MATEMATYKA III

SPOSÓB NA NAUKĘ

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PROJEKT „SPOSÓB NA NAUKĘ” WSPÓŁFINANSOWANY ZE ŚRODKÓW
UNII EUROPEJSKIEJ W RAMACH EUROPEJSKIEGO FUNDUSZU SPOŁECZNEGO

Program nauczania z matematyki rozszerzony i poradnik dla nauczyciela – klasa III szkoły ponadgimnazjalnej

Spis treści

Wstęp

Ważnym celem nauczania matematyki w liceum i technikum jest wyposażenie przyszłego absolwenta w umiejętności matematyczne niezbędne do sprostania wymogom egzaminu maturalnego z matematyki na wybranym przez niego poziomie. Dodatkowo zakres podstawowy powinien dać absolwentowi umiejętności przydatne w codziennym życiu, zaś zakres rozszerzony – stworzyć solidny fundament do kontynuowania nauki na wymagających tego wyższych studiach. Nauczanie matematyki w sposób szczególny stymuluje rozwój intelektualny ucznia, między innymi wykształca:

- umiejętność czytania tekstu ze zrozumieniem, w tym również tekstu zawierającego dane statystyczne prezentowane w różny sposób;
- umiejętność logicznego myślenia i argumentowania;
- nawyku krytycznej analizy informacji;
- umiejętność formułowania hipotez i ich uzasadniania;
- wyobraźnię przestrzenną;
- umiejętność planowania strategii rozwiązania problemu;
- postawę wykorzystywania narzędzi matematycznych w życiu codziennym, budowania modelu matematycznego dla danego kontekstu praktycznego z uwzględnieniem ograniczeń i zastrzeżeń z niego wynikających

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
1. GRANICA FUNKCJI			**31**
1. Granica funkcji w punkcie. Obliczanie granic funkcji w punkcie	▪ zna definicję granicy funkcji w punkcie ▪ przedstawia geometryczną interpretacją granicy funkcji w punkcie ▪ oblicza z definicji granicę funkcji w punkcie ▪ zna twierdzenia dotyczące sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu granic ▪ oblicza granice funkcji w punkcie, korzystając z własności	Uczeń: • oblicza, na podstawie definicji, granice funkcji w punkcie • podaje przykłady funkcji, które nie mają granicy w punkcie • potrafi uzasadnić istnienie granicy funkcji w punkcie lub jej braku • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
2. Pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie. Granice jednostronne funkcji w punkcie.	▪ zna definicję granicy niewłaściwej funkcji w punkcie ▪ potrafi obliczać granice niewłaściwe funkcji wymiernych w punkcie ▪ oblicza granice prawostronne i lewostronne funkcji w punkcie podaje interpretację geometryczną granic jednostronnych w punkcie	Uczeń: • podaje przykłady funkcji, które mają granice niewłaściwe w punkcie (np. y = a/x • rozumie pojęcie symbolu nieoznaczonego • podaje przykłady funkcji, które mają granicę lewostronną, a nie maję granicy prawostronnej w tym samym punkcie i wspak • szkicuje wykresy funkcji, znając równania asymptot poziomych	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
3. Asymptoty poziome wykresu funkcji	▪ odczytuje z wykresu funkcji jej granice jednostronne w danym punkcie ▪ wyznacza równania asymptot pionowych	Uczeń: Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
4. Granica funkcji w nieskończoności.	▪ oblicza granice funkcji wielomianowych i wymiernych w nieskończoności, korzystając z poznanych własności o granicach ▪ przedstawia geometrycznie uzyskane wyniki obliczonych granic funkcji w nieskończoności ▪ oblicza równania asymptot poziomych i rysuje ich wykresy	Uczeń: • rysuje wykresy funkcji, znając równania asymptot poziomych • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
5. Ciągłość funkcji w punkcie	▪ przedstawia geometrycznie ciągłość funkcji w punkcie ▪ przedstawia geometrycznie funkcję, która nie jest ciągła w punkcie	Uczeń: • oblicza ciągłość funkcji w danych punktach	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym	▪ oblicza punkty nieciągłości funkcji ▪ liczy ciągłość funkcji przedziale liczbowym, w którym jest ona określona	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
7. Pojęcie pochodnej funkcji w punkcie	▪ zna pojęcie ilorazu różnicowego ▪ oblicza wartość ilorazu różnicowego funkcji w punkcie ▪ oblicza, korzystając z definicji pochodne znanych funkcji w danym punkcie	Uczeń: • wyznacza pochodną funkcji wielomianowych i wymiernych w dowolnym punkcie • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
8. Geometryczna interpretacja pochodnej funkcji w punkcie	▪ przedstawia pochodną funkcji w punkcie jako tangens kąta nachylenia stycznej do osi *OX* ▪ wyznacza równanie stycznej do wykresu funkcji	Uczeń: • podaje interpretację fizyczną pochodnej funkcji w punkcie (prędkość ruchu ciała w chwili t_0 jako pochodna funkcji będącej drogą $s(t)$ w punkcie t_0) • stosuje do rozwiązywania zadań interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej funkcji w punkcie	2
9.Pochodna funkcji i jej własności	▪ zna pojęcie pochodnej funkcji w zbiorze ▪ wyznacza na podstawie twierdzeń o działaniach na pochodnych , pochodne funkcji wielomianowych i wymiernych w zbiorze	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
10. Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji	▪ zna warunki, jakie musi spełniać pochodna funkcji, aby dana funkcja była monotoniczna w przedziale liczbowym ▪ na podstawie określenia znaku pochodnej wyznacza przedziały, w których funkcja jest: rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące związku monotoniczności funkcji z jej pochodną	2
11. Pojęcie ekstremum funkcji	▪ wyznacza na wykresie funkcji jej ekstrema ▪ zna i sprawdza warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji ▪ wyznacza minimum lokalne oraz maksimum lokalne funkcji w przedziale liczbowym	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
12. Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale liczbowym	▪ wyznacza najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale liczbowym, korzystając z wyznaczonych ekstremów oraz monotoniczności funkcji ▪ wyznacza zbiór wartości funkcji	Uczeń: • rozróżnia ekstrema lokalne funkcji od ekstremów globalnych funkcji • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
13. Zastosowanie pochodnej funkcji do badania własności funkcji	▪ rysuje wykresy funkcji wielomianowych i wymiernych, korzystając z wyznaczonych granic funkcji, asymptot oraz własności pochodnej funkcji	Uczeń: • przedstawia interpretację i geometryczną przebiegu zmienności funkcji	2
14. Zastosowanie pochodnej funkcji w zadaniach	▪ stosuje pochodne funkcji wielomianowych i wymiernych do rozwiązywania zadań	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące związku monotoniczności funkcji z pochodną funkcji	2
11. Powtórzenie wiadomości 12. Praca klasowa i jej omówienie			3
2. STATYSTYKA OPISOWA. PODOBIEŃSTWO I KOMBINATORYKA			**30**
1. Prezentacja danych statystycznych	▪ przedstawia dane statystyczne w postaci tabeli, diagramu słupkowego lub kołowego, wykresu w układzie współrzędnych ▪ potrafi odczytać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów ▪ porównuje dane statystyczne przedstawione na różny sposób ▪ określa zależności między odczytanymi danymi	Uczeń: • rozwiązuje zadania, o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące prezentacji danych statystycznych • analizuje i interpretuje otrzymane wyniki	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
2. Liczby charakteryzujące dane zebrane w badaniu statystycznym, miary centralne	▪ oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną skończonego zbioru danych ▪ interpretuje otrzymaną średnią arytmetyczną i średnią ważoną ▪ rozróżnia pojęcia mediany i mody ▪ oblicza medianę i modę skończonego zbioru danych ▪ oblicza średnie, gdy dane są odpowiednio pogrupowane ▪ rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje definicje średniej arytmetycznej, średniej ważonej, mediany i mody	Uczeń: • rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje definicje i własności średniej arytmetycznej, średniej ważonej, mediany i mody	2
3. Analiza rozproszenia wyników	▪ zna pojęcia wariancji i odchylenia standardowego skończonego zbioru danych ▪ oblicza wariancję i odchylenie standardowe, ▪ interpretuje wariancję i odchylenie standardowe ▪ wyznacza rozstęp danych liczbowych	Uczeń: • rozwiązuje nietypowe problemy, w których wykorzystuje definicje poznanych pojęć statystycznych • interpretuje poznane parametry statystyczne • rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje definicje i własności wariancji i odchylenia standardowego	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
4. Częstość występowania	▪ oblicza częstość występowania określonych wyników na podstawie przeprowadzonego doświadczenia lub danych lub wyliczonych informacji	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • analizuje otrzymane wyniki	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
5. Doświadczenie losowe	▪ opisuje możliwe do uzyskania wyniki danego doświadczenia losowego ▪ zna pojęcia: zdarzenie elementarne, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, zdarzenie losowe ▪ podaje przykłady zdarzenia elementarnego danego doświadczenia losowego ▪ podaje przykłady zdarzenia losowego w danym doświadczeniu losowym ▪ zna pojęcie moc zbioru ▪ wyznacza liczbę możliwych wyników oraz liczbę wyników zdarzenia losowego ▪ stosuje drzewo do opisywania wyników doświadczenia losowego ▪ podaje przykłady zdarzenia niemożliwego i zdarzenia pewnego ▪ opisuje doświadczenia losowe, używając drzewa	Uczeń: • opisuje zdarzenia elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych i zdarzenia losowe • rozwiązuje zadania złożone	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
6. Działania na zdarzeniach losowych	▪ zna pojęcia: suma, iloczyn i różnica zdarzeń losowych, zdarzenie przeciwne do danego ▪ wyznacza sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń losowych ▪ wyznacza zdarzenie przeciwne do danego zdarzenia losowego ▪ wskazuje zdarzenia losowe wykluczające się	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
7. Reguła mnożenia i reguła dodawania	▪ zna regułę mnożenia i regułę dodawania ▪ stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania do zliczania obiektów w zadaniach kombinatorycznych	Uczeń: • rozwiązuje zadania złożone	1
8. Pojęcie permutacji i wariacji	▪ wyznacza liczbę permutacji zbioru *n*- elementowego ▪ wyznacza liczbę *k* - elementowych wariacji bez powtórzeń i z powtórzeniami zbioru *n* - elementowego ▪ rozwiązuje zadania kombinatoryczne	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • rozwiązuje nietypowe zadania, w których wykorzystuje poznane pojęcia	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
9. Pojęcie kombinacji	▪ oblicza wartość symbolu Newtona ▪ wyznacza liczbę *k* - elementowych kombinacji zbioru *n*- elementowego ▪ rozwiązuje równania i nierówności, w których występują liczby zapisane przy użyciu symbolu Newtona	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • rozwiązuje nietypowe zadania, w których wykorzystuje poznane własności i definicje	2
10. Prawdopodobieństwo zdarzenia	▪ wyznacza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, wykorzystując definicję prawdopodobieństwa ▪ wyznacza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, stosując drzewa	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
11. Różne metody obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń	▪ oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń losowych, wykorzystując różne metody ▪ oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, wykorzystując prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do danego ▪ oblicza prawdopodobieństwo sumy, iloczynu zdarzeń, korzystając z drzewa ▪ oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń, w których opisie występują sformułowania „co najmniej”, „co najwyżej”	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • wyznacza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, wykorzystując wzory na liczbę permutacji, wariacji bez powtórzeń, wariacji z powtórzeniami i kombinacji • rozwiązuje nietypowe zadania, w których wykorzystuje klasyczną definicję prawdopodobieństwa i twierdzenie o sumie zdarzeń	2
12.Prawdopodobieństwo warunkowe	▪ zna pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego ▪ wyznacza prawdopodobieństwo warunkowe za pomocą drzewa ▪ wyznacza prawdopodobieństwo warunkowe, korzystając z definicji	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • rozwiązuje nietypowe problemy, w których wykorzystuje prawdopodobieństwo warunkowe	2
13.Prawdopodobieństwo całkowite	▪ opisuje doświadczenia wieloetapowe ▪ oblicza prawdopodobieństwo całkowite za pomocą drzewa	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności • rozwiązuje nietypowe zadania, w których wykorzystuje prawdopodobieństwo całkowite	2

Temat lekcji	Zakres treści	Uczeń zna	Liczba godzin
14. Własności prawdopodobieństwa	▪ zna definicję i własności prawdopodobieństwa ▪ rozwiązuje zadania, w których wykorzystuje własności prawdopodobieństwa	Uczeń: • rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności	2
15. Powtórzenie wiadomości 16. Praca klasowa i jej omówienie			3
17. Przygotowanie do matury			60
		RAZEM	**120**

Scenariusze klasa III

1. Granica funkcji

Temat 1: Granica funkcji w punkcie. Obliczanie granic funkcji w punkcie

Cel lekcji: poznanie pojęcia granicy funkcji w punkcie, interpretacji geometrycznej i sposobów jej obliczania

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję granicy funkcji w punkcie i jej interpretację geometryczną
- Wyznaczać z definicji proste granice funkcji w punkcie
- Znać twierdzenia dotyczące granic funkcji w punkcie
- Obliczać na postawie poznanych twierdzeń granicę funkcji w punkcie
- Wiedzieć, co to są symbole nieoznaczone
- Podawać przykłady funkcji, które nie mają granicy

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia granicy funkcji w punkcie oraz podanie jej interpretacji geometrycznej:

Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie:
Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Granicą funkcji $f(x)$ w punkcie nazywamy taką liczbę g, że:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigwedge_{(x_n)} [x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g]$$

Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie:
Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Granicą funkcji $f(x)$ w punkcie nazywamy taką liczbę g, że:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigvee_{x\in S(x_0)} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

3. Wprowadzenie twierdzeń dotyczących obliczania granic w punkcie:

Jeśli istnieją granice: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0} g(x)$ oraz c jest dowolną liczbą rzeczywistą, to:

$$\lim_{x\to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Wskaż funkcje, które nie mają granic w podanych punktach::

1. $f(x)=\dfrac{x^2-|x|}{3x}$
   $x_0=0$
2. $f(x)=\sin x$
   $x_0=0$
3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{|x-2|}$
   $x_0=2$
4. $f(x)=\dfrac{x}{|x|+3x}$
   $x_0=0$
5. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+9}$
   $x_0=3$

Zad. 2

Czy podana funkcja ma granicę?

$f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$

$x_0=2$

Zad. 3

Oblicz granicę funkcji w podanym punkcie: $f(x)=x^2-3x+1$, $x_0=1$

Zad. 4

Oblicz granice funkcji we wskazanych punktach:

1. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-8}$
   $x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{-x^2+2x+3}$
   $x_0=-1$

3. $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+2x^2-9x-18}$
$x_0=-2$

Zad. 5

Wskaż granicę funkcji: $f(x)=\left(1+\sin x-\frac{tgx}{\cos x}\right)$
$x_0=0$

Zad. 6

Oblicz granicę funkcji w podanym punkcie: $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$
$x_0=1$

Temat 2: Granica funkcji w punkcie. Obliczanie granic funkcji w punkcie

Zad. 1

Oblicz granicę funkcji w podanym punkcie: $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{x+3}-3}$
$x_0=0$

Zad. 2
Czy podana funkcja ma granicę?
$f(x)=\frac{|x-1|}{2x-2}$
$x_0=1$

Zad. 3
Oblicz granicę funkcji w podanym punkcie:
$f(x)=\frac{x^3-x^2-2x}{x^2-1}+\frac{x^2-2x-3}{-x^3+x^2+2x}$
$x_0=-1$

Zad. 4
Oblicz granice funkcji we wskazanych punktach:

1. $f(x)=\frac{\sin 2x}{4x}$
$x_0=0$
2. $f(x)=\frac{3x}{\sin 9x}$
$x_0=0$

3. $f(x) = \frac{tg3x}{tg2x}$

$x_0 = 0$

Zad. 5

Wskaż granicę funkcji: $f(x) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{2})}{4x}$

$x_0 = 0$

Zad. 6

Oblicz granicę funkcji w punkcie: $f(x) = \frac{\sin x - \sin 2x}{2x}$

$x_0 = 0$

Temat 3: Granica niewłaściwa funkcji w punkcie. Granice jednostronne funkcji w punkcie

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia granicy niewłaściwej funkcji w punkcie oraz pojęcia granicy jednostronnej funkcji w punkcie i sposobów ich obliczania

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i granicy jednostronnej funkcji w punkcie
- Obliczać granice niewłaściwe funkcji wymiernych w punkcie
- Obliczać granice jednostronne: lewostronne i prawostronne funkcji w punkcie oraz podawać interpretację geometryczną tych granic szkicujący wykresy funkcji i zaznaczając asymptoty pionowe
- Podawać przykłady funkcji, które mają granice niewłaściwe
- Rozumieć pojęcie symbolu nieoznaczonego i podawać przykłady symboli nieoznaczonych
- Szkicuje prawdopodobne wykresy funkcji na podstawie granic jednostronnych funkcji w punkcie i asymptot pionowych

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia granicy niewłaściwej funkcji punkcie i podanie przykładów funkcji, które mają granice niewłaściwe np. $f(x) = \frac{a}{x}$ przy x dążącym do nieskończoności
3. Zdefiniowanie pojęcia granicy jednostronnej funkcji w punkcie
4. Wprowadzenie pojęcia symbolu nieoznaczonego i podanie przykładów: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$

5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Sprawdź, czy podana granica istnieje, jeśli tak, oblicz ją:
$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{(x-3)^2}$$

Zad. 2

Oblicz granicę funkcji we wskazanym punkcie: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2}$

$x_0=\sqrt{2}$

Zad. 3
Oblicz podane granice:
1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-1}{x^2-9}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)$

Zad. 4
Zaznacz te funkcje, których granice nie istnieją:
1. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4x+4}$
   $x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-2x+1}$
   $x_0=1$
3. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+4}$
   $x_0=-4$
4. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$
   $x_0=2$
5. $f(x)=\dfrac{2x-1+x^2}{x^2}$
   $x_0=0$

Zad. 5
Czy podana granica istnieje?

