Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Fundacja Edukacji Międzynarodowej
ul. Zielińskiego 38
53-534 Wrocław

tel. +48 71 782 26 27
faks +48 71 782 26 20
e-mail: biuro@fem.org.pl
www.fem.org.pl

ISBN 978-83-63377-12-0

egzemplarz bezpłatny

Sławomir Wójcik
Jerzy Janowicz
Zbigniew Lorkiewicz

konsultacja
Stanisława Socha
Maria Szecówka-Nowak

MATEMATYKA

INNOWACYJNY PROGRAM WSPIERANIA UZDOLNIEŃ W ZAKRESIE NAUK MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

Opracowanie
Dolnośląska Szkoła Wyższa
na zlecenie Fundacji Edukacji Międzynarodowej

Sławomir Wójcik
Jerzy Janowicz
Zbigniew Lorkiewicz

MATEMATYKA

INNOWACYJNY PROGRAM WSPIERANIA UZDOLNIEŃ W ZAKRESIE NAUK MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZYCH

konsultacja
Stanisława Socha
Maria Szecówka-Nowak

FEM
Fundacja Edukacji Międzynarodowej

Nakładca:
Fundacja Edukacji Międzynarodowej
ul. Zielińskiego 38
53-534 Wrocław
tel. + 48 71 782 26 27
faks +48 71 782 26 20
www.fem.org.pl

Wydawca:
DRUKARNIA KiD s.c.
A. Kisielnicki, P. Dąbkowski
ul. Sołtysowicka 26A
51-168 Wrocław
tel. +48 71 325 00 37

Publikacja powstała w ramach projektu "Szlifowanie diamentów - innowacyjne programy wsparcia uczniów uzdolnionych w zakresie nauk matematycznych i przyrodniczych"

Projekt graficzny:
Agencja Reklamowa Times

Wrocław 2013

Nakład: 1500 egz.

ISBN 978-83-63377-36-6

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

FEM
Fundacja Edukacji Międzynarodowej

Szlifowanie diamentów

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Spis treści

1. Wstęp

Matematyka, dziedzina aktywności intelektualnej człowieka, uznawana przez wielu za formę estetyki, tudzież język Boga, nie może być przedstawiana uczniom jako nudna, algorytmiczna i odtwórcza wiedza szkolna. Matematyka musi być „żywa i radosna” - otwarta dla każdego, do zabawy i poważnych zastosowań. Nie może być odhumanizowana i wyalienowana z realnego świata, zamknięta w twardej skorupie teorii i twierdzeń. Przywrócenie matematyce „normalności”, to nieczynienie z niej wyrafinowanego sacrum dla wybrańców i niestraszenie nią dzieci i młodzieży w szkołach. Pokazanie jej przystępności i przydatności, osadzenie w realnym świecie ucznia, nauczenie korzystania z jej dorobku w życiu codziennym. Ukazanie historii i losów ludzi ją tworzących, poznanie warsztatu profesjonalistów i istoty problemów, z którymi się borykają. To wszystko jest kluczem do „odczarowania” jej nieprzyjaznej postaci i zachęcenia młodych ludzi do uczynienia z matematyki swojej życiowej pasji.

Uzdolnienia matematyczne można zatem potraktować jako wyraz fascynacji tym swoistym rodzajem estetyki wynikającym ze specyficznych, wrodzonych predyspozycji umysłowych, a fascynacje i zainteresowania są z kolei przedsionkiem do pasji i samorealizacji człowieka. Z drugiej strony, dla zdrowia psychicznego ucznia ponadprzeciętnie uzdolnionego, matematyka nie może stać się dla niego substytutem rzeczywistości, miejscem alienacji, ucieczki od realnego życia w wirtualny świat idei. Nie może też radykalnie kanalizować rozwoju psychofizycznego i poznawczego ucznia, a harmonijnie i w sposób zrównoważony z innymi obszarami aktywności stymulować jego rozwój.

Niniejszy program jest efektem prac wdrożeniowych programu realizowanego w okresie od listopada 2011 do marca 2013 roku. Program został zmieniony w stosunku do wersji pierwotnej. Główny zakres zmian, to urealnienie przewidywanej liczby godzin na poszczególne zagadnienia. Drugi nurt zmian, to wprowadzenie do programu elementów z pogranicza matematyki rekreacyjnej - gry logiczne, nauka układania kostki Rubika, zadania diagramowe, gra miejska oraz inne zagadnienia popularyzujące matematykę. Przy tak dużym nasileniu zajęć podczas sesji celowym wydawało się wprowadzenie elementów stanowiących swoisty przerywnik przy jednoczesnym osiąganiu celów projektu np.: podnoszenie umiejętności logicznego myślenia, czy integracja w zespole.

Integralną częścią przedstawionego opracowania jest *Innowacyjny program wsparcia psychologiczno-pedagogicznego uczniów uzdolnionych, ich rodziców i nauczycieli* (przygotowany w odrębnym dokumencie), który należy realizować jednocześnie z niniejszym programem.

2. Informacja o autorach

Mgr Jerzy Janowicz

Nauczyciel matematyki z ponad 30-letnim stażem, absolwent Uniwersytetu Wrocławskiego, autor ponad 100 publikacji metodycznych, w tym podręczników matematyki dla gimnazjum z serii „Policzmy to razem" wraz z obudową dydaktyczną (zbiory zadań, zeszyt ćwiczeń, książki dla nauczyciela, sprawdziany) oraz kilku zbiorów zadań dla uczniów uzdolnionych matematycznie.

