$

$y = \sin^2 x + \cos x$

$y = \cos^2 x - 2\cos x + 2$

Zad. 7
Wśród podanych funkcji wskaż zestaw funkcji nieparzystych
1.
$y = -3cox$

$y = \sin x - \cos x$

$y = tgx + 2ctgx - 1$

2.
$y = \sin x$

$y = \dfrac{tgx}{\cos x}$

$y = \dfrac{ctgx \cdot tgx}{\sin x}$

3.
$y = \cos x$

$y = \sin^2 x - 3\sin x$

$y = 2\cos^5 x$

4.
$y = tgx - \cos x + \sin x$

$y = tgx$

$y = 2\cos^2 x - 10\sin x + 2$

Zad. 8
Wyznacz okres podstawowy podanych funkcji.

a) $y = \sin \frac{1}{2} x$

b) $y = \cos 5x$

c) $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

d) $y = \sqrt{2} tg \frac{2}{3} x$

Zad. 9
Naszkicuj wykres funkcji $y = cosx$ dla $x \in (-\pi/2, \pi\rangle$, a następnie określ własności naszkicowanej funkcji.

Zad. 10
Naszkicuj wykres funkcji $y = sinx$ dla $x \in (0, 2\pi\rangle$, a następnie określ własności naszkicowanej funkcji.

Zad. 11
Dana jest funkcji $y = ctgx$. Podaj równania asymptot tej funkcji.

Zad. 12
Wśród wymienionych funkcji wskaż te, których okres podstawowy jest mniejszy niż π

A. $y = 2tg(\frac{1}{3}x)$

B. $y = \cos 6x + 1$

C. $y = -2\sin 2x$

D. $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

E. $y = ctg3x$

F. $y = 2 - \sin\frac{2x}{3}$

Zad. 13
Niech dana będzie funkcja $y = tgx$. Czy prawdą jest, że $tg(-128°)\cdot tg36°\cdot tg(-23°) > 0$?

Temat 6: Wykresy funkcji trygonometrycznych

Zad. 1
Dana jest funkcja $y = sinx$, przesunięto ją o wektor [0,2]. Jaka funkcję otrzymano?

Zad. 2
Dana jest funkcja $y = cosx$, przesunięto ją o wektor [-1,0]. Jaka funkcję otrzymano?

Zad. 3
Dana jest funkcja $y = tgx$, przesunięto ją o wektor [1,-3]. Jaka funkcję otrzymano?

Zad. 4
Dana jest funkcja $y = ctgx$, przesunięto ją o wektor [-2,1]. Jaka funkcję otrzymano?

Zad. 5
Prawda czy fałsz:
Dana jest funkcja $f(x) = cosx$, funkcja $g(x) = -f(x-1) + 3$. Funckja $g(x)$ ma wzór $g(x) = -cos(x-1) + 3$.

Zad. 6
Naszkicuj wykres funkcji:

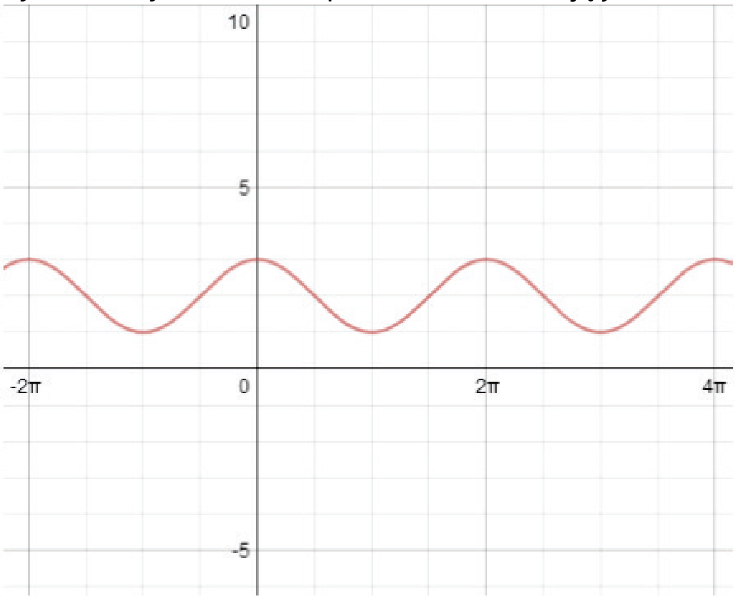
a) $y = \sin x + 2$

b) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

c) $y = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{4})$

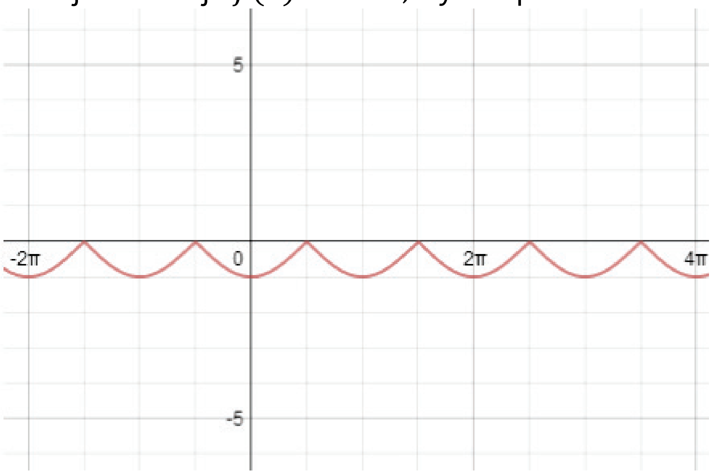
d) $y = \sin(x + \pi) - 2$

Zad. 7
Prawda czy fałsz:
Wykres na rysunku obok przedstawia funkcję $y = -cosx + 2$



Zad. 8
Naszkicuj wykres:
1. $y = |\sin x|$
2. $y = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$
3. $y = tg\,|x|$
4. $y = 1 - ctgx$
5. $y = -\cos(-x)$
6. $y = \sin(\pi - x) + 3$

Zad. 9
Prawda czy fałsz:
Dana jest funkcja $f(x) = cosx$, wykres przedstawia funkcję $g(x) = -|f(-x)|$



Zad. 10
Określ zbiór wartości funkcji $y = \sin(x-1)+3$

Zad. 11
Określ zbiór wartości funkcji $y = -|\sin x + 1| - 2$

Zad. 12
Określ zbiór wartości funkcji $y = \cos|x| - 1$

Temat 7: Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Cel lekcji: obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta z zastosowaniem wzorów na sumę i różnicę kątów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta i umie wyprowadzać wzory na sinus i cosinus potrojonego kąta
- Znać wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów i stosować je do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych
- Wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, jeśli dana jest wartość jednej z nich
- Sprawdzać, czy podana równość jest prawdziwa obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów innych niż 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 360° stosując wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie następujących wzorów:
$$sin2x = 2sinxcosx$$
$$cos2x = cos^2x - sin^2x$$
$$sin^2x + cos^2x = 1$$
$$\sin(x+y) = sinxcosy + cosxsiny$$
$$\sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny$$
$$\cos(x+y) = cosxcosy - sinxsiny$$
$$\cos(x-y) = cosxcosy + sinxsiny$$
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Zapisz w prostszej postaci $\dfrac{\sin(\pi+\beta)}{\cos(2\pi-\beta)}$

Zad. 2
Zastosuj wzory redukcyjne, aby uprościć podane wyrażenie: $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$

Zad. 3

Czy podany wzór jest prawdziwy?

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

Zad. 4

Zapisz w prostszej postaci:

a) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)}$

b) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(-\alpha)}$

Zad. 5

Ile wynosi wartość wyrażenia $\sin 15°$?

Zad. 6

Czy podany wzór jest prawdziwy?

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\cos\beta$

Zad. 7

Dopasuj wyrażenia, które mają te same wartości

a) $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(2\pi + \alpha)}$

b) $\dfrac{\sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

c) $\cos 2\alpha$

d) $\dfrac{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(2\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}$

1. 1
2. $\dfrac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin 2\alpha}$
3. $1 - 2\sin^2\alpha$
4. $\dfrac{-1}{\cos\alpha}$

Zad. 8

Czy prawdziwy jest wzór: $\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$

Temat 8: Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Zad. 1

Oblicz wartość następującego wyrażenia: $\dfrac{\sin(\pi - 30°)}{\cos(2\pi + 60°)}$

Zad. 2

Dopasuj wyrażenia o takich samych wartościach:

a) $\dfrac{tg(\pi - \alpha)}{ctg(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$

b) $\dfrac{tg(\pi + \alpha)ctg(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{ctg(-\alpha)}$

c) $tg(2\pi - \alpha) + ctg(\alpha - \pi)$

d) $-\dfrac{\sin\alpha}{tg(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$

1. 1
2. $-tg^3\alpha$
3. $ctg\alpha - tg\alpha$
4. $\dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha$

Zad. 3

Czy prawdziwa jest równość $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{tg\alpha - tg\beta}$?

Zad. 4

Czy prawdą jest, że:

$\cos(45° - \alpha)\cos(45° - \beta) - \sin(45° - \alpha)\sin(45° - \beta) = \sin(\alpha - \beta)$

Zad. 5

Czy prawdziwe jest wyrażenie $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha\sin^2\beta$?

Zad. 6

Oblicz wartości wyrażeń:

a) $\cos 15°$

b) $ctg 75°$

c) $\sin 120°$

d) $-tg 15°$

Zad. 7

Uszereguj wartości podanych wyrażeń od najmniejszej do największej:

$ctg 105°$, $\cos 105°$, $\sin(-15°)$, $-tg(-75°)$

Zad. 8
Podaj wartość wyrażenia: $\sin 50^\circ \cos 40^\circ + \cos 50^\circ \sin 40^\circ$

Zad. 9
Podaj wartość wyrażenia: $\cos 15^\circ \cos 75^\circ - \sin 15^\circ \cos 75^\circ$

Temat 9: Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Zad. 1
Oblicz $\cos 120^\circ$.

Zad. 2
Nie używając tablic trygonometrycznych oblicz wartość wyrażenia:
$$\frac{1}{tg10^\circ}\cdot\frac{1}{tg20^\circ}\cdot\frac{1}{tg30^\circ}\cdot\frac{1}{tg40^\circ}\cdot\frac{1}{tg50^\circ}\cdot\frac{1}{tg60^\circ}\cdot\frac{1}{tg70^\circ}\cdot\frac{1}{tg80^\circ}$$

Zad. 3
Czy prawdą jest, że jeśli x i y są kątami ostrymi to $\sin(x+y) < \sin x + \sin y$?

Zad. 4
Nie używając tablic trygonometrycznych oblicz wartość wyrażenia: $\dfrac{\cos^2 120^\circ \sin(-180^\circ)}{ctg(-135^\circ)tg405^\circ}$

Zad. 5
Oblicz wartość wyrażenia $\sin(\alpha - \beta)$, jeśli: $\sin\alpha = \frac{1}{2}, \sin\beta = \frac{1}{3}, gdzie\ \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Zad. 6
Czy prawdziwa jest podana równość, jeśli α, β, θ są kątami dowolnego trójkąta?
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta+\theta}{2}$$

Zad. 7
Uporządkuj rosnąco wartości następujących wyrażeń, wiedząc że:
$$\sin\alpha = \frac{1}{2}, \sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \alpha, \beta \in (0, 90^\circ)$$
1. $\sin(\alpha - \beta)$
2. $\cos(\alpha + \beta)$
3. $\cos(\alpha - \beta)$
4. $\sin(\alpha + \beta)$

Temat 10: Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów

Zad. 1
Czy prawdziwe są równości:

a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta+\theta}{2}$

b) $\sin\alpha = \sin(\frac{\beta+\theta}{3})$

Zad. 2

Oblicz α, β mając dane:

$\sin(\alpha+\beta) = 0{,}5$

$\sin(\alpha-\beta) = 0{,}5$

$\alpha, \beta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

Zad. 3

Dane są:

$\sin 13° = a$

Zaznacz poprawną odpowiedź.

A. $\cos 39° = (1-4a^2)\sqrt{1-a^2}$

B. $\cos 39° = \sqrt{1+a^2}\,(1-2a)$

C. $\cos 39° = (2a^2-1)\sqrt{1-a^2}$

D. $\cos 39° = \sqrt{1+a^2}\,(a^3-4)$

Zad. 4

Ile wynosi wartość wyrażenia: $\sin 105° + \sin 15°$?

Zad. 5

Czy prawdą jest, że jeśli $\cos(x+y) = 0, to \sin(x+2y) = \sin x$

Zad. 6

Oblicz wartości podanych wyrażeń:

a) $\cos 36° \cos 72°$

b) $\frac{1}{2}\left(ctg15° - tg15°\right)$

c) $\sin 15° + \frac{\cos 15°}{ctg30°}$

d) $\frac{1-tg^2 15°}{tg15°}$

Zad. 7

Podane wartości funkcji trygonometrycznych dopasuj do wartości funkcji trygonometrycznych kątów mniejszych bądź równych 45˚:

a) $\sin 246°$

b) $\cos 1305°$

c) $\sin 125°$

d) $\cos 1250°$
e) $tg 99°$
f) $tg 980°$
1. $-\cos 24°$
2. $-\cos 45°$
3. $\cos 35°$
4. $-\cos 10°$
5. $-ctg 9°$
6. $ctg 10°$

Zad. 8
Oblicz wartość wyrażenia: $sin(\beta + 45°)$ mając dane $cos\beta = -0{,}5$ (ramię końcowe kąta leży w drugiej ćwiartce)

Temat 11: Tożsamości trygonometryczne

Cel lekcji: wykorzystanie poznanych wzorów do sprawdzania, czy dane równanie jest tożsamością trygonometryczną

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Przeprowadzać dowody tożsamości trygonometrycznych, stosując poznane dotychczas wzory
- Określać dziedzinę tożsamości trygonometrycznych
- Wykorzystywać wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów, sinus i cosinus podwojonego kąta, jedynkę trygonometryczną

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie poznanych wzorów
3. Wprowadzenie wzorów:

$$sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x+y}{2}$$
$$sinx - siny = 2sin\frac{x-y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$$
$$cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2} \cdot cos\frac{x-y}{2}$$
$$cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2} \cdot sin\frac{x-y}{2}$$
$$tgx = \frac{sinx}{cosx}$$
$$ctgx = \frac{1}{tgx}$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Zapisz w prostszej postaci: $\frac{ctg\alpha}{\cos\alpha}$

Zad. 2
Zapisz w prostszej postaci: $\cos\alpha \cdot tg\alpha$

Zad. 3
Zapisz w prostszej postaci: $tg\alpha \cdot ctg\alpha - 2\sin\alpha$

Zad. 4
Dopasuj do siebie równoważne wyrażenia:
A. $\frac{1}{\cos^2\alpha}(1+\sin^2\alpha)$
B. $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot tg^2\alpha$
1. $\frac{2}{\cos^2\alpha} - 1$
2. 1

Zad. 5
Zapisz w prostszej postaci: $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot tg\alpha$

Zad. 6
Podaj dziedzinę wyrażenia: $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha+1} + \frac{1}{2\cos\alpha}$

Zad. 7
Czy następujące wyrażenie $\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 3 - \cos^2\alpha$ jest tożsamością trygonometryczną?

Zad. 8
Wskaż wartość wyrażenia, a następnie określ jego dziedzinę: $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$

Zad. 9
Czy prawdziwe są równania:
1. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$
2. $1-\sin^2\alpha$

Temat 12: Tożsamości trygonometryczne

Zad. 1
Uczeń udowadniał tożsamość trygonometryczną. W której linijce popełnił błąd? (wpisz numer wiersza)

$$\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=tg^2x$$

$$L=\frac{1-\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x}=0$$

$$L\neq P$$

Zad. 2

Czy prawdziwa jest równość: $tg2\alpha-2tg2\alpha\cdot\sin^2\alpha=\sin 2\alpha$?

Zad. 3

Dopasuj równoważne wyrażenia:

A. $\frac{1+tg^2x}{1-tg^2x}$

B. $\frac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}$

C. $\cos^2 x-\sin^2 x$

1. $\frac{1}{\cos 2x}$
2. tgx
3. $\cos 2x$

Zad. 4

Czy prawdziwe są tożsamości?

a) $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}$

b) $(1-\sin^2 x)tgx=2\sin x\cos x$

Zad. 5

Ile wynosi wartość wyrażenia: $\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{-\cos 2x}$

Zad. 6

Wyznacz wartość wyrażenia i podaj jego dziedzinę $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}$.

Zad. 7

Czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\sin 2x$?

Zad. 8

Czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{\sin x}{1-\sin x}-\frac{\sin x}{1+\sin x}=2tg^2x$?

Temat 13: Tożsamości trygonometryczne

Zad. 1

Sprawdź czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = tg^2 \frac{x}{2}$

Zad. 2

Sprawdź czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = tg 2x$

Zad. 3

Ile wynosi wartość wyrażenia: $\sin(x+30°)\cos(x-30°)$?

Zad. 4

Dopasuj równoważne wyrażenia:

1. $\frac{\cos 3x}{2\sin x \cos x}$
2. $tg 2x \cdot \cos 2x$
3. $\cos^2(x-y) - \cos^2(x+y)$

A. $\frac{1}{2\sin x} - 2\sin x$

B. $\sin 2x$

C. $\sin 2x \sin 2y$

Zad. 5

Uczeń udowadniał tożsamość, czy była ona prawdziwa? W którym wierszu uczeń popełnił błąd?

$$\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = tgx$$

$$L = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y} =$$

$$= \frac{2\sin x \sin y}{2\cos x \cos y} = tgxtgy$$

Zad. 6

Sprawdź czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{\cos(30° + x)}{\cos(30° - x)} = \sqrt{3}\sin x \cos y$

Zad. 7

Sprawdź czy prawdziwa jest tożsamość: $\frac{\sin(45° + x)}{\sin(45° - x)} = 1 - \frac{2\sin x}{\sin x - \cos x}$

Zad. 8

Czy prawdziwe jest równanie: $\frac{1-tg^2(45°+x)}{1+tg^2(45°+x)} = -\sin 2x$?

Zad. 9

Dopasuj wartości wyrażeń:

1. $2\sin\frac{x-30°}{2}\cos\frac{x+30°}{2}$
2. $\frac{2tg(45°-x)}{1-tg^2(45°-x)}$
3. $\frac{2tg(x-60°)}{1+tg^2(x-60°)}$

A. $\frac{2\sin x-1}{2}$

B. $ctg 2x$

C. $-\cos(2x-30°)$

Zad. 10

Jeśli x, y, z są kątami dowolnego trójkąta, to podana równość jest prawdziwa?

$\frac{\sin x+\sin y-\sin z}{\sin x+\sin y+\sin z} = tg\frac{x}{2}\cdot tg\frac{y}{2}$

Temat 14: Wykresy funkcji trygonometrycznych $y = kf(x); y = f(kx)$ gdzie f jest funkcją trygonometryczną

Cel lekcji: szkicowanie wykresów funkcji trygonometrycznych postaci $y = kf(x); y = f(kx)$ oraz określanie ich własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Szkicować wykresy funkcji postaci $y = kf(x); y = f(kx)$ oraz określać ich własności, wiedzieć jak zmienia się zbiór wartości i dziedzina funkcji $f(x)$ poddanej tym przekształceniom
- Odczytywać z wykresów funkcji trygonometrycznych argumenty, dla których funkcja przyjmuje określone wartości
- Poddawać wykresy podstawowych funkcji trygonometrycznych przekształceniom: $f(-x), -f(x), -f(-x), |f(x)|, f(x-p)+q, kf(x), f(kx)$
- Wyznaczać okres podstawowy funkcji trygonometrycznej

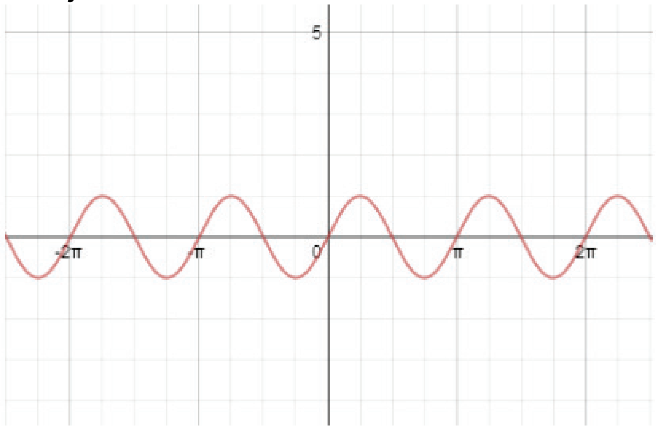
Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie przekształceń funkcji trygonometrycznych: $y = kf(x); y = f(kx)$
3. Wprowadzenie pojęcia okresu podstawowego funkcji trygonometrycznych

Okres podstawowy funkcji sinus i cosinus jest równy 2π, a funkcji tangens i cotangens wynosi π.

4. Podanie metody obliczania okresów dowolnych funkcji trygonometrycznych
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Na rysunku obok zamieszczony jest wykres pewnej funkcji trygonometrycznej. Jaka to funkcja?



Zad. 2
Co oznaczają następujące przekształcenia funkcji f(x)?

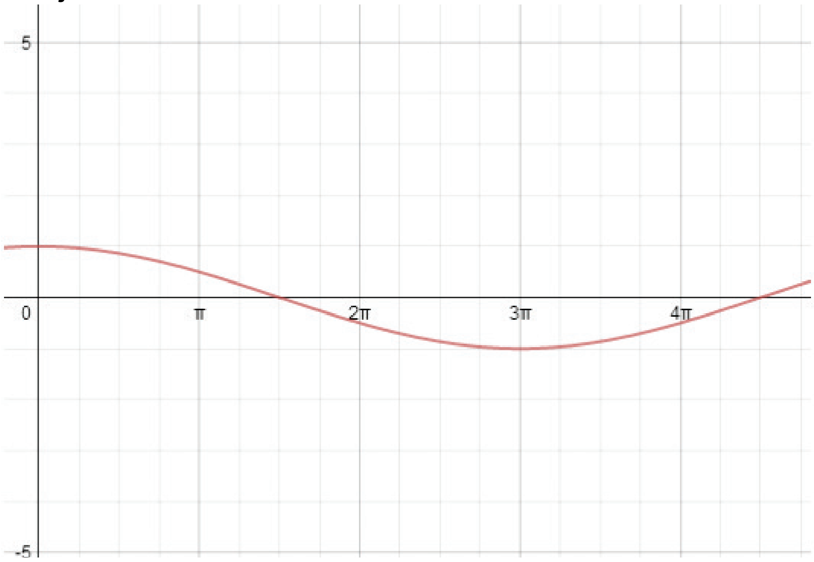
a) $2f(x)$

b) $f(\frac{1}{2}x)$

c) $f(2x)$

d) $\frac{1}{2}f(x)$

Zad. 3
Na rysunku obok zamieszczony jest wykres pewnej funkcji trygonometrycznej. Jaka to funkcja?



Zad. 4
Dana jest funkcja $f(x) = cosx$ oraz funkcja $g(x) = 0{,}5cos2x$. Określ własności funkcji $g(x)$

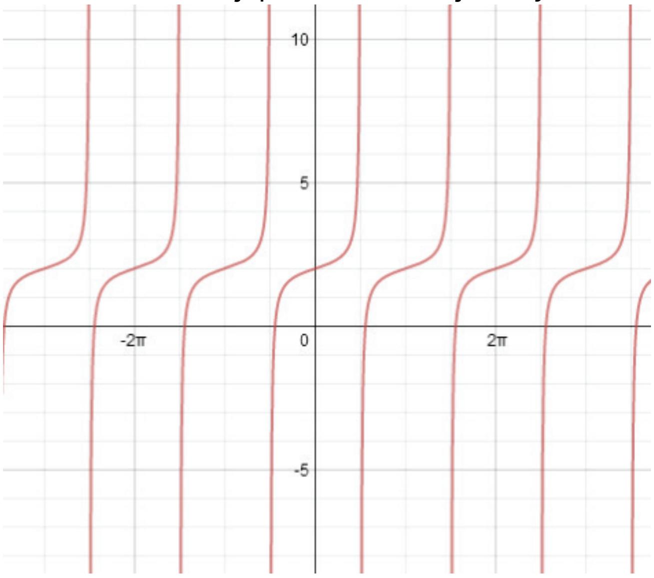
Zad. 5
Naszkicuj wykresy funkcji:
a) $y = 4\cos x$
b) $y = \sin\frac{x}{3}$
c) $y = 2\sin 2x$
d) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$

Zad. 6
Niech dana będzie funkcja $f(x) = sinx$ oraz $g(x) = f(-2x)$. Określ własności funkcji $g(x)$

Zad. 7
Dana jest funkcja $f(x) = tgx$. Co oznacza przekształcenie: $g(x) = -f(-x)$?

Zad. 8
Czy prawdą jest, że zbiorem wartości funkcji $y = -3sin(2x)$ jest zbiór: $y \in \langle -3,3 \rangle$?

Zad. 9
Wskaż wzór funkcji przedstawionej na wykresie:



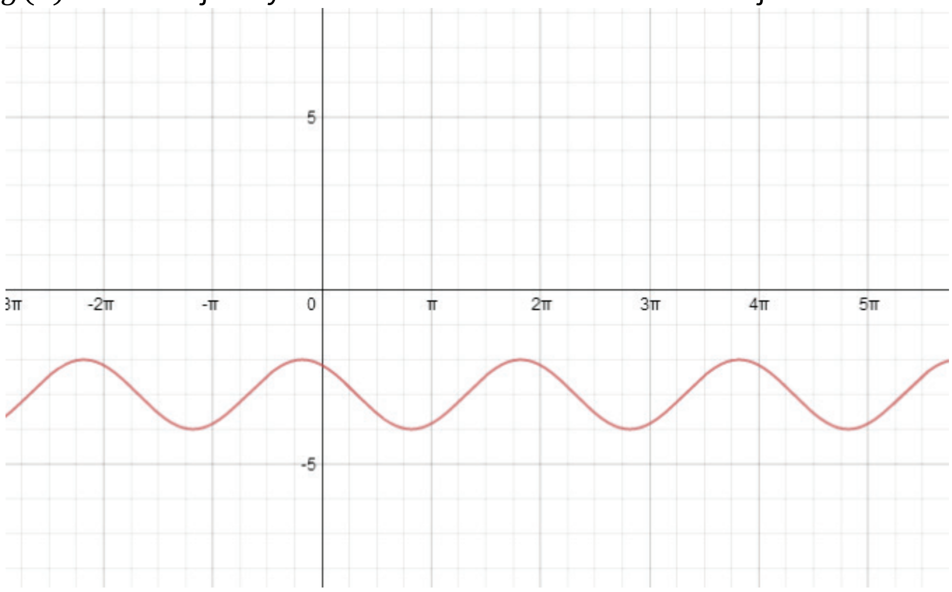
A. $y = \frac{tgx - 2}{3}$
B. $y = 3tgx - 2$
C. $y = \frac{tgx}{3} + 2$
D. $y = 3tgx + 2$

Temat 15: Wykresy funkcji trygonometrycznych $y = kf(x); y = f(kx)$ gdzie f jest funkcją trygonometryczną

Zad. 1
Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin(-2x) + 3$.

Zad. 2
Określ zbiór wartości funkcji $y = 3\cos(x+1) - 1$.

Zad. 3
Dana jest funkcja $f(x) = sinx$. Po pewnych przekształceniach otrzymano wykres funkcji $g(x)$ widocznej na rysunku obok. Określ własności funkcji:



Zad. 4
Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{2})$

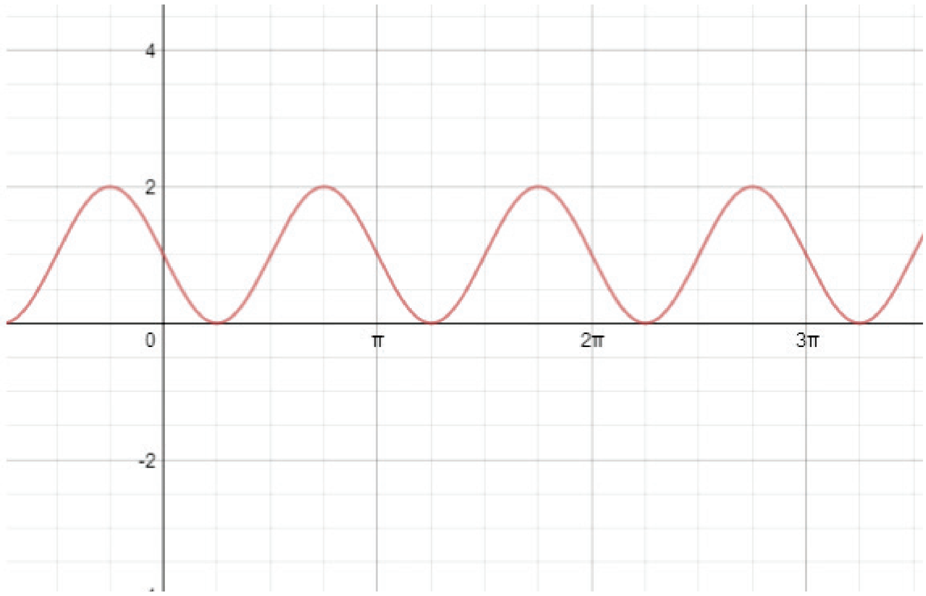
b) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$

c) $y = ctg(\frac{1}{2}x - \pi)$

d) $y = 2tgx$

Zad. 5
Określ zbiór wartości funkcji $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8})$.

Zad. 6
Niech dana będzie funkcja $f(x) = |sin2x - 1|$. Czy na rysunku jest przedstawiony jej wykres funkcji?



Zad. 7
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $y = tgx \cdot ctgx$
b) $y = 2tgx - 2$
c) $y = ctg(-2x)$

Temat 16: Wykresy funkcji trygonometrycznych $y = kf(x); y = f(kx)$ gdzie f jest funkcją trygonometryczną

Cel lekcji: Szkicowanie wykresów funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną

Zad. 1
Wskaż zbiór wartości funkcji $f(x) = 1 - \frac{1}{2}|\sin x|$

Zad. 2
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $y = tg|x|$
b) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$
c) $y = |\cos 3x - 2|$

Zad. 3
Czy funkcja $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ ma miejsca zerowe?

Zad. 4
Narysuj wykres funkcji $y = sinx - |sinx|$, a następnie określ własności funkcji.

Zad. 5
Określ zbiór wartości funkcji: $y = \cos(\pi \sin x)$

Zad. 6
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $y = |tgx| - tgx$
b) $y = |\cos x| + \cos x$
c) $y = \cos|x| + |\cos x|$

Temat 17: Równania trygonometryczne

Cel lekcji: zastosowanie wykresów funkcji trygonometrycznych oraz poznanych wzorów do rozwiązywania równań trygonometrycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Określać dziedzinę równania trygonometrycznego oraz rozwiązywać równania trygonometryczne z wykorzystaniem wykresów funkcji trygonometrycznych
- Podawać ogólne rozwiązania równań trygonometrycznych oraz podawać rozwiązania takiego równania w określonym przedziale
- Stosować poznane wzory do sprowadzenia równania trygonometrycznego do najprostszej postaci, a następnie rozwiązanie go
- Rozwiązywać równania trygonometryczne z wartością bezwzględną

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wykresów funkcji trygonometrycznych oraz podstawowych wzorów na jedynkę trygonometryczną, sinus i cosinus podwojonego kąta, tangens i cotangens
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Podaj rozwiązania równania w podanym przedziale $\sin x = -\frac{1}{2}, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 2
Rozwiąż równanie $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 3
Rozwiąż równanie, pamiętaj o uwzględnieniu dziedziny $tgx = -1, x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

Zad. 4
Czy uczeń poprawnie wyznaczył rozwiązania równania?
$\cos x = 0$
$x = 0 + k\pi, k \in C$

Zad. 5

Podaj rozwiązania równania $\sin x = -1$

Zad. 6

Rozwiąż równanie:

a) $tgx = \sqrt{3}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Zad. 7

Czy podane równanie ma rozwiązania?

$\cos x = -\frac{3}{2}$

Temat 18: Równania trygonometryczne

Zad. 1

Rozwiąż równanie: $\cos^2 x = \frac{1}{2}, x \in (0,2\pi\rangle$

Zad. 2

Czy równanie $2tgx - \frac{1}{tgx} = 1$ ma rozwiązania?

Zad. 3

Rozwiąż równanie:

a) $2\sin x \cos x = -\sin x$

b) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

c) $2\sin x \cos x = \sqrt{3}\cos x$

Zad. 4

Podaj rozwiązania równania $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

Zad. 5

Rozwiąż równanie $\cos(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$

Zad. 6

Czy równanie $\sin^2 x + 1 = 0$ ma rozwiązania?

Zad. 7

Rozwiąż równania:

a) $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}) = 0$

b) $tg(x + \frac{\pi}{2}) = 1$

c) $1 - \cos^2 x = 2\sin x$

Temat 19: Równania trygonometryczne

Zad. 1
Podaj rozwiązania równania $\sin 3x - \sin x = \cos 2x, x \in (0, \pi)$

Zad. 2
Rozwiąż równanie $\sin^2 x = \cos^2 x, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 3
Rozwiąż równania w przedziale $x \in (-\pi, \pi)$

a) $2\sin 3x = \sqrt{2}$
b) $|\sin x| = 1$

Zad. 4
Czy równanie $2|\sin x| + 2 = 0$ ma rozwiązania?