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^3-1}{x}$$

Temat 4: Granica niewłaściwa funkcji w punkcie. Granice jednostronne funkcji w punkcie

Zad. 1

Sprawdź, czy podana granica istnieje, jeśli tak, oblicz ją:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x+2}, x<1\\ x^2-1, x>1\end{cases}$$

$$x_0=1$$

Zad. 2

Oblicz podane granice:

1. $\lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2-3x+1}{-x^3-2x^2+3x}$
2. $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-4x+1}{x^4-5x^2+4}$

Zad. 3

Czy funkcja ma granicę w podanym punkcie?

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x-3}, x<-2\\ \frac{1}{x}, x>-2\end{cases}$$

$$x_0=-2$$

Zad. 4

Oblicz granicę jednostronną funkcji w punkcie: $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^4-2x^2+4}{x^3-2x^2+8x-16}$

Zad. 5

Oblicz podane granice:

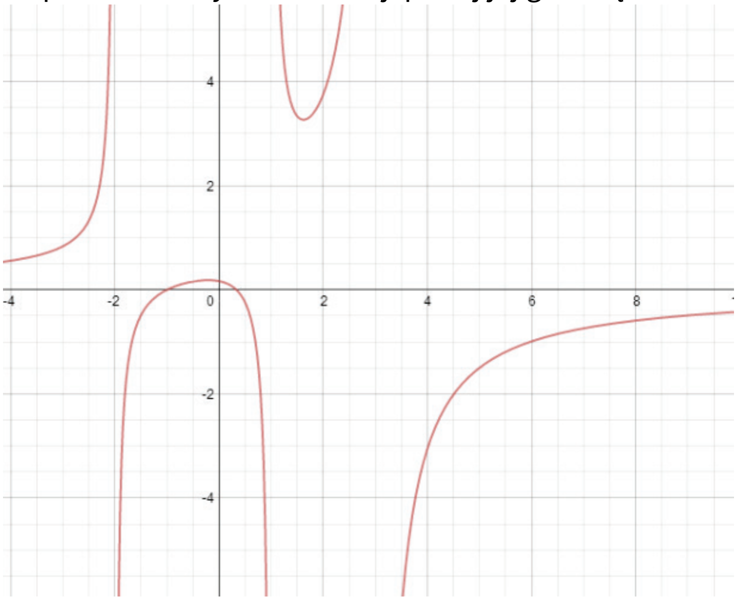
1. $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+8}{-2x^2+x+1}$
2. $\lim_{x\to 10^-}\frac{x-1}{3x^2+29x-10}$

Zad. 6

Oblicz granicę jednostronną funkcji w punkcie: $\lim_{x\to 0^-}\frac{x-\cos x}{|x|}$

Zad. 7

Na podstawie wykresu funkcji podaj jej granicę lewostronną w punkcie $x = 1$



Temat 5: **Asymptoty pionowe wykresu funkcji**

Cel lekcji: omówienie pojęcia asymptot pionowych wykresu funkcji i sposobów ich obliczania, szkicowanie hipotetycznych wykresów funkcji

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

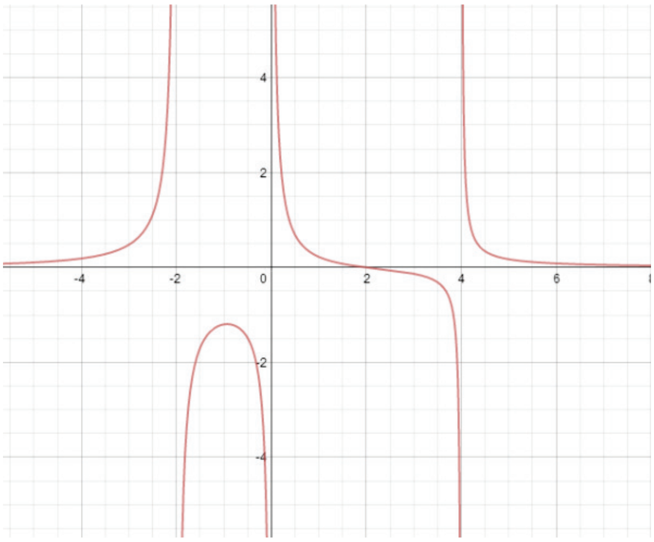
- Znać pojęcie asymptoty pionowej wykresu funkcji i umieć wyznaczać jej równanie
- Odczytywać z wykresu funkcji jej granice jednostronne punkcie

Przebieg zajęć:

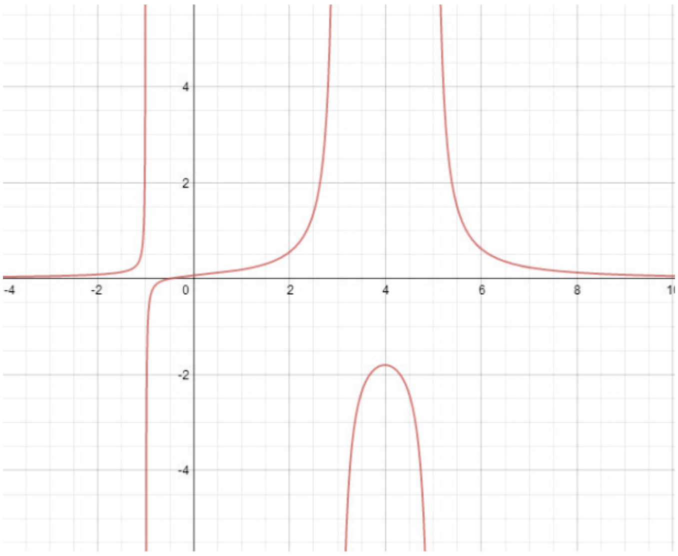
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia asymptoty pionowej i wyznaczanie jej równania
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Dane są wykresy pewnych funkcji. Odczytaj granice jednostronne funkcji w podanych punktach:

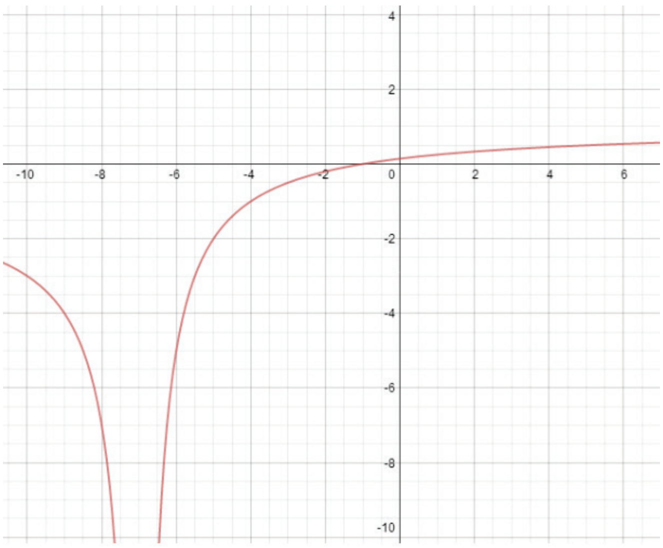
A.



B.



C.



Zad. 2

Czy funkcja $f(x)=\frac{2x-5}{x-4}$ ma asymptotę pionową daną równaniem $x = 4$?

Zad. 3

Wyznacz asymptoty pionowe funkcji: $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

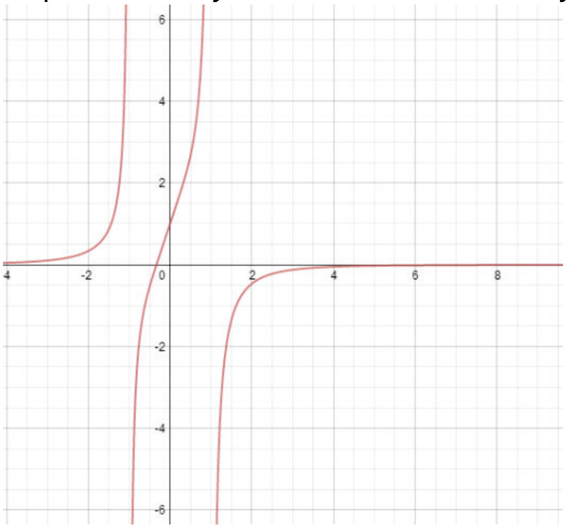
Zad. 4

Wyznacz asymptoty pionowe podanych funkcji:

1. $f(x)=\frac{x^2-x}{3x^2+5x-2}$
2. $f(x)=\frac{1-x^2+3x}{x^2+3-4x}$
3. $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2+4x}$

Zad. 5

Na podstawie wykresu wskaż równania asymptot funkcji:



Zad. 6

Zaznacz te funkcje, które nie mają asymptot pionowych:

1. $f(x)=\frac{3x^3-2x+1}{x^2+9}$
2. $f(x)=\left|\frac{x^2+2x-4}{x-1}\right|$
3. $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+1}$
4. $f(x)=\frac{\cos x+3x}{|x+1|}$

Temat 6: Asymptoty pionowe wykresu funkcji

Zad. 1

Wyznacz asymptoty pionowe funkcji: $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x-4}{x^3+x^2-4x-4}$

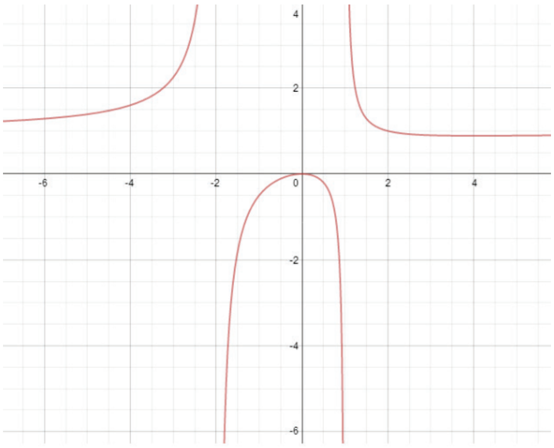
Zad. 2

Czy funkcja $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+2x+8}$ ma asymptotę jedyną pionową $x=-2$?

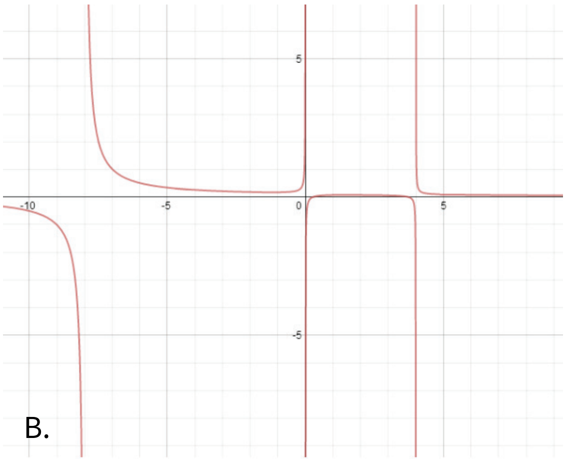
Zad. 3

Na podstawie wykresów odczytaj asymptoty pionowe funkcji:

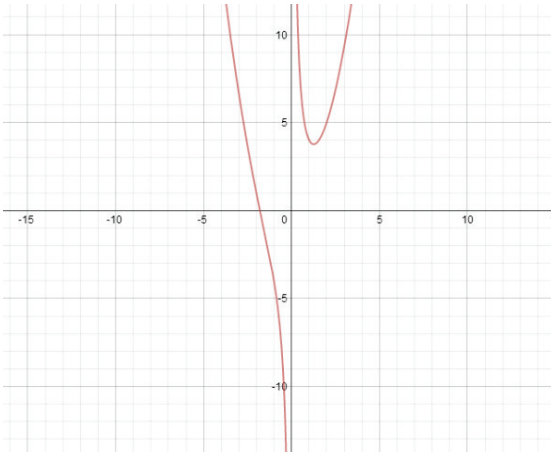
A.



B.



C.



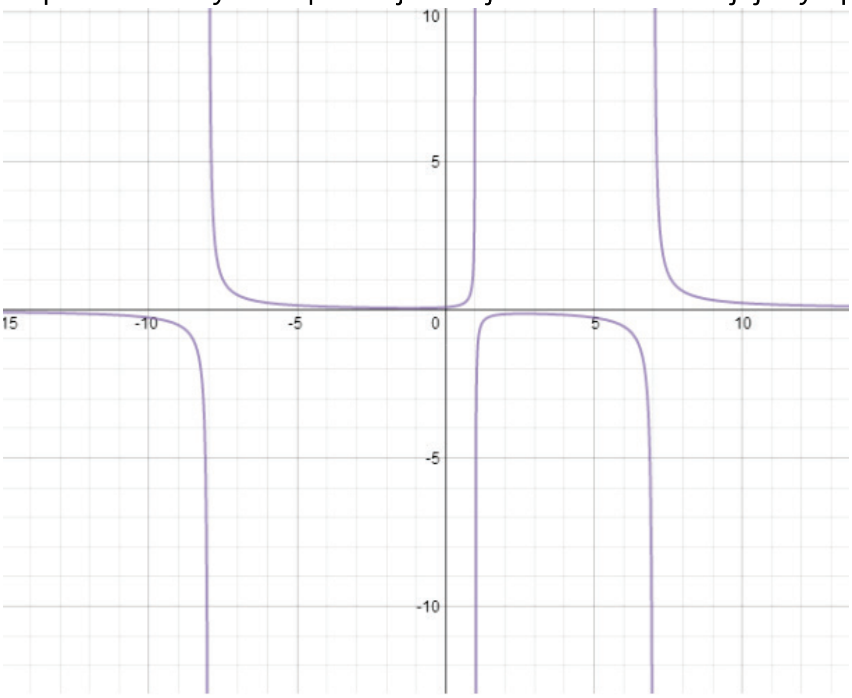
Zad. 4

Wyznacz równania asymptot pionowych podanych funkcji:

1. $f(x)=\dfrac{4x^2-2x-1}{3x^2+12x+1}$
2. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x}{x^2+x-2}$

3. $f(x)=\dfrac{x^3-4+x}{x^3+4x^2+x-6}$

Zad. 5
Na podstawie wykresu pewnej funkcji wskaż równania jej asymptot:



Temat 7: Granica funkcji w nieskończoności

Cel lekcji: poznanie pojęcia granicy funkcji w nieskończoności i obliczanie tej granicy

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać definicję granicy funkcji w nieskończoności i podawać jej interpretację geometryczną
- Odczytywać z wykresu funkcji jej granicę w nieskończoności
- Obliczać granice funkcji kwadratowych, wielomianowych dowolnego stopnia, wymiernych w nieskończoności stosując poznane twierdzenia
- Wyznaczać równania asymptot poziomych funkcji za pomocą obliczania granicy funkcji w plus i minus nieskończoności
- Szkicować wykresy funkcji na podstawie poznanych własności (granice funkcji w nieskończoności, asymptoty pionowe i poziome)

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia granicy funkcji w nieskończoności i jej interpretacja geometryczna

3. Wyznaczanie asymptoty poziomej wykresu funkcji i szkicowanie wykresów funkcji
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Oblicz podane granice:
1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-2x^2+x-2)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4-3x^2-x-1)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{4x+5}$

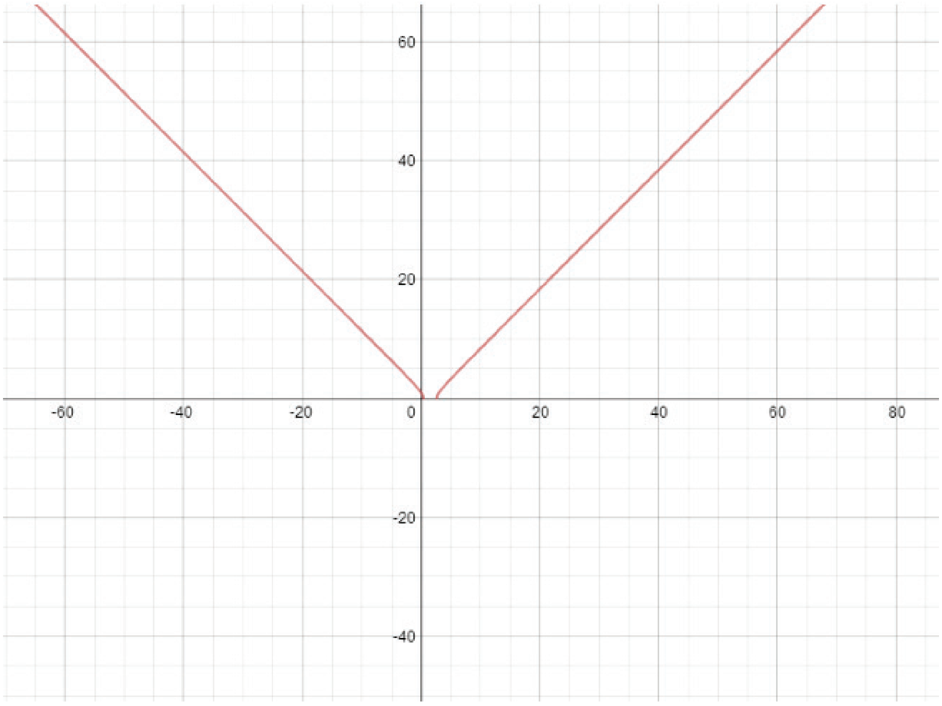
Zad. 2
Czy podane granice są równe?
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{2x-1}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{2x-1}$

Zad. 3
Sprawdź, czy podana granica istnieje, jeśli tak, oblicz ją:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+4}$

Zad. 4
Oblicz wskazaną granicę:
$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2x^2+3x-10}$

Zad. 5
Oblicz podane granice:
1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-9x}{3x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+1}{10x^2-2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{5x^2-2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+1-x}{-3x^2+2x-5}$

Zad. 6
Na rysunku obok przedstawiony jest wykres pewnej funkcji.