Mgr Zbigniew Lorkiewicz

Absolwent Uniwersytetu Wrocławskiego, wieloletni nauczyciel matematyki i informatyki. Wychowawca i nauczyciel wielu laureatów olimpiad przedmiotowych. Twórca koncepcji egalitarnego wspierania uzdolnień i akredytacji szkół w obszarze wspierania uzdolnień uczniów na Dolnym Śląsku. Inicjator i współtwórca Dolnośląskiego Systemu Wspierania Uzdolnień. Pomysłodawca konkursów „zDolny Ślązak Gimnazjalista" i „zDolny Ślązaczek" oraz wieloletni przewodniczący wojewódzkiej komisji konkursowej. Autor wielu zadań egzaminacyjnych i konkursowych.

Mgr Sławomir Wójcik

Absolwent matematyki na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu, wykładowca Politechnik Wrocławskiej, nauczyciel, miłośnik matematyki i łamigłówek logicznych, dwukrotny mistrz Polski w Grach Matematycznych i Logicznych, członek zarządu dolnośląskiego oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego, członek Mensy – Polska, popularyzator matematyki, współautor książek dla dzieci o tematyce matematycznej. Od 2005 roku prowadzi Międzyszkolnego Kółka Matematyczne organizowane przez Fundację Matematyków Wrocławskich i Politechnikę Wrocławską. Wychowawca wielu laureatów konkursów i olimpiad matematycznych. Żonaty, ojciec dwójki dzieci: Olgi - 11 lat i Michała - 6 lat.

3. Ogólna charakterystyka programu

Innowacyjny program pracy z młodzieżą ponadprzeciętnie uzdolnioną matematycznie skonstruowany jest na gruncie idei holistycznego podejścia do przekazywania wiedzy oraz kształtowania umiejętności i postaw. Został także dodatkowo wzbogacony o elementy edukacji kulturalnej i wsparcie psychologiczne. Stawia na aktywność, otwartość i samodzielność uczniów. Komplementarnie wprowadza w podstawowe zasady współpracy i współdziałania w zespole. Pokazuje matematykę jako efekt nieskrępowanej kreatywności umysłowej człowieka, tworzonej przez człowieka i dla człowieka.

4. Cele kształcenia

4.1. Cele ogólne

1. Stworzenie uczniom warunków do zdobycia wiedzy i umiejętności wykraczających poza podstawę programową.
2. Założenia wychowawcze: kształtowanie pozytywnej motywacji wobec wiedzy matematycznej, samodzielne tworzenie sytuacji problemowej, rozwiązywanie problemów, generowanie pomysłów, dociekliwość, wytrwałość w badaniu problemu, prowadzenie dyskusji, argumentowanie, efektywna praca w zespole i odpowiedzialność za efekty pracy całego zespołu.
3. Racjonalne ukierunkowanie rozwoju potencjału intelektualnego szerokiej rzeszy uczniów ponadprzeciętnie uzdolnionych z matematyki.
4. Popularyzacja matematyki, szczególnie w kontekście wyboru ścisłego kierunku studiów wyższych.
5. Wyrównywanie szans edukacyjnych uczniów ponadprzeciętnie uzdolnionych z matematyki pochodzących z różnych środowisk.
6. Integracja środowiska edukacyjnego wokół problematyki wspierania uzdolnień uczniów.

4.1.1 Wykraczające poza podstawę programową

„Jedyną osobą, która coś może zrobić z Twoim życiem, jesteś Ty sam”

1. Pokazanie nie-szkolnego, fascynującego oblicza matematyki elementarnej.
2. Wzbudzenie głębszego zainteresowania obszarem matematyki opartego na wewnętrznej motywacji.
3. Odkrycie wielodyscyplinarności zastosowań matematyki.
4. Umożliwienie uczniom kontaktu z pracownikami naukowymi i odczucia atmosfery uczelni wyższej. Kształtowanie śmiałości w prowadzeniu dialogu z ekspertami i niwelowanie postawy biernego odbiorcy informacji.
5. Przybliżenie warsztatu pracy profesjonalnego matematyka i obszarów penetracji współczesnej matematyki.
6. Umożliwienie uczniom kontaktu z rówieśnikami mającymi podobne zainteresowania. Inicjowanie idei tutoringu rówieśniczego wśród uczniów.
7. Przygotowanie uczniów do samodoskonalenia i samodzielnego poszerzania swojej wiedzy matematycznej.
8. Umożliwienie uczniom samooceny własnych celów poznawczych i szacowania możliwości ich realizacji.
9. Umożliwienie poznania własnego potencjału intelektualnego, stopnia kreatywności i posiadanej wiedzy w porównaniu z rówieśnikami.

10. Wdrażanie do samodzielności, tworzenia własnych koncepcji, kreatywności intelektualnej.
11. Rozwijanie umiejętności współpracy w zespole.
12. Kształtowanie umiejętności prowadzenia merytorycznej dyskusji i przyjętych sposobów przekazywania i obrony własnych przekonań.

4.1.2. Wynikające z diagnozy barier społecznych w dostępie do studiów wyższych

Podstawowymi barierami w dostępie do studiów wyższych są bariery finansowe, środowiskowo-kulturowe i mentalne. Głównym czynnikiem wpływającym na wybór matematyczno-przyrodniczych kierunków studiów jest perspektywa zatrudnienia po ich ukończeniu. Zatrudnienia zgodnego z kierunkiem studiów, adekwatnego do posiadanej wiedzy i dającego satysfakcję finansową.

Z drugiej strony już od dawna ukończenie studiów nie determinuje uzyskania pracy, a absolwenci coraz częściej podejmują aktywność zawodową niezwiązaną z ukończoną specjalnością. Stąd tendencja w wyborze studiów zgodnych z posiadanymi zainteresowaniami i uzdolnieniami. Daje to szansę pełnego rozwoju życiowego i samorealizacji. Ważne staje się zatem poznanie i krystalizacja zainteresowań ucznia przed wyborem uczelni wyższej, m. in. poprzez:

1. Stwarzanie sytuacji pedagogicznych, w których uczeń poznaje swoje możliwości, zainteresowania i uzdolnienia.
2. Rozpoznawanie mocnych stron ucznia i wzmacnianie jego rozwoju w tym kierunku.
3. Wzbudzanie w uczniach pasji poznawczych i zachęcanie do szukania własnej ścieżki rozwojowej.
4. Zachęcanie do podejmowania studiów wyższych i pomoc w trafnym ich wyborze.