Zad. 5
Rozwiąż równania w przedziale $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

a) $\cos|x| = 1$
b) $|\sin 2x + 1| = 0$

Zad. 6
Czy równanie $|tg(\frac{x}{6})| = \sqrt{3}$ ma rozwiązania?

Zad. 7
Rozwiąż równanie: $\cos|x - \pi| = 0$

Temat 20: Nierówności trygonometryczne

Cel lekcji: zastosowanie poznanych wzorów oraz wykresów funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Stosować poznane wzory do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych
- Zaznaczać na wykresie zbiory rozwiązań nierówności trygonometrycznych oraz zapisywać rozwiązania tych nierówności jako sumę przedziałów
- Rozwiązywać nierówności trygonometryczne w określonym przedziale
- Wyjaśniać, dlaczego niektóre nierówności trygonometryczne mogą nie mieć rozwiązań
- Rozwiązywać nierówności z wartością bezwzględną

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć

2. Przypomnienie wiadomości z poprzednich zajęć
3. Rozwiązanie przykładowej nierówności $2sinx > 1$ oraz zaznaczenie zbioru jej rozwiązań na wykresie
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Podaj rozwiązania nierówności $\sin x < \frac{1}{2}, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Zad. 2

Rozwiąż nierówność: $2\sin x \geq -1, x \in (-\pi, 2\pi)$

Zad. 3

Rozwiąż nierówność w przedziale $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

a) $tgx < -1$

b) $\cos x \leq 0$

c) $ctgx \geq \sqrt{3}$

Zad. 4

Czy nierówność $2\sin x > 2$ ma rozwiązania?

Zad. 5

Podaj zbiór rozwiązań nierówności w przedziale:

$\sqrt{2}\cos x > 1, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 6

Podaj zbiór rozwiązań nierówności w przedziale:

$\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}, x \in (0, 2\pi)$

Zad. 7

Rozwiąż nierówności w przedziale $x \in (-\pi, \pi)$

a) $ctg2x \geq 1$

b) $tg(x+\pi) > -1$

c) $\cos x \leq 1$

Temat 21: Nierówności trygonometryczne

Zad. 1

Rozwiąż nierówności w przedziale $x \in (-\pi, \pi)$

a) $tg2x \leq 0$

b) $\sin 2x + \sin x \geq 0$

c) $\sin^2 x \leq 0$

Zad. 2

Rozwiąż nierówność: $2\sin^2 x + \sin x < 0, x \in (0, 2\pi)$

Zad. 3
Rozwiąż nierówność: $\sin 2x < tgx, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Zad. 4
Czy nierówność $2\sin^2 x - 2\sin x + 6 < 0$ ma rozwiązania?

Zad. 5
Rozwiąż nierówności w przedziale $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
a) $3(\cos x - 1) \leq 0$
b) $\sin^2 x > 0$
c) $\sin^2 x \geq \cos^2 x$

Zad. 6
Podaj rozwiązania nierówności $\cos^2 x - \sin^2 x \geq -\frac{1}{2}, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Zad. 7
Rozwiąż nierówność: $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) < \frac{1}{2}, x \in (-\pi, \pi)$

Temat 22: Nierówności trygonometryczne

Zad. 1
Rozwiąż nierówność: $|\sin x| < \frac{1}{2}, x \in (-\pi, \pi)$

Zad. 2
Czy nierówność $\cos|x - \pi| - 2 < 0$ ma rozwiązania?

Zad. 3
Rozwiąż nierówność w przedziale $x \in (-\pi, \pi)$
a) $\sin(2x - 3) > 1$
b) $2\sin^2(2x) + 4\cos^2(2x) < 5\cos 2x$
c) $\cos 5x > \frac{1}{2}$

Zad. 4
Rozwiąż nierówność $\frac{|\sin x|}{\sin x} > 0, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Zad. 5
Rozwiąż nierówność $\cos|2x| \leq \sqrt{3}, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Zad. 6
Rozwiąż nierówność $3|tgx| < \sqrt{3}, x \in (0, 2\pi)$

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1

Rozwiąż nierówność: $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x \le \frac{1}{2}, x \in (0,2\pi)$

Zad. 2

Rozwiąż równanie: $2\cos x = -\sqrt{3}$

Zad. 3

Naszkicuj wykres funkcji

a) $y = \cos 3x - 5$

b) $y = -\sin(\pi - x)$

c) $y = |tgx|$

d) $y = 2ctgx - 4$

Zad. 4

Zapisz w prostszej postaci: $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Zad. 5

Zamień miarę kąta podaną stopniach na radiany: $105°$

Zad. 6

Zamień miarę kąta podaną w radianach na stopnie: $\frac{9\pi}{2}$

Zad. 7

Czy prawdą jest, że równanie $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$ nie ma rozwiązania?

Sprawdzian

Zad. 1

Zamień miarę kąta podaną w stopniach na radiany: $225°$

Zad. 2

Zamień miarę kąta podaną w radianach na stopnie: $\frac{8\pi}{3}$

Zad. 3

Rozwiąż równanie: $\sqrt{2}\sin x = 1$

Zad. 4

Rozwiąż nierówność: $\sin^2 x - \sin x > 0, x \in (0,2\pi)$

Zad. 5

Zapisz w prostszej postaci: $\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}$

Zad. 6
Naszkicuj wykres funkcji:

a) $2\sin(x+\frac{\pi}{2})$

b) $\cos(\pi - x)+2$

c) $-\frac{1}{2}tgx$

d) $ctg(x-\pi)-4$

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1
Odp. $\frac{5\pi}{4}$

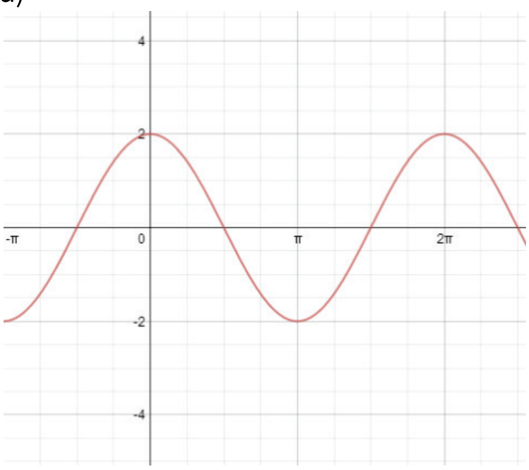
Zad. 2
Odp. $480°$

Zad. 3
Odp. $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in C$

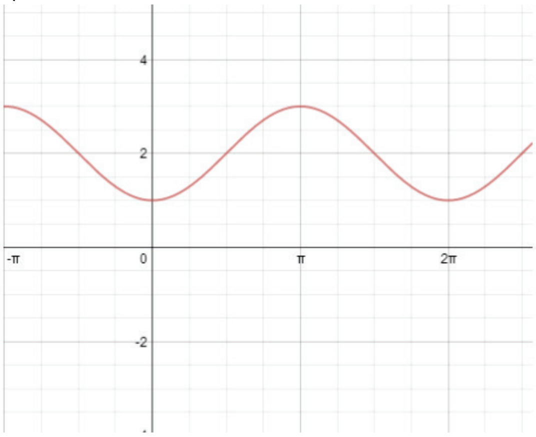
Zad. 4
Odp. $(\pi, 2\pi)$

Zad. 5
Odp. $\frac{2}{\sin^2 x}$

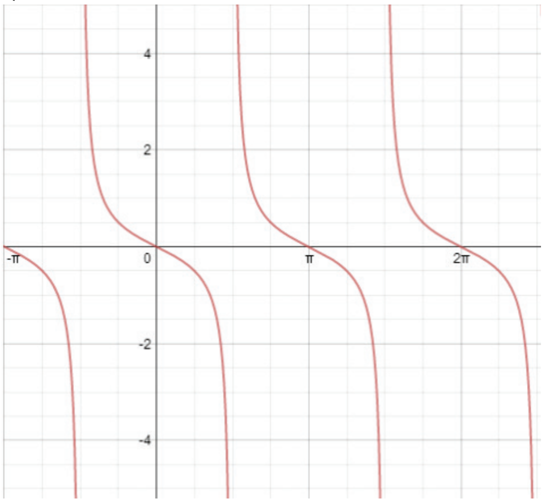
Zad. 6
a)



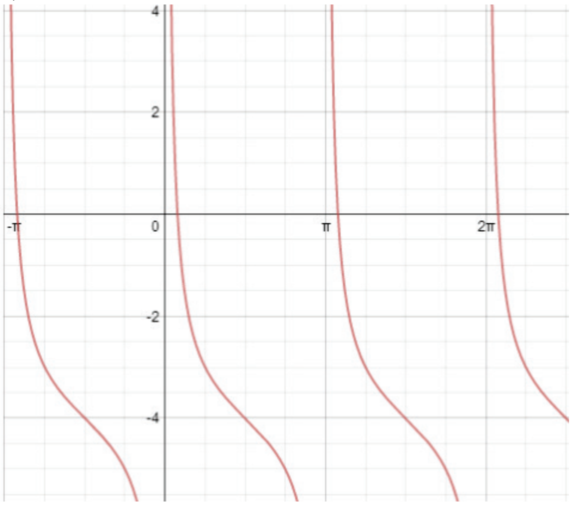
b)



c)



d)



3. Ciągi

Temat 1: Ciąg liczbowy

Cel lekcji: poznanie definicji ciągu liczbowego oraz jego własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję ciągu liczbowego oraz umieć rozpoznawać ciągi skończone oraz nieskończone
- Obliczać dowolne wyrazy ciągu w oparciu o wzór ogólny ciągu
- Szkicować wykres ciągu
- Zapisywać wzór ogólny ciągu na podstawie kilku początkowych wyrazów
- Sprawdzać, czy dana liczba należy do wyrazów tego ciągu
- Wyznaczać wyrazy ciągu, które spełniają określone warunki: są ujemne, dodatnie, równe zero, należą do określonego przedziału
- Wyznaczać kolejne wyrazy ciągu określone wzorem rekurencyjnym
- Podawać wzór rekurencyjny ciągu danego wzorem ogólnym i podawać wzór ogólny ciągu danego wzorem rekurencyjnym

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia ciągu liczbowego i ciągu rekurencyjnego
3. Wprowadzenie oznaczeń dotyczących ciągów
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu $a_n = 2n - 3$

Zad. 2
Dopasuj wzór ciągu do jego trzech pierwszych wyrazów:

1. $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n}$
2. $a_n = \dfrac{n^2 - 2n + 1}{n}$
3. $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2n + 3}{n}$
4. $a_n = \dfrac{n^2}{n + 1}$

Zad. 3
Które wyrazy ciągu $a_n = n^3 - 6n^2 - n + 6$ są równe 0?

Zad. 4
Czy ciąg $a_n = n^2 - 2n + 3$ ma wyrazy równe 3?

Zad. 5

Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{2n-1}{3}$ są równe: $\frac{1}{3}, 3, \frac{19}{3}$?

Zad. 6

Sprawdź, które wyrazy ciągu $a_n = \frac{-n+3}{2n+8}$ są równe 5.

Zad. 7

Dopasuj wzór ogólny ciągu z kilkoma jego początkowymi wyrazami:

1. $3, 6, 9, 12, \ldots$
2. $-2, 0, 2, 4, \ldots$
3. $-5, 0, 5, 10, \ldots$
4. $-20, -16, -12, \ldots$

Zad. 8

Które wyrazy ciągu $a_n = 2n-8$ należą do przedziału $\langle 625, 631 \rangle$

Temat 2: Ciąg liczbowy

Zad. 1

Ile wyrazów dodatnich ma ciąg $a_n = -n^2 - 3n + 8$?

Zad. 2

Czy prawdą jest, że podany ciąg $a_n = n^3 - 8n^2 + 12n$ ma tylko trzy wyrazy ujemne?

Zad. 3

Dopasuj wzór ciągu w postaci ogólnej do ciągu danego w postaci rekurencyjnej

1. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = a_n - 1 \end{cases}$

A. $a_n = 4n - 1$

B. $a_n = -n - 1$

Zad. 4

Ciąg jest dany wzorem rekurencyjnym. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu:

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = 2a_n - 3n$

Zad. 5

Dany jest ciąg $a_n = \frac{n+2}{n-3}$. Ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych od 1?

Zad. 6

Ile wyrazów ciągu $a_n = \frac{n}{n^2 - 1}$ jest większych od 5?

Zad. 7

Ile wyrazów większych od 3 ma ciąg $a_n = \frac{2n-8}{n+1}$?

Temat 3: Ciągi monotoniczne

Cel lekcji: badanie monotoniczności ciągów liczbowych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wybierać ciągi rosnące, malejące i stałe spośród podanych ciągów liczbowych, a także określać ich monotoniczność na podstawie wykresów ciągów
- Badać monotoniczność ciągu liczbowego za pomocą określania znaku różnicy $a_{n+1} - a_n$

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Podanie definicji ciągu rosnącego, malejącego i stałego
3. Przykłady ciągów monotonicznych
4. Badanie monotoniczności wybranych ciągów na podstawie określenia znaków różnicy:

$a_{n+1} - a_n > 0$ - ciąg rosnący
$a_{n+1} - a_n < 0$ - ciąg malejący
$a_{n+1} - a_n = 0$ - ciąg stały
oraz ilorazu:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ - ciąg rosnący
$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ - ciąg malejący
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ - ciąg stały

5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Określ monotoniczność ciągu $a_n = 2^{n+3}$.

Zad. 2

Określ monotoniczność ciągu $a_n = n + \frac{1}{2}$ (rosnący, malejący).

Zad. 3
Określ monotoniczność ciągu:

1. $a_n = \frac{3n}{n+1}$

2. $a_n = 10 - n$

3. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3-n}{n^2}$

Zad. 4

Który z podanych ciągów jest rosnący?

1. $a_n = 2n - 3$
2. $a_n = \frac{2}{n-1}$
3. $a_n = 6^{n-2}$
4. $a_n = -\frac{1}{n}$
5. $a_n = -2n + 2$

Zad. 5

Wiedząc, że ciąg (an) jest rosnący, jaki jest ciąg (bn)?

$b_n = -2a_n$

Zad. 6

Określ monotoniczność ciągu $a_n = \frac{n^2}{2-n^2}$.

Temat 4: Ciągi monotoniczne

Zad. 1

Określ monotoniczność ciągu:

1. $a_n = \frac{n^3 - 2n^2 + n - 2}{n+1}$
2. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot 3$
3. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-n+1}$

Zad. 2

Wiedząc, że ciąg (an) jest rosnący, jaki jest ciąg (bn)?

$b_n = 2^{a_n}$

Zad. 3

Określ monotoniczność ciągu $a_n = \frac{2^{n^2+1}}{3^{n-2}}$

Zad. 4

Określ monotoniczność ciągu $a_n = 5^{-n+4}$

Zad. 5

Czy prawdą jest, że dla n≥5 ciąg $a_n = n^3 - 3n^2 - 10n + 24$ jest rosnący?

Zad. 6
Określ monotoniczność ciągu $a_n = (-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}$

Zad. 7
Określ monotoniczność podanych ciągów:

1. $a_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}$
2. $a_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n$

Temat 5: Ciąg arytmetyczny

Cel lekcji: zapoznanie uczniów ze szczególnym rodzajem ciągów liczbowych – ciągiem arytmetycznym i jego własnościami

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozpoznawać ciąg arytmetyczny na podstawie jego wzoru, wykresu lub opisu
- Znać wzór na $n - ty$ wyraz ciągu arytmetycznego oraz szkicować jego wykres
- Obliczać kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego oraz wyznaczać wyraz pierwszy i różnicę na podstawie dwóch dowolnych wyrazów ciągu
- Sprawdzać z definicji, czy podany ciąg jest arytmetyczny
- Wyznaczać wartość parametru, dla którego trzy liczby są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego
- Określać monotoniczność ciągu

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcie ciągu arytmetycznego oraz podanie wzoru ogólnego ciągu:
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
3. Omówienie własności ciągu arytmetycznego oraz wprowadzenie wzoru:
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wśród podanych ciągów wskaż ciągi arytmetyczne:
$a_n = 2n+3$, $a_n = 8$, $a_n = 7^{n+2}$, $a_n = -n^2 - 2n + 2$, $a_n = 3n - 3n^4$, $a_n = 3n - 3n^4$, $a_n = -4n+1$,
$a_n = -4n+1$

Zad. 2
Dany jest ciąg: 11, 18, 25, 32,...
Oblicz dziesiąty wyraz ciągu.

Zad. 3

Oblicz czternasty wyraz ciągu arytmetycznego: $-2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, ...$

Zad. 4
Wiedząc, że wyraz czwarty ciągu arytmetycznego wynosi (-3), a wyraz dziewiąty (-13) uzupełnij zdania:
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi …, a różnica jest równa …. Jest to ciąg …(rosnący, malejący, stały)

Zad. 5
Określ monotoniczność podanych ciągów arytmetycznych:
1. $a_n = 2n + 1$
2. $a_n = -n + 20$
3. $a_n = 3$

Zad. 6
Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli:
$a_7 = -2$
$a_{10} = -5$

Zad. 7
Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego, jeśli:
$a_2 + a_6 = 22$
$a_8 = 23$

Temat 6: Ciąg arytmetyczny

Zad. 1
Dane są:
$a_2 - a_3 = -8$
$a_4 + a_6 = 40$
Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego.

Zad. 2
Oblicz dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego oraz podaj wzór ogólny, jeśli
$a_1 + a_4 = 15$
$a_6 + a_{10} = 4$

Zad. 3
Liczby tworzą w podanej kolejności trzy pierwsze wyrazy ciągu arytmetycznego, dopasuj do nich wartość zmiennej x:
1. $x^2 - 4,\quad 3x + 5,\quad -x - 4$
2. $-4x + 1,\quad x^2 + x + 9,\quad -5x + 5$
3. $2x + 3,\quad 3x,\quad 8x - 7$

A. $x=-2$
B. $x=-4$
C. $x=1$

Zad. 4
Znajdź takie x i y, aby podany ciąg $y,\quad 2x+4y,\quad 5,\quad 2x+2$ był arytmetyczny

Zad. 5
Dane są liczby a, b, c, które w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby, jeśli:
$a+b+c=12$
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{12}$

Zad. 6
Niech dany będzie ciąg arytmetyczny składający się z ośmiu wyrazów. Suma środkowych wyrazów wynosi 8, a iloczyn wyrazów skrajnych wynosi (-33). Wyznacz ten ciąg.

Zad. 7
Dane jest równanie $x^2+(8m-8)x+m^2-2m+1=0$. Oblicz wartość parametru m, dla którego dane równanie ma dwa pierwiastki x i y, takie, że ciąg (x, xy, y) jest arytmetyczny.

Temat 7: Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Cel lekcji: zastosowanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego do rozwiązywania zadań praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Wyznaczać wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego na podstawie danej sumy n początkowych wyrazów i danego dowolnego wyrazu ciągu
- Rozwiązywać równania, w których jedną stroną jest suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu:
$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$$
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego:
1. $a_n=2n+3$
$n=20$

2. $a_n = -\frac{1}{2}n + 2$

$n = 100$

3. $a_n = 1 - n$

$n = 40$

Zad. 2

Oblicz sumę trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jeśli wyraz pierwszy wynosi 3, a różnica jest równa 5.

Zad. 3

Uporządkuj w kolejności rosnącej wartości sum:

$2 + 4 + 6 + ... + 38$

$-30 - 10 + 10 + ... + 210$

$13 + 20 + 27 + ... + 146$

$-15 - 10 - 5 + 0 + 5 + ... + 200$

Zad. 4

Czy prawdą jest, że suma wszystkich liczb naturalnych od 1 do 95 wynosi 2025?

Zad. 5

Znajdź sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych na 6.

Zad. 6

Ile wynosi suma wszystkich ujemnych wyrazów ciągu arytmetycznego: $a_n = 3n - 20$

Zad. 7

Wyznacz wyraz pierwszy i różnicę ciągu arytmetycznego, w którym

$a_5 = 11$

$S_{10} = 120$

Temat 8: Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Zad. 1

Znajdź sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego jeśli $a_2 + a_{19} = 30$

Zad. 2

Czy podane zdanie jest prawdziwe?

Suma dziesięciu parzystych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = 5n - 3$ wynosi 245

Zad. 3

Ile początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $a_n = 2n - 3$ należy dodać, aby ich suma była większa niż 325?

Zad. 4
Dopasuj równanie do jego rozwiązania:
1. $7+9+11+...+(2n+5)=952$
2. $1+6+11+...+(5n-4)=540$
3. $8+11+14+...+(3n+5)=488$

A. n = 28
B. n = 15
C. n = 16

Zad. 5
Czy ciąg dany wzorem $a_n = \frac{5+10+15+...+(2n-1)}{n^2}$ jest monotoniczny?

Zad. 6
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 4, suma n początkowych wyrazów ciągu wynosi 598, a suma n+3 początkowych wyrazów jest równa 754. Wyznacz n.

Zad. 7
Różnica ciągu arytmetycznego wynosi 2, suma n+1 początkowych wyrazów ciągu to 143, a suma 2n wyrazów jest równa 440. Oblicz n.

Temat 9: Ciąg geometryczny

Cel lekcji: omówienie szczególnego przypadku ciągu liczbowego – ciągu geometrycznego i omówienie jego własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wybierać spośród podanych ciągów ciąg geometryczny
- Znać wzór ogólny ciągu geometrycznego
- Wyznaczać wyraz pierwszy i iloraz ciągu na podstawie danych dwóch dowolnych wyrazów ciągu
- Wyznacza dowolny wyraz ciągu geometrycznego na podstawie wzoru ogólnego
- Określać monotoniczność ciągu geometrycznego oraz udowadniać, że podany ciąg jest geometryczny
- Wykorzystywać średnią geometryczną do obliczania wyrazu środkowego ciągu geometrycznego
- Wyznaczać parametr, dla którego trzy liczby tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć

2. Zdefiniowanie pojęcia ciągu geometrycznego oraz podanie wzoru na $n-ty$ wyraz ciągu geometrycznego:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

3. Określanie monotoniczności ciągu geometrycznego za pomocą ilorazu:
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ - ciąg rosnący
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ - ciąg malejący
   $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ - ciąg stały
4. Wprowadzenie wzoru:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Który z podanych ciągów jest ciągiem geometrycznym?

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = 2n+1+n^2$, $a_n = 3^{2n-3}$, $a_n = (-2)^n$, $a_n = 3^{2n-3}$, $a_n = (-2)^n$, $a_n = 3^{n^2-1}$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Zad. 2
Określ monotoniczność ciągu geometrycznego:
1. $a_n = 2^{n+3}$
2. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$
3. $a_n = (-1)^n$
4. $a_n = (-1)^{2n}$

Zad. 3
Ile wynosi czwarty wyraz ciągu geometrycznego danego wzorem: $a_n = 2^{n-1}$

Zad. 4
Oblicz trzeci wyraz ciągu geometrycznego:
1. $a_1 = 12$, $q = 3$
2. $a_2 = 8$, $a_4 = 128$
3. $a_1 = 16$, $a_2 = 64$

Zad. 5
Wskaż wzór ogólny ciągu geometrycznego, w którym wyraz pierwszy wynosi 2, a iloraz jest równy (-3)

Zad. 6
Oblicz iloraz ciągu geometrycznego, jeśli wyraz drugi wynosi 12, a wyraz piąty jest równy (-96)

Zad. 7
Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego: 5, 25, 125,...

Temat 10: Ciąg geometryczny

Zad. 1
Dla jakiej wartości parametru m ciąg: $m-7, m+3, 4m-3$ jest geometryczny?

Zad. 2
Wskaż wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli dane są:

1. $\begin{array}{l} a_2 = 12 \\ a_1 + a_3 = 30 \end{array}$
2. $\begin{array}{l} a_2 = 2\sqrt{3} \\ a_3 = 8\sqrt{3} \end{array}$

Zad. 3
Wyznacz wartość zmiennej x, dla której ciąg $-2x+3, \ -3, \ x-7$ jest geometryczny. Wiadomo, że x jest liczbą całkowitą.

Zad. 4
Znajdź trzy liczby, które tworzą ciąg geometryczny, jeśli suma dwóch pierwszych wynosi 15, a suma dwóch ostatnich jest równa 20.

Zad. 5
Trzy liczby tworzą w kolejności rosnący ciąg geometryczny. Iloczyn pierwszej i trzeciej wynosi 256, natomiast iloraz ostatniej i drugiej jest równy 4. Jakie to liczby?

Zad. 6
Między liczby (-27) i (-1) wstaw dwie liczby a i b tak, aby ciąg -27, a, b, -1 był geometryczny.

Temat 11: Ciąg geometryczny

Zad. 1
Ciąg $8-8m, 2m+2, m-7$ jest geometryczny. Znajdź wartość parametru m.

Zad. 2
Suma pierwszego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego jest równa 40, a suma czwartego i drugiego wyrazu tego ciągu wynosi 80. Znajdź wyraz szósty ciągu, oraz podaj jego wzór ogólny.

Zad. 3
Populacja miasta zwiększa się rocznie o 3%. Ile będzie wynosiła populacja tego miasta po dziesięciu latach jeśli obecnie jest ona równa 20000.

Zad. 4
Podaj wzór ogólny ciągu geometrycznego, w którym wyraz trzeci wynosi 6, a wyraz siódmy jest równy 486

Zad. 5
Dla jakiej wartości x trzy liczby $6x,\ \ 3x^3,\ \ x^4+6x^2+8$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

Zad. 6
Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny - oblicz wartość parametru m:
1. $-m^3,\ \ 2m-m^2+4,\ \ -2$
2. $\frac{m+3}{2m},\ \ m^2-3,\ \ m^2+6m+9$
3. $-m,\ \ m^2+4,\ \ 5m^2-10m+10$

Temat 12: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Cel lekcji: poznanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oraz wykorzystanie go do rozwiązywania zadań praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- Wyznaczać sumę n początkowych wyrazów ciągu, jeśli podany jest wyraz pierwszy i iloraz ciągu lub znane są dwa dowolne wyrazy ciągu geometrycznego (oraz dana jest liczba wyrazów ciągu)
- Stosować wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu do rozwiązywania zadań tekstowych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, gdy $q \neq 1$
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym:
1. $a_1 = 2$, $q = 3$
2. $a_1 = 5$, $q = 1$

3. $a_1 = 1$
$q = -2$

Zad. 2

Czy prawdą jest że suma ośmiu wyrazów podanego obok ciągu geometrycznego jest równa 83?

$a_2 = 4$

$q = -2$

Zad. 3

Znajdź sumę: $3 - 9 + 27 - ... + 2187$

Zad. 4

Ile wynosi suma ciągu geometrycznego: $10 + 10^2 + ... + 10^8$

Zad. 5

Wiedząc, że czwarty wyraz ciągu geometrycznego wynosi (-1) oraz szósty wyraz jest równy (-9) oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu. Iloraz jest większy od 0.

Zad. 6

Dany jest ciąg geometryczny, którego iloraz jest równy 2, a suma dziewięciu wyrazów jest równa 3577. Znajdź pierwszy wyraz i podaj wzór ogólny ciągu.

Zad. 7

Oblicz iloraz ciągu, jeśli dane są:

$a_1 = 5$

$S_7 = 635$

Temat 13: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Zad. 1

Suma trzech liczb tworzących malejący ciąg geometryczny wynosi 70, a iloczyn pierwszej i ostatniej liczby jest równy 400. Znajdź ten ciąg.

Zad. 2

Skończony ciąg geometryczny ma parzystą liczbę wyrazów. Suma wszystkich wyrazów ciągu jest pięć razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych. Znajdź iloraz ciągu.

Zad. 3

Dany jest ciąg geometryczny (zapisany w ramce obok), w którym wyraz pierwszy jest równy 1, a iloraz wynosi 2. Oblicz podaną sumę:

$S_n = a_1 + 2a_2 + ... + na_n$

$n = 10$

Zad. 4
Dane są:

$$S_5 = \frac{31}{16}$$

$$a_1 \cdot a_5 = \frac{1}{16}$$

Znajdź iloraz ciągu.

Zad. 5
Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, jeśli:

$$q = \frac{2}{3}$$

$$n = 7$$

$$a_n = 64$$

Zad. 6
Cztery liczby tworzą ciąg geometryczny. Trzecia jest o 12 większa od pierwszej, a druga o 24 mniejsza od czwartej. Wskaż prawidłową odpowiedź:
1. wyraz pierwszy jest równy (-4)
2. iloraz ciągu jest równy 4
3. iloraz ciągu jest równy 2
4. wyraz pierwszy jest równy (-2)
5. suma trzech pierwszych wyrazów ciągu jest równa (-32)
6. suma trzech pierwszych wyrazów ciągu jest równa (-28)

Temat 14: Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zastosowaniach praktycznych

Cel lekcji: zastosowanie wiadomości o ciągu arytmetycznym i geometrycznym do rozwiązywania zadań praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozwiązywać zadania dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego prowadzące do rozwiązywania równań bądź układów równań liniowych, kwadratowych bądź wielomianowych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o ciągu arytmetycznym i geoemtrycznym
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Czy prawdą jest, że jeśli ciąg (a_n) jest geometryczny, to ciąg (b_n) jest arytmetyczny?

$$b_n = \log a_n$$

Zad. 2
Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Ich iloczyn jest równy 64. Te same liczby są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Jakie to liczby?

Zad. 3
Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} x+2y+z=2m \\ -x+4y+z=8 \\ 2x-y-z=m-8 \end{cases}$$

Dla jakich wartości parametru m liczby x, y, z tworzą ciąg arytmetyczny, a dla jakich ciąg geometryczny?

Zad. 4
Dane są:
ciąg arytmetyczny: 100, 110, ...
ciąg geometryczny: 1, 2, 4,...
Czy prawdą jest, że wyrazy ciągu geometrycznego będą większe od wyrazów ciągu arytmetycznego od dziewiątego wyrazu włącznie?

Zad. 5
Dane są liczby: a, b, c, d. Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny, a liczby b, c, d - ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby, jeśli
$a + d = 14$
$b + c = 12$

Zad. 6
Magda i Tomek oszczędzają pieniądze, wrzucając co tydzień do swoich skarbonek pewną kwotę. W pierwszym tygodniu Magda wrzuciła do skarbonki 1 zł, w drugim 2 zł, w trzecim 4 zł itd. Tomek w pierwszym tygodniu odłożył 10 zł, w drugim 15 zł, w trzecim 20 zł, itd. Po ilu tygodniach Magda będzie miała więcej pieniędzy niż Tomek?

Temat 15: Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zastosowaniach praktycznych

Zad. 1
Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, ich suma wynosi 24, natomiast liczby a-1, b-4, c+2 tworzą ciąg geometryczny. Jakie to liczby?

Zad. 2
Trzy liczby, których suma wynosi 39 tworzą ciąg geometryczny. Są one jednocześnie czwartym, szóstym i dwunastym wyrazem ciągu arytmetycznego, Znajdź te liczby.

Zad. 3
Czy trzy liczby mogą jednocześnie tworzyć ciąg arytmetyczny i geometryczny?

Zad. 4
Trzy liczby a, b, c tworzą ciąg geometryczny, są one jednocześnie pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Wiedząc, że $c = 4a$ wyznacz te liczby.

Zad. 5
Czwarty, siódmy i szesnasty wyraz ciągu arytmetycznego są jednocześnie pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 12. Znajdź wyraz ogólny ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.

Temat 16: Ciąg arytmetyczny i geometryczny w zastosowaniach praktycznych

Zad. 1
Znajdź cztery liczby tworzące ciąg geometryczny wiedząc, że iloczyn wyrazu pierwszego i trzeciego wynosi 400, a suma wyrazu drugiego i czwartego jest równa 145.

Zad. 2
Dla jakich wartości x i y liczby $x+y,\quad 3x+5y,\quad y+4$ są jednocześnie wyrazami ciągu arytmetycznego i geometrycznego?

Zad. 3
Liczby $2x-8,\quad x^2-3x-2,\quad \frac{1}{4}x^3-x^2+4$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz x.