Na podstawie wykresu wskaż granicę tej funkcji w plus nieskończoności.

Zad. 7
Ile wynosi granica:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1} - x \right)$$

Temat 8: Granica funkcji w nieskończoności

Zad. 1
Oblicz podane granice:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 1}}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x - 10}{x^2 - 2x + 1}$

Zad. 2
Ile wynosi granica: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$?

Zad. 3

Czy podana funkcja ma asymptotę poziomą? Jeśli tak - oblicz ją: $f(x)=\frac{1-x}{2x+4}$

Zad. 4

Wskaż asymptoty poziome podanych funkcji:

1. $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$
2. $f(x)=\frac{x+4}{2x-1}+1$
3. $f(x)=\frac{2-4x}{x-16}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+10x^2+2x}{2x^3-3x+1}$

Zad. 5

Oblicz asymptotę poziomą podanej funkcji:

$f(x)=\frac{2x-1}{|x-2|}$

Zad. 6

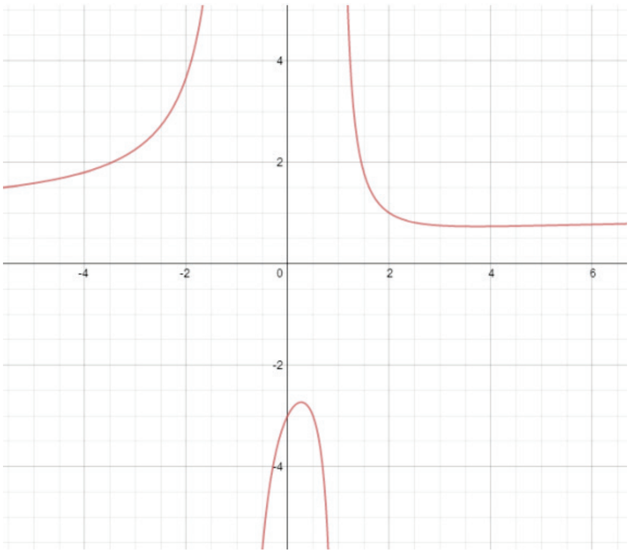
Czy prosta $y = 10$ jest asymptotą poziomą danej funkcji?

$f(x)=\frac{10x^3-2x+1}{x^2-2x+3}$

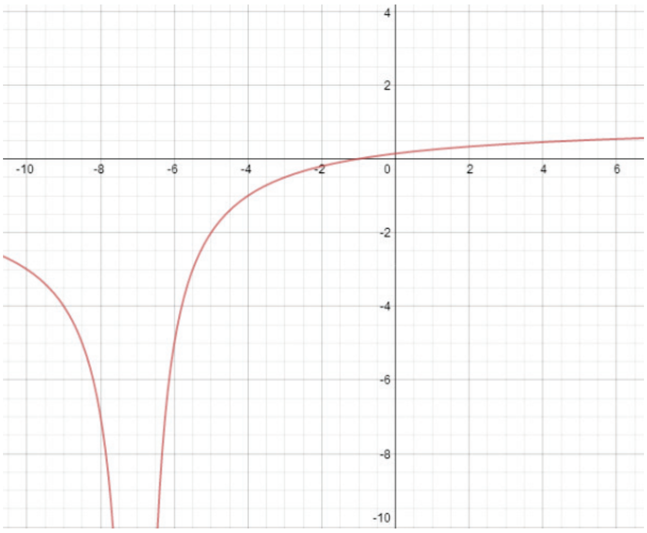
Zad. 7

Wskaż najbardziej prawdopodobny wykres funkcji $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$

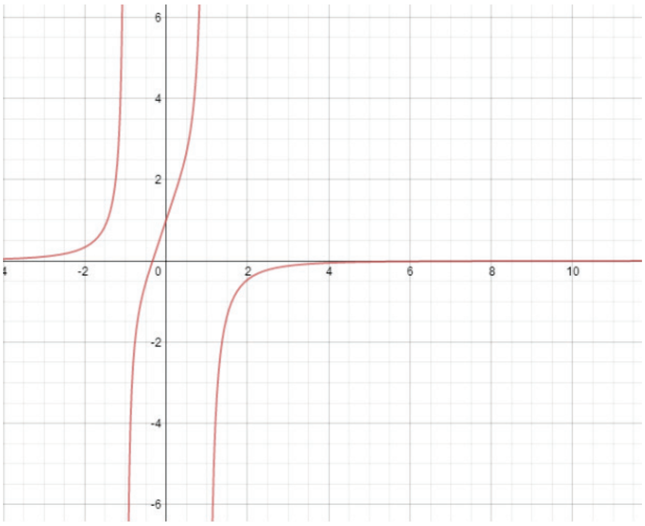
A.



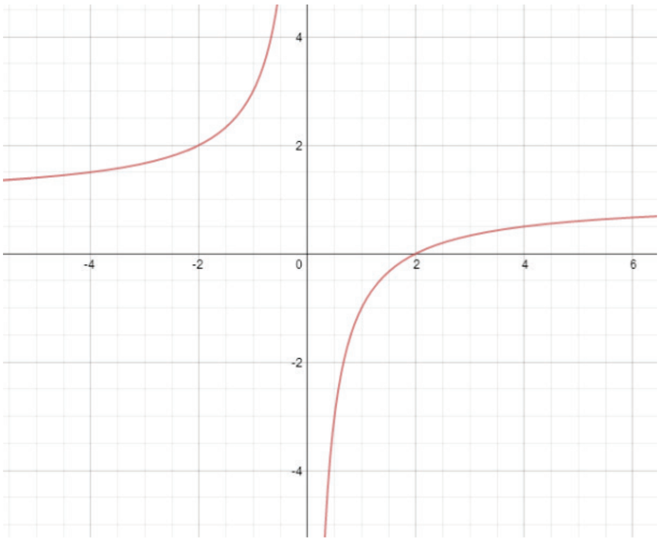
B.



C.



D.



Temat 9: Ciągłość funkcji w punkcie

Cel lekcji: intuicyjne rozumienie ciągłości funkcji w punkcie i jej interpretacja geometryczna

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wskazywać funkcje, które nie są ciągłe w danym punkcie
- Badać ciągłość funkcji w punkcie
- Wskazywać na podstawie wykresu funkcje ciągłe i te, które nie są ciągłe we wskazanym punkcie

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia ciągłości w punkcie i jej interpretacja geometryczna
3. Omówienie warunku, jaki musi spełniać funkcja, aby była ciągła w danym punkcie (wartość funkcji w punkcie musi być równa granicy funkcji w tym punkcie)
4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Sprawdź, czy funkcja $f(x)=x^3-2x^2-x+4$ jest ciągła w podanym punkcie $x_0=1$

Zad. 2
Sprawdź ciągłość podanych funkcji w punkcie

1. $f(x)=\dfrac{6-x}{x^2-4}$
   $x_0=2$
2. $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-1}$
   $x_0=2$

Zad. 3
Zbadaj ciągłość funkcji w podanym punkcie:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$
$$x_0=0$$

Zad. 4
Zbadaj ciągłość funkcji w podanym punkcie:

$$f(x)=\begin{cases} x-4, x\in(-\infty,-3) \\ 5x+8, x\in\langle-3,+\infty) \end{cases}$$
$$x_0=-3$$

Zad. 5

Czy funkcja jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny?

$$f(x)=\begin{cases}-4, x=2\\ x^2-2x+4, x\neq -2\end{cases}$$

$x_0=-2$

Zad. 6

Czy podana funkcja jest ciągła?

$$f(x)=\begin{cases}x-x^2, x\in(-\infty,-1)\\ x^2-1, x\in\langle -1,4)\\ x+4, x\in\langle 4,+\infty)\end{cases}$$

$x_0=-1$

$x_0=4$

Zad. 7

Dla jakiego parametru m podana funkcja jest ciągła?

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-m}$$

$x=1$

Temat 10: Ciągłość funkcji w punkcie

Zad. 1

Sprawdź, czy podana funkcja jest ciągła. Naszkicuj jej wykres:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, x\in(-\infty,1)\\ x^2-4x+6, x\in\langle 1,+\infty)\end{cases}$$

$x_0=1$

Zad. 2

Zbadaj ciągłość funkcji w podanym punkcie:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x+4}{x-1}, x\neq 1\\ -4, x=0\end{cases}$$

$x_0=0$

Zad. 3

Dla jakiej wartości parametru a funkcja jest ciągła w danym punkcie:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2a}{x+1}, x\in(-\infty,-4)\\ x+6, x\in\langle-4,0)\\ 6a, x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$$

Zad. 4

Dla jakiej wartości parametrów a i b funkcja jest ciągła w danych punktach:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+3x-a}{x-1}, x\neq 1\\ b, x=1\end{cases}$$

$x_0=1$

Zad. 5

Dana jest pewna funkcja $f(x)$. Sprawdź, czy jest ciągła w podanych punktach, a następnie naszkicuj jej wykres.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, x\in(-\infty,-2)\\ x-1, x\in\langle-2,1)\\ x^2+3x-4, x\in\langle 1,+\infty)\end{cases}$$

$x_0=-2$

$x_1=1$

Zad. 6

Sprawdź, czy funkcja $f(x)$ jest ciągła w podanym punkcie.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, x=\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{\cos x+\sin x}{\cos 2x}, x\neq\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$x_0=\dfrac{\pi}{4}$

Temat 11: Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym

Cel lekcji: rozszerzenie pojęcia ciągłości funkcji w punkcie do ciągłości funkcji w przedziale liczbowym

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Badać ciągłość funkcji w przedziale liczbowym
- Wskazywać punkty nieciągłości danej funkcji w przedziale liczbowym

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć

2. Podanie warunków, jakie musi spełniać funkcja, aby była ciągła w przedziale liczbowym
3. Wyznaczanie parametrów, dla których funkcja jest ciągła w przedziale liczbowym
4. Uczniowie podają przykłady funkcji, które nie są ciągłe w danym przedziale
5. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Sprawdź, czy funkcja jest ciągła w podanym zbiorze:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, x\in(-\infty,-2\rangle \\ x^2-4x+4, x\in(-2,2\rangle \\ 4, x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

Zad. 2

Zbadaj ciągłość funkcji w podanym zbiorze:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+9}{x^3-27}, x\in R\setminus\{3\} \\ 3, x=3 \end{cases}$$

Zad. 3

Czy podane funkcje są ciągłe?

1. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-4x+8, x\in R\setminus\{2\} \\ 8, x=2 \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-4x^2-x+4}{x^2+2x-3}, x\in R\setminus\{-3,1\} \\ 1, x=-3 \\ 4, x=1 \end{cases}$

Zad. 4

Dla jakiej wartości parametru m podana funkcja jest ciągła?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+3x^2-6x-8}{x+1}, x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty) \\ m-4, x=-1 \end{cases}$$

Zad. 5

Zaznacz te funkcje, które są ciągłe w podanym zbiorze:

1. $f(x)=\begin{cases} x+3, x\in(-\infty,-4) \\ x^2-4x-6, x\in\langle-4,1) \\ -9, x\in\langle1,+\infty) \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-4}{x-1}, x\in(-\infty,1)\\ 2, x=1\\ 6x-4, x\in(1,+\infty)\end{cases}$

Temat 12: Ciągłość funkcji w przedziale liczbowym

Zad. 1

Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale liczbowym?

$$f(x)=\begin{cases}x^2-mx, x\in(-\infty,-5\rangle\\ 15-3x, x\in(-5,+\infty)\end{cases}$$

Zad. 2

Dla jakiej wartości parametru a funkcja f(x) jest ciągła?

$$f(x)=\begin{cases}x^3+(a-2)x^2-x-2, x\in(-\infty,-2)\\ 0, x=-2\\ 4x+2a, x\in(-2,+\infty)\end{cases}$$

Zad. 3

Wyznacz parametr a, dla którego podana funkcja jest ciągła.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-(4a+8)}{x-2}, x\neq 2\\ 4, x=2\end{cases}$$

Zad. 4

Wyznacz wartość parametrów m i k, dla których podana obok funkcja jest ciągła:

$$f(x)=\begin{cases}(m-2)x^2-3, x\in(-\infty,3\rangle\\ \dfrac{x^2-9}{x-3}, x\in(3,4)\\ 2x+k, x\in\langle 4,+\infty)\end{cases}$$

Zad. 5

Wyznacz wartość parametrów a i b, dla których podana funkcja jest ciągła:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-ax, x\in(-\infty,-2)\\ 4-2x, x\in\langle -2,1)\\ x^3+2bx^2+3, x\in\langle 1,+\infty)\end{cases}$$

Temat 13: Pochodna funkcji w punkcie

Cel lekcji: wprowadzenie pojęcia ilorazu różnicowego i obliczanie pochodnej funkcji w punkcie

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać definicję ilorazu różnicowego
- Wyznaczać z definicji pochodną funkcji w punkcie
- Znać interpretację geometryczną pochodnej funkcji w punkcie

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia ilorazu różnicowego:

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0, natomiast $h \neq 0$ będzie liczbą, dla której $x_0 + h \in U(x_0)$. Ilorazem różnicowym tej funkcji w punkcie x_0, odpowiadającym przyrostowi h argumentu nazywamy liczbę:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

3. Zdefiniowanie pojęcia pochodnej funkcji w punkcie:

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0, natomiast $h \neq 0$ będzie liczbą, dla której $x_0 + h \in U(x_0)$. Jeśli istnieje (skończona) granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0, a o funkcji f powiemy, że jest różniczkowalna w punkcie x_0. Jeśli ta granica nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że funkcji f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0.

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wykorzystując definicję, oblicz pochodną funkcji w danym punkcie:
$f(x) = 2x - 3$
$x_0 = 1$

Zad. 2
Oblicz pochodne następujących funkcji w podanych punktach (korzystając z definicji pochodnej):

1. $f(x) = -\frac{1}{2}$
   $x_0 = 1$
2. $f(x) = 2 - 3x$
   $x_0 = 2$

3. $f(x) = -3x^2 - 8x + 4$
$x_0 = -1$

4. $f(x) = \frac{x-1}{x-4}$
$x_0 = -2$

Zad. 3

Korzystając z definicji oblicz pochodną funkcji:

$f(x) = 2\sqrt{x-4}$

$x_0 = 8$

Zad. 4

Czy funkcja ma pochodna w danym punkcie?

$$f(x) = \begin{cases} x+4, x \in (-\infty, -2) \\ x^2 - 1, x \in \langle -2, +\infty) \end{cases}$$

$x_0 = -2$

Zad. 5

Czy funkcja ma pochodna w danym punkcie?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x+3}, x \neq -3 \\ 1, x = -3 \end{cases}$$

$x_0 = -2$

Zad. 6

Wyznacz pochodne funkcji w podanych punktach:

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$
$x_0 = 2$

2. $f(x) = x^2 - 1$
$x_0 = 0$

3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$
$x_0 = 1$

4. $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$
$x_0 = 3$

Temat 14: Pochodna funkcji w punkcie

Zad. 1

Czy funkcja $f(x)$ ma pochodną w danym punkcie?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, x\in(-\infty,2\rangle \\ 3x^2-2x-4, x\in(2,+\infty) \end{cases}$$

$$x_0=2$$

Zad. 2

Zbadaj, czy istnieje pochodna funkcji w punkcie:

$$f(x)=x|x|$$

$$x_0=0$$

Zad. 3

Dla jakiej wartości parametru m funkcja ma pochodną w punkcie?