4.1.3. Wynikające z badań Centralnej Komisji Egzaminacyjnej i diagnoz PISA

Głównym kierunkiem kształcenia będzie eksponowana coraz mocniej we współczesnej edukacji grupa umiejętności złożonych takich, jak modelowanie matematyczne, użycie i tworzenie strategii oraz rozumowanie i argumentacja. Umiejętności te, jak wskazują badania prowadzone przez Centralną Komisję Egzaminacyjną, czy międzynarodowe diagnozy PISA, są u młodzieży zbyt słabo rozwinięte i stanowią pewną barierę w ich indywidualnym rozwoju, jak i w rozwoju całego społeczeństwa.

4.1.4. Wynikające ze szczególnej sytuacji ucznia ponadprzeciętnie uzdolnionego oraz jego znaczącej roli społecznej

1. Zapoznanie z zasadami budowania własnego warsztatu pracy quasi naukowej. Zachęcenie do aktywności twórczej i uczestnictwa w życiu popularno-naukowym.
2. Umożliwienie poznania swojego potencjału intelektualnego, określania swoich mocnych i słabych stron, stopnia swojej kreatywności oraz posiadanej wiedzy w porównaniu z rówieśnikami.
3. Kształtowanie umiejętności określania swoich celów strategicznych i operacyjnych (długookresowych i krótkookresowych) oraz stawiania sobie bieżących zadań.
4. Kształtowanie umiejętności planowania i wizualizacji własnej ścieżki rozwojowej.
5. Kształtowanie zrozumienia, że zdolności są sprawą indywidualną, ale stanowią znaczącą wartość społeczną.

4.2. Cele wychowawcze

1. Kształtowanie umiejętności prowadzenia merytorycznej dyskusji i przyjętych sposobów przekazywania i obrony własnych przekonań.
2. Kształtowanie umiejętności trafnej, racjonalnej oceny swojej osoby, budowania poczucia własnej wartości i akceptacji siebie w tym umiejętność przyjmowania krytyki, ocen i pochwał. Rozwijanie umiejętności radzenia sobie z porażką.
3. Wdrażanie do samodzielności, do tworzenia własnych koncepcji, pobudzanie kreatywności intelektualnej.
4. Rozwijanie kompetencji społecznych uczniów, umiejętności współpracy w zespole i kultury dyskusji w tym umiejętność prowadzenia sporu. Rozwijanie umiejętności współpracy w zespole i kultury dyskusji w tym umiejętność prowadzenia sporu.
5. Kształtowanie wrażliwości na innych ludzi, zwłaszcza tych z mniejszym potencjałem zdolności, szacunku i tolerancji dla życia w ogóle.
6. Budowanie zrozumienia, że dopiero ponadprzeciętna inteligencja połączona z właściwym systemem wartości daje w pełni wartościową jednostkę ludzką.
7. Kształtowanie zrozumienia, że mądrość to coś więcej niż sama inteligencja i zdolności.
8. Umożliwienie kontaktu z kulturą wysoką, a także kształtowanie wrażliwości na sztukę i przygotowanie do odbioru sztuki.
9. Rozbudzanie aspiracji i wspieranie dążenia do samorealizacji.

4.3. Cele szczegółowe

4.3.1. W zakresie wiadomości i umiejętności:

1. Przyswojenie wybranych pojęć i umiejętności matematycznych nie ujętych podstawą programową.
2. Opanowanie treści i umiejętności dodatkowych umożliwiających indywidualny rozwój posiadanych predyspozycji matematycznych.
3. Zdobycie umiejętności matematycznych przydatnych w życiu codziennym.

4.3.2. W zakresie aktywności intelektualnej związanej z poznawaniem matematyki:

1. Posługiwanie się językiem i symboliką matematyczną oraz regułami wnioskowania
2. Redagowanie tekstów z użyciem symboliki matematycznej.
3. Stosowanie wzorów, algorytmów, twierdzeń w rozwiązywaniu problemów.
4. Definiowanie pojęć.
5. Interpretowanie zależności funkcyjnych wyrażonych w formie algebraicznej lub graficznej.
6. Tworzenie modeli kombinatorycznych i probabilistycznych oraz posługiwanie się nimi.

4.3.3. W zakresie rozwijania uzdolnień matematycznych:

1. Nabycie biegłości w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi na takim poziomie, aby nie stanowiły one dodatkowej trudności przy wykonywaniu czynności wyższego rzędu.
2. Wykształcenie umiejętności całościowego spojrzenia na prowadzony proces rozumowania i dobieranie pod tym kątem określonych procedur.
3. Rozwijanie umiejętności heurystycznych.
4. Wdrażanie do samodzielności matematycznej, zwłaszcza w rozwiązywaniu problemów.
5. Kształcenie myślenia koncepcyjnego i kreatywności matematycznej.

5. Materiał nauczania

Materiał nauczania dostosowany jest do każdej z dwóch wyodrębnionych grup wiekowych uczestników. Obejmuje głównie zakres programowy, choć widziany często z innej i nieco szerszej perspektywy. Jednocześnie wzbogacany o pojęcia, problemy i metody wykraczające poza zakres matematyki szkolnej.