Zad. 4
Dane są dwie liczby a i b. Ciąg a, x, b jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg a, y, b jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz x i y, jeśli:
$$2\log_3(a-2)=\log_3 9$$
$$b=(\sin 150^\circ-2\cos 120^\circ)\left[(5\sqrt{2})^2-20\right]$$

Zad. 5
Dane są cztery liczby a, b, c, d tworzące ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby, jeśli:
$$\frac{d}{a}=125$$
$$b+c=150$$

Temat 17: Obliczenia procentowe a ciąg geometryczny

Cel lekcji: poznanie podstawowych pojęć związanych z oprocentowaniem kredytów i lokat bankowych oraz nabycie umiejętności wyboru optymalnego rozwiązania

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzory na procent prosty oraz procent składany
- Stosować procent prosty i składany do rozwiązywania zadań

- Obliczać, jaki kapitał zostanie zgromadzony po n latach przy danym oprocentowaniu, kapitale początkowym oraz przy dowolnym okresie kapitalizacji
- Wyznaczać roczną stopę procentową przy danym kapitale początkowym, końcowym oraz liczbie okresów kapitalizacji
- Wyznaczać liczbę lat, po których danych kapitał początkowy wzrośnie do określonej kwoty, jeśli znamy liczbę okresów kapitalizacji i oprocentowanie lokaty
- Stosować program Excel do rozwiązywania zadań związanych z procentem prostym i składanym

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia procentu prostego i złożonego
3. Wprowadzenie wzorów na procent prosty i składany:

Procent prosty: $K_n = K_0(1 + np)$

Procent składany: $K_n = K_0(1 + \frac{p}{n})^{nm}$,

Gdzie:

n – liczba lat

K_n – kapitał po n latach

K_0 – kapitał początkowy

p – oprocentowanie w stosunku rocznym

m – liczba okresów kapitalizacji w roku

4. Wykorzystanie programu Excel do rozwiązywania zadań
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Pan Marek wpłacił do banku 1000 zł. Oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 6%. Kapitalizacja odsetek co rok. Po ilu latach Pan Marek podwoi kapitał początkowy?

Zad. 2

Pani Maria chce założyć lokatę, wpłacając do banku 1000 zł na jeden rok. Ma do wyboru oferty trzech banków.

Bank A proponuje - oprocentowanie 6% w stosunku rocznym, kapitalizacja odsetek po roku

Bank B - oprocentowanie 5,5% w stosunku rocznym, kapitalizacja odsetek następuje co pół roku

Bank C - oprocentowanie 5% w stosunku rocznym, kapitalizacja odsetek co kwartał.

Uszereguj oferty banków zaczynając od najkorzystniejszej.

Zad. 3

Po ilu latach będziesz mieć 1123,60 zł, jeśli wpłaciłeś do banku 1000 zł przy oprocentowaniu równym 6% w stosunku rocznym, a odsetki są dopisywane po upływie roku?

Zad. 4

Który bank ma atrakcyjniejszą ofertę, jeśli chcemy ulokować 10 000 zł?

Bank A - oprocentowanie 5% w stosunku rocznym przy kapitalizacji odsetek co pół roku

Bank B - oprocentowanie 4,5% w stosunku rocznym przy kapitalizacji odsetek co kwartał.

Zad. 5
Pani Magda postanowiła przez najbliższe pięć lat co miesiąc wpłacać do banku 100 zł. Oprocentowanie wynosi 5%, a kapitalizacja następuje na koniec każdego miesiąca. Jaką kwotę zgromadzi Pani Magda po pięciu latach?

Temat 18: Obliczenia procentowe a ciąg geometryczny

Zad. 1
Maciek postanowił założyć lokatę wpłacając do banku 1000 zł, przy oprocentowaniu w stosunku rocznym 8% i kapitalizacji odsetek co pół roku. Przez ile lat powinien oszczędzać, aby zgromadzić co najmniej 4000 zł?

Zad. 2
Pan Mateusz wpłacił do banku pewną kwotę na 8 lat, przy oprocentowaniu w stosunku rocznym wynoszącym 4% i kapitalizacji rocznej. Po ośmiu latach miał na koncie już 4105,71 zł? (zastosowano zaokrąglenie do dwóch miejsc po przecinku)

Zad. 3
Jaka będzie wartość lokaty na koniec okresu oszczędzania, jeśli ulokowaliśmy 1000 zł na okres 5 lat z roczną kapitalizacją odsetek? W tym okresie następowały zmiany rocznej stopy procentowej, wynosiły one odpowiednio: 6%, 5%, 4%, 3%, 2%.

Zad. 4
Ile wynosi roczna stopa procentowa, jeśli ulokowaliśmy 2000 zł na okres pięciu lat, przy kapitalizacji odsetek co pół roku? Po pięciu latach na koncie znajdowała się kwota 2687,83 zł.

Temat 19: Granica ciągu

Cel lekcji: zapoznanie z pojęciem granicy ciągu liczbowego oraz jego interpretacją

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać pojęcie otoczenia punktu o danym promieniu
- Rozumieć pojęcie granicy ciągu liczbowego
- Wyznaczać te wyrazy ciągu, które znajdują się w otoczeniu granicy o danym promieniu
- Wśród podanych ciągów rozpoznawać ciągi zbieżne do zera
- Udowadniać zbieżność danego ciągu do zera

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia otoczenia punktu o danym promieniu oraz granicy ciągu liczbowego:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{n \geq n_0} |a_n - g| < \varepsilon$$

3. Podanie przykładów ciągów zbieżnych do 0:

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{5}{n}, \frac{6}{\sqrt{n}}$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Czy podany ciąg jest zbieżny do 0?

$a_n = \frac{2n-3}{n^2}$

Zad. 2

Które wyrazy ciągu spełniają nierówność $|a_n| < \varepsilon$, jeśli:

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\varepsilon = 0{,}01$

Zad. 3

Oblicz granicę ciągu: $a_n = \frac{n-3}{n}$

Zad. 4

Czy podany ciąg jest zbieżny do 0?

$a_n = \frac{n+2}{n-1}$

Zad. 5

Który z podanych ciągów jest zbieżny do 0?

$a_n = -\frac{1}{n^2}$, $a_n = 2n+1$, $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{-n-1}{n+2}$, $a_n = \frac{n}{2n^2-1}$

Zad. 6

Które wyrazy ciągu $a_n = -\frac{1}{n}$ spełniają nierówność: $|a_n| < \varepsilon$, $\varepsilon = 0{,}001$

Temat 20: Granica ciągu

Zad. 1

Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{n+1}{n^2-1}$ spełniają nierówność: $|a_n| < \varepsilon$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Zad. 2

Oblicz granicę ciągu: $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}$.

Zad. 3

Czy prawdą jest, że ciąg $a_n = \dfrac{6n-2}{1-2n}$ jest malejący, a jego granicą jest liczba (-3)?

Zad. 4

Które wyrazy ciągu $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ spełniają nierówność: $|a_n| < \varepsilon$, $\varepsilon = 0{,}01$

Zad. 5

Czy prawdą jest, że dany ciąg jest rosnący, a jego granicą jest liczba 0?

$$a_n = \frac{n^2-2}{3n-1}$$

Zad. 6

Który z podanych ciągów nie jest zbieżny do 0?

1. $a_n = \dfrac{1-n}{1+n}$
2. $a_n = \dfrac{n-2}{3n^2-2n+2}$
3. $a_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
4. $a_n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$
5. $a_n = \dfrac{3}{n}$
6. $a_n = 2n+3$

Temat 21: Obliczanie granic ciągów. Granice niewłaściwe

Cel lekcji: zastosowanie twierdzeń o działaniach na granicach ciągów do praktycznego obliczania granic ciągów liczbowych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać i stosować twierdzenia o obliczaniu granic ciągów liczbowych
- Rozpoznawać ciągi, które nie mają granicy
- Wyznaczać granice niewłaściwe ciągów

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia granicy niewłaściwej ciągu
3. Zapoznanie z podstawowymi własnościami granic i sposobami ich obliczania
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz granice podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{2}{n^2}$

b) $a_n = \frac{2-n}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{n^3}{n^3 - 2n^2 + 2n - 1}$

d) $a_n = \frac{6n-1}{2n+3}$

Zad. 2
Ile wynosi granica ciągu: $a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{(1-n)(n+3)}$?

Zad. 3
Czy prawdą jest, że liczba $g = 0$ jest granicą ciągu $a_n = \frac{1-2(n+3)}{3n^2 - 6n + 2}$?

Zad. 4
Uporządkuj podane ciągi ze względu na ich granicę, zaczynając od tego, którego granica jest najmniejsza liczbą:

$a_n = \frac{-12n^2 - 2n + 1}{2n^2 - 6n + 1}$

$a_n = \frac{3n-2}{-6n+1}$

$a_n = \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{(n+8)(n-16)(n-2)}$

Zad. 5
Oblicz granice podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{1}{-2n^2 - 8n + 6}$

b) $a_n = \frac{n + n^2}{n-3}$

c) $a_n = \frac{-2n^3 - 2n + 1}{3n^2 + 8n - 1}$

d) $a_n = \frac{5n^2 - 2n - 1}{2n^2 + 9n + 3}$

Zad. 6

Czy ciąg $a_n = \frac{(2n-1)^3(1+n)}{(n+8)(2n-2)^2}$ dąży do nieskończoności?

Temat 22: Obliczanie granic ciągów. Granice niewłaściwe

Zad. 1

Ile wynosi granica ciągu $a_n = \frac{1-n}{2n+3} - \frac{3n-1}{2n+3}$?

Zad. 2

Oblicz granicę ciągu $c_n = a_n + b_n$, jeśli $a_n = \frac{2n}{n+1}$, $b_n = \frac{n-1}{n+6}$.

Zad. 3

Czy ciąg $a_n = \frac{2(-1)^n}{2+n}$ ma granicę?

Zad. 4

Który z podanych ciągów nie ma granicy?

$a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$, $a_n = \cos(n\pi)$, $a_n = \sin(n\pi)$, $a_n = \frac{(-2)^{2n} \cdot (n-1)}{2n-2}$, $a_n = \frac{n(-1)^{2n-1}}{3n+2}$, $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$

Zad. 5

Oblicz granice podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n(1+6n)}$

b) $a_n = \frac{(2n+3)(n-1)}{n^2(n+2)}$

c) $a_n = \frac{(2n+1)^3(n-2)(1-n)}{(n+6)^4(2n-4)}$

Zad. 6

Czy ciąg $a_n = \frac{(-2)^{2n+2}}{n-1}$ ma granicę?

Temat 23: Obliczanie granic ciągów. Granice niewłaściwe

Zad. 1

Oblicz granice podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{2^n + 3^n}{2 \cdot 2^n - 3^{n+1}}$

b) $a_n = n + \frac{99}{n}$

c) $a_n = \frac{7^{2n-1} + 49^n}{7^{2n-3} - 2^{n+1}}$

Zad. 2

Ile wynosi granica ciągu $a_n = \frac{n^2 - 2n + 1}{1 + 2 + 3 + ... + n}$?

Zad. 3

Oblicz granicę ciągu danego wzorem ogólnym $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$.

Zad. 4

Ile wynosi granica ciągu określonego wzorem: $a_n = \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$?

Zad. 5

Wskaż granicę ciągu: $a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 1} - n$

Zad. 6

Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1 + 2 + ... + n}{\sqrt{16n^4 + 4}}$

Temat 24: Granice geometryczne

Cel lekcji: Wprowadzenie pojęcia szeregu geometrycznego oraz badanie zbieżności szeregu

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję szeregu geometrycznego i wzór na sumę szeregu geometrycznego
- Znać warunek zbieżności szeregu geometrycznego
- Rozpoznawać szeregi zbieżne
- Wyznaczać sumę szeregu geometrycznego
- Zamieniać ułamek okresowy na ułamek zwykły
- Rozwiązywać równania z wykorzystaniem sumy szeregu geometrycznego, określać dziedzinę takiego równania

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia szeregu geometrycznego
3. Wprowadzenie warunku na zbieżność szeregu geometrycznego i podanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

Szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, $a \neq 0$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|q| < 1$.
Suma szeregu geometrycznego dana jest wzorem: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

4. Zapoznanie uczniów z metodą zamiany ułamka okresowego na ułamek zwykły

5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Kiedy szereg geometryczny jest zbieżny?

Zad. 2
Oblicz sumy danych nieskończonych szeregów geometrycznych:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

b) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$

c) $1+0{,}1+0{,}01+\ldots$

Zad. 3
Ile wynosi suma nieskończonego szeregu geometrycznego?
$16+8+4+2+\ldots$

Zad. 4
Jakie warunku muszą być spełnione, aby istniała suma nieskończonego szeregu geometrycznego: $1+a^2+a^4+\ldots$

Zad. 5
Ile wynosi suma szeregu geometrycznego, jeśli:
$a_1=2$
$q=-\frac{1}{2}$

Zad. 6
Ile wynosi suma szeregu geometrycznego, jeśli:
$a_1=-2$
$q=0{,}1$

Zad. 7
Czy podany szereg jest zbieżny?
$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\ldots$

Temat 25: Granice geometryczne

Zad. 1
Dla jakich wartości zmiennej x istnieje suma nieskończonego szeregu geometrycznego:
$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$

Zad. 2
Zamień podane ułamki okresowe na zwykłe:
a) $0,(3)$
b) $0,(13)$
c) $0,2(3)$
d) $2,(5)$

Zad. 3
Rozwiąż równanie: $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots=x+1,5$

Zad. 4
Dla jakich wartości x ciąg geometryczny jest zbieżny, jeśli:
$a_1=1$
$q=\frac{x+4}{2x-3}$

Zad. 5
Podaj rozwiązanie równania: $1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\ldots=\frac{x+4}{x-1}$

Zad. 6
Dla jakich wartości x nieskończony ciąg geometryczny ma sumę równą $S=\frac{4\sqrt{2}}{5}$
$x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^3}+\ldots$

Zad. 7
Zamień ułamek okresowy na ułamek zwykły: $2,01(2)$

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Wśród podanych ciągów wskaż ciągi arytmetyczne:
$a_n=3-4n$, $a_n=5^{n+1}-2$, $a_n=9n-5$, $a_n=\frac{n-2}{n+2}$, $a_n=2^n$, $a_n=5$

Zad. 2
Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazu drugiego i szóstego wynosi 6, a iloraz wyrazu ósmego i wyrazu czwartego jest równy 5. Znajdź ten ciąg.

Zad. 3
Wśród podanych ciągów wskaż ciągi geometryczne:
$a_n=6^{n-2}$, $a_n=1-2n$, $a_n=n^2-3n+6$, $a_n=8^{n+1}\cdot 2$, $a_n=5n+2-9n^3$, $a_n=\frac{1}{n}$

Zad. 4
Dla jakiej wartości x liczby: $x+2, 3x+5, x-4$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny?

Zad. 5
Oblicz sumy podanych ciągów:
a) $-3,-2,-1,...,46$
b) $6, 12, 24,...,3072$
c) $5, 7, 9, 11,...,43$
d) $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},...,\frac{1}{343}$

Zad. 6
Dany jest ciąg geometryczny, w którym wyraz drugi jest równy (-3), a iloczyn wyrazu trzeciego i czwartego wynosi 81. Znajdź ten ciąg.

Zad. 7
Dla jakiej wartości m liczby: $0{,}25m, m+10, 6m+10$ tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny?

Sprawdzian

Zad. 1
Wśród podanych ciągów wskaż ciągi arytmetyczne:
$a_n=3+2n^2$, $a_n=3^n-2n$, $a_n=10-2n$, $a_n=\frac{n^2}{n-1}$, $a_n=8^n$, $a_n=5-4n$

Zad. 2
Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym suma wyrazu drugiego i czwartego jest równa sumie wyrazu pierwszego i piątego i wynosi 22. Znajdź ten ciąg.

Zad. 3
Rozwiąż równanie: $1+4+7+...+(3x-2)=376$

Zad. 4
Oblicz sumy podanych ciągów:
a) $4,6,8,...,102$
b) $2,5,8,...,59$
c) $1,4,16,...,1024$

Zad. 5
Ile wyrazów dodatnich ma ciąg o wzorze ogólnym: $a_n=14-5n$

Zad. 6
Jaką liczbę (jednakową) należałoby dodać do liczb: $1, 10, 46$, aby w podanej kolejności tworzyły ciąg geometryczny?

Zad. 7
Trzy liczby (a, b, c) tworzą ciąg arytmetyczny, jeżeli do pierwszej dodamy jeden, od drugiej odejmiemy dwa, od trzeciej również odejmiemy dwa to otrzymamy ciąg geometryczny. Znajdź liczby a, b, c.

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1
Odp. $a_n = 10 - 2n$, $a_n = 5 - 4n$

Zad. 2
Odp. $a_n = 4n - 1$

Zad. 3
Odp. $x = 16$

Zad. 4
a) 2650
b) 610
c) 341

Zad. 5
Odp. 2

Zad. 6
Odp. 2

Zad. 7
Odp. $2, 8, 14$ *lub* $11, 8, 5$

4. Funkcja logarytmiczna i wykładnicza

Temat 1: Potęga o wykładniku rzeczywistym

Cel lekcji: poznanie podstawowych wzorów dotyczących działań na potęgach i zastosowanie ich do rozwiązywania zadań praktycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję potęgi o wykładniku naturalnym, wymiernym i rzeczywistym
- Obliczać wartości liczbowe zawierające pierwiastki i potęgi

- Umieć przekształcać wyrażenia zawierające pierwiastki i potęgi do najprostszej postaci
- Stosować wzory skróconego mnożenia do przekształcania wyrażeń zawierających potęgi i pierwiastki

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia pierwiastka arytmetycznego i potęgi o wykładniku naturalnym, rzeczywistym i wymiernym
3. Wprowadzenie wzorów:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$a^n : a^m = a^{n-m}$$
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$a^n : b^n = (a : b)^n$$
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

4. Rozwiązywanie zadań.

Zad. 1

Zapisz w prostszej postaci:

a) $\frac{a^3 b^2}{ab^3}$

b) $\frac{a^2 a^3 b}{b^5 a}$

c) $\frac{\sqrt{a}}{a^4}$

d) $\frac{a\sqrt[3]{a}}{a^2}$

Zad. 2

Oblicz bez użycia kalkulatora: $7^9 + 7^9 + 7^9 + 7^9 + 7^9 + 7^9 + 7^9$

Zad. 3

Uporządkuj podane wyrażenia rosnąco:

$$\frac{4^2 - 2^6}{16^3},\ \frac{3^2 \cdot 3^7}{3^{10}},\ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^8\right]^0,\ \frac{2 \cdot 5^2}{\sqrt[3]{125}},\ \left(\frac{9}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

Zad. 4

Jaką postać ma podane wyrażenie po uproszczeniu?

$$\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3 \cdot x^5}{x^7 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Zad. 5

Która liczba jest większa?

$a = \sqrt{3}$

$b = \sqrt[3]{2}$

Zad. 6

Która liczba jest większa?

$a = \left(3\sqrt{3}\right)^{32}$

$b = \left(\frac{\sqrt{27}}{9}\right)^{-7}$

Zad. 7

Zapisz w prostszej postaci:

64^{38}, 4^{128}, $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{644}$

Zad. 8

Ile wynosi wartość wyrażenia: $\left(\sqrt{3}+2\right)^3$

Temat 2: Potęga o wykładniku rzeczywistym

Zad. 1

Ile wynosi wartość wyrażenia $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$?

Zad. 2

Oblicz bez użycia kalkulatora: $\dfrac{\left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-2}}{\left[\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}+13^0\right]}$

Zad. 3

Która liczba jest większa?

$a = \left(\sqrt{1024}\right)^{-3}$

$b = \left(\sqrt{729}\right)^{-2}$

Zad. 4

Czy podana obok liczba jest wymierna?

$$\left[\left(\sqrt[6]{8}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$$

Zad. 5

Jaką postać ma podane wyrażenie po uproszczeniu?

$$\frac{(1{,}2)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}-2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{3}}+5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{\left(2^{1{,}5}-\sqrt{6}\right)\left(2^{1{,}5}+\sqrt{6}\right)}$$

Zad. 6

Zapisz w prostszej postaci:

$$\left[\left(2^{-1}+2^{-1}\right)^{-1}+2^{-1}\right]^{-1},\ \frac{3\cdot 6^{97}-10\cdot 6^{96}}{3\cdot 6^{95}},\ \sqrt{4}\left[(1{,}5)^{-1}+4^{-1{,}5}\right]+8^{-\frac{2}{3}}$$

Zad. 7

Ile wynosi wartość wyrażenia: $\left(\sqrt{5}-1\right)^3$

Temat 3: Funkcja wykładnicza i jej własności

Cel lekcji: poznanie definicji funkcji wykładniczej oraz jej własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję funkcji wykładniczej oraz opisywać jej własności
- Rozpoznawać funkcję wykładniczą wśród innych funkcji
- Umieć rysować wykres funkcji wykładniczej $f(x)=a^x$
- Wyznaczać wzór funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu, sprawdzać czy podany punkt należy do wykresu funkcji
- Wyznaczać argumenty, dla których funkcja spełnia określone warunki
- Podawać dziedzinę i zbiór wartości funkcji
- Badać na podstawie wzoru i wykresu funkcji jej parzystość, różnowartościowość, monotoniczność

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia funkcji wykładniczej, podanie jej wzoru $f(x)=a^x$ i omówienie podstawowych własności
3. Szkicowanie wykresu funkcji wykładniczej
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Narysuj wykres funkcji:

a) $f(x)=7^x$

b) $f(x)=(0{,}2)^x$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^x$

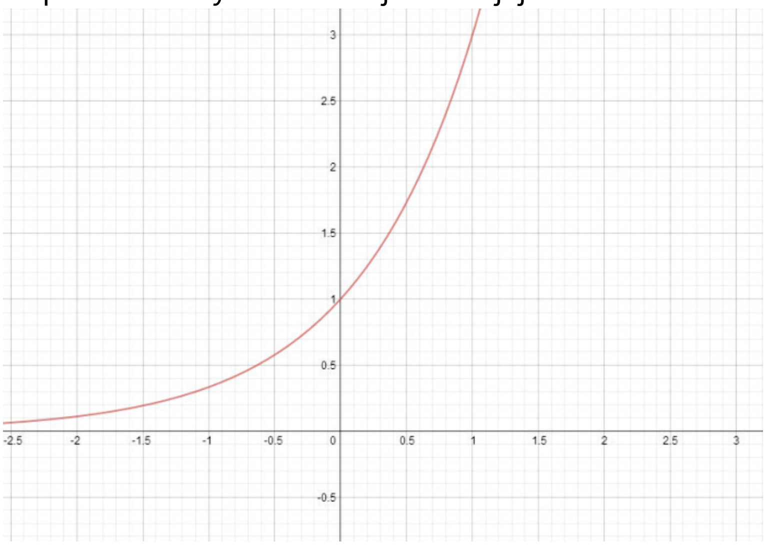
d) $f(x)=2^x$

Zad. 2

Na podstawie wykresu funkcji podaj jej wzór:

Zad. 3

Na podstawie wykresu funkcji omów jej własności:



Zad. 4

Narysuj wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Zad. 5

Dana jest funkcja $f(x)=5^x$. Wskaż poprawne odpowiedzi:

1. funkcja ma jedno miejsce zerowe
2. funkcja jest różnowartościowa
3. funkcja jest malejąca
4. do wykresu funkcji należy punkt $(-2, 25)$
5. funkcja nie ma miejsc zerowych
6. funkcja nie jest różnowartościowa
7. funkcja jest parzysta
8. funkcja jest rosnąca
9. do wykresu funkcji należy punkt $(-1;\ 0{,}2)$

Zad. 6

Dla jakich argumentów funkcja $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ osiąga wartości mniejsze niż 27?

Zad. 7

Określ własności funkcji: $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

Temat 4: Funkcja wykładnicza i jej własności

Zad. 1

Określ własności funkcji: $f(x)=\left(\frac{9}{4}\right)^x$

Zad. 2

Dana jest funkcja $f(x)=\left(\frac{5}{8}\right)^x$. Wskaż poprawne odpowiedzi:

1. funkcja ma jedno miejsce zerowe
2. funkcja jest różnowartościowa
3. funkcja jest malejąca
4. funkcja jest rosnąca
5. do wykresu funkcji należy punkt $(0,1)$
6. funkcja nie jest różnowartościowa
7. funkcja jest parzysta
8. do wykresu funkcji należy punkt (5,8)
9. funkcja nie ma miejsc zerowych

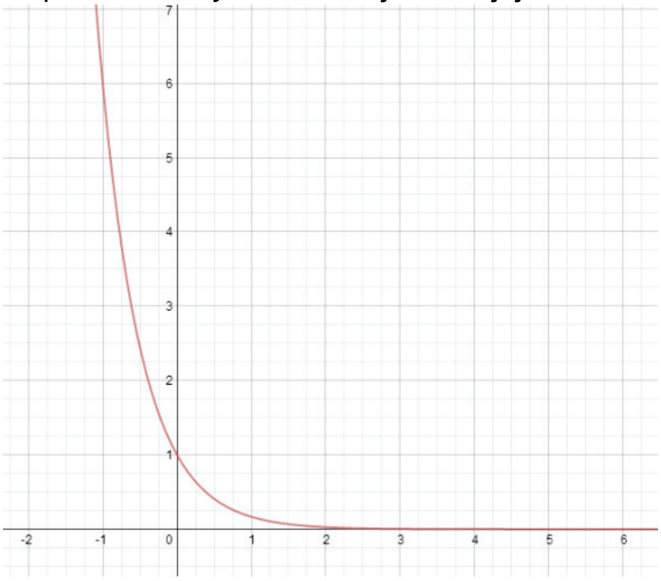
Zad. 3
Uzupełnij tabelkę częściową funkcji $f(x) = a^x$ podając odpowiednie wartości parametrów a, b, c, d, e, f.

x	-5	-2	b	c	3	4	f
F(x)	a	$\frac{1}{4}$	1	2	d	e	256

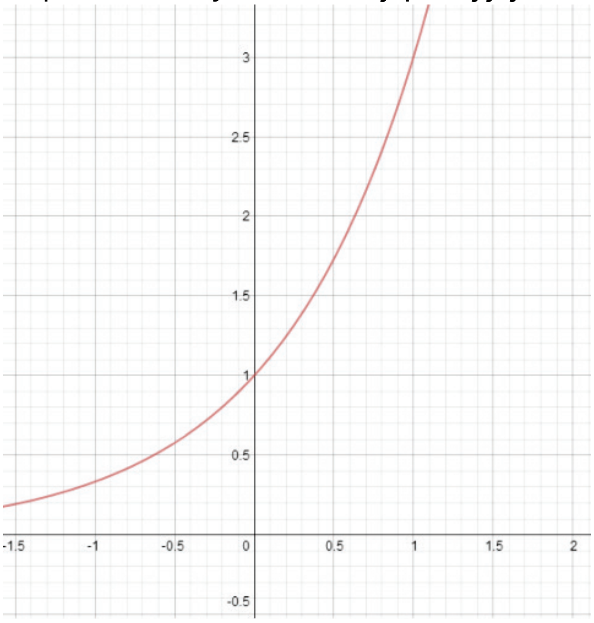
Zad. 4
Naszkicuj wykres funkcji:

1. $f(x)=\left(\frac{7}{3}\right)^x$
2. $f(x)=(0,4)^x$
3. $f(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^x$
4. $f(x)=5^x$

Zad. 5
Na podstawie wykresu funkcji określ jej własności:



Zad. 6
Na podstawie wykresu funkcji podaj jej wzór:



Zad. 7
Dla jakich argumentów funkcja osiąga wartości większe lub równe 0,36?

$$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

Temat 5: Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych

Cel lekcji: szkicowanie wykresu funkcji wykładniczej i poddawanie go różnym przekształceniom

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Przekształcać wykres funkcji wykładniczej stosując: przesunięcie o wektor $[p, q]$, symetrię względem osi OX, symetrię względem osi OY i symetrię względem początku układu współrzędnych
- Szkicować wykresy funkcji wykładniczych będących złożeniem dowolnej liczby przekształceń
- Podawać dziedzinę i zbiór wartości funkcji otrzymanych w wyniku przekształceń
- Szkicować wykres funkcji $|f(x)|$, gdzie $f(x)$ jest funkcją wykładniczą

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o podstawowych przekształceniach funkcji $f(x)$
3. Rozwiązywanie zadań

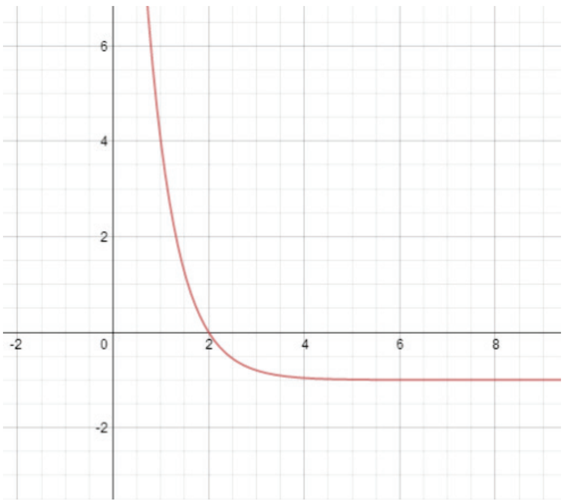
Zad. 1

O jaki wektor przesunięto funkcję $f(x) = 4^x$, aby otrzymać funkcję $g(x) = 4^{x+3}$?

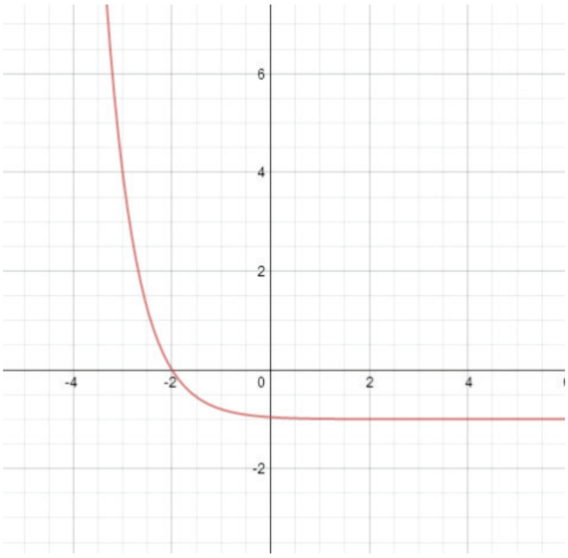
Zad. 2

Funkcję $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ przesunięto o wektor $[2, -1]$ i otrzymano funkcję $g(x)$. Wskaż wykres funkcji $g(x)$.

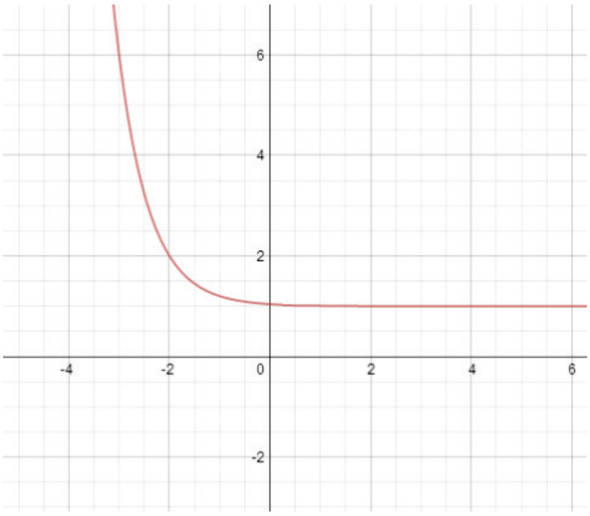
A.



B.



C.



D.

Zad. 3

Funkcję $f(x)=2^x$ poddano pewnym przekształceniom. Dopasuj wykres funkcji do odpowiedniego przekształcenia.

1. $f(x)-1$

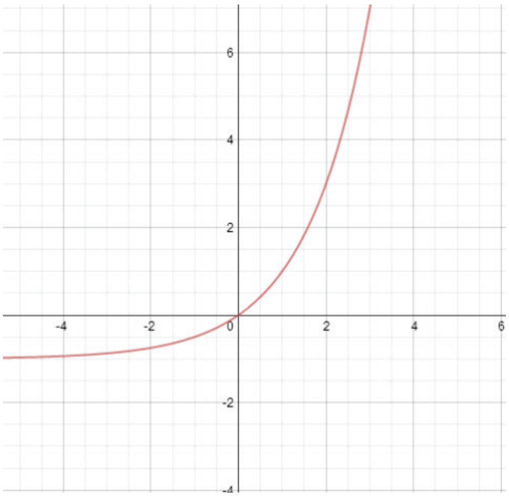
2. $f(2x)$

3. $f(-x)$

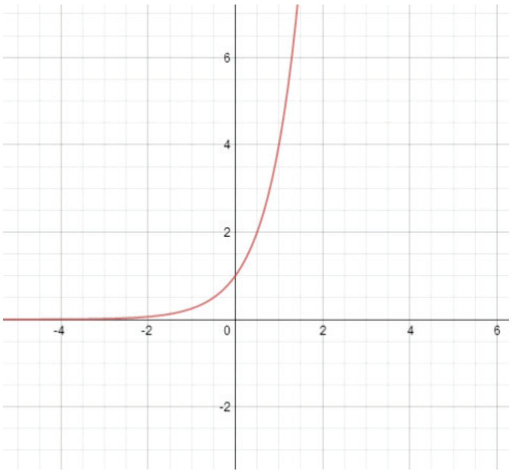
4. $|f(x)-4|$

5. $\frac{1}{2}f(x)$

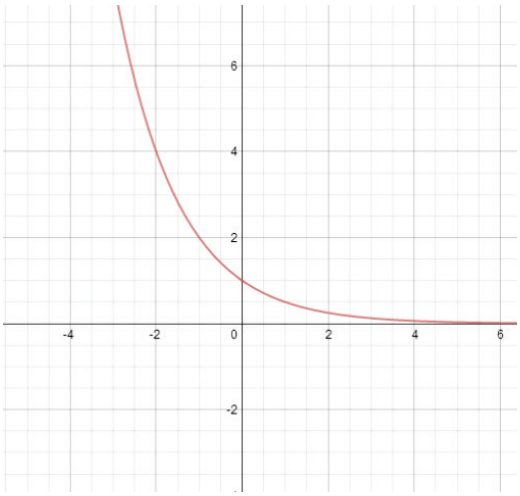
A.