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{3x+9}, x\neq-3 \\ -2m, x=-3 \end{cases}$$

Zad. 4

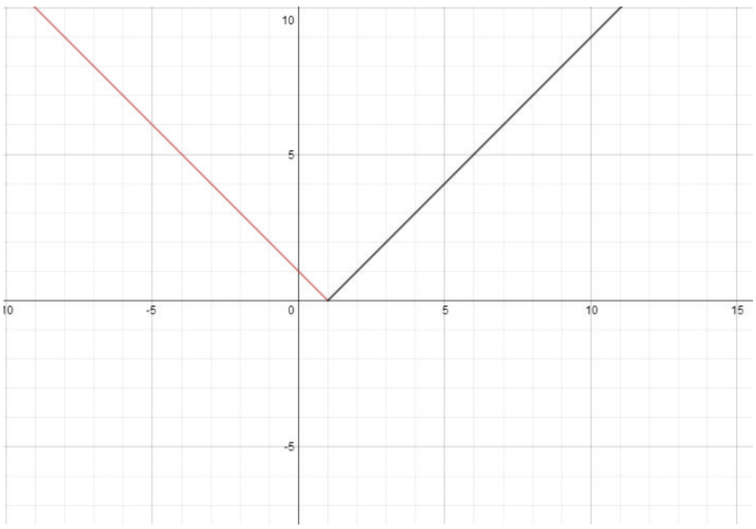
Wyznacz wartości parametrów a i b, dla których podana funkcja jest różniczkowalna:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a, x\in(-\infty,1) \\ bx^2+4x, x\in\langle 1,+\infty) \end{cases}$$

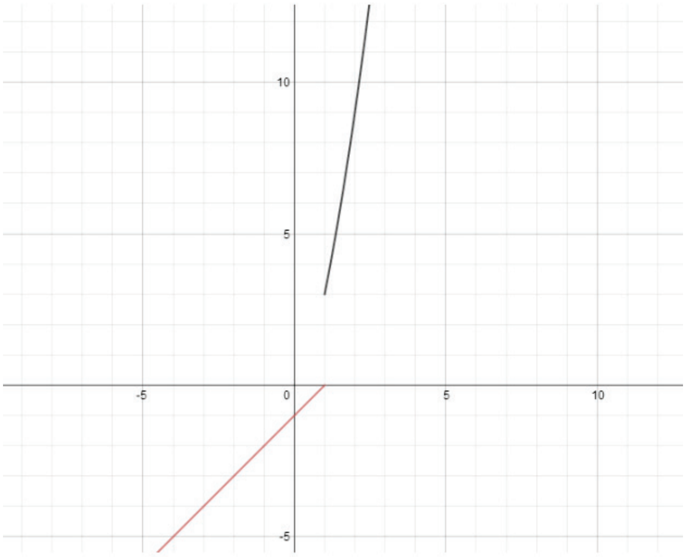
Zad. 5

Wskaż te wykresy, na których jest przedstawiona funkcja różniczkowalna w punkcie $x=1$

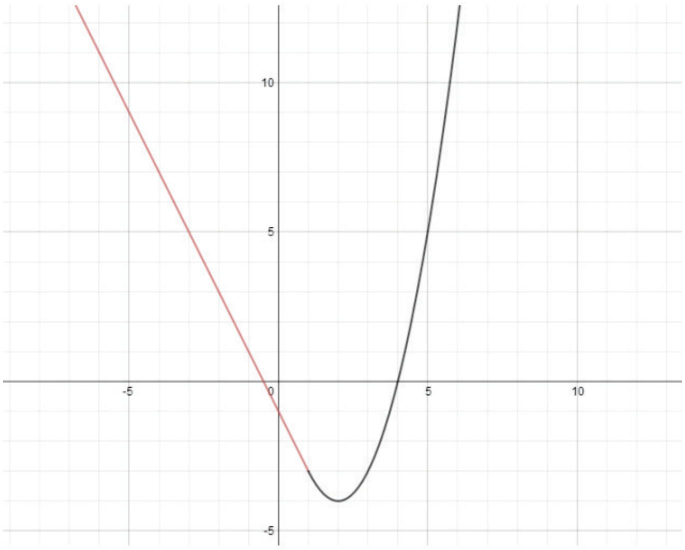
A.



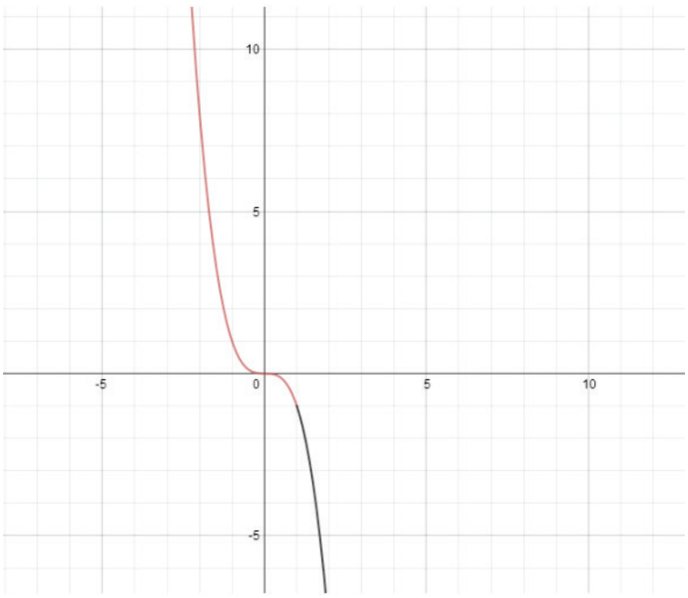
B.



C.



D.



Temat 15: Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej funkcji w punkcie

Cel lekcji: praktyczne zastosowanie pochodnej funkcji w punkcie do wyznaczania stycznej do wykresu tej funkcji w danym punkcie

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Interpretować pochodną funkcji w punkcie jako tangens kąta nachylenia stycznej do osi OX
- Wyznaczać równanie stycznej do wykresu funkcji
- Analizować interpretację fizyczną pochodnej w punkcie jako prędkość ruchu ciała w danej chwili

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Interpretacja pochodnej funkcji w punkcie jako tangens kąta nachylenia stycznej do osi OX
3. Wyznaczanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie:

Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą opisaną równaniem

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^2 - 2x + 8$ w punkcie $A(3,11)$

Zad. 2

Dana jest funkcja $f(x) = x^3 - x + 6$. Znajdź równanie stycznej do funkcji $f(x)$ przechodzącej przez punkt $P(x_0, 6)$.

Zad. 3

Znajdź równania stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$ przechodzącej przez punkt $P(3, y_0)$.

Zad. 4

Wyznacz współrzędne punktu P tak, aby styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2x - 3$ była jednocześnie równoległa do funkcji $g(x) = -2x - 9$.

Zad. 5

Wyznacz punkt, w którym styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$ jest równoległa do osi OX

Temat 16: Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej funkcji w punkcie

Zad. 1

Jaki kąt tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji $f(x)=x^2-3x+8$ w punkcie $P(1,6)$

Zad. 2

Wyznacz tangens kąta nachylenia stycznej przechodzącej przez punkt (0,-2) do wykresu funkcji $f(x)=2x^2+x+1$

Zad. 3

Wydajność pracy robotnika, który rozpoczyna pracę o godzinie 7:00 przedstawia funkcja $w(n)=-4n^3+9n^2+12n+100$. O której godzinie wydajność jego pracy jest największa?

Zad. 4

W pewnej fabryce całkowity koszt wytworzenia x jednostek towaru przedstawia funkcja $K(x)=2x^3+50x+108$. Przy jakiej wielkości produkcji koszt, który przypada na jednostkę wytworzonego towaru będzie najmniejszy?

Temat 17: Pochodna funkcji i jej własności

Cel lekcji: zapoznanie z metodami obliczania pochodnej funkcji

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Znać pojęcie pochodnej funkcji w zbiorze
- Wyznaczać na podstawie poznanych twierdzeń pochodne funkcji wielomianowych i wymiernych w zbiorze

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie twierdzeń o działaniach na pochodnych

$$(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$$
$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$
$$(f-g)'(x_0)=f'(x_0)-g'(x_0)$$
$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$
$$(f:g)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$
$$f(x)=x^n, to\ f'(x)=nx^{n-1}$$
$$f(x)=c, to\ f'(x)=0$$
$$f(x)=sinx, to\ f'(x)=cosx$$

$$f(x) = cosx, to\ f'(x) = -sinx$$
$$f(x) = tgx, to\ f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$$
$$f(x) = ctgx, to\ f'(x) = -\frac{1}{sin^2x}$$
$$f(x) = a^x, to\ f'(x) = a^x lna$$
$$f(x) = \log_a x\, , to\ f'(x) = \frac{1}{xlna}$$

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Wyznacz pochodne podanych funkcji:

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$
2. $f(x) = -3x^4 - 2x^3 + x - 10$
3. $f(x) = \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 2x + \sqrt{10}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$

Zad. 2

Oblicz pochodną funkcji: $f(x) = -2\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3} - 15$

Zad. 3

Oblicz pochodną, a następnie doprowadź otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci:

$f(x) = (x+1)(x^4+1)(x^2-2)$

Zad. 4

Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

Zad. 5

Oblicz pochodne:

1. $f(x) = x^{0,5} - x^{-0,5}$
2. $f(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)x$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{x+4}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

Zad. 6

Oblicz pochodną funkcji:

$$f(x) = \frac{2x^3(x^2-6x)}{x}$$

Temat 18: Pochodna funkcji i jej własności

Zad. 1
Wyznacz pochodne funkcji:
1. $f(x) = (x-1)^7$
2. $f(x) = (x-\sqrt{x})(x^4+1)$
3. $f(x) = \sin x - \cos x$

Zad. 2
Oblicz pochodną funkcji: $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^6$

Zad. 3
Oblicz pochodną, a następnie doprowadź otrzymane wyrażenie do najprostszej postaci:
$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+4}}$

Zad. 4
Wyznacz pochodną funkcji: $f(x) = \sqrt{8x^4 - 2x^2 + 9}$

Zad. 5
Oblicz pochodne:
1. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-2}}$
2. $f(x) = \sin 2x$
3. $f(x) = \cos 3x - \sin 2x$

Zad. 6
Oblicz pochodną funkcji:
$f(x) = 4\sin^2 x(1-\cos x)$

Temat 29: Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

Cel lekcji: zastosowanie pochodnej funkcji do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Znać warunki, jakie musi spełniać pochodna funkcji, aby funkcja była monotoniczna w przedziale liczbowym
- Wyznaczać na podstawie znaku pochodnej przedziały, w których funkcja jest rosnąca, nierosnąca, malejąca, niemalejąca
- Stosować poznane twierdzenia do wyznaczania pochodnej funkcji

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wprowadzenie twierdzeń:

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i rosnąca w tym przedziale, to dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \geq 0$.
Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) i malejąca w tym przedziale, to dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $f'(x) \leq 0$.

3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Wyznacz przedziały, w których funkcja maleje: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 12$

Zad. 2

Czy funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 18x + 21$ jest rosnąca w przedziale $x \in (-3,-2) \cup (3,+\infty)$?

Zad. 3

Wyznacz przedziały, w których podana funkcja rośnie

$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Zad. 4

W jakim przedziale funkcja maleje:

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + 11$
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$
3. $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + 7$

Zad. 5

Czy funkcja $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ jest malejąca w przedziale $x \in (-3,3)$?

Zad. 6

Zaznacz te funkcje, które są malejące w całej swojej dziedzinie:

A. $f(x) = \dfrac{4 - 2x + x^2}{2 - x}$

B. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 12$

C. $f(x) = -x^3 + 1$

D. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Temat 20: Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji

Zad. 1

Czy funkcja $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ jest malejąca w przedziale $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$?

Zad. 2

Wyznacz przedziały, w których podana funkcja rośnie:

$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2}$

Zad. 3

Zaznacz te funkcje, które są rosnące w całej swojej dziedzinie:

A. $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4}{x^2-1}$

B. $f(x)=x^3\sqrt{x+1}$

C. $f(x)=x^3-2x+1$

D. $f(x)=x^2\sqrt{x-4}$

Zad. 4

Czy funkcja $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x-4}$ jest malejąca w przedziale $x\in(0,16)$?

Zad. 5

Wyznacz przedziały, w których funkcja rośnie: $f(x)=\frac{x-2}{x^2+x-2}$

Zad. 6

Wyznacz przedziały, w których funkcja jest rosnąca:

A. $f(x)=x^3\sqrt{x^2+1}$

B. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-9}$

C. $f(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+4}}$

Temat 21: Ekstrema funkcji

Cel lekcji: poznanie pojęcia ekstremum funkcji i sposobu jego wyznaczania

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Wskazywać na wykresie funkcji jej ekstrema
- Znać warunki konieczny i wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji
- Rozumieć pojęcie ekstremum lokalnego i globalnego funkcji

– Wyznaczać minimum lokalne i maksimum lokalne funkcji w przedziale liczbowym
– Stosować poznane twierdzenia do wyznaczania ekstremum funkcji

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Zdefiniowanie pojęcia ekstremum lokalnego funkcji

Niech funkcja f będzie określona na przedziale otwartym (a, b). funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ (zawarte w tym przedziale) tego punktu, że:

$$\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \leq f(x_0).$$

Jeśli $\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) < f(x_0)$, gdzie $S(x_0)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu x_0, zawartym w przedziale (a, b), to funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.
Niech funkcja f będzie określona na przedziale otwartym (a, b). funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0)$ (zawarte w tym przedziale) tego punktu, że:

$$\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \leq f(x_0).$$

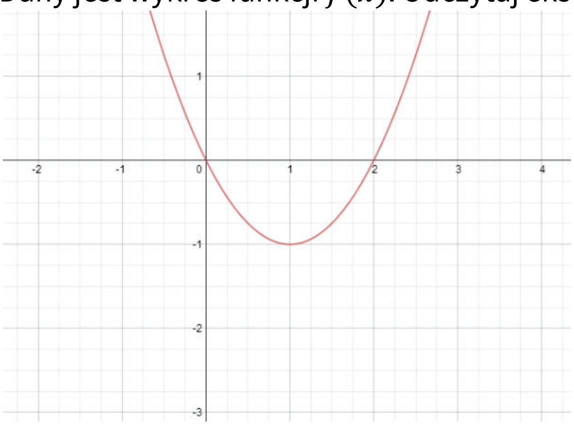
Jeśli $\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x) < f(x_0)$, gdzie $S(x_0)$ jest pewnym sąsiedztwem punktu x_0, zawartym w przedziale (a, b), to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe.
Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne (właściwe), jeśli ma tam minimum lokalne (właściwe) albo maksimum lokalne (właściwe).

3. Wprowadzenie warunku koniecznego istnienia ekstremum funkcji oraz warunku wystarczającego (tzn. zmiana znaku pochodnej w danym punkcie)

Warunek konieczny: Jeżeli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 jest różniczkowalna w tym punkcie i ma w nim ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Dany jest wykres funkcji $f(x)$. Odczytaj ekstrema danej funkcji:



Zad. 2

Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+1$

Zad. 3

Sprawdź, czy dane funkcje mają ekstrema. Jeśli tak, wyznacz je:

1. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$
3. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x-10$

Zad. 4

Zaznacz te funkcje, które mają ekstrema:

A. $f(x)=x^3+2x^2+2x+10$

B. $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-1}$

C. $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$

D. $f(x)=x^3\sqrt{x^2+9}$

Zad. 5

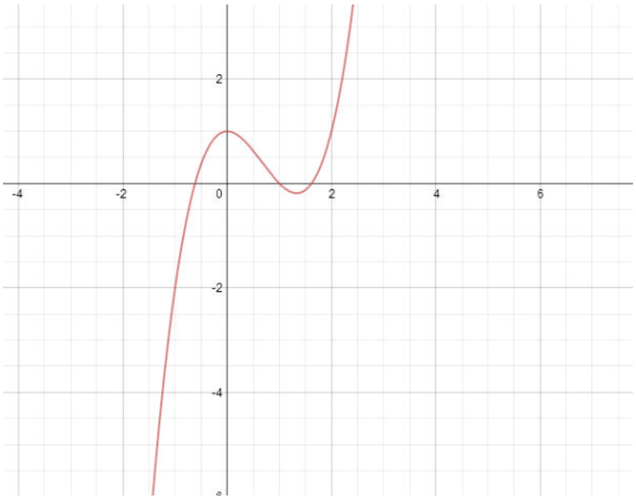
Czy uczeń poprawnie obliczył ekstremum funkcji?

$f(x)=\frac{2-x^2}{x^2-1}$

$f_{\max}(0)=-2$

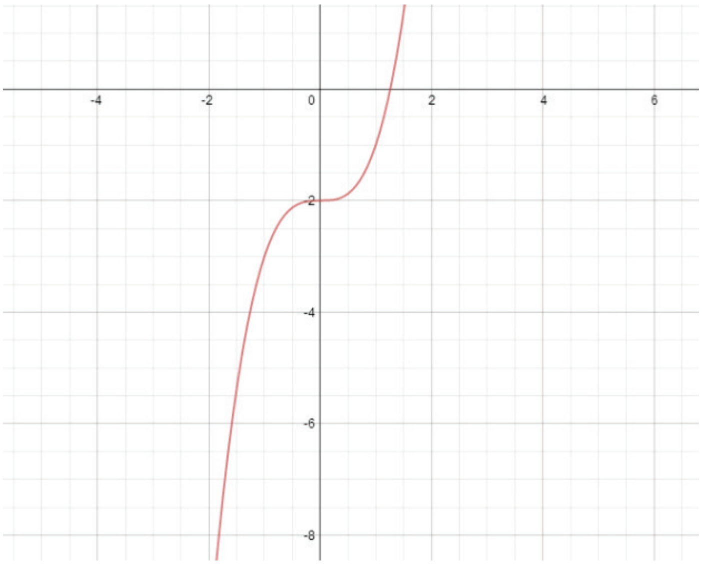
Temat 22: Ekstrema funkcji

Zad. 1
Wskaż wykres funkcji, która ma ekstrema:
A.