5.1. Treści nauczania

Treści nauczania podzielono tematycznie, dla każdej z grup wiekowych uczestników. W każdej grupie wyszczególniono 6 sesji tematycznych po 40 godzin każda. Należy przy tym zaznaczyć, że dopuszczalna jest zmiana kolejności poszczególnych sesji, a tytuły sesji odnoszą się do wiodącej tematyki. Część zajęć w poszczególnych sesjach może odbiegać od tematyki wiodącej. Może to być decyzja zespołu przedmiotowego lub koordynatora np. ze względu na chęć zrealizowania zagadnień, które uczniowie zgłaszali w ankietach ewaluacyjnych po poprzednich sesjach. Ponieważ kalendarz ogólnopolskich oraz (znaczących) lokalnych imprez i konkursów matematycznych jest bardzo bogaty, to organizacja poszczególnych sesji za pewne wypadnie w pobliżu tychże właśnie imprez. Warto część zajęć poświęcić na przygotowanie uczniów do tych imprez zwracając szczególną uwagę na specyfikę imprezy/konkursu. Zawiadomienie i zachęcenie do udziału - o ile nie nastąpiło w szkole macierzystej - powinno się odbyć poprzez kontakt mailowy bądź platformę Moodle.

Grupa I

Uczniowie klas V i VI szkoły podstawowej oraz klas I i II gimnazjum

1. *„Równania, których nie ma w szkole”*
2. *„Policzmy to inaczej”*
3. *„Matematyczne 3D”*
4. *„Matematyczny klub odkrywców”*
5. *„Papierowa matematyka”*
6. *„Matematyka nie oszukuje”*

Grupa II

Uczniowie klasy III gimnazjum i I i II klasy szkoły ponadgimnazjalnej

1. *„Co mnie zastanawia, intryguje i fascynuje w matematyce?”*
2. *„ Algebra – przełomowy wynalazek arabów, utrapienie uczniów”*
3. *„Różne geometrie, różne światy”*
4. *„Życie to statystyka i probabilistyka”*
5. *„Matematyka narzędziem profesjonalistów”*
6. *„Matematyka wspomagana informatyką”*

5.2. Zakres tematyczny

Tematyka poszczególnych sesji matematycznych, w zakresie merytorycznym, realizowana jest odrębnie w każdej grupie wiekowej:

- Grupa I Uczniowie klas V i VI szkoły podstawowej oraz klas I i II gimnazjum
- Grupa II Uczniowie klasy III gimnazjum oraz klasy I i II szkoły ponadgimnazjalnej

Jak wspomniano podczas opisu adresatów projektu dopuszcza się łączenie grup na pojedynczych wykładach/zajęciach. Pod zagadnieniami wiodącymi przedstawiony jest przykład realizacji sesji w rozbiciu na konkretne tematy. Każdy temat przewidziany jest na 1,5h czyli 2 godziny lekcyjne.

Tematy oznaczone gwiazdką mogą być realizowane w obu grupach jednocześnie.

5.2.1. Grupa I

Sesja 1

„Równania, których nie ma w szkole”

- równanie z wartością bezwzględną

Uczniowie poznają różne metody rozwiązywania równań z wartością bezwzględną (algebraiczne, graficzne – z użyciem osi liczbowej), rozwiązują zadania tekstowe prowadzące do równań z wartością bezwzględną. W bardziej zaawansowanej grupie można rozwiązywać równania z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną.

- równanie zaokrągleniem

Zaokrąglenie można tak zdefiniować, że stanie się funkcją, a stąd o krok do sformułowania równań. Takie równania można rozwiązywać rachunkowo lub za pomocą wykresów. Uczniowie sami mogą tworzyć problemy i próbować je rozwiązywać.

- równanie z częścią całkowitą i mantysą

Zajęcia rozpoczynamy od określenia części całkowitej (cechy) i mantysy. Kolejno sporządzamy wykresy, a następnie formułujemy i rozwiązujemy coraz bardziej złożone równania.

- równania potęgowe i wykładnicze

Zajęcia przebiegają od ćwiczeń w rozwiązywania elementarnych równań wykładniczych i potęgowych, kolejno poprzez bardziej złożonych, aż do zadań „olimpijskich”. W grupie bardziej zaawansowanej można wprowadzić pojęcie logarytmu i równania logarytmiczne.

- rozwiązywanie równań w liczbach naturalnych, całkowitych i wymiernych

Równania rozwiązywane w liczbach naturalnych, to klasyka teorii liczb. Osnową zajęć może być «Teoria liczb» W. Sierpińskiego. Zajęcia mogą stać się okazją do zapoznania z osiągnięciami wybitnych polskich matematyków, a także stwarzają sposobność do nauki czytania tekstu matematycznego.

Przykład realizacji konkretnych tematów:

Wykład inauguracyjny „Współczesne dziedziny badań matematycznych”
Strategie gier matematycznych i zadań diagramowych (1)
Sesyjny konkurs zadaniowy (1)
Prezentacje rozwiązań zadań kwalifikacyjnych i konkursowych
Prezentacje uczniowskie (1)
Prezentacje uczniowskie (2)
„Najistotniejsze osiągnięcia matematyki” (1) “Rachunek różniczkowy i całkowy - największy wynalazek drugiego tysiąclecia. Jak i po co się różniczkuje i całkuje”
Rozwiązywanie równań w liczbach naturalnych (1)
Rozwiązywanie równań w liczbach naturalnych (2)
Strategie gier matematycznych i zadań diagramowych (2)
Równania i nierówności z wartością bezwzględną (1)
Co już wiemy, a czego jeszcze szukamy w matematyce (1) “Ciąg Fibonacciego”
Rozwiązywanie równań w liczbach naturalnych (3)
Równania i nierówności z częścią całkowitą i mantysą (1)
Rozwiązywanie problemów matematycznych (3) “Kolorowanie w matematyce”
Równania i nierówności potęgowe i wykładnicze (1)
Równania i nierówności z “zaokrągleniem” (1)
Dyskusje o matematyce (1) “Komu potrzebna jest matematyka?”
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki (2) “Rachunek różniczkowy i całkowy - największy wynalazek drugiego tysiąclecia. Jak i po co się różniczkuje i całkuje” cz.2.
Zadania logiczne i wnioskowanie (1)

Sesja 2

„Policzmy to inaczej”

- historia niedziesiątkowych systemów liczenia

Zajęcia rozpoczynają się od pogadanki wprowadzającej, następnie uczniowie w kilku grupach w określonym czasie przygotowują korzystając z Internetu krótkie wystąpienia na temat systemów liczenia rzymskiego, babilońskiego, egipskiego i innych. W drugiej części następują prezentacje, a następnie dyskusja o wspólnych cechach i różnicach w systemach liczenia używanych przez różne cywilizacje.

- dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w systemach o podstawie innej, niż 10

Zajęcia rozpoczynają się od uzasadnienia algorytmów działań arytmetycznych w systemie dziesiątkowym. Następnie tworzone są i uzasadniane algorytmy dla innych systemów. W drugiej części zajęć uczniowie rozwiązują zadania arytmetyczne dotyczące działań w systemach innych, niż dziesiątkowy.

- równania w systemach niedziesiątkowych

Uczniowie rozwiązują równania, w których niewiadome są liczbami zapisanymi w systemie innym, niż dziesiątkowy lub niewiadomą jest podstawa systemu liczenia.

- cechy podzielności w systemach niedziesiątkowych

Poprzez analogię do uzasadnienia cech podzielności w systemie dziesiątkowym uczniowie tworzą i uzasadniają cechy podzielności w systemach innych, niż dziesiątkowy. W kilku zespołach opracowują przykłady cech przez różne liczby. Kolejno następuje ich prezentacja i próby zauważenia ogólnych prawidłowości. W dyskusji uczniowie porównują także efekty swojej pracy, w sytuacji, gdy podstawą jest liczba pierwsza i gdy jest nią liczba złożona.

- o innym sposobie zapisywania ułamków

Uczniowie poznają sposób zapisywania liczb wymiernych za pomocą tzw. ułamków łańcuchowych. Ćwiczą zamianę ułamków łańcuchowych na zwykłe i odwrotnie. Poznają pojęcie reduktu i jego roli w znajdowaniu przybliżeń. W grupie bardziej zaawansowanej można poruszyć kwestie ułamków łańcuchowych nieskończonych.

Przykład realizacji konkretnych tematów:

*Jak powstawała algebra
Niedziesiątkowe systemy liczenia
Działania arytmetyczne w systemach o różnych podstawach
*Konkurs zadaniowy
Cechy podzielności w systemach o różnych podstawach
*Rozwiązywanie zadań konkursowych
*Strategie gier matematycznych i zadań diagramowych
Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia
Rozwiązywanie równań kwadratowych przez sprowadzanie do pełnego kwadratu
*Liczby na przestrzeni dziejów
Równania diofantyczne c.d.
*Ile jest liczb pierwszych?
Równania w systemach niedziesiątkowych cz. 1
Równania w systemach niedziesiątkowych cz. 2
Elementarne nierówności algebraiczne cz. 1
Rodzaje liczb
Zabawa z logiką matematyczną
Ułamki łancuchowe elementarnie
Gry i zadania logiczne
Elementarne nierówności algebraiczne cz. 2

Sesja 3

„Matematyczne 3D"

- odtwarzanie rysunku bryły na podstawie kilku elementów

Jakie punkty charakterystyczne należy znać, aby narysować rzut sześcianu? Ile krawędzi graniastosłupa powinno być na rysunku, aby jednoznacznie odtworzyć cały rysunek? To tylko przykładowe problemy, które będą rozwiązywane na tych zajęciach. Uczestnicy muszą wykazać się dobrze rozwiniętą wyobraźnią przestrzenną, aby rozwiązywać te zadania oraz, w drugiej części zajęć, samodzielnie je tworzyć.

- analiza rysunków konstrukcji przestrzennych

Jakie zasady obowiązują przy rysowaniu brył? Czy rysunek powinien wyglądać tak, jak zdjęcie bryły? Zajęcia, na których można wykorzystać środki multimedialne (aparat fotograficzny, kamera, rzutnik, tablica interaktywna, komputer) do weryfikacji hipotez i wskazywania różnic między rzutem a rysunkiem czy fotografią.

- o oglądaniu bryły z różnych stron (rzuty)

Zajęcia rozpoczynają się od kilku łamigłówek typu „Na podstawie widoku z trzech różnych, wzajemnie prostopadłych kierunków opisz, jaka to bryła". Następnie uczniowie sami układają takie łamigłówki. Zadania dotyczą pełnych modeli oraz modeli żeberkowych. Jeśli grupa jest na tyle zaawansowana,. można w przypadku niejednoznacznego rozwiązania analizować problemy optymalizacyjne.

- czyj to cień?

Zajęcia powinny być zorganizowane w trzech modułach:

- obserwacja cieni modeli brył (pełnych i żeberkowych) w świetle słonecznym np. na boisku szkolnym i rysowanie otrzymanych cieni kredą na płycie boiska,
- obserwacja cieni modeli brył (pełnych i żeberkowych) w świetle sztucznym punktowym (żarówka, rzutnik) w pomieszczeniu zaciemnionym i rysowanie otrzymanych cieni na papierze lub tablicy
- porównanie cieni tej samej bryły w świetle słonecznym i punktowym. Wyłonienie podobieństw i różnic.
- o bryłach, których nie ma

Czy istnieje bryła mająca dokładnie 7 krawędzi? Czy istnieje 99-ścian, którego wszystkie ściany są trójkątami? Tego typu problemy, których sformułowanie jest oczywiste i zrozumiałe, a rozwiązanie – nie zawsze jest proste będą rozwiązywane na tych zajęciach. Czy dla każdej trojki liczb spełniająca wzór Eulera istnieje bryła, w której jest tyle właśnie wierzchołków, krawędzi i ścian? No i przede wszystkim – jak dowieść twierdzenia Eulera o wielościanach?