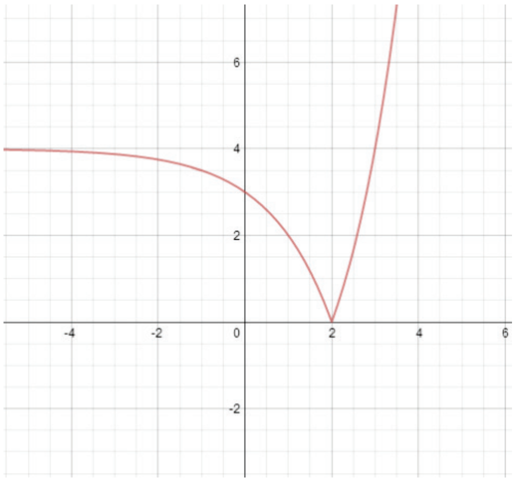
B.



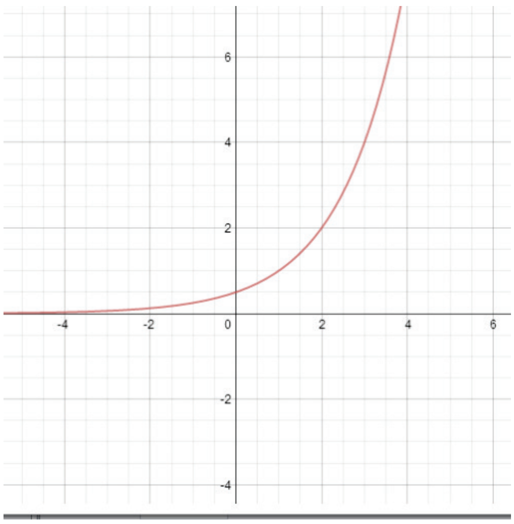
C.



D.



E.



Zad. 4

Określ własności funkcji $g(x)$, która powstała po przesunięciu funkcji $f(x) = 2^x$ o wektor $[-2, -1]$.

a) funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = -2$

b) funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = 2$

c) funkcja nie ma miejsc zerowych

d) jest funkcją malejącą

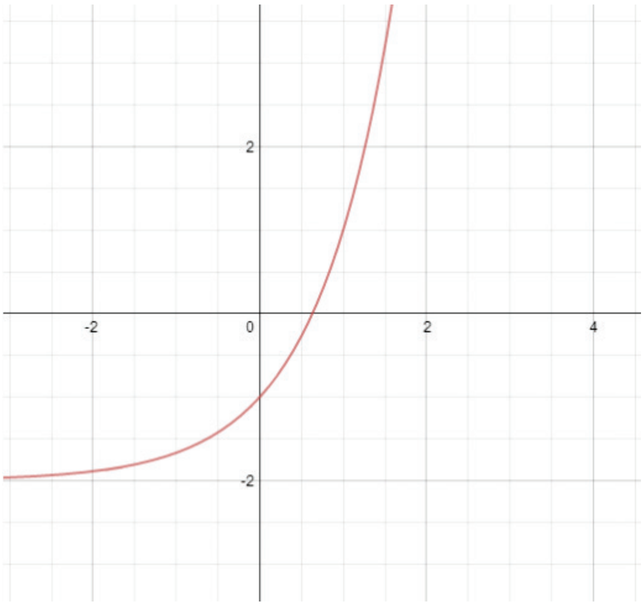
e) jest funkcją rosnącą

f) przecina oś OY w punkcie $(0,3)$

g) przecina oś OY w punkcie $(0,1)$

Zad. 5

Na podstawie wykresu podaj wzór funkcji $f(x)$:



Zad. 6
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $f(x)=4^{x-1}+2$
b) $f(x)=-3^{x}$
c) $f(x)=5^{-x}$
d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

Zad. 7
O jaki wektor przesunięto funkcję $f(x)=7^{x}$, aby otrzymać funkcję $g(x)=7^{x+2}-7$?

Temat 6: Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych

Zad. 1
Dany jest wzór funkcji $f(x)=3^{x}$, po dokonaniu pewnego przekształcenia otrzymano funkcję $g(x)=-3^{x}+1$. Jakie to przekształcenie?
a) symetria względem osi OY, przesunięcie o wektor [0,1]
b) symetria względem osi OX, przesunięcie o wektor [1,0]
c) symetria względem osi OX, przesunięcie o wektor [0,1]
d) symetria względem osi OY, przesunięcie o wektor [1,0]

Zad. 2
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=2\cdot 3^{x-2}$

Zad. 3
Naszkicuj wykresy funkcji:
a) $f(x)=-5^{2x}+1$
b) $f(x)=|2^{x-1}-3|$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$

d) $f(x)=-|\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2|$

Zad. 4

Wskaż wykres funkcji: $f(x)=4^{|x|}$

Zad. 5

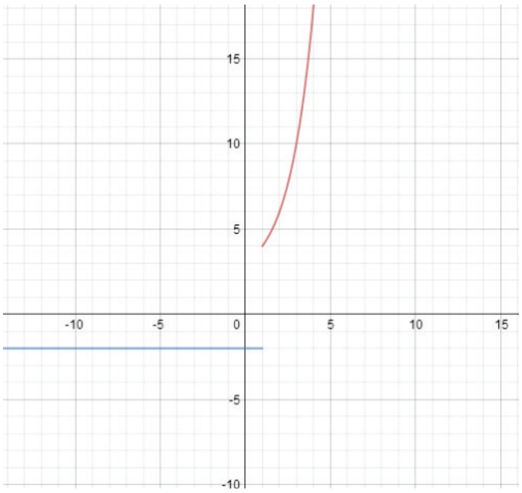
Jakie własności ma funkcja $f(x)=-6^{-x+2}+3$?

a) funkcja nie ma miejsc zerowych
b) funkcja ma jedno miejsce zerowe
c) funkcja jest różnowartościowa
d) funkcja nie jest różnowartościowa
e) funkcja nie przecina osi OY

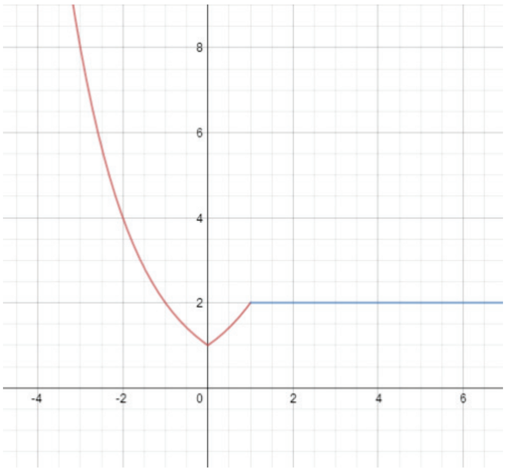
Zad. 6

Wskaż wykres funkcji: $f(x)=\begin{cases}2^{|x|}, x<1\\ -2, x\geq 1\end{cases}$

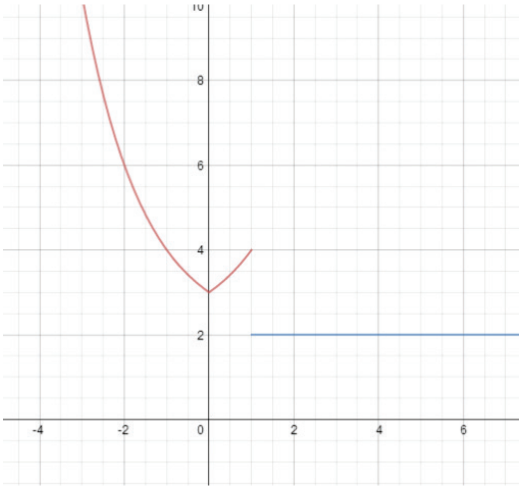
A.



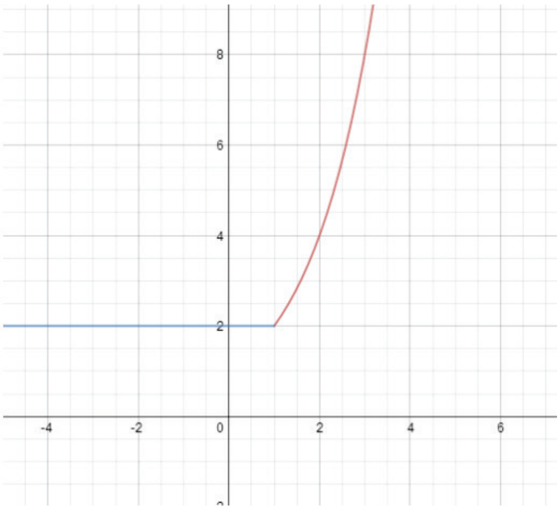
B.



C.



D.



Zad. 7

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = |3^{|x|} - 1|$

b) $f(x) = 2^{-x} + 4$

c) $f(x) = -|1 + 1^{x}|$

Temat 7: Logarytm liczby dodatniej. Własności logarytmów

Cel lekcji: poznanie pojęcia logarytmu z liczby dodatniej i własności logarytmów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję logarytmu liczby dodatniej
- Obliczać wartości logarytmów liczb dodatnich
- Znać podstawowe własności logarytmów
- Dowodzić własności logarytmów
- Przekształcać wyrażenia zawierające logarytm liczby dodatniej

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia logarytmu liczby dodatniej
3. Omówienie podstawowych własności logarytmów:

$$\log_a b = c\,, \qquad a^c = b, \qquad a > 0, a \neq 1, b > 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a a^b = b$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Oblicz wartości poszczególnych wyrażeń:

a) $\log_2 64$

b) $\log_4 256$

c) $\log_6 \frac{1}{36}$

Zad. 2

Uszereguj wartości poniższych wyrażeń w kolejności malejącej:

$\log_3 729$, $\log_8 2$, $\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_{0,2} 125$

Zad. 3

Oblicz wartość wyrażenia: $36^{-\frac{1}{2}\log_6 8+8}$

Zad. 4

Wyznacz zmienną x:

a) $\log_x 25 = 2$

b) $\log_x 3 = 27$

c) $\log_x 216 = 3$

d) $\log_x 9 = \frac{1}{2}$

Zad. 5

Zapisz podane wyrażenie w prostszej postaci: $\log \frac{a^3 b^2}{c}$

Zad. 6
Oblicz:
a) $\log_x 81 = 4$
b) $\log_x 11 = 1$
c) $\log x = 2$
d) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

Temat 8: Logarytm liczby dodatniej. Własności logarytmów

Zad. 1
Oblicz:
a) $3\log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} + \log_{\sqrt{2}} 16$
b) $\log_{0,1} 100 + \log_{0,1} 10 + \log_{0,1} 1$
c) $\log_3 81 - \frac{1}{3}\log_3 27 - 2\log_3 3$

Zad. 2
Czy prawdą jest, że $xy = 16$, jeśli: $\log_2 x + 2\log_4 y = 4$.

Zad. 3
Uszereguj wartości poniższych wyrażeń w kolejności rosnącej
$5^{\log_5 3 - 1}$, $2^{-1+2\log_2 3}$, $9^{\log_3 4} - 2$, $27^{\frac{1}{3}\log_3 8 + 1}$

Zad. 4
Ile wynosi wartość wyrażenia: $4^{-\frac{1}{2}\log_4 16 + 2}$?
Zad. 5

Oblicz:
a) $\log_x 3 = \frac{1}{2}$
b) $\log_x 1024 = 10$
c) $\log_x 17 = 2$
d) $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

Zad. 6
Przedstaw podane obok wyrażenie jako sumę lub różnicę $log a, log b, log c$:
$\log(ab^2c)$

Temat 9: Funkcja logarytmiczna i jej własności

Cel lekcji: wprowadzenie definicji funkcji logarytmicznej i omówienie jej podstawowych własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ i jej podstawowe własności
- Szkicować wykres funkcji logarytmicznej
- Określać monotoniczność, dziedzinę i zbiór wartości funkcji logarytmicznej
- Podawać argumenty, dla których funkcji logarytmiczna spełnia określone warunki

Porządek lekcji:

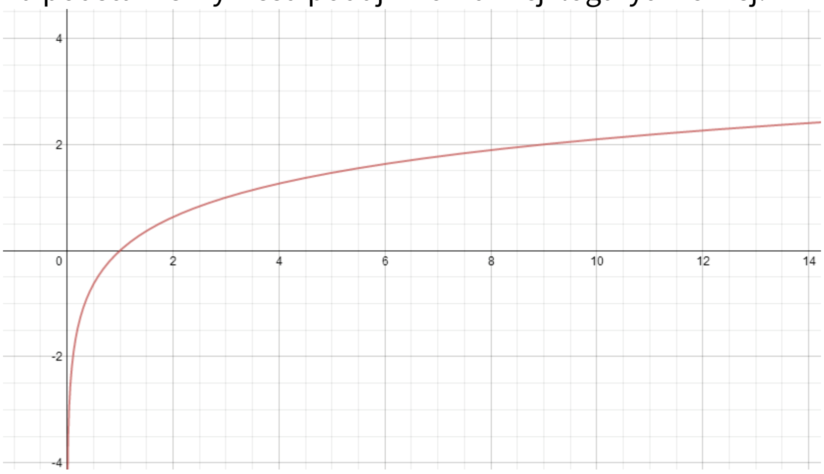
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ i omówienie jej własności
3. Szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

Zad. 2

Na podstawie wykresu podaj wzór funkcji logarytmicznej:



Zad. 3

Określ dziedzinę funkcji: $f(x) = \log_5 \frac{x}{1-x}$

Zad. 4

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \log_{0,5} x$.

Zad. 5

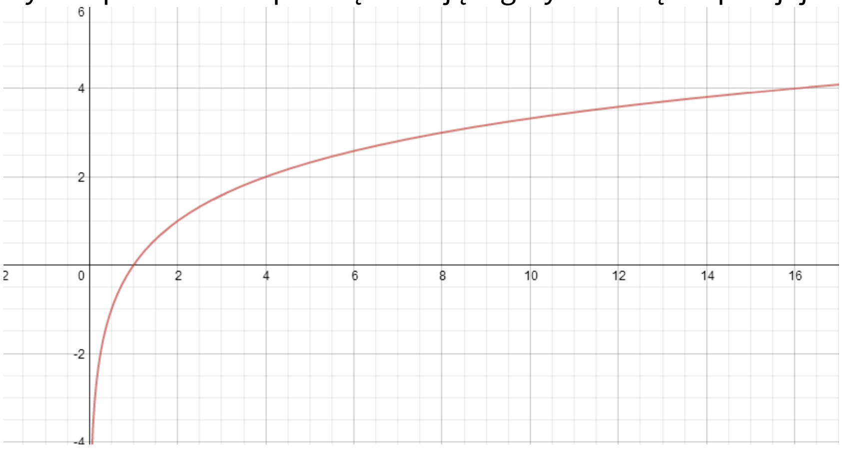
Dana jest funkcja $f(x) = \log_7 x$. Naszkicuj jej wykres, a następnie na jego podstawie określ własności funkcji.

Zad. 6

Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\log_{x^2-9}\frac{x-2}{x+4}$

Zad. 7

Wykres przedstawia pewną funkcję logarytmiczną. Napisz jej wzór i określ jej własności:



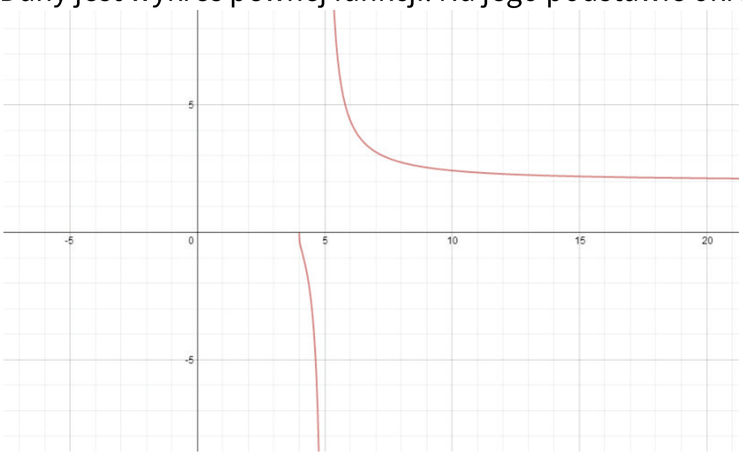
Temat 10: Funkcja logarytmiczna i jej własności

Zad. 1

Określ dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{x+1}(2^{x+2}-16)$

Zad. 2

Dany jest wykres pewnej funkcji. Na jego podstawie określ jej dziedzinę:



Zad. 3

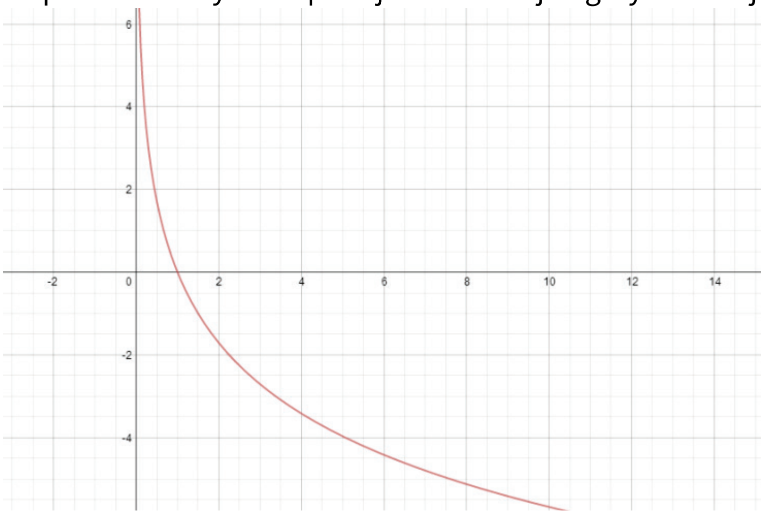
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\log x$.

Zad. 4

Dany jest wykres pewnej funkcji logarytmicznej. Na jego podstawie podaj zbiór wartości funkcji, dla którego argumenty należą do przedziału $(0{,}1;\ 1000)$:

Zad. 5
Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\log_{x^2+2x}(x^3-4x^2-3x+12)$

Zad. 6
Na podstawie wykresu podaj wzór funkcji logarytmicznej:



Zad. 7
Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\log_{|x+6|}(x^2-2x+4)$

Temat 11: Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych

Cel lekcji: szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$ oraz poddawanie go różnym przekształceniom

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Szkicować wykres funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$
- Przekształcać wykres funkcji logarytmicznej stosując: translację o wektor, symetrię względem osi OX, OY oraz punktu (0,0)
- Szkicować wykres funkcji $|f(x)|$, gdzie $f(x)$ jest funkcją logarytmiczną
- Opisywać własności funkcji powstałych w wyniku przekształceń

– Szkicować wykresy funkcji logarytmicznych będących złożeniem dowolnej liczby przekształceń
– Zapisywać wzór funkcji otrzymanej w wyniku przekształceń

Porządek lekcji:

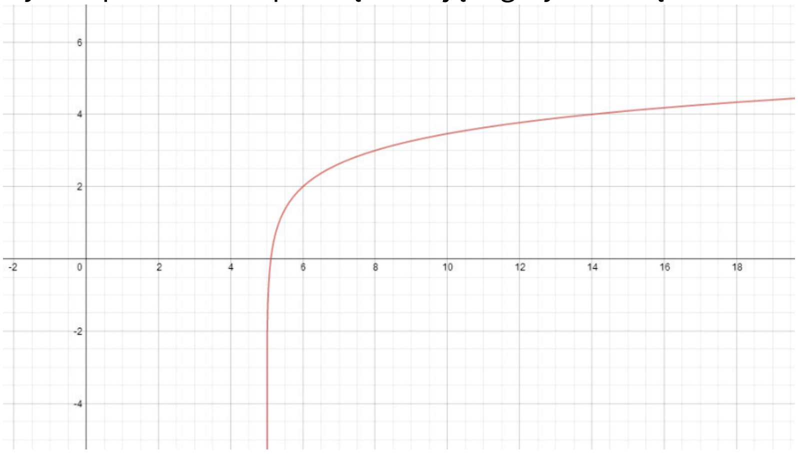
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o przekształceniach funkcji
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Funkcję $f(x)=\log_{\frac{1}{8}} x$ przesunięto o wektor [-1,3]. Jaką funkcje otrzymano?

Zad. 2

Wykres przedstawia pewną funkcję logarytmiczną. Jaka to funkcja?

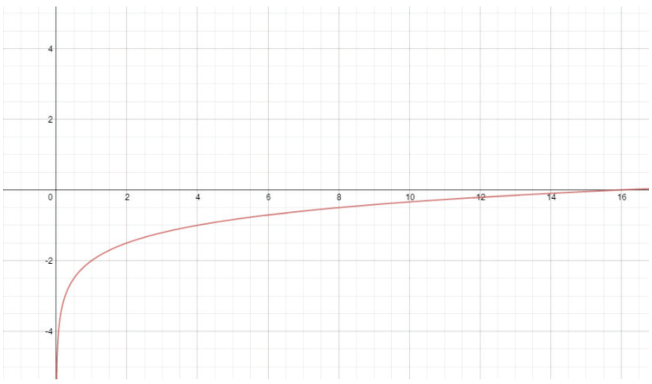


Zad. 3

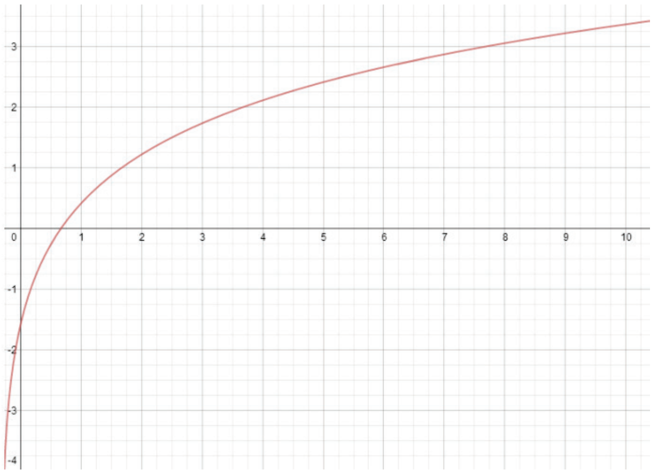
Dopasuj wzór funkcji do jej wykresu:

1. $f(x)=\log_4 x-2$
2. $f(x)=\log_2(x+\frac{1}{3})$
3. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x+4$
4. $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$

A.



B.

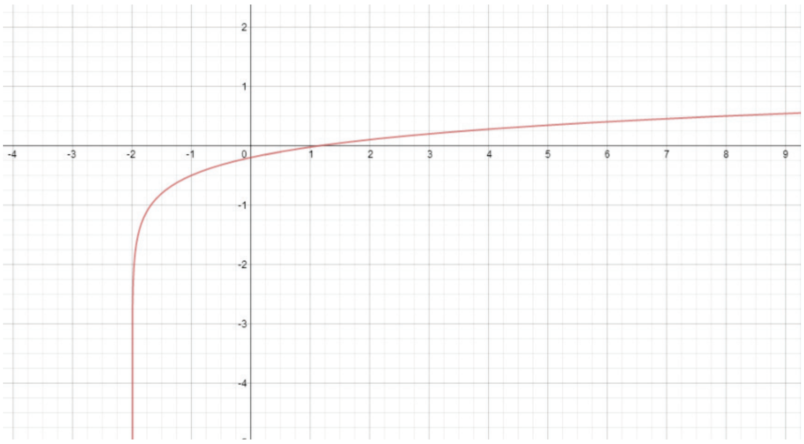


C.

D.

Zad. 4

Dana jest funkcja $f(x) = log x$, którą przesunięto o pewien wektor i otrzymano funkcję $g(x)$ przedstawioną na rysunku. Wskaż wzór funkcji $g(x)$.



Zad. 5

Dana jest funkcja $f(x) = \log_3 x$, którą przesunięto o pewien wektor i otrzymano funkcję $h(x)$. Dopasuj wzór funkcji $h(x)$ do odpowiedniego wektora, o który przesunięto funkcję $f(x)$.

a) $h(x) = \log_3 x - 1$

b) $h(x) = \log_3(x+1) - 1$

c) $h(x) = \log_3 x + 1$

d) $h(x) = \log_3(x-1) - 1$

e) $h(x) = \log_3(x+1) + 1$

f) $h(x) = \log_3(x-1)$

g) $h(x) = \log_3(x+1)$

1. $[0, -1]$
2. $[-1, -1]$
3. $[0,1]$
4. $[1, -1]$
5. $[-1,1]$
6. $[1,0]$
7. $[-1,0]$

Zad. 6

Wskaż wykres, który obrazuje rozwiązanie równania:

$\log_3(x-2) = x - 4$

Temat 12: Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych

Zad. 1

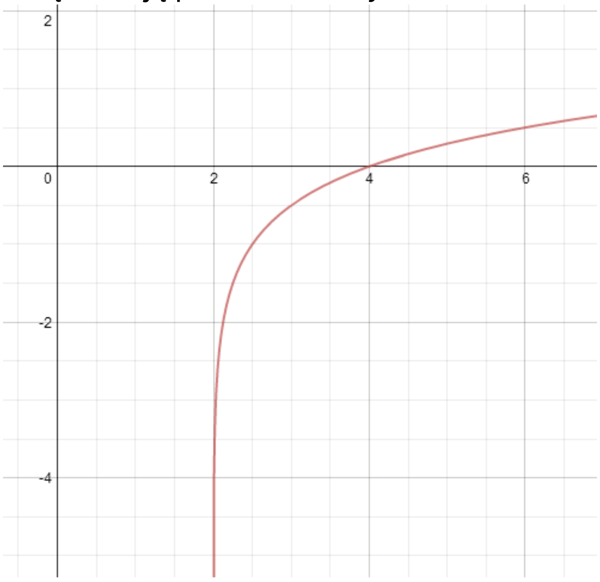
Dany jest wzór funkcji $f(x)$ oraz funkcji $g(x)$. Jakie przekształcenia kolejno wykonano, aby otrzymać funkcję $g(x)$?

$f(x) = \log x$

$g(x) = -\log(1-x) + 2$

Zad. 2

Jaką funkcję przedstawia wykres umieszczony na rysunku obok?



A. $f(x) = \log_4(x+1)$

B. $f(x) = \log_4(\frac{1}{2}x-1)$

C. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x - 1$

D. $f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(2x-1)$

Zad. 3

Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$

b) $f(x) = 2\log_3 x$

c) $f(x) = -\log_{\frac{1}{5}} x + 5$

Zad. 4

Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(2-x) - 2$. Naszkicuj jej wykres, a następnie określ jej własności.

Zad. 5

Wskaż wykres, który przedstawia rozwiązanie równania $\log(2-x) = \frac{1}{x} - 1$.

Zad. 6

Podaj dziedzinę poniższych funkcji:

a) $f(x) = \log_{2x}(3-x)$

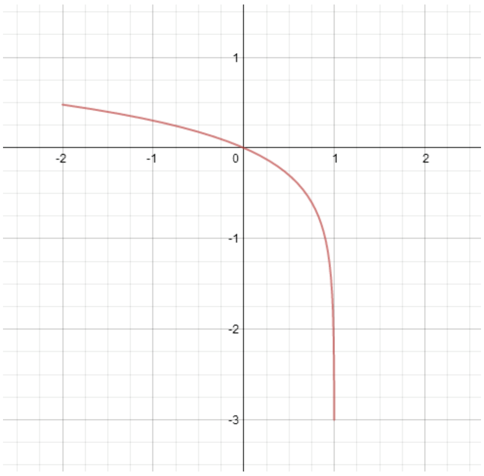
b) $f(x) = \log_{x-4}(x^2 - 6x + 9)$

c) $f(x) = \log_4(x^2 - 3x + 4)$

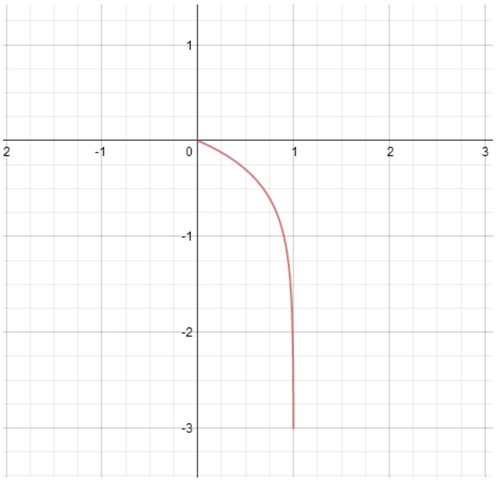
Zad. 7

Który wykres przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $-3 < \log(1-x) < x$?

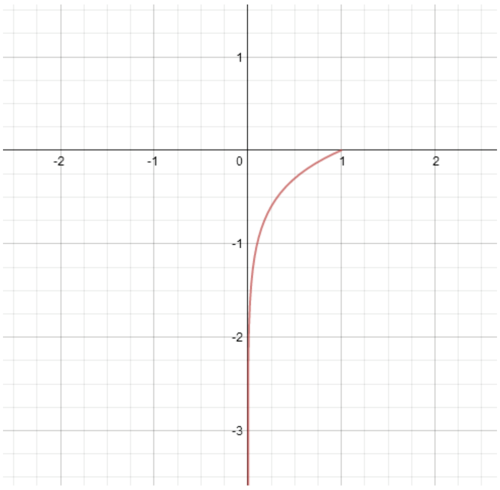
A.



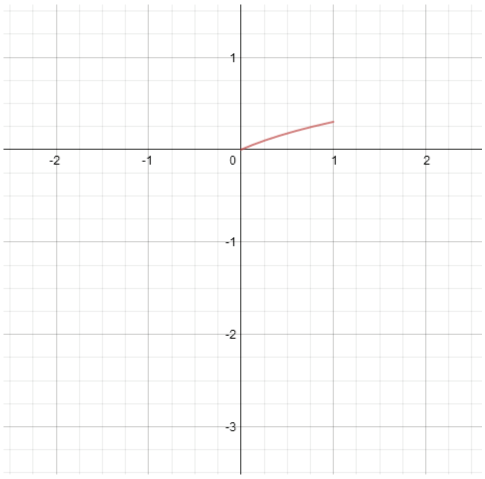
B.



C.

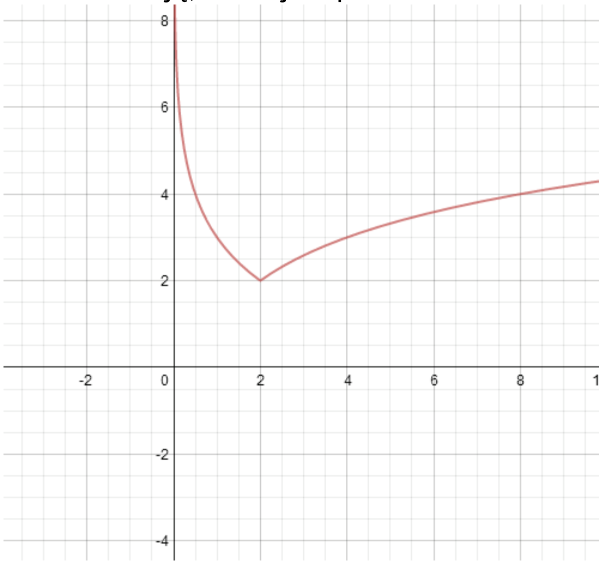


D.



Temat 13: Przekształcanie wykresów funkcji logarytmicznych

Zad. 1
Wskaż funkcję, która jest przedstawiona na wykresie obok:



A. $f(x) = \log_2 |x-2|$
B. $f(x) = |\log_2 (x-1)|$
C. $f(x) = |\log_2 x - 1| + 2$
D. $f(x) = |\log_2 x| - 2$

Zad. 2
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}} x + 2| - 1$
b) $f(x) = \log_3 |x-2|$
c) $f(x) = -2\log_{\frac{1}{4}} x + 1$
d) $f(x) = |\log x| + 3$

Zad. 3
Jakie własności ma funkcja $f(x)=|\log_{\frac{1}{3}}(x-3)|-2$?