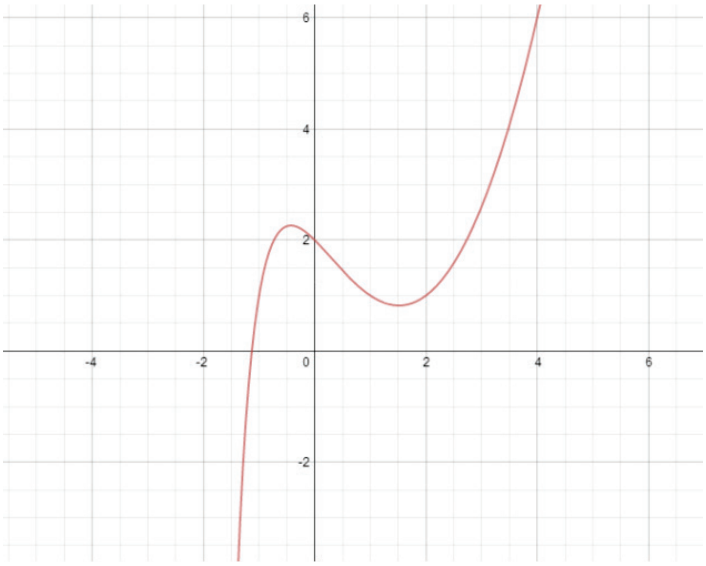


B.

C.



D.



Zad. 2

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x - 1}$

Zad. 3

Sprawdź, czy dane funkcje mają ekstrema. Jeśli tak, wyznacz je:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{x^2 - x + 4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{-2x^2 + x}$

Zad. 4

Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + x}$

Zad. 5

Zaznacz te funkcje, które mają jedynie maksima:

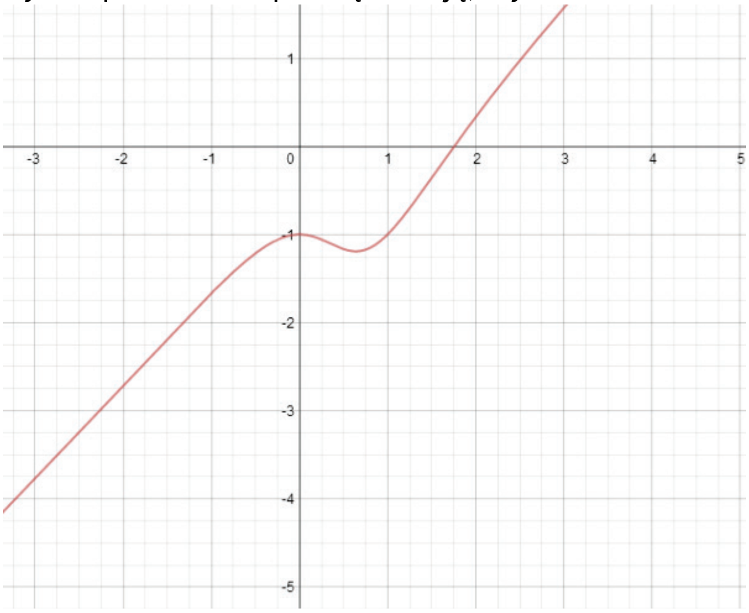
A. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

B. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$

C. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$

D. $f(x) = -x^2 - 2x + 4$

Zad. 6
Wykres przedstawia pewną funkcję, czy ma ona ekstrema?



Temat 23: **Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale liczbowym**

Cel lekcji: zastosowanie pochodnej do wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji w danym przedziale liczbowym

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Wyznaczać najmniejszą i największą wartość funkcji w podanym przedziale korzystając z wyznaczonych ekstremów funkcji oraz przedziałów monotoniczności funkcji
- Stosować poznane twierdzenia do obliczania pochodnej funkcji
- Wyznaczać zbiór wartości funkcji

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Omówienie sposobu wyznaczania wartości najmniejszej i największej funkcji w danym przedziale liczbowym
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Wyznacz najmniejszą (m) i największą (M) wartość funkcji w podanym przedziale liczbowym:

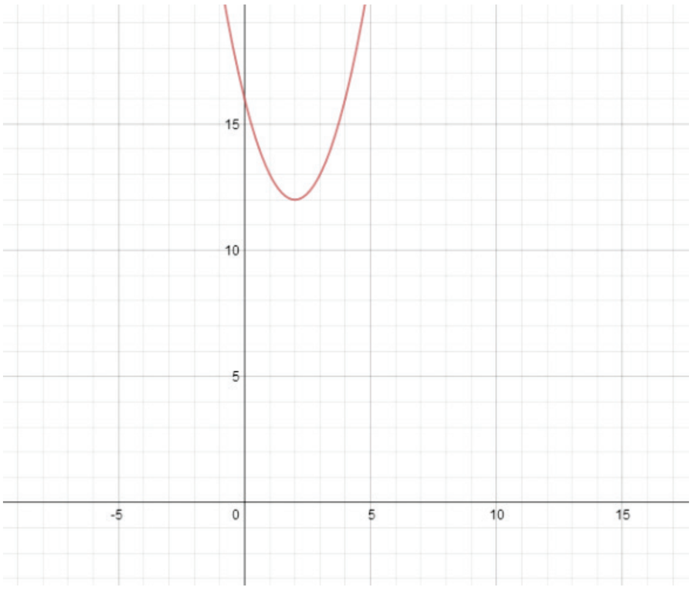
$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x+1$$

$$\langle 0,4\rangle$$

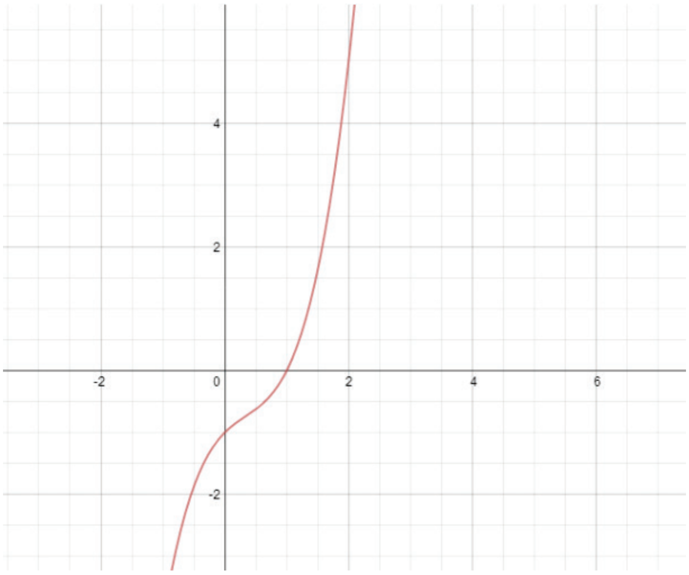
Zad. 2

Na podstawie wykresu wyznacz najmniejszą wartość funkcji w przedziale [0,2]

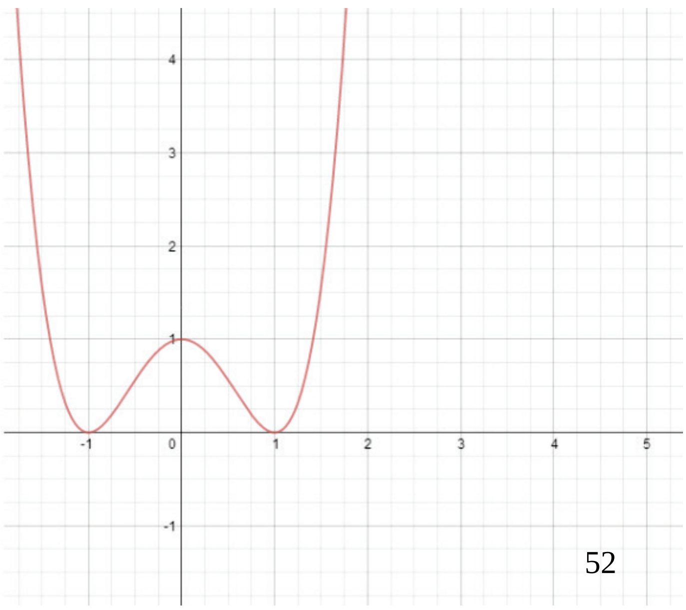
A.



B.



C.



Zad. 3
Jaka jest największa wartość funkcji $f(x)=x^3-4x^2+4x+1$ w przedziale $\langle 0,3\rangle$

Zad. 4
Podaj największą (M) i najmniejszą (m) wartość funkcji $f(x)=x^3-2x^2-4x+2$ w przedziale $\langle 0,3\rangle$

Zad. 5
Czy uczeń poprawnie wyznaczył najmniejszą (m) i największą (M) wartość funkcji $f(x)$ w podanym przedziale?

$f(x)=-x^4+2x^3-4x^2+1$

$\langle -1,1\rangle$

$m=-6$

$M=1$

Temat 24: Najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale liczbowym

Zad. 1
Wyznacz najmniejszą (m) i największą (M) wartość funkcji w przedziale:

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-2}$

$\langle 4,8\rangle$

Zad. 2
Czy poprawnie wyznaczono najmniejszą (m) i największą (M) wartość funkcji $f(x)$ w przedziale?

$f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x^2+x-4}$

$\langle -2,1\rangle$

$m=-3$

$M=-1$

Zad. 3
Wskaż największą wartość funkcji w przedziale:

1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ $\left\langle \dfrac{1}{2},4\right\rangle$

2. $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x}$

$\langle 1,3\rangle$

3. $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$

$\langle -4,3\rangle$

Zad. 4

Jaka jest największa wartość funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+4}$ w przedziale $\langle 0,6\rangle$?

Zad. 5

Podaj największą (M) i najmniejszą (m) wartość funkcji $f(x)=(x-2)\sqrt{x^2+4}$ w przedziale $\langle 0,2\rangle$

Temat 25: **Zastosowanie pochodnej funkcji do badania własności funkcji**

Cel lekcji: zastosowanie własności pochodnej funkcji do badania przebiegu zmienności funkcji

Cele edukacyjne: uczeń powinien:

- Szkicować wykresy funkcji na podstawie: obliczania granic funkcji w nieskończoności, wyznaczania asymptot funkcji, miejsc zerowych i wyznaczania dziedziny funkcji, ekstremum, monotoniczności funkcji
- Dopasowywanie wykresu funkcji do jej wzoru

Przebieg zajęć:

1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Przypomnienie wiadomości o granicy i zastosowaniach pochodnej funkcji
3. Szkicowanie wykresów funkcji – podanie kolejności obliczeń

1) Wyznaczanie dziedziny funkcji
2) Obliczanie miejsc zerowych i punktów przecięcia z osią OY
3) Obliczanie granicy funkcji w punktach wyłączonych z dziedziny funkcji
4) Wyznaczanie granicy funkcji w nieskończoności
5) Podanie równań asymptot funkcji
6) Wyznaczanie przedziałów monotoniczności i ekstremum funkcji na podstawie obliczania pochodnej funkcji
7) Określanie parzystości, okresowości bądź innych charakterystycznych własności funkcji
8) Szkicowanie hipotetycznego wykresu funkcji

4. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x - 0{,}5}{x^2}$. Zaznacz prawidłowe odpowiedzi:

A. $D_f : x \in R \setminus \{0\}$

B. $D_x : x \in R$

C. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

D. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

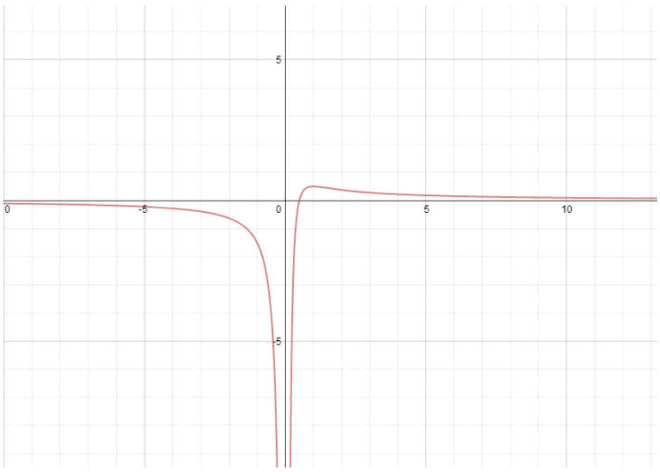
E. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

F. $f_{\max}(1) = 0{,}5$

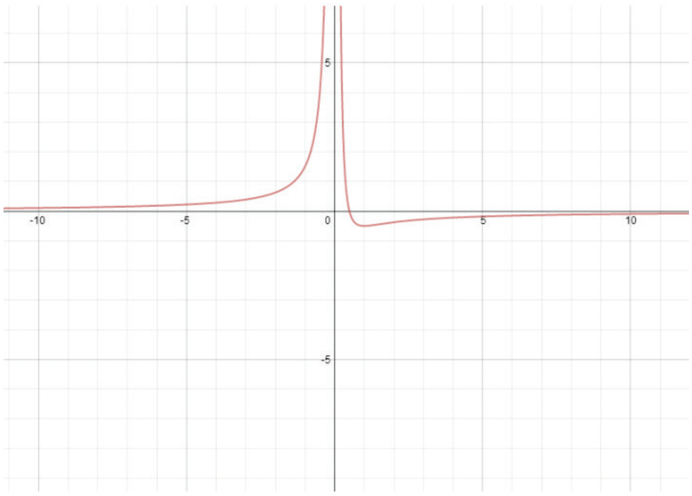
G. $f_{\min}(-1) = -1{,}5$

H. funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie

I.



J.

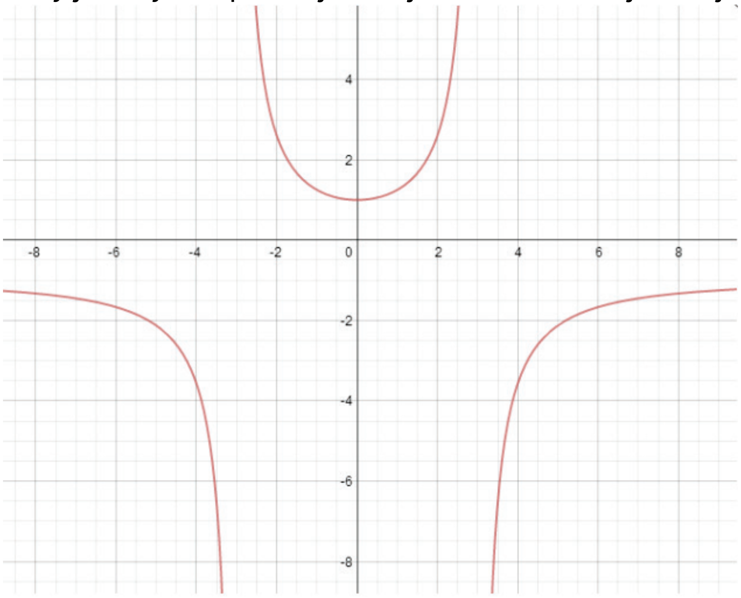


Zad. 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Zad. 3

Dany jest wykres pewnej funkcji. Wskaż wzór tej funkcji.