Sesja 4

„Matematyczny klub odkrywców"

- arytmetyczne prawidłowości – ciągi

Zajęcia rozpoczynają się od zauważenia prawidłowości w wypisywanych ciągach liczb – najpierw np. rekurencyjnej, a następnie ogólnej. Kolejno analizowane są ciągi arytmetyczne i geometryczne. Następnie podawane są (i uzasadniane) wzory na sumę kolejnych liczb naturalnych i kwadratów kolejnych liczb naturalnych. W zależności od kondycji matematycznej grupy można także poruszyć kwestie zbliżone do zbieżności ciągów.

- arytmetyczne prawidłowości – trójkąt Pascala

Uczniowie poznają sposób tworzenia trójkąta Pascala. Następnie odkrywają proste zależności (suma wierszy jest potęgą dwójki) i regularności (rozmieszczenie np. liczb parzystych, czy podzielnych przez 3). Wykorzystują spostrzeżenia do tworzenia zależności arytmetycznych i algebraicznych (równości z symbolem Newtona i wzory skróconego mnożenia).

- dorysuj coś i... już

Wiele pomysłów na rozwiązanie zadania sprowadza się do sprytnego wybrania punktu czy poprowadzenia odcinka. Sztuka takiej spostrzegawczości matematycznej jest trudna do osiągnięcia, ale jest niezwykle przydatna. Przygotowując zajęcia należy wybrać z dostępnych zbiorów zadań te, w których błyskotliwy pomysł uzupełnienia rysunku o jeden drobny element czyni całe zadanie oczywistym.

- poszukajmy obok

Naturalnym odruchem przy rozwiązywaniu problemu jest analiza danych, próba ich przekształcania, czy inne czynności dotyczące sytuacji opisanej w zadaniu. Czasami jednak warto popatrzeć szerzej, porozglądać się i, być może, dostrzec zupełnie inaczej całą sytuację. Może – nieco przekornie – zapytać o elementy nie spełniające warunków zadania i z pełną premedytacją wyeliminować je z obszaru zainteresowania? A może stworzyć „negatyw” zadania pytając, kiedy sytuacja w nim opisana nie zachodzi? Wówczas, przy sprzyjających okolicznościach, może okazać się, że zupełnie niechcący zadanie zostało rozwiązane lub sprowadzone do problemu już zupełnie łatwego.

Sesja 5

„Papierowa matematyka”

- modele wyplatane z papierowej taśmy

Zawiązując zwykły węzeł na papierowej taśmie możemy po rozpłaszczeniu otrzymać pięciokąt foremny. Ale tak na prawdę skąd wiadomo, że jest on foremny? Podobnie – wiążąc ze sobą dwie taśmy można uzyskać sześciokąt foremny. Składając umiejętnie jedną taśmę można wyznaczyć na niej kwadrat (banalne) lub trójkąt równoboczny (trudniejsze).

- wyznaczanie wielokątów foremnych za pomocą zagięć papieru

Do zajęć potrzebne są arkusze papieru o nieregularnie obciętych brzegach. Jak wyznaczyć za pomocą zagięć na tym papierze kwadrat, trójkąt równoboczny albo inne wielokąty foremne? I skąd wiadomo, że są one na prawdę foremne?

- siatki brył do składania bez kleju

W literaturze lub na stronach internetowych dostępne są projekty siatek, które po odpowiednim spleceniu dają model sześcianu lub innego wielościanu. Zajęcia polegają na wyplataniu modeli z gotowych siatek oraz na projektowaniu takich siatek.

- modele z papierowych rurek

Kopuły fullerowskie, to konstrukcje przestrzenne, których modele można otrzymać łącząc papierowe rurki za pomocą zszywacza lub taśmy klejącej. Rurki wykonujemy z jednakowych arkuszy papieru (papier formatu A4 lub gazety) poprzez nawinięcie ich na ołówek lub okrągły pręt. Za pomocą tej nieskomplikowanej techniki możemy otrzymać duże, przestrzenne konstrukcje przypominające znane wszystkim warszawskie Złote tarasy. Rekomenduje się przeprowadzenie zajęć na odkrytej przestrzeni lub w sali sportowej.

- modele w technice orgiami

Na stronach internetowych poświęconych technice origami znaleźć można bardzo dużo pomysłów, jak za pomocą odpowiedniego składana papieru otrzymać modele prostych brył (czworościan foremny, sześcian), czy bardziej złożonych (np. dwunastościan foremny).

Sesja 6

„Matematyka nie oszukuje"

- paradoksy, antynomie i sofizmaty

Zajęcia poświęcone będą specyficznym problemom matematycznym i logicznym, które od wieków bawiły, ale przede wszystkim uczyły ścisłości, precyzji i konsekwencji w myśleniu. Zadania oparte na sofizmatach, antynomiach, czy paradoksach będą prezentowane na tle historycznym i nawiązywać będą do najważniejszych umiejętności intelektualnych, jakie są rozwijane w szkole. Uczestnicy poznają klasyfikację i ogólne zasady rozwiązywania lub komentowania takich problemów.

- sztuczki liczbowe i ich sekrety

Warsztat stanowi przegląd klasycznych sztuczek matematycznych, które dotyczą elementarnej matematyki. Na zajęciach pojawią się również paradoksy matematyczne, czyli np. „dowód", *że każda liczba jest dodatnia. Każda ze sztuczek jest dokładnie analizowana, odkrywany jest jej sekret. Zajęcia można zorganizować w formie konkursu, gdzie jedna z drużyn przygotowuje* i przedstawia sztuczkę matematyczną, a druga – odgaduje.

- sztuczki z szybkim liczeniem

Szybkie liczenie, to także niekiedy sztuczka rachunkowa. Uczniowie sami mogą podzielić się swoim doświadczeniem w sprytnym wykonywaniu rachunków. Każdy sposób skróconego wykonywania obliczeń jest dokładnie analizowany pod kątem poprawności i zasięgu stosowania. Wiele pomysłów można znaleźć w Internecie lub w literaturze np. M. Szcześniak, D. Szcześniak – Kalkulator w głowie. Wrocław 1995.