Zad. 4
Który wykres przedstawia funkcję: $f(x)=|\log_3|x-4||$

Zad. 5
Wskaż wykres, na którym przedstawione jest rozwiązanie równania: $|\log_2 x|=2^{x+1}$

Zad. 6
Czy prawidłowo określono dziedzinę funkcji?
$f(x)=|\log_{3-x}(-2x+4)-2|$
$D: x\in(-\infty,3)\setminus\{2\}$

Temat 14: Równania i nierówności wykładnicze

Cel lekcji: omówienie metod rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozwiązywać algebraicznie i graficznie równania i nierówności wykładnicze stosując omówione wcześniej działania na potęgach i pierwiastkach oraz własności funkcji wykładniczej
- Rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z wartością bezwzględną
- Podawać wartość parametru, dla którego dane równanie/nierówność spełnia określone warunki

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie działań na potęgach i pierwiastkach oraz własności funkcji wykładniczej
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Podaj rozwiązanie równania: $2^{x-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x+1}$

Zad. 2
Rozwiąż równania:
a) $\left(3\sqrt{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}$
b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$
c) $5^{x^2+2x}=125$
d) $3^{x^2-1}=27^{x+1}$

Zad. 3
Wskaż rozwiązanie równania: $2^{2x}-7\cdot 2^{x-1}=2$

Zad. 4

Rozwiąż równanie: $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{1-x}-1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{4+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}-5}$

Zad. 5
Rozwiąż nierówności:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-5}>8$

b) $2^{2x+4}\cdot 8^{x-1}\leq 2$

c) $15^{x-2}<225^{3-2x}$

d) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-x^2-x}\geq 36$

Zad. 6
Podaj zbiór rozwiązań nierówności: $2^{2x}-6\cdot 2^{x}<-2^{4}$

Zad. 7
Rozwiąż nierówność:

$\frac{1}{7}\cdot 7^{\frac{x+2}{x+1}}\geq 49^{\frac{2x-3}{x+1}}$

Temat 15: Równania i nierówności wykładnicze

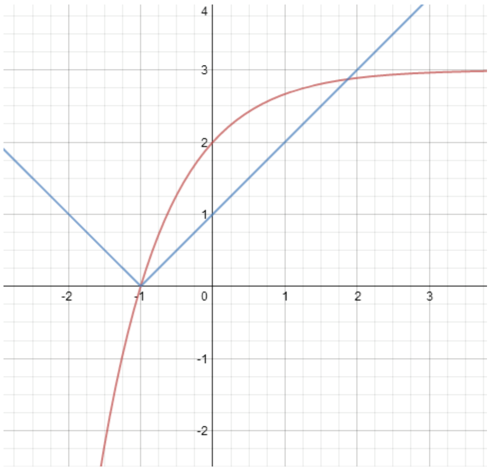
Zad. 1
Dopasuj równanie do wykresu, który przedstawia jego rozwiązanie:

a) $3-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=|x+1|$

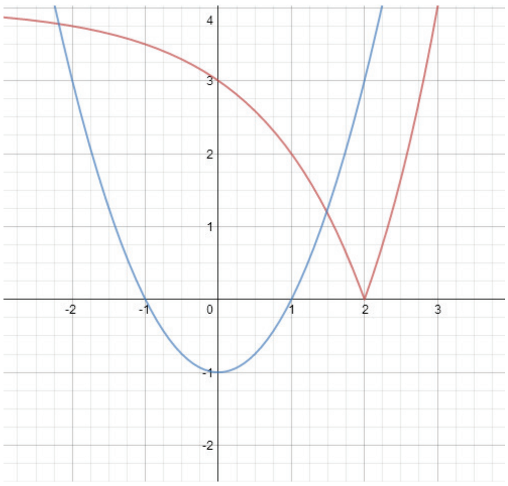
b) $|2^{x}-4|=x^{2}-1$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+\frac{2}{x}=0$

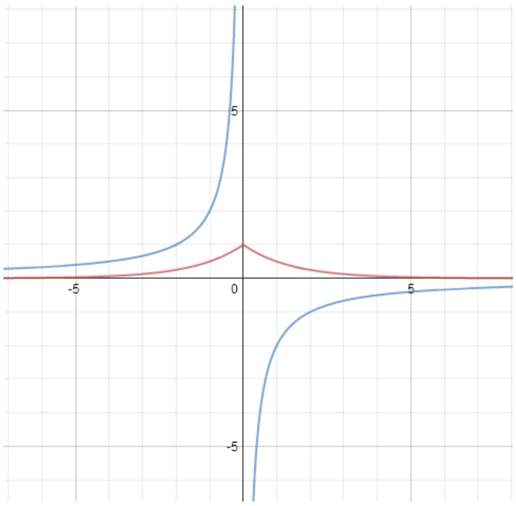
1.



2.



3.



Zad. 2

Rozwiąż równanie: $3^{x^2+4x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-6|}$

Zad. 3

Dla jakiej wartości parametru m podane obok równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

$9^x+(m+1)\cdot 3^x+1=0$

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru m podane równanie nie ma rozwiązania?
$9 \cdot 3^{|x-1|} = m$

Zad. 5
Dla jakiej wartości parametru m równanie ma jeden pierwiastek dodatni?
$4^x - (m+2) \cdot 2^x + \frac{3}{2}m + 1 = 0$

Zad. 6
Rozwiąż nierówność: $3^{2x} \leq -2 \cdot 3^{|x|} + 3$

Temat 16: Równanie i nierówności logarytmiczne

Cel lekcji: omówienie metod rozwiązywania równań i nierówności logarytmicznych sprowadzając je do rozwiązywania równań i nierówności liniowych, kwadratowych lub wielomianowych dowolnego stopnia

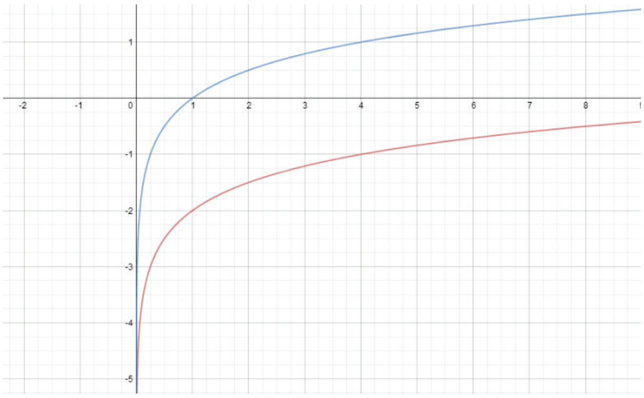
Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozwiązywać algebraicznie i graficznie równania i nierówności logarytmiczne z zastosowaniem wiadomości o własnościach logarytmu liczby dodatniej i funkcji logarytmicznej
- Podawać dziedzinę logarytmu
- Podawać rozwiązanie równań i nierówności logarytmicznych z uwzględnieniem dziedziny logarytmu
- Rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Podawać wartość parametru, dla którego równanie lub nierówność spełnia określone warunki

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie własności logarytmu liczby dodatniej i funkcji logarytmicznej
3. Rozwiązywanie zadań

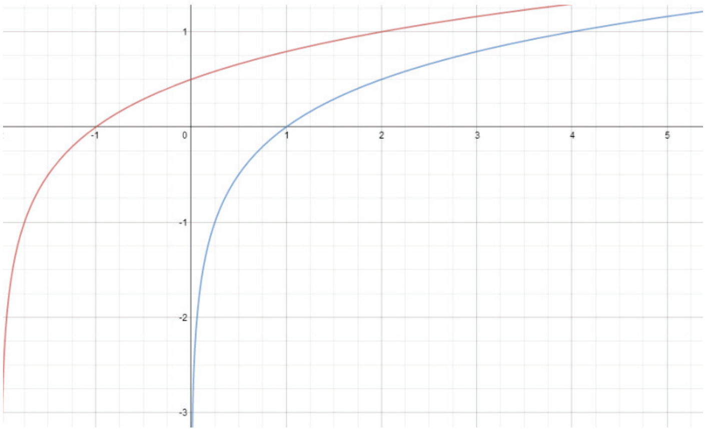
Zad. 1
Podaj dziedzinę równania: $\log_3(x^2 - 3{,}5x - 2) + \log_3 \frac{1}{x-3} = \log_3 \frac{x-2}{x+1}$

Zad. 2
Podaj rozwiązanie równania (uwzględniając dziedzinę): $-6 + \log_2 x = \log_2(x-1)$

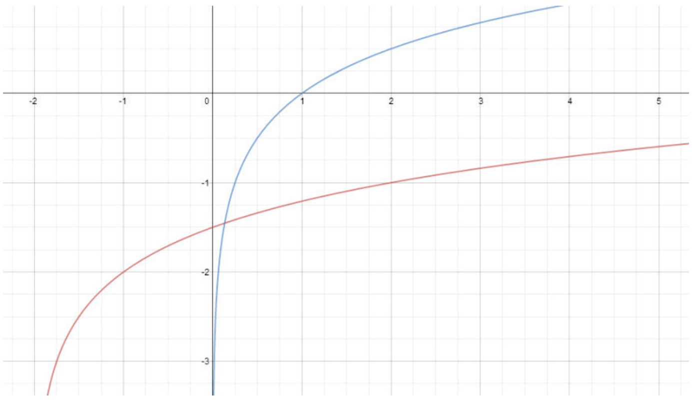
Zad. 3
Który wykres obrazuje rozwiązanie równania $\log_4(x+2) - \log_4 16 = \log_4 x$?
A.



B.



C.



Zad. 4

Rozwiąż równania:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -4 + \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

b) $\log_3(x+7) - \log_3 x = \frac{1}{2}\log_3 36$

c) $\log_x(3x^2+4x) = 3$

d) $\log_3(x+3) - 1 = -\log_3(x+5)$

Zad. 5

Rozwiąż nierówność: $\log_4(x+1) - \log_4 x \ge 1$

Zad. 6

Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{2}{3}} x - \log_{\frac{2}{3}}(x+2) > \log_{\frac{2}{3}} 3$

b) $\log_7 \sqrt{x+4} > 1$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(x+3) - \log_{\frac{1}{3}}(3x+1) < 0$

d) $\log_4 x + 3\log_4 x \geq 2$

Zad. 7

Wskaż zbiór rozwiązań nierówności: $\log_2(x^2 - 4x + 4) \geq 0$

Temat 17: Równania i nierówności logarytmiczne

Zad. 1

Podaj rozwiązanie równania: $\log_3(3^x \cdot 4 - 27) = x$

Zad. 2

Rozwiąż nierówność: $\log(x^2 - 3x + 6) < 1$

Zad. 3

Podaj rozwiązanie równania (uwzględniając dziedzinę) $(\log_2 x)^2 - 2 = \log_2 x$

Zad. 4

Rozwiąż równanie: $\log_2\left|\frac{1-x}{x+1}\right| = \log_4(x+1)$

Zad. 5

Rozwiąż nierówność: $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 < 0$

Zad. 6

Dla jakiej wartości parametru m dziedziną równania jest zbiór liczb rzeczywistych?

$\log_2(x^2 + (m+2)x + 2\frac{1}{2}m - 1) = 1$

Zad. 7

Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

$\log_3 |1-x| > \log_9(x+1)$

Temat 18: Zastosowanie funkcji wykładniczej w praktyce

Cel lekcji: zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań z kontekstem fizycznym, chemicznym, biologicznym

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem poznanych własności funkcji wykładniczej
- Znać zastosowania funkcji wykładniczej w innych dziedzinach: fizyki, chemii, biologii
- Rozwiązywać zadania z parametrem

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Podanie przykładowych zastosowań funkcji wykładniczej
3. Rozwiązywania zadań praktycznych z wykorzystaniem programu Excel

Zad. 1
Liczbę bakterii w pewnej próbce można przedstawić za pomocą wzoru
$N = 1000 \cdot 2^{0,2t}, t \geq 0$. Zaznacz prawidłowe odpowiedzi:
A. początkowa liczba bakterii wynosi 2000
B. początkowa liczba bakterii wynosi 1000
C. początkowa liczba bakterii wynosi 2
D. liczba bakterii po 3 dniach wynosi 1515
E. liczba bakterii po 3 dniach wynosi 1148
F. liczba bakterii po 3 dniach wynosi 1231

Zad. 2
Chronione gatunki zwierząt są umieszczane w rezerwacie. Na początku w danym rezerwacie umieszczono 50 zwierząt. Liczba zwierząt, które przeżywają t lat po umieszczeniu w rezerwacie wyraża się funkcją wykładniczą daną wzorem:
$N(t) = 50 \cdot (1{,}05)^t$
Po ilu latach populacja zwierząt w rezerwacie podwoi się ?

Zad. 3
Populację N pewnego miasteczka w południowych Indiach można przedstawić za pomocą wzoru:
$N = n \cdot 10^{kt}, t \geq 0$
Gdzie: n oznacza początkową populację, a t oznacza czas, jaki upłynął od 1980 roku. Wiedząc, że populacja wzrosła z 100 000 w 1980 roku do 150 000 w 1990 roku znajdź populację mieszkańców tego miasteczka w 1995 roku.

Zad. 4
Pan Marcin założył złożył na lokacie 3500 zł. Oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 5,8%, a kapitalizacja następuje co pół roku. Ile lat potrzeba, aby Pan Marcin podwoił posiadany kapitał?

Temat 19: Zastosowanie funkcji wykładniczej w praktyce

Zad. 1
Wartość pewnego samochodu po t latach można wyrazić wzorem:
$V = 8500e^{-0,2t}$
Oszacuj wartość samochodu po 3 latach.

Zad. 2
Ilość pewnego związku promieniotwórczego po n latach wyraża się wzorem:
$Q = 200 \cdot 10^{-kn}, n \geq 0$
Wiedząc, że po 40 latach ilość danego związku promieniotwórczego wynosi 50 gram. Znajdź wartość stałej k, a następnie odpowiedz ile gramów tego materiału zostanie po 80 latach?

Zad. 3
W pewnym mieście od 1 stycznia 1970 roku liczbę mieszkańców przedstawia wzór:
$N = 120000 \cdot (1,04)^{kt}, t \geq 0$
Wiedząc, że 1 stycznia 1980 roku liczba mieszkańców wynosiła 177629 oblicz liczbę mieszkańców miasta 1 stycznia 2007 roku.

Zad. 4
Pani Marzena postanowiła założyć lokatę na trzy lata, przy kapitalizacji miesięcznej. Ile wynosiło oprocentowanie tej lokaty, jeśli wartość jej kapitału wzrosła z 2000 zł do 2540 zł (po upływie 3 lat)?

Temat 20: Zastosowanie funkcji wykładniczej w praktyce

Zad. 1
Po ilu latach wartość środków na lokacie przekroczy 18 000 zł, jeśli:
- kapitał początkowy wynosi 10 000 zł
- oprocentowanie w stosunku rocznym wynosi 6%
- kapitalizacja następuje co kwartał?

Zad. 2
Wartość samochodu Pana Tomasza po n latach wyraża się wzorem:
$V = 20000e^{-0,15n}$
Po ilu latach wartość samochodu zmniejszy się o połowę, jeśli Pan Tomasz zapłacił za niego 20 000 zł? (wynik zaokrąglij)

Zad. 3
Liczba mieszkańców Portugalii od 1990 roku wyraża się wzorem:
$P = p \cdot e^{0,04t}$
W 1990 roku liczba mieszkańców wynosiła około 10,5 mln. Oblicz wartość p, a następnie oszacuj liczbę mieszkańców Portugalii w 2020 roku.

Zad. 4

Czy prawdą jest, że jeśli $y = 10^x, to\ y^2 = 100^x\ oraz\ \frac{y}{10} = 10^{x-1}$.

Temat 21: Zastosowanie funkcji logarytmicznej w praktyce

Cel lekcji: praktyczne zastosowanie funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań z innych dziedzin

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Stosować funkcję logarytmiczną i jej własności do rozwiązywania zadań z kontekstem fizycznym lub chemicznym

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o logarytmach
3. Podanie praktycznych zastosowań logarytmów
4. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem programu Excel

Zad. 1
Głośność dźwięku, jaką słyszy człowiek jest mierzona poziomem natężenia dźwięku, danego wzorem:
$$d = 10\log\left(\frac{I}{i}\right)$$
Oblicz d, jeśli: $I = 100i$.

Zad. 2
Związek między wagą (W) a wzrostem (h) dziecka w wieku od 5 do 13 lat przedstawia wzór:
$\log W = \log(2,4) + 0,8h$
Bazując na tym wzorze oszacuj wagę dziecka w wieku 10 lat, które ma 1,4 m wzrostu.

Zad. 3
Zmniejszanie się grubości warstwy ozonowej można przedstawić za pomocą wzoru:
Oblicz grubość warstwy ozonowej w danym rejonie Ziemi (zmienna x):
$$\log \lambda_0 - \log \lambda = kx$$
$$k = 0,4$$
$$\lambda_0 = 3200 \cdot 10^{-8}$$
$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1,1$$

Zad. 4

Dane jest równanie:

$y = \log_b 45 + \log_b 25 - \log_b 75$

Oblicz wartość zmiennej y, jeśli $b = 5$.

Temat 22: Zastosowanie funkcji logarytmicznej w praktyce

Zad. 1

Bez używania kalkulatora zapisz podane obok wyrażenie w postaci jednego logarytmu:

$2\log\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right) + \log 3 + 2\log 2$

Zad. 2

Dane jest równanie:

$\ln(3x-5) - 3\ln 4 = 2\ln y$

Znajdź wartość zmiennej y, jeśli $x = 2$.

Zad. 3

Czas bezawaryjnej pracy maszyn w pewnym zakładzie przedstawia funkcja:

$n = -\frac{1}{c}\log(1-x)$

Gdzie: n - oznacza liczbę lat bezawaryjnej pracy maszyny, a c jest pewną stałą, zmienna x jest wyrażona jako odsetek maszyn, która ulegnie awarii w czasie n. Oblicz po ilu latach 40% maszyn ulegnie awarii, jeśli c=0,1

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1

Zapisz podane wyrażenie w prostszej postaci

$\frac{2^{2x+1} + 4^x}{2^{2x} + 2^{x+1}}$

Zad. 2

Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 1$.

Zad. 3

Oblicz wartości poszczególnych wyrażeń:

a) $\log_{\sqrt{7}} 49$

b) $\log_3 9\sqrt{3}$

c) $\log_4 64$

d) $\log_{0,5} 32$

Zad. 4
Naszkicuj wykres funkcji $g(x)=\log_2(2-x)+3$

Zad. 5
Wyznacz dziedzinę funkcji: $g(x)=\log_{x+4}(3+x)$

Zad. 6
Rozwiąż podane równania:
a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{2x+3}=\left(\frac{5}{7}\right)^{x-10}$
b) $\frac{2^{2+x}}{4^{1-3x}}=8^{x+4}$
c) $\log_2^2 x-2\log_2 x-8=0$

Sprawdzian

Zad. 1
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=2^{2x+1}-3$.

Zad. 2
Zapisz podane wyrażenie w prostszej postaci

$$\left(\frac{x^{a+b}}{x^a}\right)^a\cdot\left(\frac{x^{a-b}}{x^b}\right)^{a-b}$$

Zad. 3
Oblicz wartości poszczególnych wyrażeń:
a) $\log_5\frac{1}{125}$
b) $\log_{\frac{1}{3}}81$
c) $\log_4 8$
d) $\log_{0,1}100$

Zad. 4
Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=-\log_2(x+2)-3$.

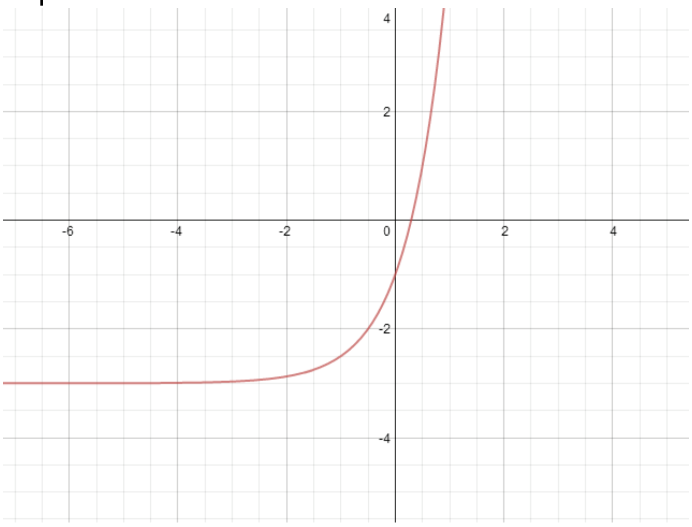
Zad. 5
Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x)=\log_{7-x}(x+4)-3$

Zad. 6
Rozwiąż równania:
a) $-3^{2x}+12\cdot3^x=27$

b) $10^{2x} = 1000$
c) $\log_2 x^2 = (\log_2 x)^2$
d) $\log_5(x-1) - \log_5 x = 2\log_5 2$

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1
Odp.

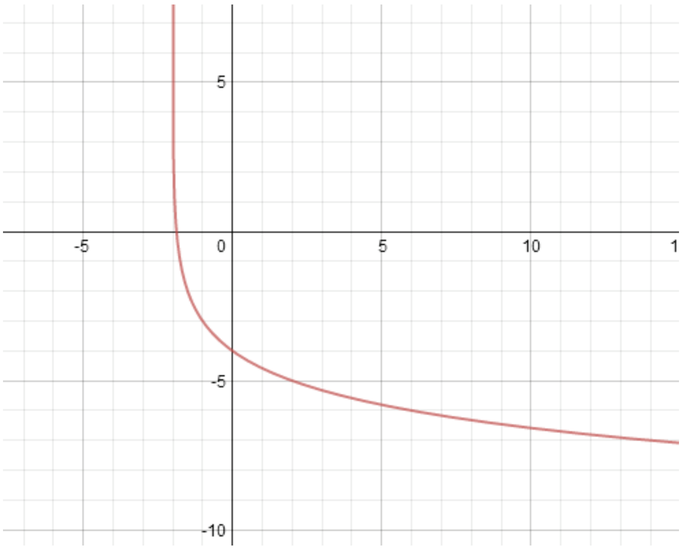


Zad. 2

Odp. $x^{a^2-2ab+2b^2}$

Zad. 3
a) -3
b) -4
c) $1{,}5$
d) -2

Zad. 4



Zad. 5

Odp. $x \in (-4,7) \setminus \{6\}$

Zad. 6

a) $\begin{matrix} x=2 \\ x=1 \end{matrix}$

b) $x=1{,}5$

c) $\begin{matrix} x=1 \\ x=4 \end{matrix}$

d) brak rozwiązań

5. Planimetria II

Temat 1: Figury jednokładne

Cel lekcji: wprowadzenie definicji jednokładności i jej własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję jednokładności
- Wyznaczać obrazy punktów, prostych, półprostych, odcinków, kątów, kół i wielokątów w jednokładności o podanym środku i skali
- Wyznaczać wzór funkcji, której wykres jest figurą jednokładną w stosunku do wykresu danej funkcji
- Znać szczególny przypadek jednokładności o skali $k=1$ i $k=-1$
- Znać podstawowe własności figur jednokładnych

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia jednokładności i omówienie jej własności
3. Wyznaczanie obrazów punktów, odcinków, wielokątów, kół w jednokładności o skali *k* i danym środku

4. Jednokładność o skali $k = 1$ to odwzorowanie tożsamościowe, jednokładność o skali $k = -1$ to symetria środkowa
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Jakim przekształceniem jest jednokładność o środku w punkcie P i skali $k = -1$

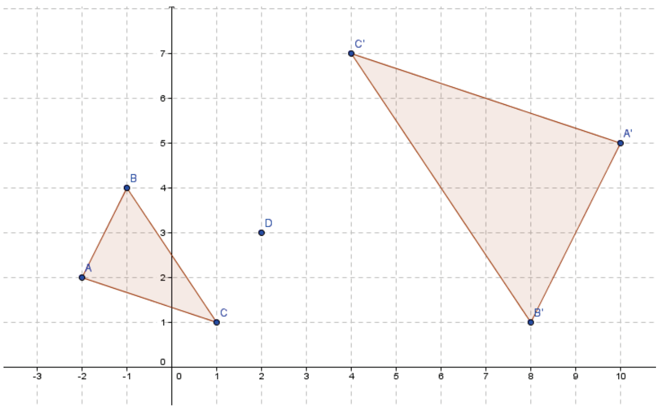
Zad. 2
Dany jest odcinek AB, gdzie $A = (-2,3)\ i\ B = (4,6)$ oraz punkt $P(0,0)\ i\ S\ (-1,-2)$. Podaj obraz tego odcinka w:
a) J_P^3
b) $J_P^{-\frac{1}{2}}$
c) $J_S^{-\frac{3}{2}}$
d) J_S^{-2}

Zad. 3
Dane są punkty $B(1,2)\ i\ B'(-11,-1)$. Znajdź taki punkt O, aby: $B' = J_O^{-2}(B)$.

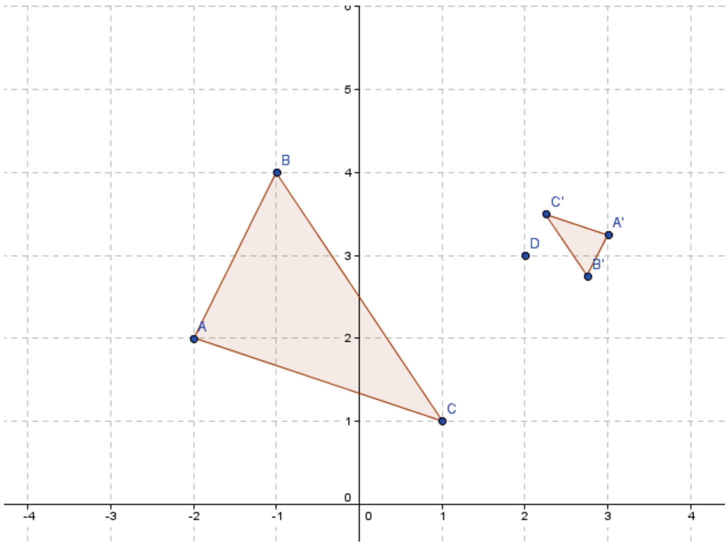
Zad. 4
Wskaż obraz prostej k w jednokładności:
$J_O^{-\frac{1}{2}}$
$O(0,0)$
$k: -2x - y = 10$

Zad. 5
Dane są dwa odcinki AB i CD. Wyznacz jednokładność o środku w punkcie P i skali s tak, aby:
$J_P^s(AB) = CD$
$A(-1,2)$
$B(4,4)$
$C(6,5;-0,5)$
$D(-1;-3,5)$
Podaj skalę s i współrzędne punktu P

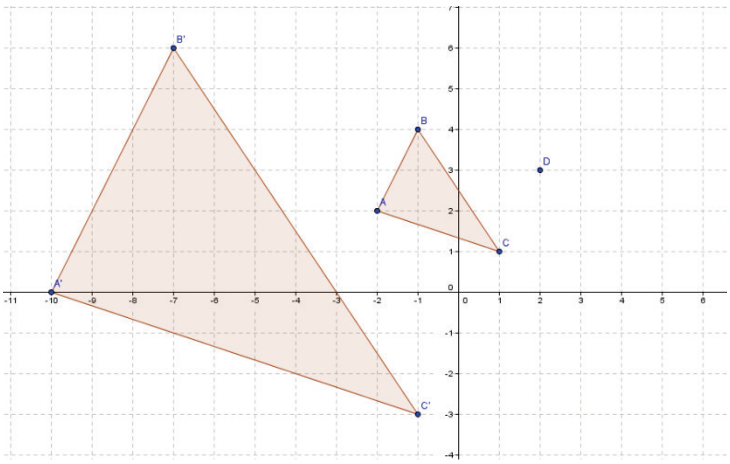
Zad. 6
Dopasuj podane jednokładności do odpowiednich rysunków:
A. $J_D^{-2}(ABC) = A'B'C'$
B. $J_D^{-\frac{1}{4}}(ABC) = A'B'C'$
C. $J_D^{3}(ABC) = A'B'C'$
1.



2.



3.



Zad. 7

Wielokąt W' jest obrazem wielokąta W w podanej jednokładności. Wyznacz stosunek obwodu wielokąta W do obwodu wielokąta W'.

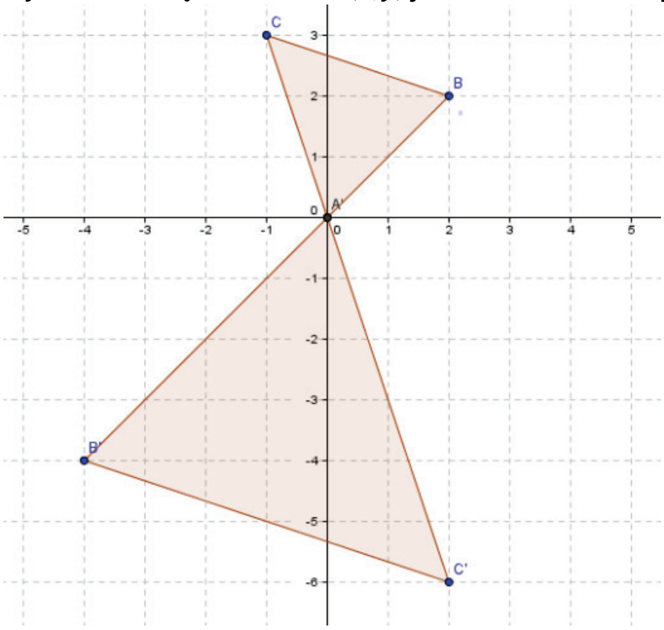
$J_P^2(W) = W'$

Temat 2: Figury jednokładne

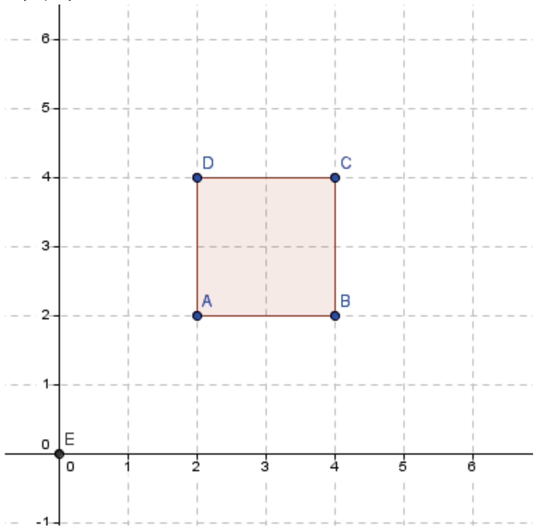
Zad. 1

Wskaż zdania prawdziwe:
a) Obrazem prostej w jednokładności jest prosta prostopadła
b) Obrazem prostej w jednokładności jest prosta równoległa
c) Obrazem kąta w każdej jednokładności jest kąt do niego przystający
d) Obrazem kąta w każdej jednokładności jest kąt k-razy większy

Zad. 2
Wyznacz s, jeśli:
$|PB| = 4$
$|BB'| = 2$
$J_P^s(B) = B'$
Zad. 3
Wyznacz skalę s i środek P(x,y) jednokładności trójkąta ABC:



Zad. 4
Znajdź obraz kwadratu ABCD w jednokładności o skali $k = -0{,}75$ i środku w punkcie P(0,0)



Zad. 5
Wyznacz skalę k jednokładności o środku w punkcie P(0,2) tak, aby obrazem okręgu o środku w punkcie A(3,2) i promieniu równym 2 był okrąg przechodzący przez punkt (3,2).

Zad. 6
Wyznacz równanie okręgu będącego obrazem okręgu o środku w punkcie (-1,4) i promieniu 3 w jednokładności o skali $k = -1$ i środku P(4,2)

Temat 3: Figury podobne

Cel lekcji: wprowadzenie definicji podobieństwa oraz zastosowanie własności podobieństwa figur do obliczania pól i obwodów wielokątów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję podobieństwa i dostrzegać związek między podobieństwem a jednokładnością
- Wskazywać przykłady figur podobnych
- Stosować podobieństwo do obliczania pól i obwodów wielokątów
- Sprawdzać czy figury o danych długościach boków są podobne

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia podobieństwa i wskazanie związku między podobieństwem a jednokładnością: każda jednokładność jest podobieństwem o skali $|k|$
3. Przypomnienie cech podobieństwa trójkątów: bbb (bok – bok - bok), bkb (bok – kąt - bok), kkk (kąt – kąt - kąt)
4. Rozwiązywanie zadań

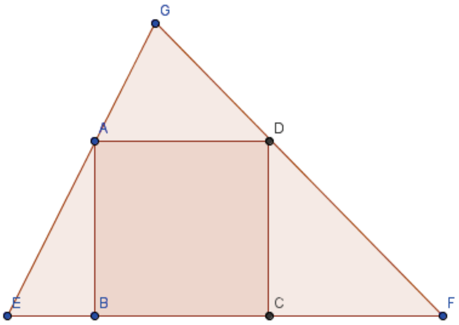
Zad. 1
Cięciwy RS i PQ pewnego okręgu przecinają się w punkcie A. Czy prawdą jest, że trójkąty RPA i SQA są podobne?

Zad. 2
Dane są punkty: $A(-1,2), B(2,2), C(-1,5)\ i\ D(5,5)$. Które spośród wymienionych trójkątów są podobne: BCD, ABC, ABD

Zad. 3
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, ponadto $|AB| = 2|AC|$. Wyznacz stosunek odcinków, na jakie wysokość AD dzieli przeciwprostokątną.

Zad. 4
Oblicz długości boków trójkąta ABC, w którym $|AC| = |BC|$, jeśli wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość 4, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi 1.

Zad. 5
Wierzchołki kwadratu ABCD należą do boków trójkąta EFG. Bok trójkąta zawierający bok kwadratu jest równy 6, a wysokość poprowadzona z wierzchołka G ma długość 4. Oblicz długość boku kwadratu (a).