A. $f(x)=\dfrac{x^2+9}{x-3}$

B. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2+9}$

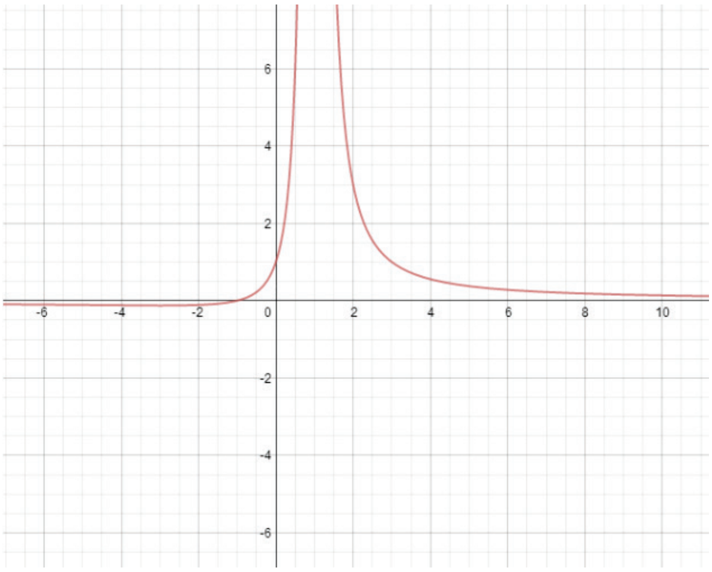
D. $f(x)=\dfrac{9+x^2}{9-x^2}$

Zad. 4

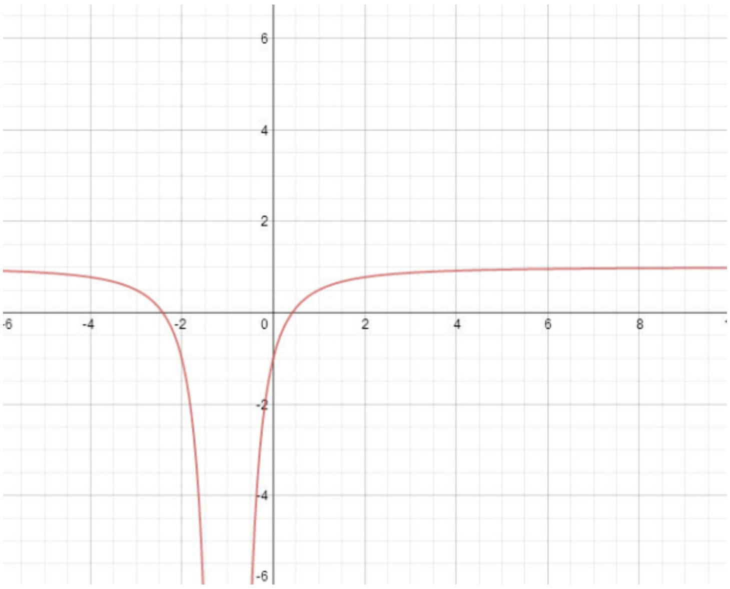
Dopasuj wykres funkcji do jej wzoru:

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$
3. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$

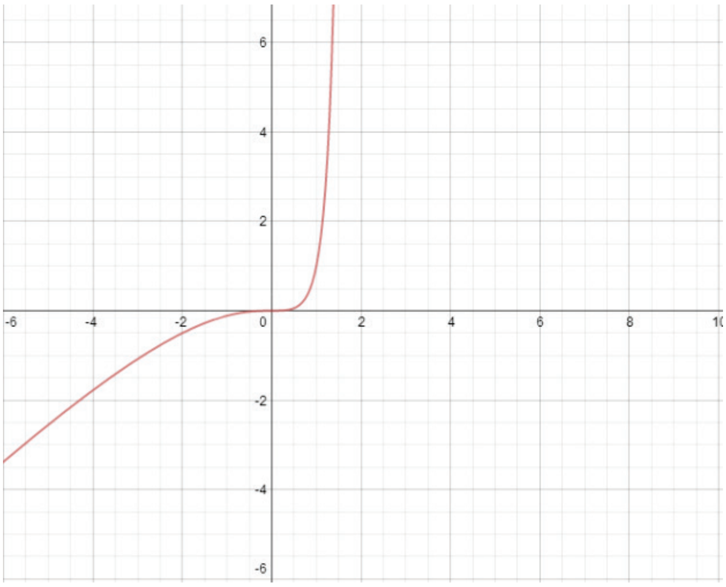
A.



B.



C.

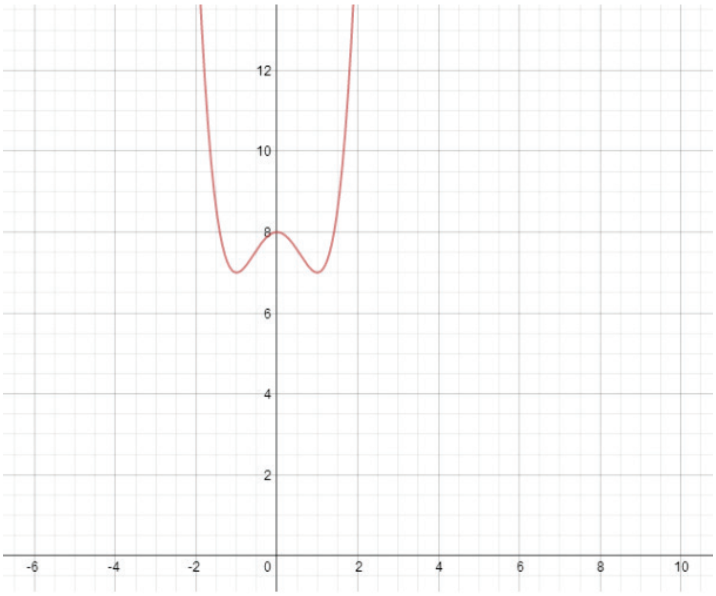


Zad. 5

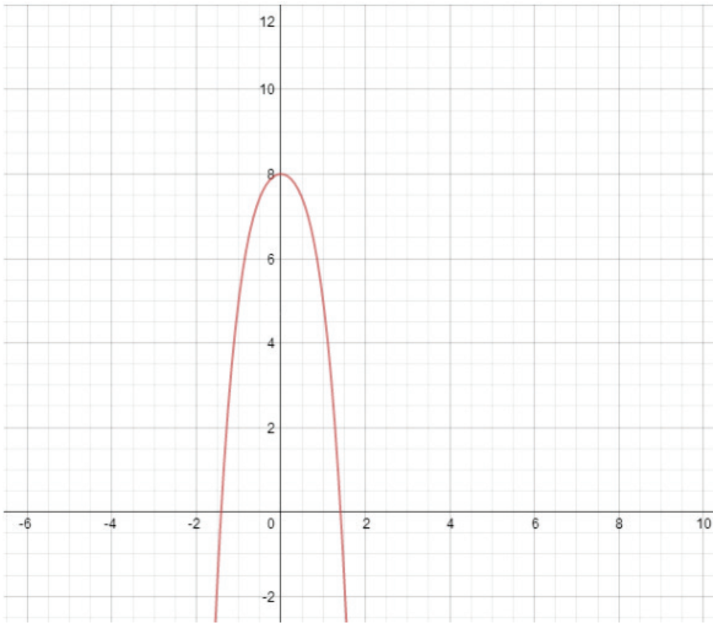
Dana jest funkcja $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8$, zaznacz prawidłowe odpowiedzi

A. $D_f : x \in R \setminus \{0\}$

B.



C.



D. $D_f : x \in R$

E. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

F. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

G. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

H. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

I. $f_{\max}(0) = 8$

J. $f_{\min}(0) = 8$

Temat 26: Zastosowanie pochodnej funkcji do badania własności funkcji

Zad. 1

W jakich przedziałach funkcja $f(x)=2x^4+x^3+4x^2-2$ jest rosnąca?

Zad. 2

Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2}$. Zaznacz prawidłową odpowiedź:

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

B. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

Zad. 3

Naszkicuj wykresy funkcji:

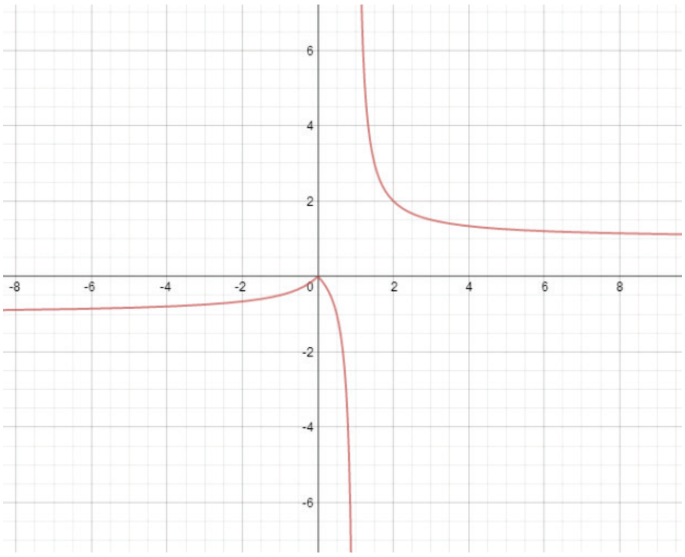
1. $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2}$
2. $f(x)=(x+4)\sqrt{1-x}$
3. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

Zad. 4

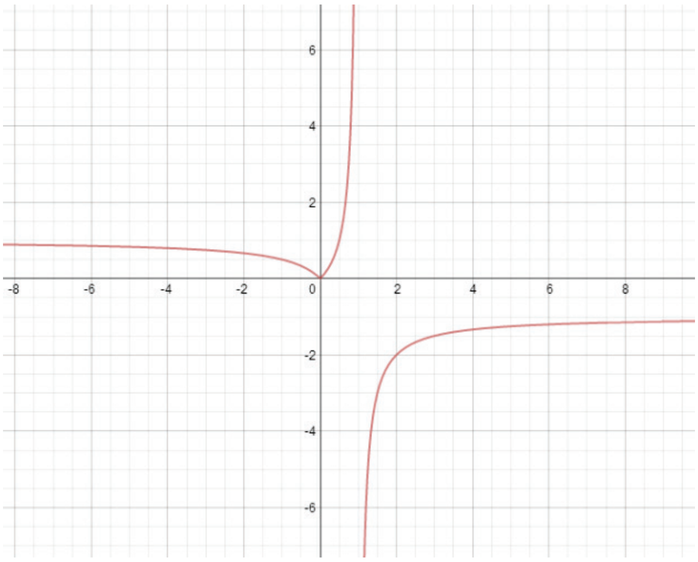
Dana jest funkcja $f(x)=\dfrac{|x|}{x-1}$. Które odpowiedzi są prawdziwe?

A. $D_f: x\in R\setminus\{1\}$

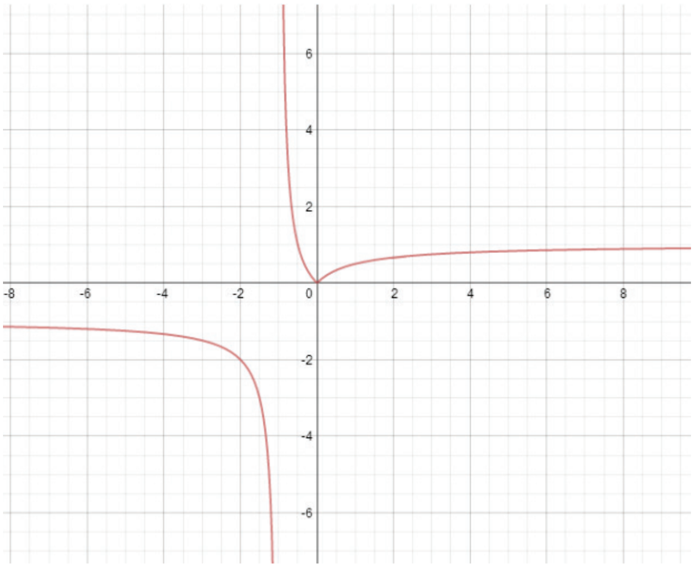
B.



C.



D.



E. $f\uparrow: x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$
F. $f\uparrow: x \in (-\infty,0)$

Zad. 5

Zaznacz fałszywe odpowiedzi, mając daną funkcję $f(x)=\dfrac{(x-4)^3}{(x+2)^2}$:

A. $f(0)=2$
B. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$
C. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
D. $f(4)=0$

Temat 27: **Zastosowanie pochodnej funkcji w zagadnieniach optymalizacyjnych**

Cel lekcji: zastosowanie wiadomości o pochodnej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

Cele edukacyjne: uczeń powinien:
- Stosować pochodną funkcji wymiernej i wielomianowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

Przebieg zajęć:
1. Wstępna organizacja i przygotowanie do zajęć
2. Wyjaśnienie istoty zadań optymalizacyjnych
3. Rozwiązywanie zadań

Zad. 1
Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratu. Suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu wynosi 36 cm. Dla jakiej długości krawędzi podstawy prostopadłościan będzie miał największą objętość?

Zad. 2
Tomek musi wykonać szkielet prostopadłościanu wykorzystując drut o długości 120 cm. Stosunek długości krawędzi podstawy wynosi 1:3. Przy jakich wymiarach podstawy objętość prostopadłościanu będzie największa?

Zad. 3
W kulę wpisano stożek o największej objętości. Ile wynosi długość wysokości tego stożka, jeśli promień kuli jest równy 6 cm?

Zad. 4
Wydajność pracy pewnego robotnika można przedstawić za pomocą funkcji $F(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2 + 13t + 14$. Wiedząc, że robotnik zaczyna pracę o godzinie 8:00, oblicz o której godzinie jego wydajność jest największa.

Temat 28: Zastosowanie pochodnej funkcji w zagadnieniach optymalizacyjnych

Zad. 1
Dodano do siebie kwadraty trzech kolejnych parzystych liczb całkowitych. Oblicz te liczby wiedząc, że ich suma ma być najmniejsza.

Zad. 2
W półkole o promieniu 4 wpisano prostokąt. Znajdź wymiary tego prostokąta tak, aby jego pole było największe.

Zad. 3
Prosta przechodząca przez punkt $A(2,6)$ tworzy z dodatnimi osiami układu współrzędnych trójkąt. Znajdź równanie prostej tak, aby pole trójkąta było najmniejsze.

Zad. 4
Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratu. Ile wynosi największa suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu, jeśli długość jego przekątnej wynosi 6?

Powtórzenie wiadomości

Zad. 1
Wyznacz podane granice:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^4 - 12x^3 + 4x + 16}{4x^3 + 3x - 2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x}$

Zad. 2
Oblicz pochodną funkcji: $f(x) = (x-4)\sqrt{2x^2+1}$

Zad. 3
Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + 1$

Zad. 4

Czy funkcja $f(x)$ jest ciągła?

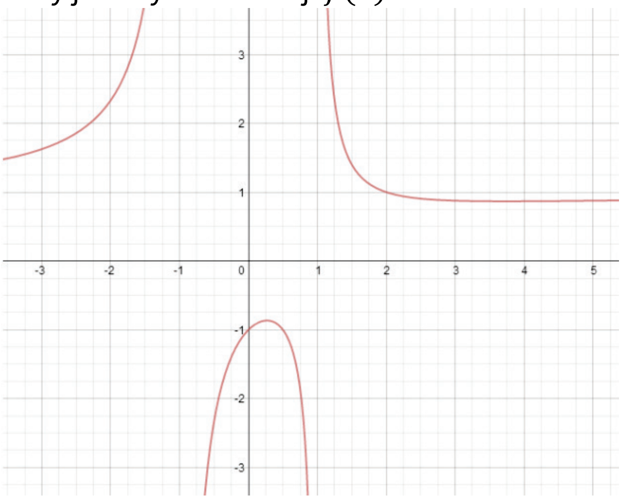
$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, x\in(-\infty,2) \\ x^3+1, x\in\langle 2,4) \\ x-4, x\in\langle 4,+\infty) \end{cases}$$

Zad. 5

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+4}$

Zad. 6

Dany jest wykres funkcji $f(x)$.



Na podstawie wykresu zaznacz prawidłowe odpowiedzi:

A. funkcja ma asymptotę pionową w $x=1$ i $x=-1$

B. funkcja ma asymptotę pionową $x=0$

C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

D. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

E. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

F. $D_f: x\in R\setminus\{0,1\}$

G. $D_f: x\in R\setminus\{-1,1\}$

Sprawdzian

Zad. 1

Oblicz pochodną funkcji: $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+1}{x+2}$

Zad. 2

Wyznacz podane granice:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-6x^3+2x-1}{-2x^3+3x-x^4+2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

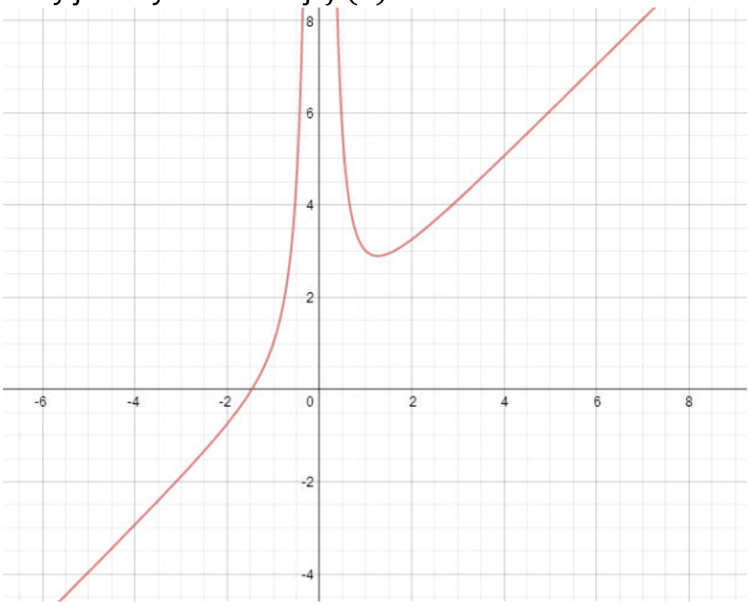
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2+3x-4}$

Zad. 3

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+4}$

Zad. 4

Dany jest wykres funkcji $f(x)$.



Na podstawie wykresu zaznacz prawidłowe odpowiedzi:

A. funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie

B. funkcja jest malejąca w całej swojej dziedzinie

C. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

D. $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$

E. $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

F. $D_f : x\in R\setminus\{0,1\}$

G. $D_f : x\in R\setminus\{0\}$

Zad. 5

Czy funkcja $f(x)$ jest ciągła?