- oszustwa geometryczne

Geometria jest wdzięcznym polem do zakamuflowania błędu i uzyskania efektownego, ale sprzecznego z wiedzą matematyczną rezultatu. Poszukiwania błędu ćwiczą u uczestników dociekliwość *rozumowania i jego precyzję.*

- nonsensowne dowody i żarty matematyczne

Zabawne „dowody”, że 1 = 2, czy inne żarty matematyczne są także dobrym materiałem rozwijającym umiejętności uczniów. Dowodząc, że 1 zł = 1 gr uczniowie muszą bardzo precyzyjnie odróżniać poprawne rozumowanie od błędnego. Zajęcia mogą przyjąć różną formę organizacyjną – np. bieg terenowy ze stanowiskami, na których będzie trzeba rozwiązać zadanie – żarcik matematyczny.

5.2.2. Grupa II

Sesja 1

„Co mnie zastanawia, intryguje i fascynuje w matematyce?”

- Wykład inauguracyjny profesora matematyki. Pytania i dyskusja na forum.
- Zapoznanie się uczestników ze sobą i z prowadzącymi sesję. Zajęcia integracyjne wspólne dla obu grup.
- Prezentacje zagadnień przygotowanych przez uczestników. Każdy z uczestników sesji jest zobowiązany do przygotowania na sesję 20 min. prezentacji, w dowolnej formie, na temat: *„Co mnie zastanawia, intryguje i fascynuje w matematyce”*. Uczestnik przedstawia swoje fascynacje przedmiotem, swoje przemyślenia, ciekawe problemy i oczekiwania (realne lub nierealne).
- Czym była i jest matematyka. Najciekawsze i najistotniejsze osiągnięcia matematyki współczesnej i dawnej – wybór zagadnień przez prowadzącego (np. teoria Galois, zagadnienie czterech barw, twierdzenie Gödla, wielkie twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera itp.)
- Warsztaty z pracownikiem naukowym: „Co już wiemy, a czego jeszcze szukamy w matematyce. Nad czym się głowią współcześni matematycy?”
- Ciąg dalszy prezentacji uczestników.
- Wizyta studyjna na Uczelni wyższej.

Przykład realizacji konkretnych tematów:

*Wykład inauguracyjny „Współczesne dziedziny badań matematycznych”
*Strategie gier matematycznych i zadań diagramowych cz. 1
*Sesyjny konkurs zadaniowy

*Prezentacje rozwiązań zadań kwalifikacyjnych i konkursowych
*Prezentacje uczniowskie cz. 1
*Prezentacje uczniowskie cz. 2
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki cz. 1 "Rachunek różniczkowy i całkowy - największy wynalazek drugiego tysiąclecia. Jak i po co się różniczkuje i całkuje"
Rozwiązywanie problemów matematycznych cz. 1 "Dowody niewymierności"
Co już wiemy, a czego jeszcze szukamy w matematyce cz. 1 "Nieskończoności"
Rozwiązywanie problemów matematycznych cz. 2 "Rekurencje liniowe stopnia 1 i 2"
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki cz. 2 "Liczby kardynalne i porządkowe"
Co już wiemy, a czego jeszcze szukamy w matematyce cz. 2 "Ciąg Fibonacciego"
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki cz. 3 "Twierdzenie Eulera"
Rozwiązywanie problemów matematycznych cz. 3 "Arytmetyka zespolona"
Rozwiązywanie problemów matematycznych cz. 4 "Kolorowanie w matematyce"
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki cz. 4 "Ciekawe zagadnienia z teorii grafów"
Dyskusje o matematyce cz.1 "Czy matematykę wymyślamy, czy odkrywamy"
Dyskusje o matematyce cz. 2 "Komu potrzebna jest matematyka?"
Najistotniejsze osiągnięcia matematyki" cz. 5 "Rachunek różniczkowy i całkowy - największy wynalazek drugiego tysiąclecia. Jak i po co się różniczkuje i całkuje" cz.2.
Rozwiązywanie problemów matematycznych cz. 5 "Różnica symetryczna"

Sesja 2

„Algebra – przełomowy wynalazek arabów, utrapienie uczniów"
Zajęcia warsztatowe. Ilustracja pojęć treściami zadaniowymi.

- Systemy liczenia. Arytmetyka.
- Wstęp do teorii liczb. Liczby pierwsze i złożone. Kongruencje.
- Funkcje całkowitoliczbowe.
- Algebraiczne i niealgebraiczne rozwiązywanie problemów „tekstowych".
- Równania i nierówności liczbowe i algebraiczne.
- Sumowanie skończone i nieskończone.
- Krótki konkurs zadaniowy między uczestnikami sesji.

Przykład realizacji konkretnych tematów:

Jak powstawała algebra
Grupy izometrii własnych figur geometrycznych
Kongruencje
Konkurs zadaniowy
Ciekawe zbiory liczbowe - zbiór Cantora

Rozwiązywanie zadań konkursowych
Strategie gier matematycznych i zadań diagramowych
Czy można inaczej mnożyć i dodawać
Grupy algebraiczne
Liczby na przestrzeni dziejów
Małe tw. Fermata
Klasyczne nierówności między średnimi i ich zastosowania
Sumy i iloczyny
Ułamki jakich nie znamy
Nierówności algebraiczne -dowodzenie
Indukcja matematyczna - istota i wykorzystanie
Dodawanie i mnożenie modulo n
Czy istnieją wzory na wszystkie pierwiastki wielomianu?
Pomysł Euklidesa - liczby pierwsze

Sesja 3

„Różne geometrie, różne światy”
Zajęcia warsztatowe. Powiązanie pojęć z treściami zadaniowymi.