Temat 4: Figury podobne

Zad. 1
Sprawdź czy trójkąt o wierzchołkach w punktach $A(-1,4), B(-2,1), C(2,3)$ jest podobny do trójkąta $D(4,4), E(4,-3), F(11,-3)$

Zad. 2
Czy trójkąty ABC i DEF o podanych długościach boków są podobne?

$|AB|=2$

$|BC|=\sqrt{3}$

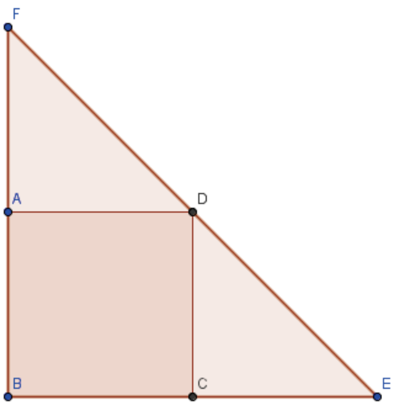
$|AC|=3$

$|DE|=2\sqrt{3}$

$|EF|=3\sqrt{3}$

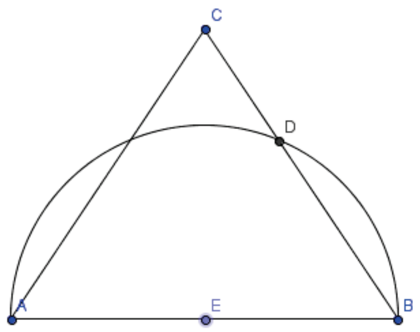
$|DF|=2$

Zad. 3
Dany jest kwadrat wpisany w trójkąt prostokątny (jak na rysunku). Wiedząc, że $|BF| = 3$ i $|BE| = 7$ oblicz długość boku kwadratu (a).



Zad. 4

Na podstawie trójkąta zbudowano półkole (patrz rysunek). Oblicz długość odcinka DB, jeśli $|AB| = 4\ i\ |AC| = |BC| = 8$



Zad. 5

Dany jest trapez o podstawach długości odpowiednio 3 i 4. Ile wynosi długość odcinka równoległego do podstaw tego trapezu, który dzieli trapez na dwa czworokąty o równych polach?

Temat 5: Czworokąty opisane na okręgu

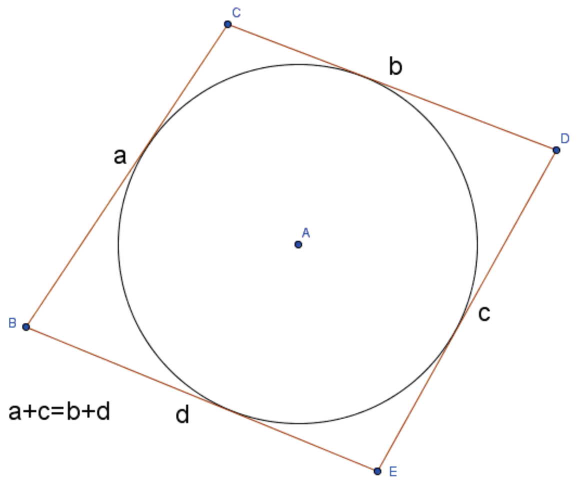
Cel lekcji: praktyczne zastosowanie własności czworokąta opisanego na okręgu

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać warunki, jakie musi spełniać czworokąt opisany na okręgu
- Wyznaczać pole i obwód wielokąta opisanego na okręgu
- Stosować twierdzenia dotyczące wielokątów opisanych na okręgu
- Wyznaczać długość odcinka łączącego środki ramion trapezu opisanego na okręgu
- Wiedzieć, w jaki trapez i równoległobok można wpisać okrąg
- Sprawdzać, czy w czworokąt o danych długościach boków można wpisać okrąg

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Omówienie warunków, jakie musi spełniać czworokąt opisany na okręgu



3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wiedząc, że obwód trapezu równoramiennego opisanego na okręgu wynosi 40 cm, oblicz długość ramienia trapezu.

Zad. 2
Odpowiedz na pytania:
a) Kiedy w trapez można wpisać okrąg?
b) Kiedy w równoległobok można wpisać okrąg?

Zad. 3
Boki czworokąta ABCD opisanego na okręgu tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny (bok AB jest pierwszym wyrazem ciągu). Wiedząc, że obwód czworokąta wynosi 32 cm oblicz długość boku BC.

Zad. 4
Oblicz promień okręgu wpisanego w trapez prostokątny o podstawach długości 25 i 10.

Zad. 5
Podstawy trapezu równoramiennego opisanego na okręgu mają długości 9 i 16. Oblicz długość promienia okręgu.

Temat 6: Czworokąty opisane na okręgu

Zad. 1
Czy boki czworokąta opisanego na okręgu mogą mieć długości:
a) $9,11,7,13$
b) $5,8,11,7$

Zad. 2
Obwód czworokąta ABCD opisanego na okręgu wynosi 22 cm, obwód trójkąta ABD jest równy 22 cm, a trójkąta BCD - 14 cm. Oblicz długość przekątnej BD.

Zad. 3
Dany jest trapez równoramienny opisany na okręgu o przekątnej długości d. Oblicz długości boków trapezu, jeśli jego obwód wynosi L.
$d = \sqrt{41}$
$L = 20$

Zad. 4
W trapez równoramienny o podstawach długości 10 i 6 wpisano okrąg. Oblicz długość promienia tego okręgu, jeśli kąt ostry trapezu ma miarę $\alpha = 60^\circ$

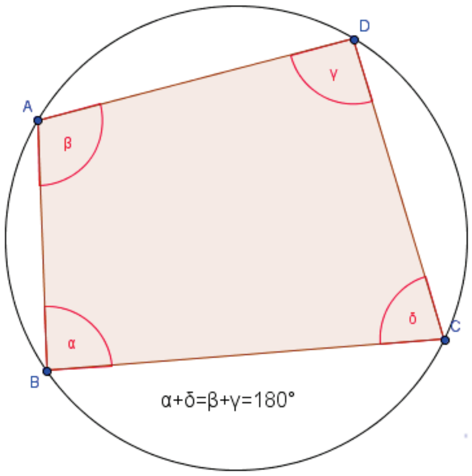
Zad. 5
Czy podane stwierdzenie jest prawdziwe?
W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych danego czworokąta.

Temat 7: Czworokąty wpisane w okrąg

Cel lekcji: zastosowanie własności czworokątów wpisanych w okrąg do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać warunki, jakie musi spełniać czworokąt wpisany w okrąg
- Sprawdzać, czy czworokąt o kątach o danej mierze może być wpisany w okrąg
- Dowodzić twierdzenia dotyczące wielokątów wpisanych w okrąg
- Stosować poznane twierdzenia do wyznaczania miar kątów wewnętrznych czworokąta wpisanego w okrąg

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Omówienie twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg



3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Czy czworokąt o miarach kątów wewnętrznych $70°, 75°, 110°, 105°$ może być wpisany w okrąg?

Zad. 2
Czy czworokąt o miarach kątów wewnętrznych $65°, 80°, 120°, 95°$ może być wpisany w okrąg?

Zad. 3
Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg. Ile może wynosić miara kąta przy wierzchołku C, jeśli trójkąt ABD ma miary kątów: $30°, 70°, 80°$

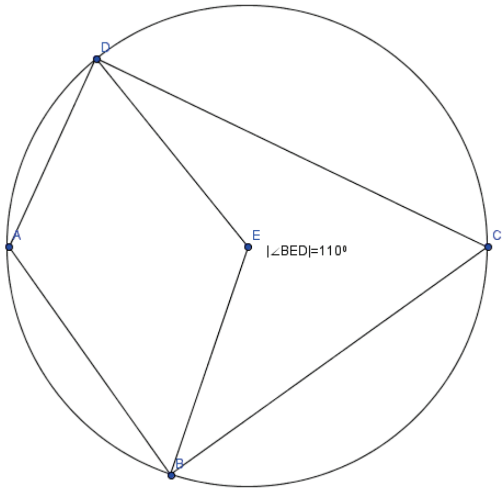
Zad. 4
W okrąg wpisano czworokąt ABCD. Stosunek miar kątów przy wierzchołkach A, B, C wynosi 3: 4: 6. Wyznacz miarę kąta przy wierzchołku D.

Zad. 5
Dany jest prostokąt ABCD o kącie ostrym między przekątnymi równym $\beta = 120°$. Wyznacz promień okręgu opisanego na prostokącie, jeśli najkrótszy bok ma długość 6 cm.

Zad. 6
W czworokącie wpisanym w okrąg przedłużenia przeciwległych boków przecinają się tworząc kąty: $68°\ i\ 24°$
Wyznacz miary wszystkich kątów danego czworokąta.

Temat 8: Czworokąty wpisane w okrąg

Zad. 1
Na podstawie rysunku wyznacz miary kątów czworokąta ABCD wiedząc, że punkt E jest środkiem okręgu, a przekątna AC jego średnicą.



Zad. 2
Czy prawdą jest, że jeśli dwusieczne kątów wewnętrznych pewnego trapezu równoramiennego wyznaczają czworokąt ABCD, to można na nim opisać okrąg?

Zad. 3
Które równoległoboki da się wpisać w okrąg?

Zad. 4
Czy na dowolnym trapezie da się opisać okrąg?

Zad. 5
Czy podane zdanie jest prawdziwe:
Dany jest prostokąt ABCD wpisany w okrąg o środku w punkcie S, punkty przecięcia się stycznych do okręgu (w punktach A, B, C, D) są wierzchołkami rombu.

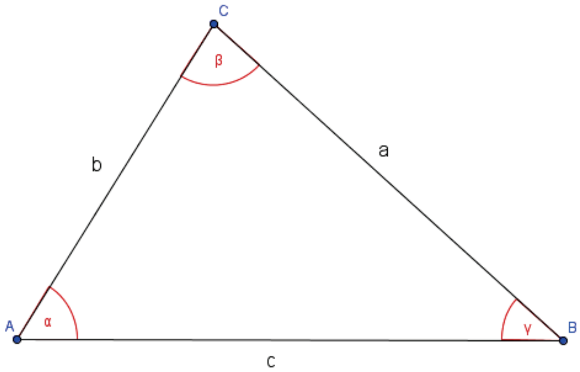
Temat 9: Twierdzenie sinusów

Cel lekcji: poznanie twierdzenia sinusów i jego zastosowań do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać twierdzenie sinusów i stosować je do wyznaczania długości boków trójkąta, miar kątów w trójkącie, sinusów kątów trójkąta lub długości promienia okręgu opisanego na trójkącie
- Dowodzić twierdzenia sinusów

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć

2. Podanie twierdzenia sinusów



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Dane są długości boków $a = 10, b = 6, c = 8$. Wyznacz wartości sinusów wszystkich kątów trójkąta.

Zad. 2
W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta przy wierzchołku B, która przecięła bok AC w punkcie D. Wyznacz długości boków AD i DC, jeśli:
$|AB| = 12$
$|BC| = 8$
$|AC| = 16$

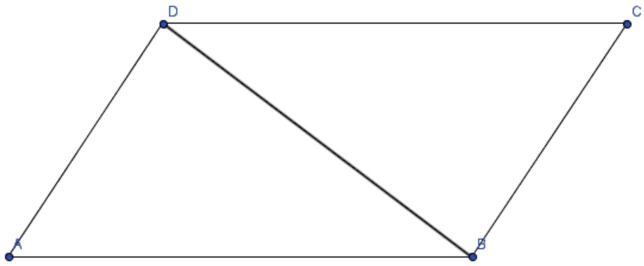
Zad. 3
W trójkącie ABC dane są:
$|AC| = 3$
$|\angle CAB| = 45°$
$|\angle ABC| = 120°$
Oblicz długość boku AB i BC oraz podaj promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 4
Długość promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi 4. Ponadto wiadomo, że miara kąta ABC wynosi 60˚, a kąta CAB - 45˚. Wyznacz długości boków AB i BC.

Zad. 5
W trójkącie równoramiennym ABC, gdzie $|AC| = |BC|$, kąt ACB ma miarę 60˚. Ile wynosi stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt?

Temat 10: Twierdzenie sinusów

Zad. 1
W równoległoboku ABCD długość krótszej przekątnej wynosi 3, miara kąta ADB wynosi 60°, a kąta BDC - 45°. Oblicz długości boków AB i AD.



Zad. 2
W trójkącie ABC miara kata przy wierzchołku A wynosi 60°, długość boku AB jest równa 10cm, a boku AC - 6 cm. Oblicz pole trójkąta.

Zad. 3
W trójkącie ABC długość boku AC jest równa 4, a boku BC - 7. Wyznacz długość trzeciego boku, jeśli kąt przy wierzchołku B jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku A.

Zad. 4
Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono wysokość i środkową, które podzieliły kąt na trzy równe części. Jakim trójkątem jest trójkąt ABC?

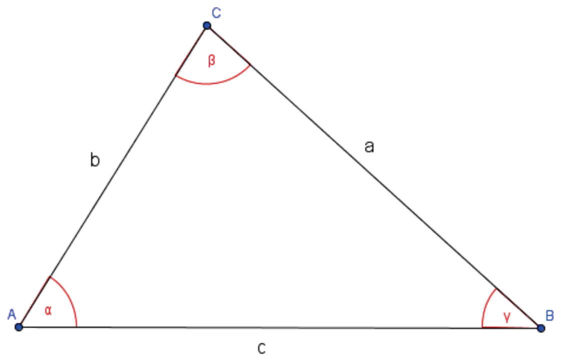
Zad. 5
W trójkącie ABC ($|AC| = |BC|$) poprowadzono dwusieczną BD długości 6 cm. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt, jeśli miara kąta ADB wynosi 45°.

Temat 11: Twierdzenie cosinusów

Cel lekcji: poznanie twierdzenia cosinusów i jego zastosowań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać twierdzenie cosinusów i stosować je do wyznaczania długości boków, miar kątów, cosinusów kątów w trójkącie
- Dowodzić twierdzenia cosinusów
- Rozwiązywać zadania geometryczne z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów
- Sprawdzać jakim trójkątem jest trójkąt o podanych długościach boków

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Omówienie twierdzenia cosinusów i jego zastosowań



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$$

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Zdecyduj, jakim trójkątem jest trójkąt o bokach długości:
a)
$a = 12$
$b = 13$
$c = 5$
b)
$a = 4$
$b = 4$
$c = 6$
c)
$a = 5$
$b = 7$
$c = 8$

Zad. 2
Boki AB i BC trójkąta ABC mają długości: 6 i 10. Oblicz długość trzeciego boku, jeśli kąt ABC ma miarę 120°.

Zad. 3
Oblicz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka B trójkąta ABC, w którym miara kąta CAB jest równa 60° oraz:
$|AB| = 12$
$|AC| = 8$

Zad. 4
W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AC| = 3, |BC| = 6$. Wyznacz długość dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka kąta C, jeśli miara kąta ACB wynosi 120°.

Zad. 5
W równoległoboku ABCD miara kąta ostrego wynosi 30°, a boki mają długości $a = 8\sqrt{3}$ i $b = 4$. Oblicz długość krótszej przekątnej równoległoboku.

Temat 12: Twierdzenie cosinusów

Zad. 1
W trójkącie ABC dane są długości boków: $|AB| = 6, |BC| = 4, |AC| = 8$. Wyznacz sinus kąta CAB.

Zad. 2
Boki trójkąta ABC tworzą ciąg arytmetyczny o sumie równej 30. Wyznacz długości boków trójkąta, jeśli cosinus najmniejszego kąta jest równy $\cos\alpha = \frac{13}{14}$.

Zad. 3
Czy prawdą jest, że jeśli kąty α, β, γ danego trójkąta spełniają podany obok warunek, to trójkąt jest równoramienny?
$\sin\beta = 2\cos\alpha \cdot \sin\gamma$

Zad. 4
W trójkącie poprowadzono środkowe długości: 3, 4, 7. Wyznacz obwód L tego trójkąta.

Zad. 5
W trójkącie prostokątnym równoramiennym poprowadzono środkowe z wierzchołków kątów ostrych. Wyznacz cosinus kąta ostrego między tymi środkowymi wiedząc, że długość przyprostokątnej wynosi 6.

Temat 13: Pola i obwody wielokątów

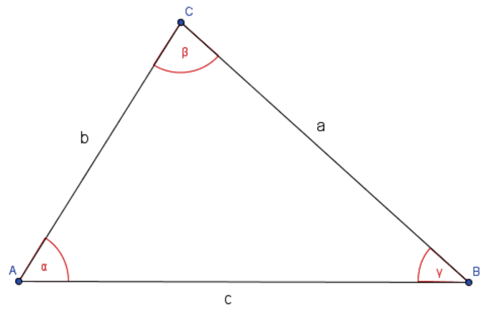
Cel lekcji: zastosowanie poznanych twierdzeń do obliczania pól i obwodów wielokątów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzory na pola i obwody wielokątów: trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu
- Rozwiązywać zadania geometryczne z zastosowaniem poznanych twierdzeń

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wzorów na pole trapezu, rombu, równoległoboku, a szczególności na pole trójkąta, np.

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\beta$$
$$P = rp$$
$$P = \frac{abc}{4R}$$
$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Gdzie: R – promień okręgu opisanego na trójkącie, r – promień okręgu wpisanego w trójkąt, p – połowa obwodu trójkąta



3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz pole czworokąta ABCD, gdy dane są:
$|AB| = 3$
$|BC| = 4$
$|CD| = 4$
$|AD| = 5$

Zad. 2
W trójkącie prostokątnym równoramiennym z wierzchołka kąta ostrego poprowadzono środkową długości 10. Oblicz pole tego trójkąta oraz wyznacz długość przeciwprostokątnej x.

Zad. 3
W trapezie równoramiennym stosunek długości boków wynosi: 5: 12: 5: 20, a sinus kąta ostrego tego trapezu jest równy 0,6. Oblicz pole trapezu.

Zad. 4
Promień okręgu wpisanego w trapez równoramienny o kącie ostrym równym 30° wynosi 2 cm. Oblicz pole trapezu.

Zad. 5
Długości boków trójkąta wpisanego w okrąg są równe $a = 2$ i $b = 4\sqrt{3}$. Wyznacz długość trzeciego boku i pole trójkąta wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy 4.

Temat 14: Pola i obwody wielokątów

Zad. 1
Dłuższa przekątna równoległoboku długości 6 cm tworzy z jego bokami kąty: 45° i 15°. Oblicz pole równoległoboku.

Zad. 2
W trójkącie prostokątnym przyprostokątne różnią się o 4. Oblicz pole trójkąta oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego, jeśli długość przeciwprostokątnej wynosi 20.

Zad. 3
W trójkąt równoramienny ABC o kącie między ramionami równym 120° wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz długości boków trójkąta oraz oblicz jego pole.

Zad. 4
Pole rombu, w którym kąt rozwarty jest trzy razy większy od kata ostrego jest równe $8\sqrt{2}$. Oblicz obwód rombu.

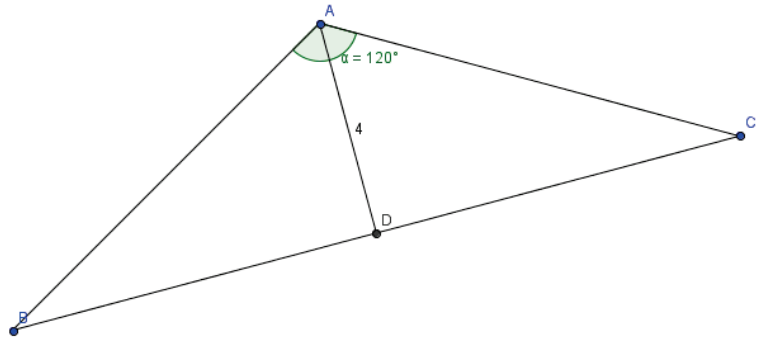
Temat 15: Przykłady zastosowań trygonometrii

Cel lekcji: zastosowanie trygonometrii w rozwiązywaniu zadań geometrycznych (obliczanie pól i obwodów wielokątów)

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Stosować poznane własności funkcji trygonometrycznych oraz twierdzenia sinusów i cosinusów do obliczania pól i obwodów wielokątów
- Znać i stosować wzory na pola i obwody trójkątów i czworokątów oraz wykorzystywać je do obliczania pól i obwodów wielokątów o dowolnej liczbie boków

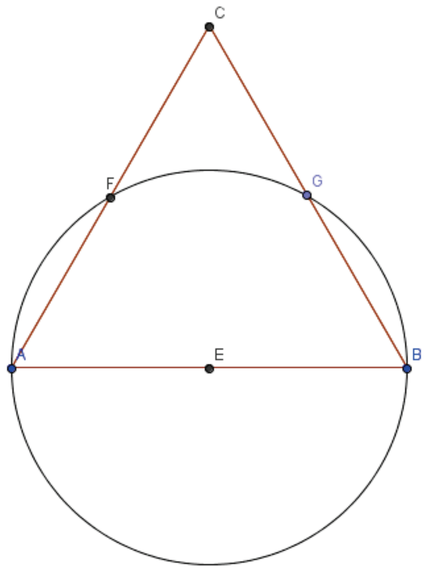
Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie podstawowych wiadomości z trygonometrii oraz twierdzenia sinusów i cosinusów
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
W trójkącie równoramienny dane są:



Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zad. 2
Trójkąt ABC jest równoboczny, odcinek AB jest średnicą okręgu o promieniu równym 2. Ile wynosi stosunek pola figury wyznaczonej przez punkty FGC do pola figury wyznaczonej przez punkty ABGF?



Zad. 3
Przekątna trapezu równoramiennego tworzy z dłuższą podstawą kąt 30°. Wyznacz pole trapezu, jeśli przekątna ma długość 3.

Zad. 4
Pole trapezu opisanego na okręgu wynosi 36. Kąty przy dłuższej podstawie trapezu mają odpowiednio miary 30° i 45°. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w trapez.

Temat 16: Przykłady zastosowań trygonometrii

Zad. 1
Miara kąta przy dłuższej podstawie trapezu równoramiennego opisanego na okręgu wynosi 60°. Oblicz pole trapezu, jeśli promień okręgu wpisanego w trapez jest równy 2.

Zad. 2
Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 6cm, a kąt przy jego podstawie ma miarę 45°. Oblicz pole trójkąta.

Zad. 3
Środkowe trójkąta mające długości odpowiednio 4 i 6 przecinają się pod kątem 45°. Wyznacz pole tego trójkąta.

Zad. 4
Dany jest trójkąt równoramienny o polu równym $16\sqrt{3}$. Kąt między ramionami ma miarę 120°. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt.

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Dany jest trójkąt ABC, w którym miara kąta CAB wynosi 45°, a miara kąta ABC - 60°. Wiedząc, że bok AC ma długość 6 wyznacz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zad. 2
Czy trójkąty ABC i DEF są podobne?
$A(2{,}2), B(6{,}1), C(8{,}5), D(6,-2), E(2,-1), F(0,-5)$

Zad. 3
Stosunek długości przekątnych rombu jest równy √2. Oblicz pole rombu, jeśli jego bok jest równy 12.

Zad. 4
W trapezie prostokątnym przekątne przecinają się pod kątem prostym, a podstawy mają długości 6 i 18. Oblicz długość krótszego ramienia tego trapezu.

Zad. 5
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 60°, boki AC i BC mają długości odpowiednio: 6 i 14. Oblicz długość trzeciego boku.

Zad. 6
Wyznacz obraz trójkąta ABC w jednokładności o środku w punkcie (-1,2) i skali k=-2.
$A(1{,}2)$
$B(5{,}4)$
$C(-2{,}6)$

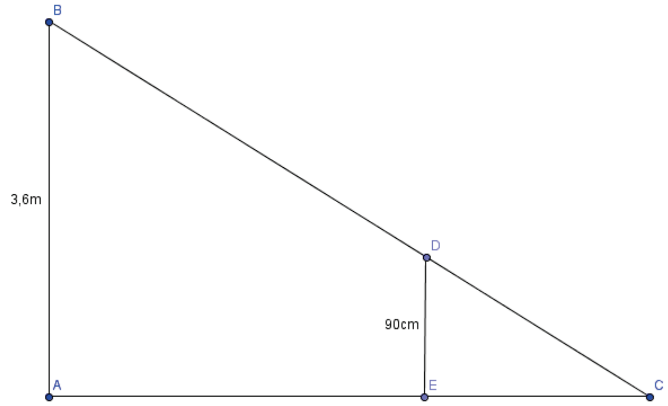
Sprawdzian

Zad. 1
Podstawy trapezu mają długości 8 i 12, a kąty przy podstawie są równe: 30° i 45°. Oblicz pole trapezu.

Zad. 2
Dany jest trójkąt o bokach długości 3, 4 i 5. Wyznacz długość okręgu wpisanego i opisanego na trójkącie.

Zad. 3
Na czworokącie ABCD opisano okrąg. Stosunek miar kątów przy wierzchołkach A, B, C wynosi 4:2:8. Ile może wynosić miara kąta przy wierzchołku D?

Zad. 4
Dziewczynka o wzroście 90cm odchodzi od latarni, której wysokość jest równa 3,6m. Wiedząc, że dziewczynka porusza się z prędkością 1,2m/s wyznacz długość jej cienia po 4 sekundach.



Zad. 5
Wyznacz pole rombu, w którego obwód wynosi 32, a suma długości jego przekątnych jest równa 48.

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1
Odp. $P = 60 - 20\sqrt{3}$
Zad. 2
Odp. $r = 1$
$R = 2{,}5$

Zad. 3
Odp. $150°$

Zad. 4
Odp. $1{,}6m$

Zad. 5
Odp. $P = 192$

6. Geometria analityczna

Temat 1: Proste w układzie współrzędnych

Cel lekcji: badanie położenia prostych w układzie współrzędnych oraz zapisywanie równania prostych spełniających określone warunki

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Odróżniać równanie prostej zapisanej w postaci ogólnej i kierunkowej
- Zapisywać równanie prostej, jeśli dane są dwa punkty, przez które prosta przechodzi

– Zapisywać równanie prostej na podstawie danego współczynnika kierunkowego i punktu należącego do prostej
– Zapisywać równanie prostej, jeśli znany jest kąt nachylenia prostej do osi OX i punkt należący do tej prostej
– Wskazywać przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta, jeśli dane są znaki współczynników a i b
– Badać współliniowość punktów
– Wyznaczać współrzędne punktu wspólnego dwóch prostych
– Wyznaczać równanie prostej równoległej lub prostopadłej do danej przechodzącej przez dany punkt
– Badać równoległość i prostopadłość dwóch prostych w zależności od parametru

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zapisanie równania prostej w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$ i kierunkowej $y = ax + b$ oraz podanie interpretacji współczynników a i b:
   a – współczynnik kierunkowy, gdy $a > 0$ funkcja jest rosnąca, $a < 0$ – funkcja malejąca, $a = 0$ – funkcja stała (nie ma miejsc zerowych)
   b – wyraz wolny, wskazuje punkt przecięcia prostej i osi OY
3. Zapisanie warunku na prostopadłość i równoległość prostych:

$$y = ax + b$$
$$y = cx + d$$

Równoległość: $a = c$
Prostopadłość: $ac = -1$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Znajdź równanie prostej w postaci ogólnej przechodzącej przez punkty o współrzędnych: A = (-2,4), B = (1,6)

Zad. 2
Sprawdź, które z podanych punktów należą do prostej o równaniu 2x – 3y + 1 = 0
A = (-4,2), B = (1,1), C = $(0,\frac{1}{3})$, D = $(\frac{1}{3},-1)$, E = (3,0), F = (4,3)

Zad. 3
Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt A i nachylonej do osi OX pod kątem 45˚. A = (2,-4)

Zad. 4
Znajdź współrzędne x i y punktu wspólnego prostych danych równaniami:
$y = 2x - 4,\ x - y + 3 = 0$

Zad. 5
Czy punkty A, B, C są współliniowe?
A = (0,4), B = (3,-5), C = (-2,10)

Zad. 6
Oblicz wierzchołki trójkąta ABC, którego boki zawierają się w podanych prostych:
$$y = 2x - 6, \quad y = -x + 3, \quad x - 2y + 12 = 0$$

Temat 2: Proste w układzie współrzędnych

Zad. 1
Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt A(6,5), która tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 64.

Zad. 2
Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej k.
P = (-4,1)
k: $2x - y + 1 = 0$

Zad. 3
Podaj współczynnik a i b prostej zapisanej w postaci kanonicznej przechodzącej przez punkt S = (1,4) i prostopadłej do prostej m: $x + 3y - 3 = 0$

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru m proste k i n są prostopadłe, a dla jakiej równoległe?
k: $y = (2m + 1)x - 1$
m: $y = (m - 1)x + 2$

Zad. 5
Czy podane punkty są wierzchołkami równoległoboku ABCD?
A = (-1,10), B = (2,4), C = (6,8), D = (3,14)

Zad. 6
Dany jest trójkąt równoramienny ABC, którego podstawą jest odcinek o końcach A=(1,4), B=(5,2). Wiedząc, że jeden z boków trójkąta zawiera się w prostej o równaniu y=x-8, oblicz współrzędne wierzchołka C.

Temat 3: Odległość dwóch punktów, środek odcinka. Odległość punktu od prostej

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia odległości w układzie współrzędnych oraz metod jej obliczania

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozumieć pojęcie odległości w układzie współrzędnych
- Wyznaczać długość odcinka o danych końcach
- Wyznaczać współrzędne środka odcinka
- Wyznaczać jeden z końców odcinka, jeśli znane są współrzędne drugiego końca i środka tego odcinka
- Obliczać odległość punktu od prostej

- Obliczać odległość dwóch prostych równoległych
- Wyznaczać równania symetralnych odcinka, środkowych trójkąta, dwusiecznych kąta
- Stosować poznane wzory i twierdzenia do rozwiązywania trudniejszych zadań geometrycznych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie pojęcia długości odcinka, środka odcinka i odległości punktu od prostej:

Dane są punkty C i D oraz prosta $Ax + By + C = 0$ oraz punkt $P(x_0, y_0)$
Odległość punktów C i D wyraża się wzorem: $|CD| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$
Środek odcinka CD: $\left(\frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}\right)$
Odległość punktu P od prostej $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Znajdź równanie symetralnej odcinka AB
A = (-2,5), B = (2,3)

Zad. 2
Znajdź współrzędne punktu A symetrycznego do punktu B(4,6) względem prostej o równaniu: $y = \frac{1}{2}x + 7$

Zad. 3
Jedna z przekątnych kwadratu ABCD zawiera się w prostej: $y = -3x - 2$. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz pole kwadratu, jeśli wierzchołek A ma współrzędne (2,2).

Zad. 4
Ile wynosi odległość dwóch prostych danych równaniami: $y = \frac{1}{3}x - 2, x - 3y + 18 = 0$?

Zad. 5
Środkiem odcinka AB jest punkt S=(-2,4). Wyznacz współrzędne punktu B, jeśli A=(2,6).

Zad. 6
Na wykresie funkcji $f(x) = x^2$ znajdź punkt Q leżący najbliżej punktu P=(6,3).

Temat 4: Odległość dwóch punktów, środek odcinka. Odległość punktu od prostej

Zad. 1
Dane są punkty A=(-4,1) i B=(-8,-2). Uzupełnij:
Długość odcinka AB wynosi:… Środek odcinka AB ma współrzędne: x= …, y= …

Zad. 2
Wyznacz współrzędne punktu A, który jest symetryczny do punktu B = (0,3) względem prostej k: $y = -4x - 14$

Zad. 3
Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: A=(-1,2), B=(4,-3), C=(-11,-18). Znajdź równanie środkowej wychodzącej z wierzchołka C.

Zad. 4
Punkty A=(1,4) i B=(5,8) są kolejnymi wierzchołkami kwadratu ABCD. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.

Zad. 5
Dwa boki równoległoboku zawierają się w prostych k i m. Wyznacz współrzędne wierzchołków A, B i D, jeśli C=(-1,7).
k: $y = x - 2$
m: $y = -4x - 12$

Temat 5: Odległość dwóch punktów, środek odcinka. Odległość punktu od prostej

Zad. 1
Na wykresie funkcji $f(x) = -x^2 + 1$ znajdź taki punkt A, aby jego odległość od prostej k: $y = -x + 2$ była jak najmniejsza.

Zad. 2
Wskaż równanie prostej przechodzącej przez punkt A=(-4,6), która tworzy z wykresem funkcji $f(x) = |x + 1|$ trójkąt o polu P = 27

Zad. 3
Czy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym?
A = (2,12), B = (-9,1), C = (0,-8)

Zad. 4
Punkty ABC są wierzchołkami pewnego trójkąta. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C.
A = (-4,5), B = (-2,3), C = (-6,1)

Zad. 5

Na osi OX wyznacz taki punkt A, którego odległość od punktu B = (4,-12) wynosi $\sqrt{41}$.