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4, x\in(-\infty,1) \\ x+2, x\in\langle 1,2) \\ 4, x\in\langle 2,+\infty) \end{cases}$$

Zad. 6

Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x-4$

Poprawa pracy klasowej

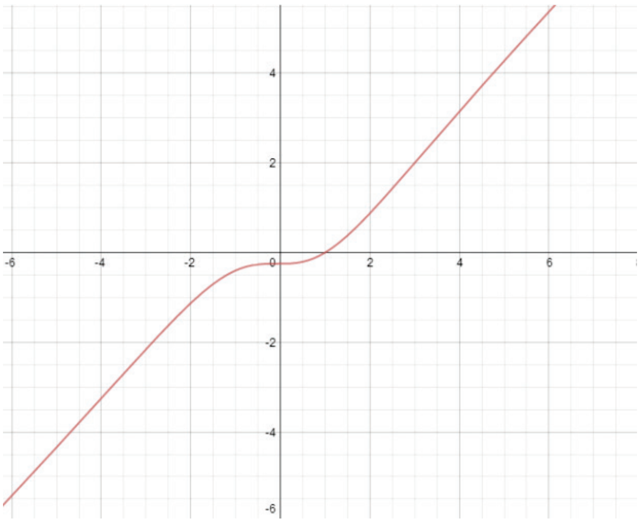
Zad. 1

Odp. $f'(x)=\frac{4x^3+11x^2-4x-1}{x^2+4x+4}$

Zad. 2

1. -1
2. $\frac{3}{2}$
3. $-\frac{6}{5}$

Zad. 3



Zad. 4

Odp. C, G

Zad. 5

Odp. Tak, jest ciągła

Zad. 6

Odp.

$f_{\min}(-1)=-5\frac{7}{12}$

$f_{\min}(2)=4\frac{2}{3}$

$f_{\max}(1)=-2\frac{11}{12}$

2. Przygotowanie do matury

Cel zajęć: Powtórzenie materiału z I, II i III klasy, przypomnienie podstawowych twierdzeń i wzorów i zastosowanie ich do rozwiązywania zadań maturalnych

Temat 1: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dany jest wielomian $W(x) = -x^{13} + x^{10} - 7$. $W(-11)$ jest liczbą:
A. pierwszą
B. ujemną
C. niewymierną
D. dodatnią

Zad. 2
Suma kolejnych liczb parzystych mniejszych od 100 jest równa:
A. 5050
B. 2450
C. 2525
D. 2000

Zad. 3
Buty kosztowały 168 zł, ale ich cena wzrosła o 42 zł. O ile procent wzrosła cena naszyjnika?

Zad. 4
Pole figury ograniczonej prostymi
$y = x - 6$
$-x - y + 8 = 0$
$y = 4$
$y = 1$
jest równe:
A. 18
B. 12
C. 6
D. 9

Zad. 5
Dana jest funkcja $f(x) = -(x+2)^2 - 4$. Osią symetrii tej funkcji jest prosta:
A. $x = -2$
B. $x = 2$
C. $y = -2$
D. $y = 2$

Zad. 6
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 16 cm, a krawędź podstawy jest równa 6. Wyznacz cosinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

Zad. 7
Jaką liczbą jest liczba $a = \sqrt{29 - 8\sqrt{13}} + \sqrt{13}$?

Zad. 8
Przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi prosta $y = ax + b$, jeśli:
$a > 0$
$b < 0$

Temat 2: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Marcin przygotowuje się do matury z matematyki. Musi rozwiązać 2500 zadań, do tej pory rozwiązał już 200. Dzisiaj rozwiązał 10 zadań i codziennie będzie rozwiązywał o 20 zadań więcej. Ile dni zajmie Marcinowi rozwiązanie pozostałych zadań?

Zad. 2
Różnica między polem koła opisanego na kwadracie a polem koła wpisanego w kwadrat jest równa 7π. Wyznacz pole kwadratu.

Zad. 3
Liczba $log4$ jest równa:
A. $\log 4 + \log 2$
B. $2\log 4 - \log 2$
C. $4\log 2 - \log 8$
D. $\log 8 - \log 6$

Zad. 4
Ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x > 2 \\ -2x - 4, & x \leq 2 \end{cases}$?

Zad. 5
Dany jest ciąg:
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n}{4}$
Wyznacz wyraz czwarty.

Zad. 6
6% liczby x jest równe 24. Wyznacz liczbę x.

Zad. 7

Rozwiąż równanie $\frac{x-5}{x+2}=\frac{1}{8}$

Zad. 8

Liczby $x-5, y-1, 4, 2y$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz x.

Zad. 9

Wskaż funkcję, której zbiorem wartości jest przedział $(-\infty,6\rangle$

A. $f(x)=(x-5)^2+6$

B. $f(x)=-(x-2)^2-6$

C. $f(x)=(x+2)^2-6$

D. $f(x)=-(x-1)^2+6$

Temat 3: Przygotowanie do matury

Zad. 1

Kąt wpisany i środkowy są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar wynosi 240°. Ile wynosi miara kąta wpisanego?

Zad. 2

Na ile sposobów Maciek i Ania mogą usiąść na dwóch spośród 6 miejsc w kinie?

Zad. 3

Wyznacz medianę danych: 5,4,0,1,1,9,2,4

Zad. 4

O pewnych zdarzeniach losowych A i B wiadomo:

$A\subset\Omega$

$B\subset\Omega$

$A\subset B$

$P(A)=0{,}2$

$P(B)=0{,}5$

Wyznacz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń A i B.

Zad. 5

Przekątna sześcianu ma długość 9. Oblicz objętość sześcianu.

Zad. 6

Kąt β jest ostry, a $sin\beta = 0{,}1$. Oblicz wartość wyrażenia: $2+tg^2\beta$

Zad. 7

Średnia arytmetyczna liczb $2, 4, 8, 10, 6, x, 6$ jest równa 7. Wyznacz x.

Zad. 8
Magda przeczytała książkę, która ma 360 stron (każdego dnia taką samą liczbę stron). Gdyby codziennie czytała o 16 stron więcej, to przeczytałaby książkę o 6 dni wcześniej. Ile dni Magda czytała książkę?

Temat 4: Przygotowanie do matury

Zad. 1

Oblicz wartość wyrażenia: $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2$

Zad. 2
Dla jakich wartości parametru k reszta z dzielenia wielomianu
$W(x)=(k-2)x^{10}-2kx^7+(4k-2)x^3-2x+k^2$ przez dwumian $x+1$ jest równa 4?

Zad. 3
Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (2,-2)$, stycznego do prostej o równaniu: $2x+y-12=0$

Zad. 4
Dla jakich wartości parametru m równanie ma dwa różne pierwiastki spełniające warunek:
$x^2+(m+1)x+m+2=0$
$x_1^2+x_2^2=1$

Zad. 5
Ze zbioru $A=\{x\in C: 2^{2x}-4\cdot 2^x-32\le 0\}$ losujemy kolejno trzy liczby całkowite a, b, c i tworzymy funkcję $f(x)=ax^2+bx+c$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymana funkcja będzie malejąca?

Temat 5: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Znajdź równania prostych, w których zawierają się dwusieczne kątów, pod jakimi przecinają się następujące proste:
$2x+y-3=0$
$2x+11y+17=0$

Zad. 2
W kulę o promieniu 4 wpisano sześcian, w którego wpisano kolejną kulę, a w nią kolejny sześcian i tak dalej. Oblicz sumę powierzchni wszystkich kul.

Zad. 3
Rozwiąż równanie: $4+|x-1|=|x+3|-|x-5|$

Zad. 4
W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość, która podzieliła przeciwprostokątną na odcinki długości 4 i 10. Oblicz pole tego trójkąta.

Zad. 5
Liczby a, b, c tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny, a liczby x, y, z ciąg geometryczny. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego.

$$x = \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{1}{b}$$

$$z = \frac{1}{2b - 2a + c}$$

Temat 6: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Rozwiąż równanie: $2\sin^2 x - \cos 2x = 1$, $x \in (0, 2\pi)$

Zad. 2
Dany jest trójkąt ABC, w którym miara kąta ABC jest równa 135°, a kąta ACB 30°. Ponadto wiadomo, że bok BC ma długość 400. Wyznacz długość boku AB.

Zad. 3
Dane są dwie funkcje $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ i $g(x) = 2^{x^2 - 4x + 2}$. Oblicz, dla jakich argumentów wartości funkcji $g(x)$ są nie mniejsze niż wartości funkcji $f(x)$.

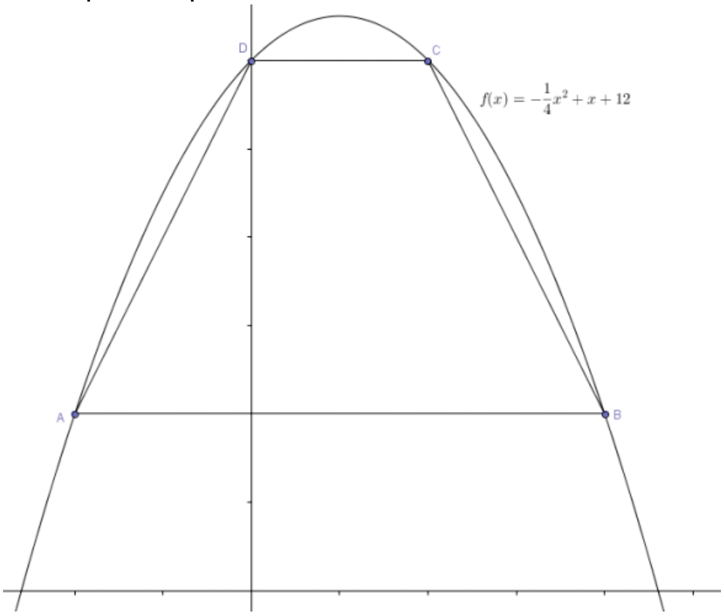
Zad. 4
Wyznacz wartości parametru m, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 5x - 4)(x - 2m)$ są trzema kolejnymi wyrazami malejącego ciągu arytmetycznego.

Zad. 5
Promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny ABC (kąt prosty przy wierzchołku C) ma długość 3. Wyznacz długość odcinka CD, gdzie D jest punktem styczności okręgu z przeciwprostokątną, jeśli jeden z kątów ostrych trójkąta ma miarę 30°.

Temat 7: Przygotowanie do matury

Zad. 1

Podstawa AB trapezu ABCD ma długość 12, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli $f(x)$ z osią OY. Wiedząc, że pozostałe wierzchołki trapezu leżą na tej paraboli, oblicz pole trapezu.



Zad. 2

Rozwiąż równanie: $\log_2\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+\log_2\left(\frac{x-4}{x-2}\right)=2$

Zad. 3

Boki trójkąta ABC mają długości: 8, 10, 14. Wyznacz długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka C do boku 1

Zad. 4

Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2+(m+2)x+m+5=0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Zad. 5

Dla jakiej wartości parametru m równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązań?
$f(x)=|x-2|-|x+6|+|x|$

Temat 8: Przygotowanie do matury

Zad. 1

Wierzchołki trójkąta ABC należą do paraboli $f(x)=-x^2+8x$, a punkt C jest jej wierzchołkiem. Podstawa trójkąta AB jest równoległa do osi OX. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.

Zad. 2

Suma n początkowych wyrazów ciągu dana jest wzorem:

$S_n = n^2 + 2n$

Wyznacz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych.

Zad. 3

Kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy równej 6 ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma miarę 30°. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Zad. 4

W urnie znajdują się kule czarne, białe i zielone. Kul czarnych jest dwa razy więcej niż kul białych, a kul zielonych - cztery razy więcej niż białych. Losujemy jednocześnie 3 kule. Ile jest kul białych jeśli prawdopodobieństwo wylosowania kul w różnych kolorach jest równe $p = \frac{128}{819}$.

Zad. 5

Rozwiąż nierówność: $\left|\frac{2x-1}{x+4}\right| \geq 4$

Temat 9: Przygotowanie do matury

Zad. 1

Rozwiąż równanie: $\frac{\sin x - |\sin x|}{\cos x} = -2$

Zad. 2

W okrąg o promieniu równym 2 wpisano kwadrat i trójkąt równoboczny, które mają wspólny wierzchołek. Wyznacz pole części wspólnej trójkąta i kwadratu.

Zad. 3

Okrąg jest styczny do prostej $k: x + 2y - 23 = 0$ w punkcie $A(7,8)$ oraz do prostej $m: 2x - y - 16 = 0$ w punkcie $B(9,2)$. Wyznacz promień okręgu.

Zad. 4

Rozwiąż równanie: $\begin{array}{l} 4\sin^2 x - 2\cos x = 2 \\ x \in (0, 2\pi) \end{array}$

Zad. 5

Dla jakich wartości parametru k równanie $k + 2 - 4 \cdot 3^x = (1-k) \cdot 9^x$ ma dwa różne pierwiastki?

Temat 10: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dla jakich wartości n suma n-początkowych wyrazów danego ciągu jest równa 260?
$a_1 = y$
$a_2 = 3y + x$
$a_4 = 5y - 2x - 1$
$a_6 = 17$

Zad. 2
Wyznacz pierwiastki wielomianu $W(x)$, jeśli przy dzieleniu $W(x)$ przez dwumian $x + 2$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = x^2 - 11x + 36$ i resztę. $R(x) = -48$

Zad. 3
W stożek wpisano kule o promieniu 4. Wyznacz pole powierzchni całkowitej stożka, jeśli tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°.

Zad. 4
Rozwiąż równanie: $8^x - 7 \cdot 4^x + 14 \cdot 2^x = 8$

Zad. 5
Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A = (4,3)\ i\ B = (8,5)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C leżącego na prostej $x - 3y - 6 = 0$ tak, aby pole trójkąta było równe 9.

Temat 11: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A(4,3)\ i\ B(5,-4)$ leży na osi OX. Wyznacz równanie okręgu.

Zad. 2
Dla jakiej wartości parametru m podane równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ ma rozwiązania?

Zad. 3
Trzy liczby $\log_2(x+15)$, $\log_2(4x)$, $\log_2 x$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny. Wyznacz x.

Zad. 4
Znajdź równanie okręgu, który jest obrazem okręgu $(x+8)^2 + (y-12)^2 = 32$ w jednokładności o środku $P(2,-1)$ i skali $k = -2$.

Zad. 5
Tomek i Kamil grają w koszykówkę i trafiają do kosza z prawdopodobieństwem odpowiednio: 0,6 i 0,8. Wyznacz prawdopodobieństwo, że gdy każdy z nich wykona po jednym rzucie do kosza to piłka wpadnie dokładnie raz.

Temat 12: Przygotowanie do matury

Zad. 1
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym spodek wysokości jest oddalony od krawędzi bocznej o 4. Oblicz objętość ostrosłupa, jeśli kat nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 45°.

Zad. 2
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $f(x) = \sin x - |\sin x|$
b) $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$
c) $f(x) = \sin x + |\sin 2x|$
d) $f(x) = |\sin(-2x) - 2|$
e) $f(x) = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$

Zad. 3
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, $A = (8,2)\ i\ B = (2,9)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C, jeśli leży on na prostej $2x + 3y - 11 = 0$.

Zad. 4
Długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie prostokątnym są równe odpowiednio 2 i 5. Wyznacz obwód trójkąta.

Zad. 5
Rozwiąż nierówność: $|x-4| + |x-1| < |x|$

Temat 13: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dla jakiej wartości parametru m ciąg $2\sin^2 m + 1, \quad \cos m, \quad 2\cos^2 m - 2$ jest arytmetyczny, $m \in (0, 2\pi)$?

Zad. 2
Na prostej $8x - 3y + 10 = 0$ znajdź taki punkt C, aby pole trójkąta ABC było równe 18.
$A = (-4,5)$
$B = (2,2)$

Zad. 3
Z cyfr od 1 do 9 losujemy bez zwracania 3 cyfry i tworzymy z nich liczbę trzycyfrową. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otrzymana liczba jest mniejsza od 666?

Zad. 4
Wyznacz x: $9^{-\frac{1}{x}} \cdot 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

Zad. 5
Dla jakiej wartości parametru k funkcja $f(x) = (k^2 + 5k - 6)x^2 - (2-2k)x + 3$ ma dwa miejsca zerowe i osiąga maksimum?

Temat 14: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Czy liczba $a = \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{98}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ jest całkowita?

Zad. 2
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian x-1 wynosi 5, przez $x + 2$ wynosi 2, a przez $x - 3$ wynosi 27. Ile jest równa reszta z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $Q(x) = (x+2)(x-3)(x-1)$?

Zad. 3
Dla jakiej wartości parametru a suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + (2a-2)x + a^2 = 4$ jest równa 12?

Zad. 4
Podstawy trapezu mają długości 4 i 12. Wyznacz długość odcinka równoległego po podstawy trapezu, który dzieli trapez na dwie figury o równych polach.

Zad. 5
Ile wynosi długość krawędzi czworościanu foremnego, jeśli jego wysokość jest równa 8?