Temat 6: Symetria względem osi oraz początku układu współrzędnych

Cel lekcji: poznanie własności przekształceń figur w symetrii względem osi OX, OY oraz punktu (0,0)

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Przekształcać figury (proste, punkty, okręgi, wielokąty, odcinki) oraz wykresy funkcji w symetrii względem osi OX, OY oraz początku układu współrzędnych oraz znać podstawowe własności tych przekształceń
- Wiedzieć, jakim symetriom poddano daną figurę, jeśli znamy końcowy wynik przekształceń

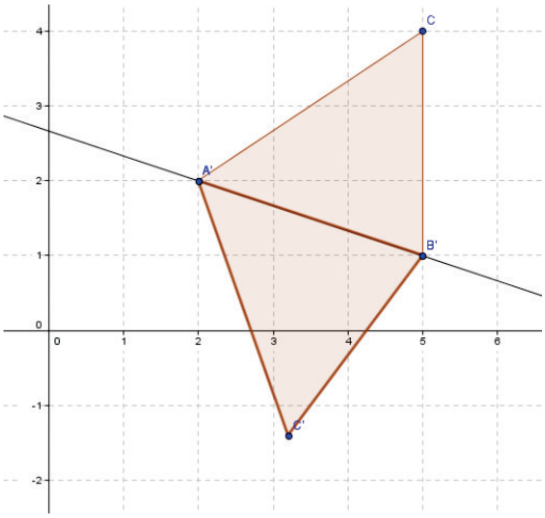
Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie podstawowych przekształceń figur:
- symetria względem osi OX
- symetria względem osi OY
- symetria względem punktu (0,0)
3. Rozwiązywanie zadań

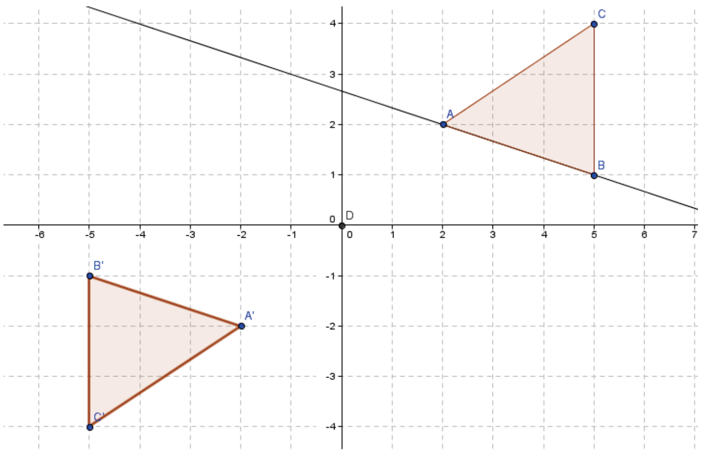
Zad. 1

Dany jest trójkąt ABC. Jakie przekształcenia są przedstawione na wykresach?

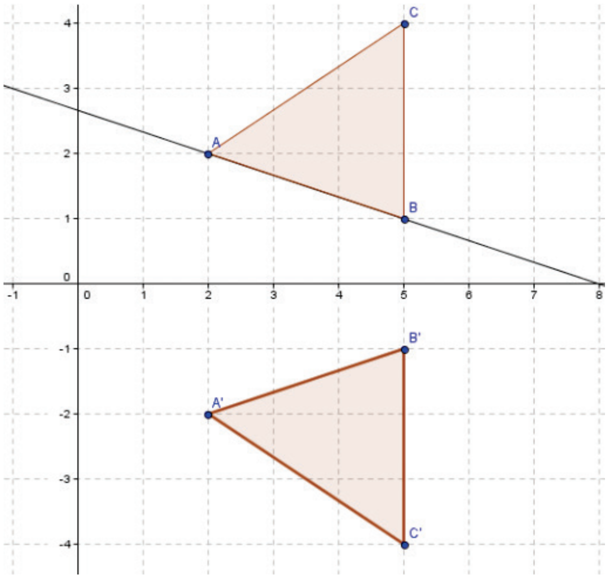
1.



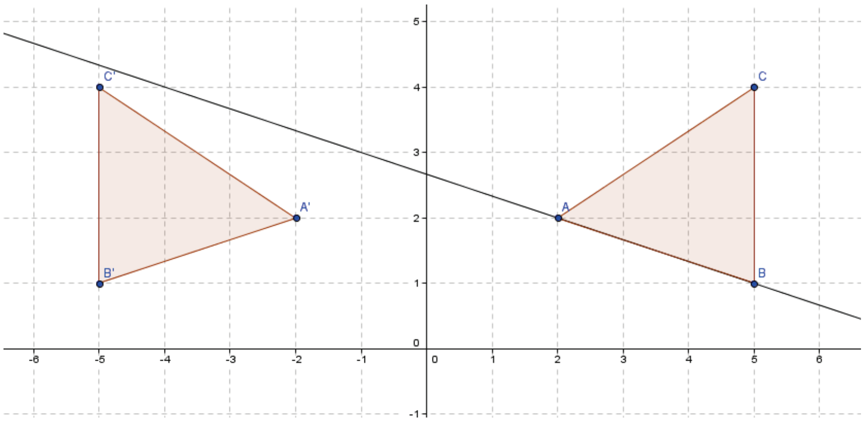
2.



3.



4.



Zad. 2

Odpowiedz na pytanie:
Ile osi symetrii ma koło, odcinek, kwadrat, prosta?

Zad. 3

Napisz równanie okręgu symetrycznego względem początku układu współrzędnych do okręgu danego równaniem: $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$

Zad. 4
Punkty A(2,1), B(-3,6), C(-5,-1) wyznaczają pewien trójkąt. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta DEF, który powstał przez symetrię trójkąta ABC względem punktu (0,0)

Zad. 5
Jaką funkcję otrzymamy przekształcając funkcję $2x - y + 4 = 0$ w symetrii względem osi OY?

Zad. 6
Osią symetrii trapezu równoramiennego ABCD jest prosta $y = -x$. Wiedząc, że A=(-6,-1) i D=(-2,-1) wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trapezu oraz podaj długość odcinka d łączącego środki ramion trapezu.

Temat 7: Symetria względem osi oraz początku układu współrzędnych

Zad. 1
Punkty C(6,7) i D(3,8) są kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Wyznacz równanie osi symetrii przechodzącej przez punkty A i C.

Zad. 2
Wyznacz równania prostej: $y = 3x + 1$ w symetrii względem osi OX, OY i punktu (0,0)

Zad. 3
Okrąg (o równaniu podanym obok) przekształcono przez symetrię względem prostej k. Wyznacz równanie obrazu tego okręgu.

$$x^2 - 4x + y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$k : y = -x + 2$$

Zad. 4
Czy punkty A=(0,3), B=(4,2), C=(3,-2) i D=(-1,-1) są olejnymi wierzchołkami kwadratu? Jeśli ta, znajdź równania osi symetrii tego kwadratu.

Zad. 5
Funkcje f(x) i g(x) ograniczają trójkąt ABC. Znajdź współrzędne trójkąta DEF powstałego przez symetrię trójkąta ABC względem osi OY. Oblicz pole trójkąta DEF.

$$f(x) = |x + 8|$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

Temat 8: Równanie okręgu w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej

Cel lekcji: zapoznanie z odstawowymi własnościami okręgu w postaci kanonicznej i ogólnej w układzie współrzędnych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Odróżniać równanie okręgu w postaci kanonicznej i ogólnej
- Odczytywać współrzędne środka i promień okręgu, jeśli dane jest jego równanie (w dowolnej postaci)
- Zapisywać równanie okręgu, gdy znane są współrzędne środka i promień okręgu
- Badać położenie punktu względem okręgu o danym równaniu
- Podawać równanie okręgu opisanego i wpisanego w trójkąt
- Zamienia równanie okręgu w postaci kanonicznej na postać ogólną i odwrotnie
- Zapisywać równania stycznych do okręgu przechodzących przez dany punkt
- Wyznaczać równanie okręgu przechodzącego przez trzy dane punkty
- Wyznaczać wartości parametru, dla którego prosta jest styczna do danego okręgu

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zapisanie równania okręgu w postaci kanonicznej

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Gdzie r jest promieniem okręgu, a punkt (a,b) jego środkiem

3. Zapisanie równania okręgu w postaci ogólnej

$$x^2-2ax+y^2-2by+c=0$$
$$r^2=a^2+b^2-c$$

Gdzie r jest promieniem okręgu, a punkt (a,b) jego środkiem

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Zapisz równania podanych okręgów w postaci kanonicznej:
a) $x^2-4x+y^2+2y-4=0$
b) $x^2+y^2-8y+15=0$
c) $x^2+2x+y^2-4y+2=0$

Zad. 2
Wskaż równanie okręgu o środku w punkcie A(-2,4) i stycznego do prostej k: $y=2x-7$.

Zad. 3
Wskaż równania stycznych do okręgu $x^2+y^2=4$ i przechodzących przez punkt A(4,-2)

Zad. 4
Wyznacz współrzędne środka okręgu stycznego do obu osi układu współrzędnych i do prostej $m: -\sqrt{3}x-y+3-\sqrt{3}=0$

Zad. 5

Znajdź równanie prostej stycznej do okręgu $x^2+4x+y^2-21=0$ i przechodzącej przez punkt (1,4)

Temat 9: Równanie okręgu w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej

Zad. 1

Znajdź równanie okręgu wiedząc, że punkty A(-7,7) i B(1,1) wyznaczają średnicę okręgu.

Zad. 2

Podaj równania stycznych do okręgu $(x-2)^2+(y-5)^2=100$ i równoległych do prostej k: $3x-4y-10=0$

Zad. 3

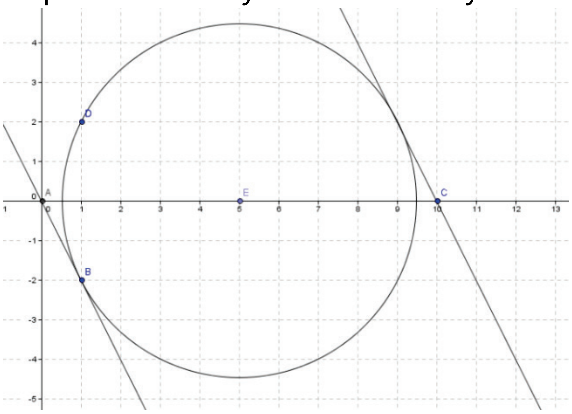
Znajdź równanie okręgu przechodzącego przez punkty A(2,4), B(8,-4), C(14,8)

Zad. 4

Znajdź równanie stycznej do okręgu $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ i prostopadłej do prostej $k: x+20y-20=0$

Zad. 5

Na podstawie danych zamieszczonych na wykresie podaj równanie okręgu:



Temat 10: Równanie okręgu w postaci kanonicznej i w postaci ogólnej

Zad. 1

Znajdź równanie okręgu opisanego na trójkącie DEF, jeśli
$D=(1,0)$
$E=(4,4)$
$F=(8,1)$

Zad. 2

Podaj równanie okręgu stycznego do prostych k i m w punktach (3,8) i (9,2)

$k: x - 2y - 5 = 0$

$m: 2x - y + 2 = 0$

Zad. 3

Napisz równanie okręgu symetrycznego względem prostej k do okręgu danego równaniem:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$

$k: -x + y + 10 = 0$

Zad. 4

Dla jakiej wartości parametru m okrąg jest styczny do prostej k?

$k: 3x + 4y = m$

$x^2 + y^2 - 16 = 0$

Zad. 5

Podaj równanie okręgu stycznego do prostych $y = x$ i $y = -x$ oraz przechodzącego przez punkt (-2,6)

Temat 11: Opisywanie koła za pomocą nierówności

Cel lekcji: zapoznanie ze sposobami opisywania koła w układzie współrzędnych za pomocą nierówności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Odróżniać nierówność opisującą koło od innych nierówności
- Wyznaczać nierówność opisującą koło, jeśli znane są współrzędne środka i promień okręgu
- Opisywać inne figury w układzie współrzędnych za pomocą układu nierówności
- Wyznaczać sumę, różnicę i iloczyn zbiorów na płaszczyźnie kartezjańskiej
- Analizować położenie danego punktu względem koła

Porządek lekcji:

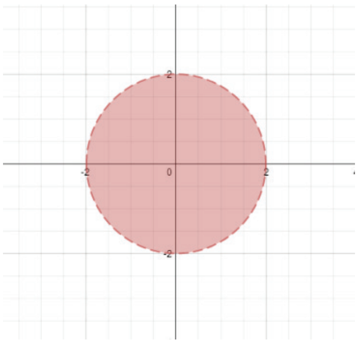
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości z poprzedniej lekcji o równaniu okręgu
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

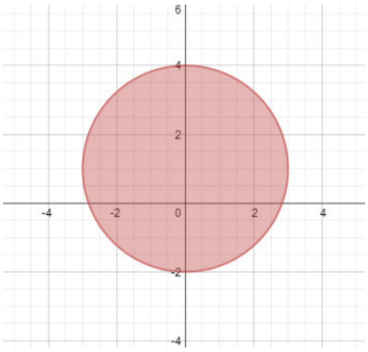
Dopasuj nierówność do figury, którą przedstawia ta nierówność na płaszczyźnie kartezjańskiej:

1. $x^2 + y^2 < 4$
2. $x^2 + (y-1)^2 \leq 9$
3. $(x+2)^2 + y^2 > 1$

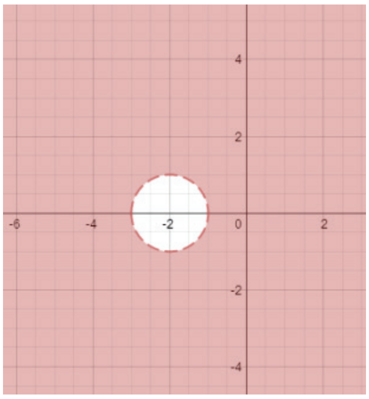
A.



B.



C.



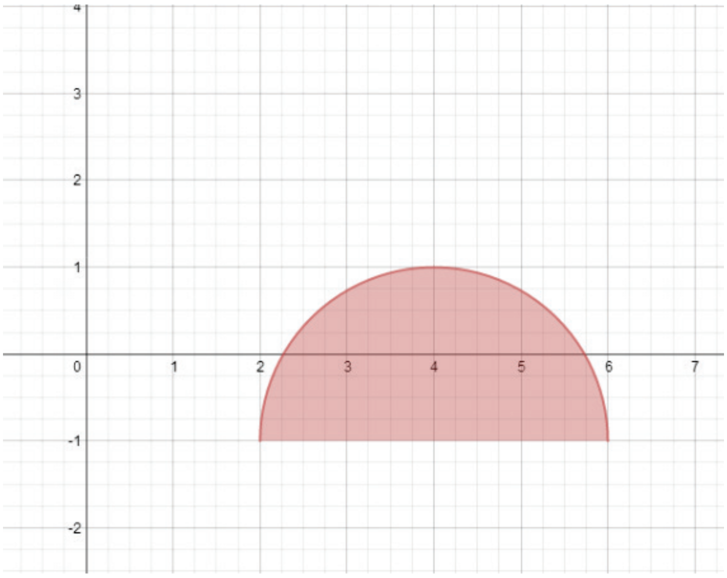
Zad. 2

Określ położenie punktu A(2,7) względem koła określonego nierównością:

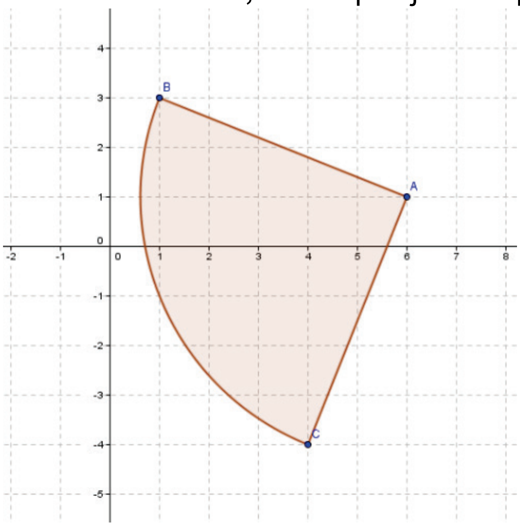
$x^2 + (y-4)^2 \le 11$

Zad. 3

Wskaż nierówność, która opisuje zbiór przedstawiony na rysunku obok:



Zad. 4
Wskaż nierówność, która opisuje zbiór punktów przedstawionych na wykresie obok:



Zad. 5
Określ położenie punktu B(2,-4) względem koła określonego nierównością:
$(x-2)^2+(y+5)^2<4$

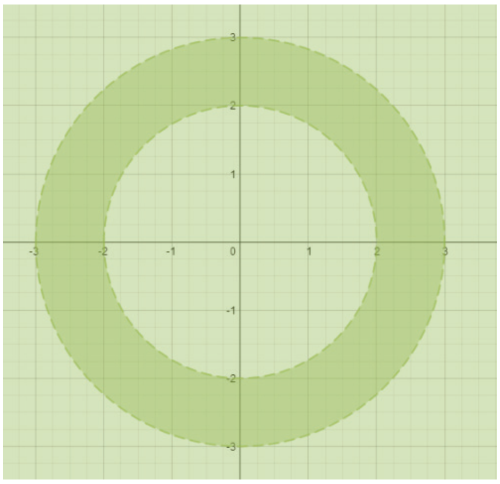
Temat 12: Opisywanie koła za pomocą nierówności

Zad. 1
Dopasuj układ nierówności do zbioru punktów, jaki ten układ przedstawia: (kolor ciemny zielony)

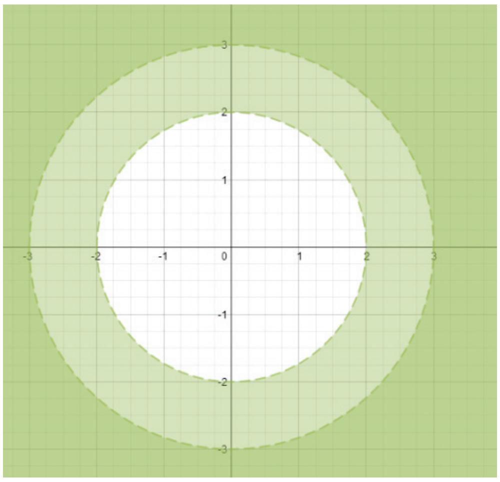
1. $\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2+y^2>4 \\ x^2+y^2>9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

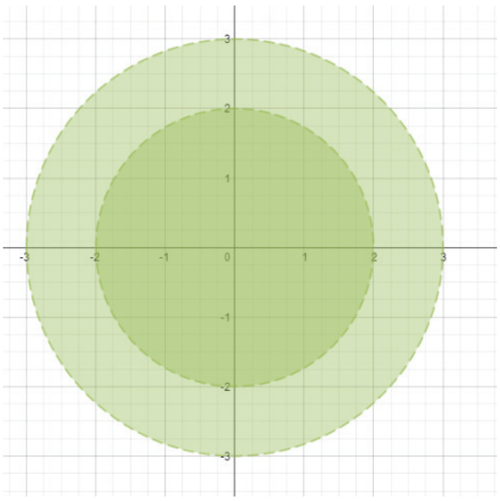
A.



B.



C.



Zad. 2

Dla jakiej wartości parametru m część wspólna figur F i G jest zbiorem pustym?

$F : \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + (y-1)^2 < 9\}$

$G : \{(x, y) : x \in R \wedge y \in R \wedge x^2 + (y-m)^2 < 1\}$

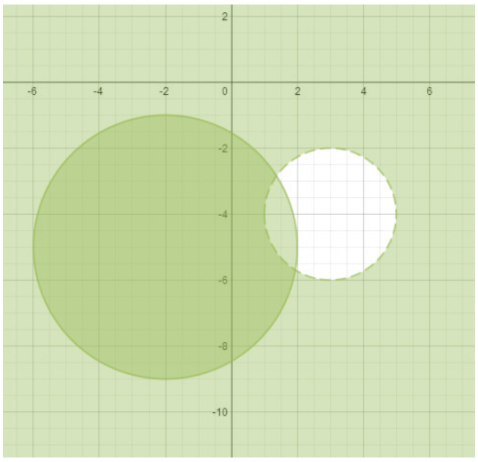
Zad. 3

Dany jest układ nierówności:

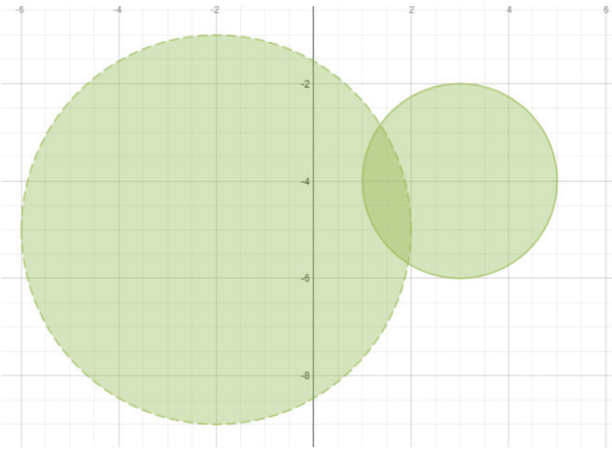
$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 4 \\ (x+2)^2 + (y+5)^2 < 16 \end{cases}$$

Wskaż zbiór punktów, który ta nierówność przedstawia (kolor ciemny zielony)

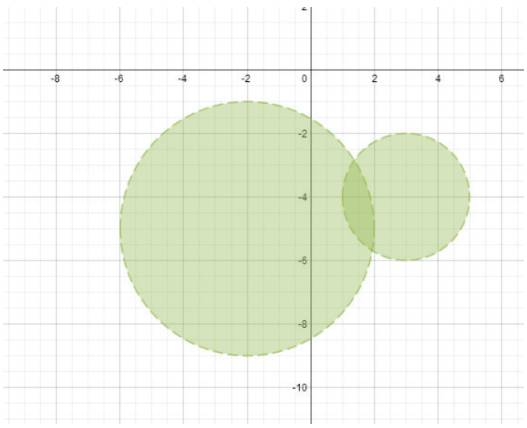
1.



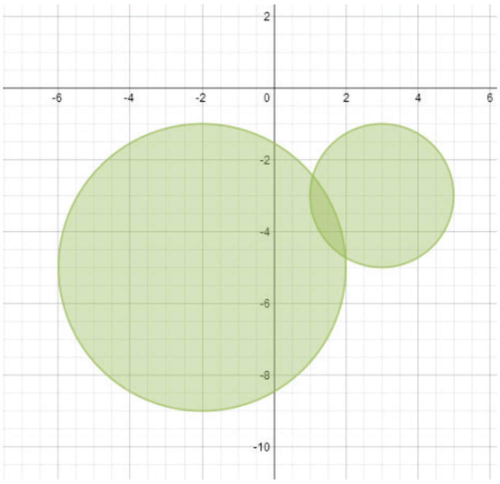
2.



3.



4.

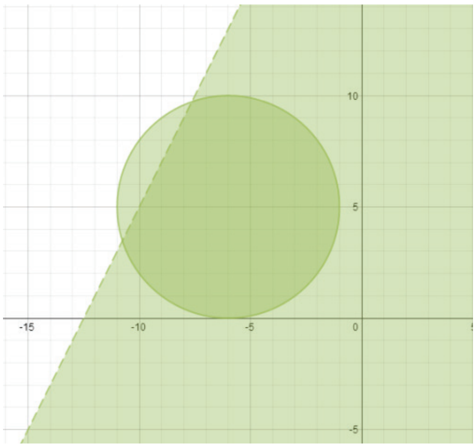


Zad. 4

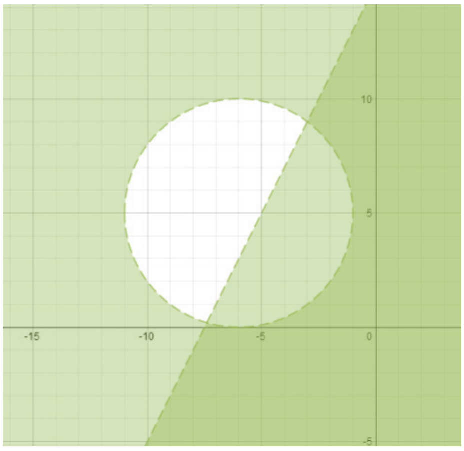
Wskaż wykres, który przedstawia zbiór rozwiązań układu nierówności:

$$\begin{cases} 2x - y + 25 > 0 \\ (x+6)^2 + (y-5)^2 \leq 25 \end{cases}$$

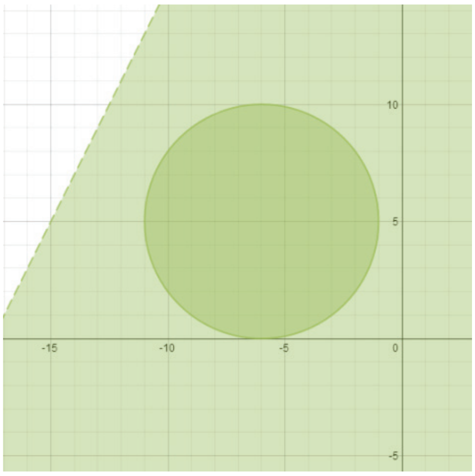
1.



2.



3.



Zad. 5
Czy rozwiązaniem podanego układu jest zbiór pusty?

$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 < 9 \\ y = x+1 \end{cases}$$

Temat 13: Wzajemne położenie prostej i okręgu w układzie współrzędnych

Cel lekcji: analizowanie wzajemnego położenia prostej i okręgu w układzie współrzędnych, zapisywanie równań stycznych do okręgu i wyznaczanie cięciw okręgu

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać pojęcie stycznej do okręgu i cięciwy okręgu
- Badać wzajemne położenie prostej i okręgu (brak punktów wspólnych, jeden lub dwa punkty wspólne)
- Wyznaczać wartość parametru, dla której prosta ma określoną liczbę punktów wspólnych z okręgiem
- Wyznaczać punkt wspólny danego okręgu i prostej, jeśli prosta ta jest styczna do okręgu
- Wyznaczać równanie stycznej, gdy znane są współrzędne punktu styczności
- Obliczać współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Metody wyznaczania punktów wspólnych prostej i okręgu: szkicowanie prostej i okręgu w układzie współrzędnych (dla prostych przypadków) oraz rozwiązywanie układu równań
3. Analizowanie liczby punktów wspólnych prostej i okręgu w zależności od wartości parametru
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Podaj współrzędne punktu wspólnego prostej i okręgu:

$$(x-7)^2+(y-1)^2=20$$
$$-2x+y+3=0$$

Zad. 2
Dla jakiej wartości parametru m dana prosta i okrąg mają dokładnie dwa punkty wspólne?

$$(x-2)^2+(y+1)^2=13$$
$$-3x+2y-m=0$$

Zad. 3
Określ położenie prostych względem danego okręgu:

1.
$$(x-7)^2+(y-1)^2=10$$
$$-x-3y=0$$

2.
$$(x-8)^2+(y+2)^2=2$$
$$3x-y-14=0$$

3.
$$(x+2)^2+(y-2)^2=10$$
$$3x+y+4=0$$

Zad. 4
Dane są punkty C(1,4) i D(-5,-2), które wyznaczają średnicę okręgu. Znajdź równanie średnicy CD, a następnie wskaż równania stycznych (k i m) do danego okręgu w punktach C i D.

Zad. 5
Dla jakiej wartości parametru m prosta k jest styczną do okręgu?

$$x^2-4x+y^2-6y+8=0$$
$$k: y=2x-2m$$

Zad. 6
Znajdź długość cięciwy okręgu zawartej w prostej k.

$$k: y=-\frac{1}{3}x-2$$
$$(x+1)^2+y^2=5$$

Temat 14: Wzajemne położenie prostej i okręgu w układzie współrzędnych

Zad. 1
Wyznacz równanie stycznej do okręgu $x^2-6x+y^2+4y-5=0$ w punkcie A(6,1)

Zad. 2
Wskaż równanie stycznej do okręgu, jeśli jest ona nachylona do osi OX pod kątem:
$\alpha=45°$
$x^2-14x+y^2-4y+45=0$

Zad. 3
Określ wzajemne położenie prostych i podanych okręgów:
1.
$x-y+4=0$
$(x-8)^2+(y-5)^2=8$
2.
$x^2+4x+y^2-6y-19=0$
$y=-x+1$
3.
$(x+3)^2+y^2=10$
$-x+3y-13=0$

Zad. 4
Zbadaj położenie odcinka AB względem koła opisanego nierównością:
$A(-12,10)$
$B(-6,8)$
$x^2+24x+y^2-20y+204<0$

Temat 15: Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem układu współrzędnych

Cel lekcji: zastosowanie poznanych twierdzeń, wzorów i własności punktów, odcinków, wielokątów, prostych w układzie współrzędnych do rozwiązywania zadań

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać twierdzenia, własności i wzory dotyczące prostych, punktów, odległości, odcinków, wielokątów, okręgów w układzie współrzędnych

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie poznanych w tym rozdziale wzorów i własności
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji:
$f(x) = |2x-4|$
$g(x) = x+1$
$h(x) = -x+5$

Zad. 2
Na prostej $k: -x-y+4=0$ znajdź punkt C równoodległy od punktów A(7,2) i B(10,-1)

Zad. 3
Wskaż równanie okręgu o promieniu równym 5 stycznego do prostej $k: -3x+4y-2=0$ w punkcie A(2,2)

Zad. 4
Punkt D(2,2) jest wierzchołkiem kwadratu wpisanego w okrąg:
$x^2-8x+y^2-6y+20=0$
Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

Zad. 5
Znajdź wartość parametru m, dla którego prosta jest nachylona do osi OX pod kątem:
$\alpha = 135°$
$y = [-\log_4(2m+1)]x+7$

Zad. 6
Punkty A(-2,4), B(-1,1), C(-4,2) są środkami pewnego trójkąta KLM. Oblicz pole trójkąta KLM.

Temat 16: Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem układu współrzędnych

Zad. 1
Za pomocą nierówności opisz trójkąt o wierzchołkach: K(3,3), L(5,-3), M(9,2)

Zad. 2
Dane są dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu A(2,-2) i C(7,1). Wyznacz pozostałe wierzchołki kwadratu.

Zad. 3
Dane są dwa wierzchołki trójkąta ABC: A(1,-2) i B(3,2). Oblicz współrzędne wierzchołka C, jeśli należy on do prostej $k: -x-2y+4=0$, a pole trójkąta wynosi 9.

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru m proste k i s są prostopadłe?
$k: y = 4mx+1$
$s: y = (m-1)x-8$

Zad. 5
Wyznacz środek i promień okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach w punktach: A(-4,-1), B(-3,6), C(5,2)

Temat 17: Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem układu współrzędnych

Zad. 1
Wyznacz równanie okręgu symetrycznego do danego względem prostej k.
$k: 4x - 3y - 31 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 5 = 0$

Zad. 2
W trójkącie ABC dane są: A(2,2), B(5,5) i S(6,3), gdzie S jest środkiem boku BC. Wyznacz równanie prostej, w której zawiera się wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C.

Zad. 3
Prosta k przecina okrąg w punktach K i L. Znajdź długość cięciwy KL i punkt M (należący do okręgu), tak aby trójkąt KLM był trójkątem prostokątnym.
$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 20$
$k: y = x + 4$

Zad. 4
Dane są punkty K(-4,1), L(1,-3), M(4,-1). Wyznacz pole trójkąta KLM oraz współrzędne punktu N, dla którego czworokąt KLMN jest równoległobokiem.

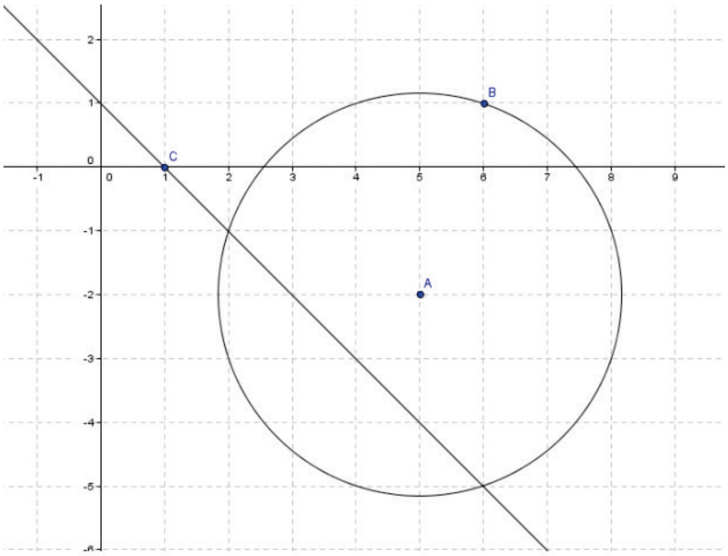
Zad. 5
Na osi OY znajdź punkt C, którego odległość od punktu A(2,4) jest taka sama jak odległość od punktu B(4,6). Ile wynosi cosinus kata β (ACB)?

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Znajdź równania stycznych do danego okręgu, przechodzących przez punkt (14,4)
$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 64$

Zad. 2
Podaj współrzędne punktu A, tak aby czworokąt ABCD był trapezem równoramiennym, jeśli:
B=(6,2)
C=(4,3)
D=(1,2)

Zad. 3
Wskaż układ równań, którego ilustracją graficzną jest poniższy wykres:



Zad. 4
Czy podane punkty są wierzchołkami równoległoboku?

$A(1,1)$

$B(6,2)$

$C(0,-5)$

$D(5,-2)$

Zad. 5
Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt A(3,2) i prostopadłej do prostej AB, gdzie A(4,-3), B(10,2).