Temat 15: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Czy jeśli liczby x i y spełniają następujące warunki:
$x > y$
$x^2 - 6xy + y^2 = 0,$
$to \quad \log(x+y) - \log(x-y) = \log\sqrt{2}$

Zad. 2
Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 60°. Wiedząc, że pole ściany bocznej jest równe 12√3 oblicz objętość ostrosłupa.

Zad. 3
W trapez można wpisać i opisać na nim okrąg. Przekątna trapezu ma długość 7, a dłuższa podstawa 6. Oblicz pole tego trapezu.

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^3 + 4 = mx^2$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste?

Zad. 5
Czy prawdziwa jest tożsamość $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$?

Temat 16: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Trzy liczby x, y, z są większe od zera i tworzą ciąg arytmetyczny. Czy podane obok liczby również tworzą ciąg arytmetyczny?
$$\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}, \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Zad. 2
Dla jakich wartości parametru m dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 3x - 3m}$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, a zbiorem wartości przedział $y \in \langle 0, \frac{8}{3} \rangle$?

Zad. 3
Dane są trzy liczby a, b, c tworzące ciąg arytmetyczny. Kwadraty liczb a, b i c tworzą ciąg geometryczny. Ile wynosi iloraz ciągu geometrycznego?

Zad. 4
Dla jakich wartości parametrów m i k krzywe $\begin{matrix} y = m \cdot 2^x + k \\ y = k \cdot 2^{-x} + m \end{matrix}$ mają jeden punkt wspólny?

Zad. 5
Podstawą trójkąta równobocznego jest średnica koła o promieniu 4. Wyznacz stosunek pola części trójkąta leżącej na zewnątrz koła do pola części trójkąta leżącej wewnątrz koła.

Temat 17: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Przekątne trapezu dzielą go na 4 trójkąty. Pola trójkątów, których bokami są podstawy trapezu wynoszą odpowiednio 9 i 16. Wyznacz pole trapezu.

Zad. 2
Dla jakiej wartości parametru k nierówność $(k-1)x^2 - 4x + k + 2 > 0$ nie ma rozwiązań?

Zad. 3
Dane są cztery kolejne liczby całkowite takie, że suma kwadratów najmniejszej i największej z nich jest równa potrojonej różnicy kwadratów dwóch pozostałych liczb. Wyznacz największą z tych liczb.

Zad. 4
Rozwiąż nierówność: $x^4 < 10x - x^2$

Temat 18: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Podaj rozwiązanie równania $\cos 2x + 1 = 2\cos x$ w przedziale: $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Zad. 2
Dane są liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny. Jeśli do b dodamy 8, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Jeśli do liczby c nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64 to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby.

Zad. 3
Funkcja $f(x) = |x - 1|$ i prosta k przechodząca przez punkt $(-5,0)$ ograniczają trójkąt o polu 12. Podaj równanie prostej k.

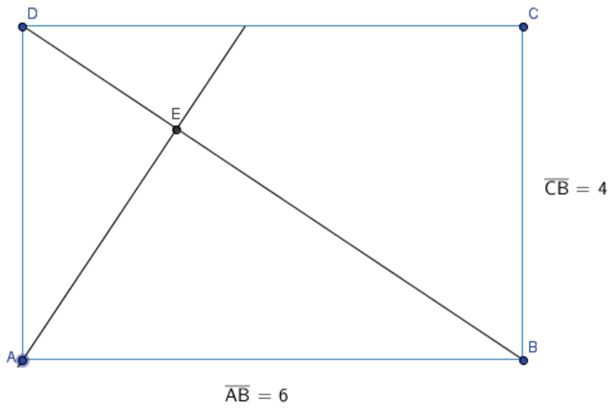
Zad. 4
Liczby a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny, a liczby $a - 2, b - 3, c - 9, d - 25$ ciąg arytmetyczny. Wyznacz te liczby.

Zad. 5
Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ wybieramy losowo 3. Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia, że otrzymane liczby są długościami boków trójkąta rozwartokątnego?

Temat 19: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego krawędź podstawy ma długość 2. Środek kuli opisanej na tym ostrosłupie dzieli jego wysokość w stosunku $\sqrt{5}: 1$. Wyznacz objętość ostrosłupa.

Zad. 2
Dany jest prostokąt ABCD, odcinek AE jest wysokością trójkąta ABD. Wyznacz pole trójkąta AED.



Zad. 3

Wyznacz wartość wyrażenia $|cosx - sinx|$, jeśli: $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{3}$

Zad. 4
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej na 8 lub 12?

Zad. 5
Na prostej $y = 4x + 12$ znajdź taki punkt C, aby podane wyrażenie miało jak najmniejszą wartość: $|AC|^2 = |BC|^2$
$A = (-2,9)$
$B = (1,-2)$

Temat 20: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Wyznacz miarę kąta między stycznymi do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ przechodzącymi przez punkt (8,1).

Zad. 2
Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Wiemy, że za drugim razem wypadła 6. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy czterokrotnym rzucie kostką wypadnie suma oczek większa od 13?

Zad. 3
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6. Przekątna podstawy tworzy z przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka kąt 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zad. 4
Dla jakiej wartości parametru a równanie $a^2x^3 + (a^2 + 6a)x^2 + (a+6)x = 0$ ma 3 różne rozwiązania rzeczywiste?

Zad. 5
Rozwiąż nierówność: $1 - x \geq \log_5(5^x - 4)$

Temat 21: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dla jakiej wartości parametru m wielomian $W(x) = x^3 - (2\cos 4m)x^2 + 3x - \cos 4m - 5$ jest podzielny przez dwumian $(x - 2)$?

Zad. 2
Czy liczba $m = 4^n + 10^n - 2$ jest podzielna przez 3?

Zad. 3
Przy okrągłym stole siedzi 10 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą siedziały obok siebie?

Zad. 4
Funkcja $f(x) = 2x^2$ wycina z prostej m przechodzącej przez punkt (0,0) odcinek długości $\sqrt{5}$. Wyznacz równanie prostej k.

Zad. 5
Rozwiąż równanie: $\begin{array}{l} \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \\ x \in \langle 0, \pi \rangle \end{array}$

Temat 22: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Wyznacz dziedzinę funkcji: $f(x) = \log_{x+2}(x^2 - 2x - 12)$

Zad. 2
Rozwiąż równanie: $|||x| - 1| - 2| = 2$

Zad. 3
W pewnej klasie jest 32 uczniów. 50% uczniów tej klasy zna język angielski, 25% język niemiecki, a 12,5% zarówno angielski, jak i niemiecki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana osoba nie zna żadnego języka?

Zad. 4
Ile wynosi objętość równoległościanu, którego ściany boczne są rombami o kącie ostrym 60° i boku długości 4?

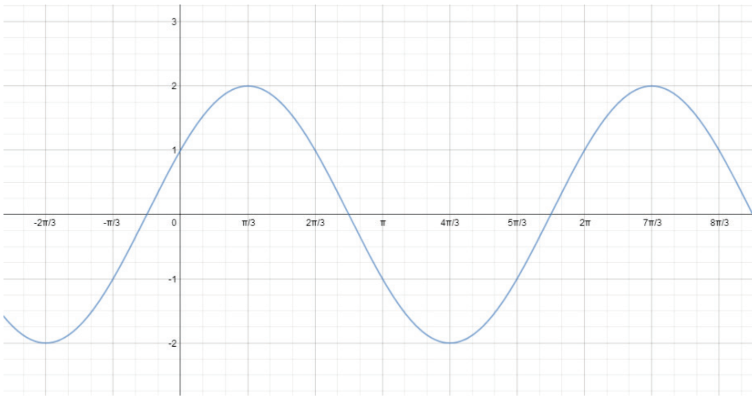
Zad. 5
Suma miar kątów przy wierzchołkach A i B trójkąta ABC jest równa 135°, boki AC i BC mają długości 4 i 12. Wyznacz pole trójkąta.

Temat 23: Przygotowanie do matury

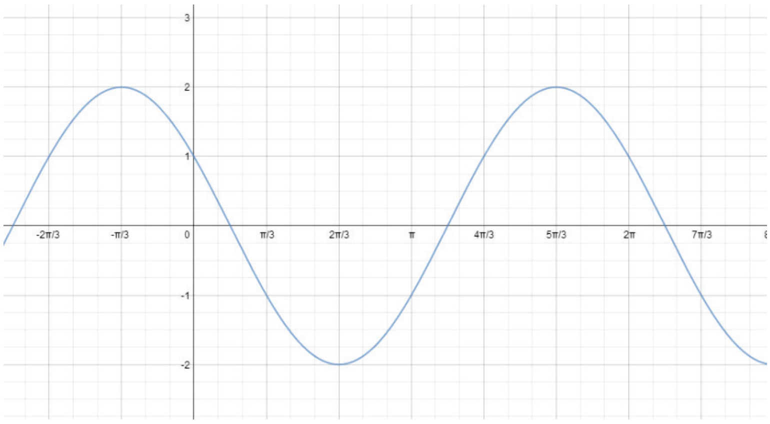
Zad. 1

Wskaż wykres funkcji $f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x$:

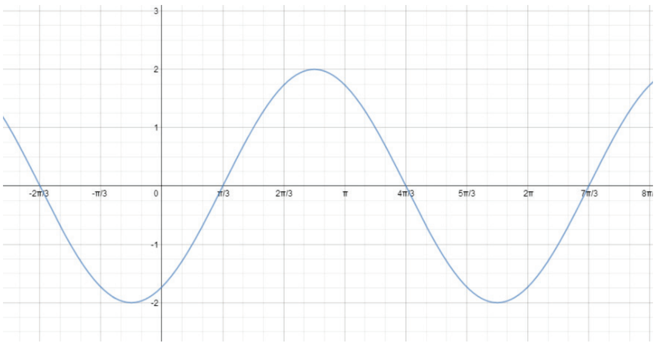
A.



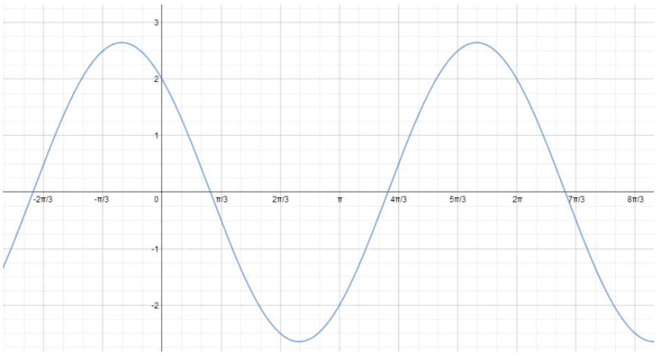
B.



C.



D.



Zad. 2
Sześcian o boku długości 6 przecięto płaszczyzną, która jest nachylona do podstawy pod kątem 60° i przechodzi przez przekątną podstawy. Oblicz pole przekroju.

Zad. 3
W pojemniku jest n kul, w tym 6 białych. Losujemy dwa razy po jednej kuli bez zwracania. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul jest równe $p = \frac{1}{3}$. Ile kul znajduje się w pojemniku?

Zad. 4
Liczbę 120 przedstaw w postaci różnicy liczb a i b tak, aby suma kwadratów liczb a i b była najmniejsza.

Zad. 5
Podaj wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \le 5 - 2|x-3|$

Temat 24: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Wyznacz trzynasty wyraz rozwinięcia: $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{20}$

Zad. 2
Naszkicuj wykres funkcji:
a) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$
b) $f(x) = ||x| - 2| - 1$
c) $f(x) = |-\sqrt{-x} - 1| - 1$
d) $f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1}$

Zad. 3
Dany jest trójkąt o bokach długości $a = 8$ i $b = 12$. Wyznacz długość boku c tego trójkąta, jeśli wysokości opuszczone na odpowiednie boki trójkąta spełniają warunek: $h_c = h_a + h_b$

Zad. 4
Rozwiąż równanie: $(3+\sqrt{2})^x + (3-\sqrt{2})^x = 6$

Zad. 5
Rozwiąż równanie: $4\cos(\pi x) = -2x^2 + 8x + 4$

Temat 25: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Pole powierzchno bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest dwukrotnie większe od pola podstawy. Oblicz wysokość ostrosłupa, jeśli krawędź podstawy ma długość 10.

Zad. 2
Punkty $A = (2,1)\ i\ B = (5,0)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się w punkcie $D = (4,1)$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C.

Zad. 3
Rozwiąż równanie: $2\log_2(x+4)+\log_2|x+4|=2$

Zad. 4
Na płaszczyźnie zaznaczono k niewspółliniowych punktów, które wyznaczyły 66 prostych?

Zad. 5
Kąt między przekątną a ramieniem trapezu równoramiennego jest prosty. Ramię trapezu ma długość 6 i tworzy z dłuższą podstawą kąt 60°. Ile wynosi objętość bryły powstałej przez obrót trapezu wokół dłuższej podstawy?

Temat 26: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dla jakiej wartości parametru k trójmian $f(x)=(k+12)x^2+(k-2)x+2k-4$ jest kwadratem pewnego dwumianu?

Zad. 2
Dla jakiej wartości x kwadraty wyrażeń $x^2+4x-2,\ \ x^2-4,\ \ x^2+4x-2$ tworzą ciąg arytmetyczny?

Zad. 3
Dla jakiej wartości parametru m pierwiastki a, b, c, d wielomianu
$W(x)=x^4+5x^3+mx^2-40x+64$ spełniają podane warunki?
$b=-2a$
$c=4a$
$d=-8a$

Zad. 4
Najkrótszy bok trapezu prostokątnego ma długość 9, a promień okręgu wpisanego w ten trapez jest równy 6. Wyznacz pole trapezu.

Zad. 5
Na okręgu opisano trójkąt prostokątny. Punkt styczności trójkąta i okręgu dzieli przeciwprostokątną na odcinki długości 4 i 6. Oblicz pole trójkąta.

Temat 27: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dla argumentu 0 przyjmuje wartość (-4), a liczby 1 i 2 są pierwiastkami tego wielomianu (1 jest pierwiastkiem dwukrotnym). Wyznacz współczynniki a, b, c, d.

Zad. 2
Wyznacz długość promienia kuli opisanej na ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, którego wysokość jest równa 8, a krawędzie boczne są do siebie prostopadłe.

Zad. 3
Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{7}{10}\right)^{2+4+...+2n} \geq \left(\frac{7}{10}\right)^{12}$, $n \in N$

Zad. 4
Boki trójkąta zawierają się w prostych o równaniach:
$5x + 2y = -5$,
$3x + 8y = 31$,
$7x - 4y = 27$
Oblicz pole trójkąta.

Zad. 5
W sześciu szufladach umieszczamy losowo sześć kul. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że każda kula znajdzie się w innej szufladzie?

Temat 28: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Miara kąta płaskiego przy podstawie ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 45°, a promień okręgu wpisanego w podstawę ma długość 4. Oblicz objętość ostrosłupa.

Zad. 2
Oblicz prawdopodobieństwo $P(C)$, jeśli
$P(C) = P((A \cup B) - (A \cap B))$
$P(A') = 0{,}6$
$P(A \cap B) = 0{,}2$
$P(A \cup B) = 0{,}8$

Zad. 3

Rozwiąż równanie: $\cos(x+\frac{\pi}{6})=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$

Zad. 4
Podaj rozwiązania równania: $\log_{16}x+(\log_{16}x)^2+...=3$

Zad. 5
Znajdź równania stycznych do okręgu $x^2+y^2-2x-4y=0$ przechodzących przez punkt $(4,-2)$

Temat 29: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dany jest trójkąt o bokach długości 4, 8, 10. Wyznacz długość dwusiecznej kąta leżącego naprzeciwko boku długości 10.

Zad. 2
Czy prawdą jest, że w trójkącie o bokach długości x, y, z spełniony jest warunek:
$\frac{\sqrt{3}(x+y+z)}{2}>\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Zad. 3
Rozwiąż równanie: $2^{\log x}-4^{2\log x}+14=0$

Zad. 4
Okrąg o środku w punkcie $S(5,2)$ jest styczny wewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2+y^2-16x-10y+57=0$. Wyznacz równanie stycznej do obu okręgów.

Zad. 5
Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 10, a krótsza jest równa 4. Kąt ostry trapezu ma miarę 60°. Ile wynosi pole powierzchni całkowitej bryły powstałej przez obrót trapezu wokół krótszej podstawy.

Temat 30: Przygotowanie do matury

Zad. 1
Dla jakiej wartości parametru m równanie $x^2-6|x|+9-m=0$ ma cztery rozwiązania?

Zad. 2
Rozwiąż równanie: $|x^2-4|+|x^2-1|=13$

Zad. 3
Sześcian pomalowano na kolor czerwony, a następnie rozcięto na tysiąc mniejszych sześcianów i wrzucono do urny. Ile jest równe prawdopodobieństwo wylosowania sześcianu, który ma dwie ściany czerwone?

Zad. 4
Naszkicuj wykres funkcji:

a) $f(x)=\frac{|x|-1}{|x|+1}$

b) $f(x)=\left|\frac{2x-4}{x-8}\right|$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x-1}$

d) $f(x)=\frac{|3x-9|}{x+1}$

Zad. 5
Czy liczba $3^{4n+2}+1$ jest podzielna przez 10?