Sprawdzian

Zad. 1
Znajdź równanie okręgu przechodzącego przez punkty A(-2,3) i B(8,-1), którego środek jest zawarty w prostej $k\colon -2x + 5y = -1$.

Zad. 2
Znajdź pole wielokąta ograniczonego prostymi:

$5x + y = 18$

$x + 5y = 18$

$-x + y = -6$

Zad. 3
W kwadracie dane są: wierzchołek A(1,-4) i punkt przecięcia przekątnych S(2,-1). Wyznacz pozostałe boki kwadratu.

Zad. 4
Dwa boki pewnego równoległoboku zawierają się w prostych k i m. Ponadto przekątne przecinają się w punkcie S. Wyznacz współrzędne wierzchołków danego równoległoboku.

$k : x = -2y$

$m : 2x - 3y = 7$

$S\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1

Odp. $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 19 = 0$

Zad. 2

Odp. $P = 12$

Zad. 3

Odp. $B(5,-2)$, $C(3,2)$, $D(-1,0)$

Zad. 4

Odp. $A(-1,4)$, $B(5,1)$, $C(2,-1)$, $D(-4,2)$

7. Stereometria

Temat 1: Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia prostej i płaszczyzny w przestrzeni oraz ich własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać pojęcie prostej i płaszczyzny w przestrzeni
- Określać położenie dwóch prostych, dwóch płaszczyzn oraz prostej i płaszczyzny w przestrzeni
- Rozpoznawać proste prostopadłe, równoległe i skośne
- Opisywać prostopadłość dwóch płaszczyzn
- Wyznaczać rzut prostokątny punktu, prostej, odcinka na płaszczyznę
- Dowodzić warunek prostopadłości i równoległości prostej i płaszczyzny, dwóch prostych, dwóch płaszczyzn
- Wyznaczać rzut prostokątny w celu określenia kąta nachylenia prostej do płaszczyzny
- Wyznaczać odległość punktu od płaszczyzny

Porządek lekcji:

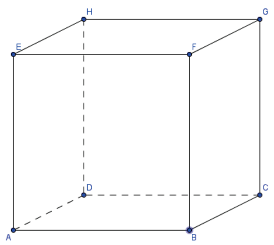
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia prostej i płaszczyzny w przestrzeni oraz omówienie ich własności
3. Przypomnienie twierdzenia Pitagorasa i podstawowych funkcji trygonometrycznych
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Ile płaszczyzn (różnych) wyznaczają 3 proste, które przecinają się w jednym punkcie?

Zad. 2
Zakładamy, że proste m i n są skośne. Czy przez każdą z tych prostych można poprowadzić płaszczyznę tak, aby te płaszczyzny były prostopadłe?

Zad. 3
Ile płaszczyzn można poprowadzić przez 3 różne punkty (przy założeniu, że punkty nie są współliniowe)?

Zad. 4
Dany jest prostopadłościan ABCDEFGH. Wskaż pary krawędzi skośnych:



Zad. 5
Punkty A i B leżą po tej samej stronie płaszczyzny, a punkty A' i B' są ich rzutami prostokątnymi na tę płaszczyznę. Oblicz |AB|, jeśli |A'B'| = 10, |AA'| = 11 i |BB'| = 3.

Zad. 6
Dwie proste równoległe AB i CD leżą na jednej płaszczyźnie i są od siebie oddalone o 12 cm. Poza płaszczyzną leży punkt P, którego odległość od prostej AB jest równa 20 cm, a od prostej CD - 16 cm. Wyznacz odległość punktu P od danej płaszczyzny.

Zad. 7
Przez punkt A poprowadzono prostą k przebijającą płaszczyznę w punkcie B i tworzącą z tą płaszczyzną kąt o mierze 60˚. Ile wynosi odległość punktu A od tej płaszczyzny, jeśli |AB| = 16?

Temat 2: Graniastosłupy i ich rodzaje

Cel lekcji: poznanie pojęcia graniastosłupa i jego rodzajów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję graniastosłupa, graniastosłupa prostego, pochyłego, prawidłowego
- Wskazywać podstawy, ściany, krawędzie podstawy, przekątne podstawy i ścian bocznych, przekątne graniastosłupa, wysokość i wierzchołki graniastosłupa
- Opisywać własności równoległościanu
- Znać i wykorzystywać wzór Eulera do sprawdzania, czy istnieje wielościan wypukły o podanej liczbie wierzchołków, krawędzi i ścian

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia graniastosłupa
3. Wyróżnienie rodzajów graniastosłupów: prosty, pochyły i prawidłowy
4. Szkicowanie szkieletu graniastosłupa
5. Wprowadzenie wzoru Eulera: $W + S = K + 2$

Gdzie:
W – liczba wierzchołków
S – liczba ścian
K – liczba krawędzi

6. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Ile ścian bocznych ma graniastosłup o 60 krawędziach?

Zad. 2
Dopasuj prawidłowe odpowiedzi:

Prostopadłościan	to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami
Graniastosłup prawidłowy	to graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi
Graniastosłup prosty	to graniastosłup, w którym krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw
Graniastosłup pochyły	to graniastosłup, w którym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw
Równoległościan	to graniastosłup, którego wszystkie ściany są równoległobokami

Zad. 3
Czy istnieje graniastosłup, który ma 43 krawędzie?

Zad. 4
Czy istnieje graniastosłup, który ma 86 wierzchołków?

Zad. 5
Wyznacz liczbę boków wielokąta, który jest podstawą graniastosłupa, jeśli ten graniastosłup ma 45 krawędzi.

Zad. 6
Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o W wierzchołkach, S ścianach i K krawędziach?
a) W=15, S=16, K=28
b) W=26, S=22, K=46

Zad. 7
Czy prawdą jest, że w każdym równoległościanie suma kwadratów jego przekątnych jest równa sumie kwadratów wszystkich krawędzi równoległościanu?

Temat 3: **Krawędzie i przekątne w graniastosłupie**

Cel lekcji: wyznaczanie długości krawędzi i przekątnych w graniastosłupie oraz zależności między nimi

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Obliczać długości krawędzi i przekątnych w graniastosłupie przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa i funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym
- Wskazywać kąty w graniastosłupie: kąty między krawędziami, przekątnymi oraz krawędziami i przekątnymi w graniastosłupie
- Wyznaczać przekroje prostopadłościanu
- Wyznaczać miary kątów między krawędziami w graniastosłupie a jego przekątnymi oraz między przekątnymi a ścianami bocznymi

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zaznaczenie w graniastosłupie krawędzi, przekątnych, charakterystycznych kątów: między krawędziami, przekątnymi, krawędziami a przekątnymi
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wyznacz długości przekątnych graniastosłupa sześciokątnego prawidłowego, w którym krawędź podstawy ma długość 10, a wszystkie ściany boczne są kwadratami.

Zad. 2
Krawędź boczna graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest siedem razy dłuższa niż krawędź podstawy. Wyznacz sinus kąta między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.

Zad. 3
Podstawą graniastosłupa jest romb o kącie ostrym 60° i boku długości 4. Wyznacz długości przekątnych graniastosłupa, jeśli jego wysokość jest równa 4.

Zad. 4
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 3 cm, a pole powierzchni całkowitej wynosi 39. Wyznacz długość krawędzi podstawy, wysokość oraz objętość graniastosłupa.

Zad. 5
Suma długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 56 cm, a pole powierzchni całkowitej jest równe 128 cm^2. Oblicz długości krawędzi graniastosłupa.

Temat 4: Pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa

Cel lekcji: wyznaczanie pola powierzchni i objętości graniastosłupa z zastosowaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać wzór na objętość i pole powierzchni dowolnego graniastosłupa
- Obliczać pole powierzchni i objętość sześcianu i prostopadłościanu
- Wyznaczać przekrój i pole przekroju graniastosłupa płaszczyzną
- Stosować funkcje trygonometryczne, twierdzenie Pitagorasa i inne poznane twierdzenia do obliczania pól powierzchni i objętości graniastosłupów

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie wzorów na pola powierzchni i objętości graniastosłupów

Pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu: $P_c = 6a^2, V = a^3$
Pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu o wymiarach $a \times b \times c$:
$P_c = 2(ab + bc + ac), \qquad V = abc$

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wyznacz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego najdłuższa przekątna podstawy ma długość 4 i tworzy z przekątną ściany bocznej (wychodzącą z tego samego wierzchołka) kąt 75°.

Zad. 2
Jeśli każdą krawędź sześcianu zwiększymy o 4, to objętość zwiększy się osiem razy. Wyznacz długość krawędzi sześcianu.

Zad. 3
Podstawą graniastosłupa jest równoległobok, którego kąt ostry ma miarę 30°, a pole jest równe 48. Wyznacz objętość graniastosłupa, jeśli pola jego ścian bocznych są równe odpowiednio: 24 i 64.

Zad. 4
Oblicz objętość graniastosłupa, którego podstawą jest romb o kącie ostrym 60°. Ponadto wiemy, że krótsza przekątna graniastosłupa jest równa 2 i tworzy ze ścianą boczną kąt o mierze 30°.

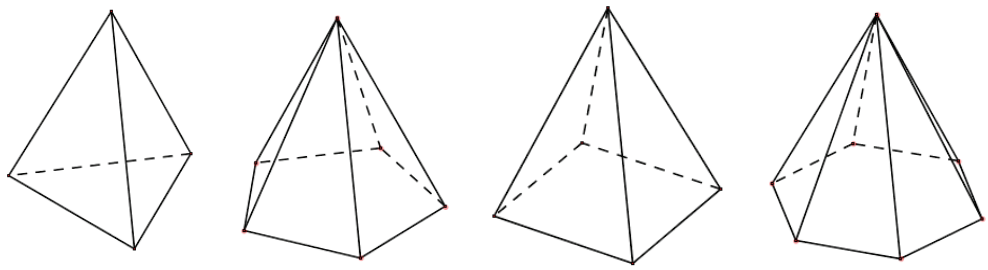
Temat 5: **Ostrosłupy i ich rodzaje**

Cel lekcji: poznanie z pojęciem ostrosłupa i omówienie jego rodzajów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję ostrosłupa i podział ostrosłupów: czworościan foremny, ostrosłup prawidłowy, ostrosłup trójkątny, czworokątny itd.
- Wskazywać podstawę, ściany boczne, krawędzie, wierzchołki, wysokość i spodek wysokości ostrosłupa
- Rozpoznawać charakterystyczne kąty w ostrosłupie: kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy, kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa
- Obliczać miary tych kątów

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia ostrosłupa i jego rodzajów
3. Oznaczenie podstawowych kątów wostrosłupie
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Jakie ostrosłupy są przedstawione na rysunkach?

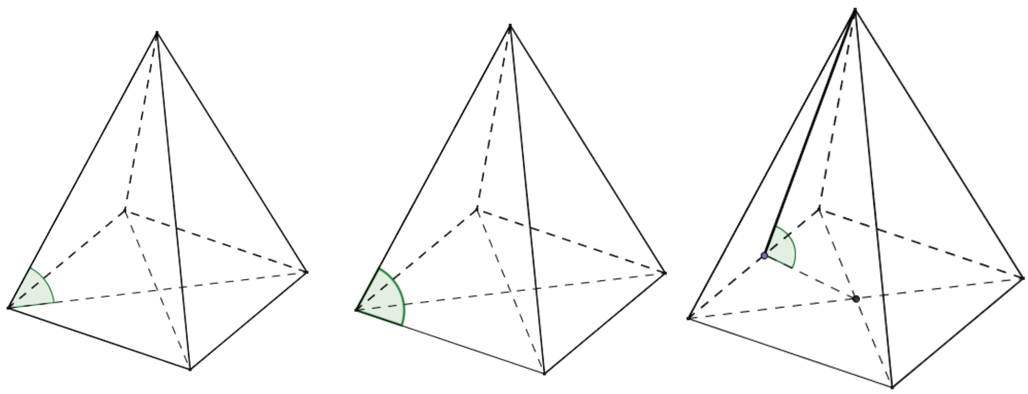


Zad. 2
Dopasuj prawidłowe odpowiedzi:

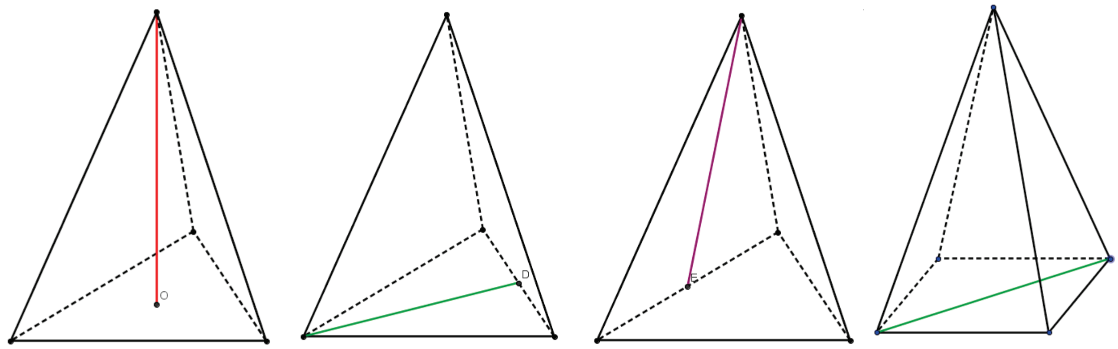
Czworościan	to ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami
Czworościan foremny	to ostrosłup, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi
Ostrosłup prawidłowy	to ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i którego spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa

Zad. 3
Podaj liczbę wierzchołków ostrosłupa o 44 krawędziach.

Zad. 4
Opisz kąty zaznaczone na rysunkach:



Zad. 5
Jak nazywają się odcinki zaznaczone na rysunkach (kolor czerwony, zielony, fioletowy)?



Zad. 6
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa 8, a kąt między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120°. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Zad. 7
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź boczna jest 2 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Wyznacz cosinus kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

Temat 6: **Pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa**

Cel lekcji: wprowadzenie wzorów oraz obliczanie pola powierzchni i objętości ostrosłupa, zastosowanie własności funkcji trygonometrycznych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Obliczać pola powierzchni i objętości różnych ostrosłupów z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych i poznanych twierdzeń

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie wzorów na pole powierzchni całkowitej: $P_c = P_b + P_p$ i objętość dowolnego ostrosłupa: $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$ (P_p - pole podstawy, P_b - pole powierzchni bocznej, H – wysokość ostrosłupa)
3. Zastosowanie poznanych twierdzeń do rozwiązywania zadań

Zad. 1
Miara kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego do płaszczyzny podstawy wynosi 60°. Wyznacz długość krawędzi podstawy danego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest równe $27\sqrt{3}$.

Zad. 2
Krawędź czworościanu foremnego jest równa 9 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa.

Zad. 3
Ile wynosi długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa 9 cm, a ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°?

Zad. 4
Krawędź podstawy jest równa wysokości pewnego ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Ile wynosi miara kąta między krawędzią boczną ostrosłupa a płaszczyzną podstawy?

Temat 7: **Pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa**

Zad. 1
Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, którego wysokość ma długość $3\sqrt{3}$, a krawędź podstawy jest równa 2. Oblicz pole przekroju przechodzącego przez wierzchołek ostrosłupa i krótszą przekątną podstawy.

Zad. 2
Wysokość pewnego ostrosłupa ma długość 8. Wyznacz odległość od wierzchołka ostrosłupa przekroju równoległego do płaszczyzny podstawy, który dzieli objętość tego ostrosłupa na połowy.

Zad. 3
Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli każda z jego ścian ma pole równe 16.

Zad. 4
Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze 45°, a odległość środka wysokości ostrosłupa od ściany bocznej jest równa 2. Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Temat 8: **Kąt dwuścienny**

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia kąta dwuściennego i omówienie jego własności

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję kąta dwuściennego i umieć go zaznaczać w graniastosłupach i ostrosłupach
- Obliczać miarę kąta dwuściennego i rozwiązywać zadania, w których podana jest miara kąta dwuściennego
- Rozpoznawać kąty między ścianami w ostrosłupach i graniastosłupach

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia kata dwuściennego w graniastosłupie i ostrosłupie
3. Szkicowanie kąta dwuściennego w różnych graniastosłupach i ostrosłupach
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Kąt dwuścienny ma miarę 45°. Na jednej z jego ścian znajduje się punkt P, którego odległość od drugiej ściany jest równa 15. Ile wynosi odległość punktu P od krawędzi kąta dwuściennego?

Zad. 2
Wewnątrz kąta dwuściennego znajduje się punkt P, którego odległości od ścian kąta są równe i wynoszą 8 cm. Kąt między odcinkami poprowadzonymi z punktu P (prostopadle)

na ściany kąta dwuściennego ma miarę 120°. Wyznacz odległość punktu P od krawędzi kąta dwuściennego i miarę kąta dwuściennego.

Zad. 3
Podaj miarę kąta dwuściennego, jeśli odległość punktu D leżącego na jednej ze ścian od krawędzi kąta dwuściennego jest równa 12 cm, a odległość tego punktu od drugiej ściany wynosi 6 cm.

Zad. 4
Wewnątrz kąta dwuściennego, który ma miarę 90° leży punkt P. Wiedząc, że punkt P jest odległy od ścian kąta o 15 cm i 20 cm, wyznacz odległość punktu P od krawędzi kąta dwuściennego.

Temat 9: **Kąt dwuścienny**

Zad. 1
Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 6 cm. Ile wynosi miara kąta między ścianami bocznymi tego graniastosłupa?

Zad. 2
Oblicz cosinus kąta między ścianami bocznymi czworościanu foremnego, którego bok ma długość 4.

Zad. 3
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6, a miara kąta dwuściennego między ścianą boczną a podstawą tego ostrosłupa wynosi 45°. Wyznacz pole powierzchni bocznej i objętość ostrosłupa.

Zad. 4
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź boczna ma długość 4, a kąt dwuścienny utworzony przez ściany boczne ma miarę 90°. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Zad. 5
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy jest dwa razy krótsza od krawędzi bocznej. Ile wynosi cosinus kąta między dwiema ścianami bocznymi?

Temat 10: **Wielościany foremne**

Cel lekcji: poznanie pojęcia wielościanu foremnego oraz jego własności, obliczanie pól powierzchni i objętości wielościanów

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

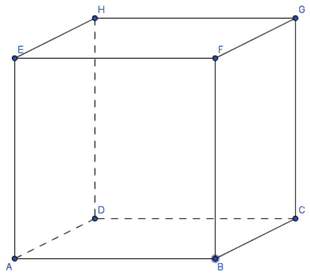
- Znać definicję wielościanu foremnego i jego własności
- Znać rodzaje wielościanów foremnych i obliczać ich pola powierzchni całkowitej i objętości

Porządek lekcji:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Omówienie rodzajów wielościanów foremnych i ich podstawowych własności
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Dany jest sześcian ABCDEFGH o boku długości 12 cm. Ile wynosi odległość punktu B od przekątnej AG?



Zad. 2

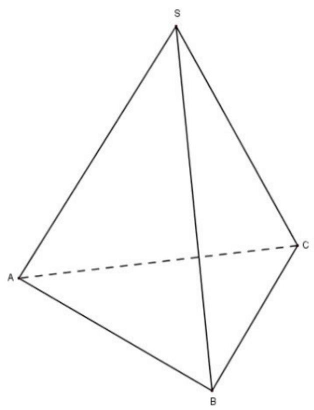
Ile wynosi długość krawędzi czworościanu foremnego, którego wysokość ma długość 10?

Zad. 3

Dany jest sześcian, którego pole powierzchni całkowitej wynosi 24. Środki ścian bocznych tego sześcianu sa jednocześnie wierzchołkami ośmiościanu foremnego. Ile jest równa objętość ośmiościanu?

Zad. 4

W czworościanie ABCS poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez środki odcinków AB, BS, CS. Wyznacz objętości brył, na które podzieliła czworościan ta płaszczyzna, jeśli objętość czworościanu ABCS jest równa 180.



Temat 11: Wielościany foremne

Zad. 1

W czworościanie foremnym długość wysokości jest o 1 cm mniejsza od długości jego krawędzi. Wyznacz objętość czworościanu.

Zad. 2
Sześcian przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Ile wynosi stosunek objętości powstałych w ten sposób brył?

Zad. 3
Wyznacz objętość i pole powierzchni całkowitej ośmiościanu foremnego o boku długości 3.

Zad. 4
Czworościan foremny, którego krawędź ma długość 12 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do jednej z krawędzi czworościanu, przechodzącą w odległości 3 cm od końca tej krawędzi. Wyznacz objętości otrzymanych w ten sposób brył (wskaż dwie odpowiedzi).

Temat 12: Pole powierzchni całkowitej i objętość walca

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia brył obrotowych i obliczanie pola powierzchni i objętości walca

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję brył obrotowych i w szczególności pojęcie walca
- Zaznaczać na rysunku podstawy, powierzchnię boczną, wysokość walca, oś obrotu walca
- Wyznaczać przekrój osiowy i poprzeczny walca
- Obliczać pola powierzchni i objętość walca

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia bryły obrotowej i walca
3. Podanie wzorów na obliczanie pola powierzchni całkowitej: $P_c = 2\pi r(r + H)$ i objętości walca: $V = \pi r^2 H$ (r – promień podstawy walca, H – wysokość walca)
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 10 cm. Wyznacz pole powierzchni bocznej i objętość walca.

Zad. 2
Pole przekroju osiowego walca wynosi 42, a pole podstawy jest równe 16π. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej walca?

Zad. 3
Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 8 i jest nachylona do podstawy walca pod kątem 30˚. Oblicz objętość walca.

Zad. 4
Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego przekątna długości 4 cm tworzy z bokiem prostokąta równym wysokości walca kąt 60°. Wyznacz objętość walca.

Zad. 5
Jaką długość ma średnica podstawy walca, jeśli pole powierzchni całkowitej jest równe 24π, a objętość wynosi 16π?

Temat 13: **Pole powierzchni całkowitej i objętość walca**

Zad. 1
Prostokąt o polu równym 300 i przekątnej długości 25 obraca się wokół krótszego boku. Oblicz objętość powstałej bryły.

Zad. 2
Objętość walca jest równa 4π, a pole powierzchni bocznej wynosi 16π. Wyznacz tangens kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego danego walca do płaszczyzny podstawy.

Zad. 3
Po rozwinięciu powierzchnia boczna walca jest prostokątem w którym przekątne długości 4 przecinają się pod kątem 60°. Oblicz objętość walca (rozważ dwa przypadki).

Zad. 4
Wyznacz stosunek objętości walców powstałych w wyniku obrotów prostokąta wokół prostych zawierających różne boki danego prostokąta. Przekątna tworzy z jednym z boków prostokąta kąt 30°.

Temat 14: **Pole powierzchni i objętość stożka**

Cel lekcji: poznanie kolejnego rodzaju brył obrotowych – stożka i obliczanie jego pola powierzchni całkowitej i objętości

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję stożka i stosować wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka
- Wskazywać podstawę, powierzchnię boczną, wysokość i spodek wysokości stożka
- Wskazywać i wyznaczać miary kątów w stożku: kąt rozwarcia stożka, kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy, kąt środkowy powierzchni bocznej stożka po rozwinięciu
- Wyznacza przekrój osiowy i poprzeczny stożka

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia stożka i zaznaczenie charakterystycznych długości i kątów w stożku

3. Wprowadzenie wzorów na pole powierzchni całkowitej $P_c = \pi r(r + l)$ i objętość stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Pole powierzchni bocznej stożka jest równe 8π, a tworząca ma długość 4. Wyznacz długość wysokości tego stożka.

Zad. 2
Po rozwinięciu powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem kołowym o kącie środkowym równym 90˚ i promieniu 8 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.

Zad. 3
Wiedząc, że kąt rozwarcia stożka ma miarę 60˚, a objętość jest równa 3π wyznacz pole powierzchni bocznej stożka.

Zad. 4
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym 4√3. Wyznacz objętość stożka.

Temat 15: Pole powierzchni i objętość stożka

Zad. 1
Oblicz objętość stożka ściętego, którego dolna podstawa ma średnicę 8 cm, a górna - 4 cm. Wysokość tego stożka wynosi 6 cm. Oblicz objętość bryły.

Zad. 2
Wysokość stożka jest równa 16, a kąt rozwarcia ma miarę 60˚. Płaszczyzna równoległa do podstawy stożka podzieliła go na dwie bryły o równych polach powierzchni całkowitej. Wyznacz odległość d tej płaszczyzny od wierzchołka stożka.

Zad. 3
W stożku o polu powierzchni całkowitej równym 48π tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60˚. Wyznacz objętość stożka.

Zad. 4
Wiedząc, że stosunek pola powierzchni całkowitej stożka do pola powierzchni bocznej wynosi 3:2 wyznacz cosinus kąta rozwarcia tego stożka.

Temat 16: Pole powierzchni i objętość kuli

Cel lekcji: omówienie pojęcia kuli i sfery oraz obliczanie pola powierzchni i objętości kuli

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję kuli i sfery
- Wskazywać promień i środek kuli i sfery

– Wyznaczać pole powierzchni i objętość kuli
– Wyznaczać przekrój kuli daną płaszczyzną

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia kuli i sfery
3. Podanie wzorów na objętość $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ i pole powierzchni całkowitej kuli $P_c = 4\pi r^2$
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Objętości stożka i kuli o promieniu równym 6 są równe. Wiedząc, że pole podstawy stożka jest trzy razy mniejsze od pola jego powierzchni bocznej, oblicz wysokość stożka.

Zad. 2
Kulę przecięto dwiema równoległymi płaszczyznami. Pola otrzymanych przekrojów są równe odpowiednio: 4π i 36π, a odległość między nimi wynosi 8. Wyznacz długość promienia kuli.

Zad. 3
Na sześcianie o przekątnej równej 4 opisano kulę. Ile wynosi objętość i pole powierzchni całkowitej tej kuli?

Zad. 4
Na kuli o promieniu 3 cm opisano graniastosłup prawidłowy trójkątny. Wyznacz stosunek objętości kuli do objętości danego graniastosłupa.

Temat 17: Pole powierzchni i objętość kuli

Zad. 1
Ile wynosi objętość kuli wpisanej w ostrosłup prawidłowy czworokątny, jeśli jego krawędź podstawy ma długość 3, a kąt między przeciwległymi ścianami bocznymi jest równy 60˚?

Zad. 2
Stożek o kącie nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy równym 60˚ wpisano w kulę, której promień ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.

Zad. 3
Ile wynosi pole powierzchni kuli stycznej do krawędzi sześcianu o długości 4?

Zad. 4
Objętości walca i kuli są takie same. Wiemy, że promień kuli jest 2 razy mniejszy od promienia podstawy walca. Czy prawdą jest, że promień kuli jest 3 razy większy od wysokości walca?

Temat 18: Bryły podobne

Cel lekcji: zapoznanie z definicją brył podobnych i ich własnościami

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję brył podobnych i ich własności
- Stosować własności brył podobnych do rozwiązywania zadań tekstowych
- Stosować twierdzenia o polu powierzchni i objętości brył podobnych

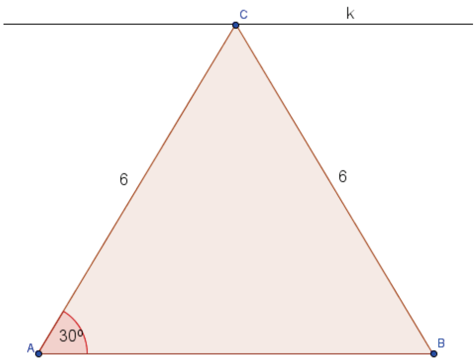
Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia brył podobnych
3. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem poznanych twierdzeń i wzorów

Zad. 1
Trójkąt o przyprostokątnych równych 8 cm i 15 cm obraca się wokół przeciwprostokątnej. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

Zad. 2
Romb o polu równym 16 obraca się wokół jednego z boków. Ile wynosi pole powierzchni otrzymanej bryły?

Zad. 3
Trapez prostokątny o podstawach długości 10 i 8 obraca się wokół krótszego ramienia. Wiedząc, że pole trapezu wynosi 54 oblicz objętość otrzymanej bryły.

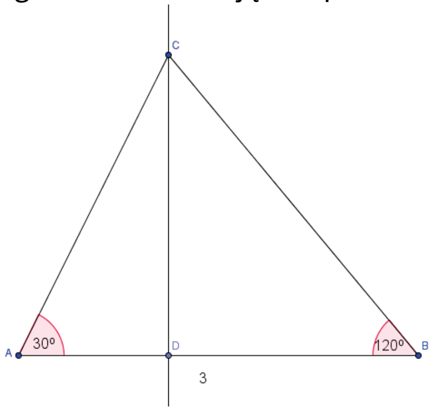
Zad. 4
Trójkąt równoramienny obraca się wokół prostej k, która jest równoległa do podstawy AB. Ramiona trójkąta ma długość 6, a kąt przy podstawie jest równy 30˚. Oblicz objętość i pole powierzchni otrzymanej bryły.



Temat 19: Bryły podobne

Zad. 1
Trójkąt równoramienny obraca się wokół podstawy. Oblicz objętość otrzymanej bryły, jeśli obwód trójkąta wynosi 12 cm, a kąt przy wierzchołku ma miarę 60°?

Zad. 2
Trójkąt ABC obraca się wokół prostej CD zawierającej wysokość poprowadzoną z wierzchołka C. Kąty przy podstawie trójkąt mają miary 30° i 120°, a podstawa AB ma długość 3. Oblicz objętość powstałej bryły.



Zad. 3
Romb ABCD obraca się wokół prostej k, która jest prostopadła do boku AB. Wyznacz objętość otrzymanej bryły, jeśli kąt ostry rombu ma miarę 60°, a długość boku wynosi 2.

Temat 20: Bryły wpisane i opisane

Cel lekcji: obliczanie pola powierzchni i objętości brył wpisanych bądź opisanych na graniastosłupach, ostrosłupach i bryłach obrotowych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Rozumieć pojęcie bryły opisanej i wpisanej w graniastosłup, ostrosłup, stożek, walec, kulę
- Obliczać objętości i pola powierzchni brył wpisanych i opisanych z zastosowaniem twierdzeń i wzorów poznanych w tym rozdziale
- Wyznaczać zależności między bryłami wpisanymi i opisanymi na wyżej wymienionych bryłach

Porządek lekcji:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o graniastosłupach, ostrosłupach i bryłach obrotowych
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Na sześcianie o krawędzi długości 6 cm opisano walec. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość walca.

Zad. 2
W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisano stożek tak, że podstawa stożka jest wpisana w podstawę ostrosłupa, a wierzchołek stożka jest jednocześnie wierzchołkiem ostrosłupa. Oblicz objętość stożka, jeśli objętość ostrosłupa jest równa 36.

Zad. 3
Krawędzie prostopadłościanu mają długości: 6 cm, 8 cm, 12 cm. Wyznacz promień kuli opisanej na prostopadłościanie.

Zad. 4
Wyznacz długość promienia kuli wpisanej w stożek, w którym tworząca ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°.

Temat 21: Bryły wpisane i opisane

Zad. 1
Ile wynosi objętość walca wpisanego w graniastosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wszystkie krawędzie mają długość 4?

Zad. 2
W kulę wpisano stożek o wysokości równej 3. Ile wynosi objętość kuli, jeśli wiadomo, że jest ona 4 razy większa niż objętość stożka?

Zad. 3
W stożek o promieniu podstawy równym 0,5 m i wysokości 1 m wpisano sześcian. Dolna podstawa sześcianu zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki górnej podstawy należą do powierzchni bocznej tego stożka. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej sześcianu?

Zad. 4
Ile wynosi objętość kuli opisanej na stożku o tworzącej długości 3 i promieniu podstawy równym $2\sqrt{2}$?

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Oblicz promień kuli opisanej na ośmiościanie foremnym o boku długości 4.

Zad. 2
Rozwinięciem powierzchni bocznej stożka jest wycinek kołowy o kącie środkowym równym 180°, opartym na cięciwie długości 4. Oblicz objętość stożka.

Zad. 3
Przekątna prostopadłościanu o długości 4 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Przekątna podstawy tworzy z bokiem podstawy kąt 30°. Oblicz objętość prostopadłościanu.

Zad. 4
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej długości 8. Krawędzie boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość ostrosłupa.

Sprawdzian

Zad. 1
Ile wynosi promień kuli wpisanej w czworościan foremny o boku długości 12?

Zad. 2
Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°, a promień podstawy ma długość 8. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej stożka.

Zad. 3
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30°. Ile wynosi pole powierzchni bocznej graniastosłupa?

Zad. 4
Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Ile wynosi wysokość ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy ma długość 9?

Zad. 5
Jeśli wysokość walca zwiększymy o 2, to jego objętość wzrośnie o 8π. Wyznacz promień podstawy walca.

Poprawa pracy klasowej

Zad. 1
Odp. $r = \sqrt{6}$

Zad. 2
Odp. $P_c = 192\pi,\ \ V = \frac{512\sqrt{3}}{3}\pi$

Zad. 3
Odp. $P_b = 48\sqrt{2}cm^2$

Zad. 4
Odp. $H = 4{,}5$

Zad. 5
Odp. $r = 2$