- Jak mierzyć odległość. Własne pomysły. Geometria generowana metryką.
- Geometria Euklidesa. Geometria na okręgu i na sferze.
- Odcinki prostych i stycznych w wielokątach i okręgach.
- Zasada Dirichleta i indukcja matematyczna w zadaniach geometrycznych.
- Algebra w geometrii. Metoda syntetyczna i analityczna w rozwiązywaniu problemów geometrycznych.
- Trygonometria pomaga geometrii.
- Izometrie, podobieństwa, inwersje i inne transformacje płaszczyzny i przestrzeni.
- Szczypta geometrii topologicznej. Figury podobne topologicznie.

Sesja 4

„Życie to statystyka i probabilistyka”
Zajęcia warsztatowe. Ilustracja pojęć treściami zadaniowymi.

- Typowe problemy statystyczne, kombinatoryczne i probabilistyczne wokół nas. Rozwiązywanie zdroworozsądkowe.
- Podstawowe narzędzia kombinatoryczne w działaniu (reguły kombinatoryczne, dwumian Newtona, tr. Pascala).
- Elementy statystyki opisowej.
- Ciekawe problemy rekurencyjne i sumacyjne.

- Kombinatoryka w służbie probabilistyki.
- Rozwiązywanie problemów kombinatorycznych i probabilistycznych z różnych dziedzin.
- Mecz matematyczny uczestników sesji.

Sesja 5

„Matematyka narzędziem profesjonalistów”

Zajęcia warsztatowe. Rozwiązywanie zadań i problemów z różnych dziedzin aktywności człowieka.

- Matematyka architekta, fotografa i malarza (perspektywa, rzuty, złoty podział, ornamenty, fraktale).
- Matematyka konstruktora, mechanika i inżyniera (przekroje, konstrukcje geometryczne, pomiary, skale).
- Matematyka muzyka i akustyka (skale logarytmiczne, składanie drgań sinusoidalnych, matematyka na pięciolinii).
- Matematyka geodety (mierzenie odległości i wysokości w terenie, wykorzystanie tw. Talesa i związków trygonometrycznych w trójkącie).
- Matematyka informatyka (algorytmy, ciąg Fibonacciego, liczby losowe, kryptografia, haszowanie).
- Matematyka przedsiębiorcy i bankowca (kapitał, procent składany, cena, zysk, podatek).
- Matematyka biologa (prawa chaosu, życie populacji).
- Matematyka astronoma (linie na płaszczyźnie i w przestrzeni, ewoluty, ewolwenty, cykloidy, epicykloidy, hipocykloidy, spirale i ślimaki, krzywe stożkowe).
- Matematyka socjologa i polityka (statystyka opisowa).
- Zajęcia praktyczne w terenie.

Sesja 6

„Informatyka wspomaga matematykę”

Zajęcia warsztatowe z wykorzystaniem komputerów.

- Praca z tablicą interaktywną i multimediami. Matematyzacja świata realnego.
- Programy wspomagające matematyka (WolframAlpha, Maple, MATLAB, Matematica, GeoGebra itp.).
- Wykorzystanie matematycznych zasobów Internetu.
- Kolorowanie, tesalacje płaszczyzny, mozaiki, fraktale.
- Interaktywne problemy, zagadki i zadania logiczne.
- Ciekawe krzywe i płaszczyzny w różnych układach współrzędnych.
- Wyznaczanie miejsc geometrycznych punktów zadanych różnymi warunkami.
- Rozwiązywanie niebanalnych problemów matematycznych z użyciem programów komputerowych.

6. Procedury osiągania celów

Nie jest możliwe wskazanie uniwersalnych, najbardziej skutecznych zabiegów dydaktycznych pozwalających w każdych realiach osiągnąć oczekiwane rezultaty. Na wynik działań edukacyjnych wpływa bardzo wiele czynników – zarówno zależnych, jak i niezależnych od nauczyciela. Można jedynie pokusić się o wskazanie kierunków wspomagających proces nauczania – uczenia się, które sukces dydaktyczny uczynią bardziej prawdopodobny. Do nauczyciela zaś należy decyzja, jak zadziałać w danym momencie, wobec konkretnej grupy uczniów. Takimi drogowskazami są:

- *Stosowanie metod indukujących aktywność i samodzielność poznawczą uczniów*

Aktywność intelektualna i samodzielność poznawcza to dwa główne czynniki wspomagające asymilację wiedzy. Każda umiejętność samodzielnie nabyta podczas wykonywania konkretnej czynności (fizycznej lub umysłowej) jest szybciej i w bardziej naturalny sposób włączana do zasobów intelektualnych. Dlatego tak wartościowe są wszystkie metody dydaktyczne odwołujące się do działania ucznia. Materiał zawarty w tym programie stwarza wiele okazji do budowania takich sytuacji dydaktycznych.

- *Rozwiązywanie problemów matematycznych i zadań*

Wiedza matematyczna to w głównej mierze umiejętność zachowania się wobec problemu. Wszelkie czynności eksploracyjne, procesy kojarzenia, dochodzenia do uogólnień, konkluzji, dostrzeganie alternatywnych dróg towarzyszące rozwiązywaniu problemów, to elementy niezmiernie istotne w ogólnym wykształceniu, a zarazem swoiste dla matematyki, więc to ona wśród przedmiotów szkolnych jest najbardziej predestynowana do ich kształcenia. Stąd ogromna rola dobrze skonstruowanych, rozwijających zadań.

- *Stosowanie grupowych form pracy lekcyjnej i pozalekcyjnej*

Inną, równie istotną sprawnością podkreślaną przez podstawę programową jest umiejętność pracy zespołowej. Grupowe rozwiązywanie problemów jest symulacją sytuacji, w jakich w przyszłości znajdą się uczestnicy zajęć podejmując pracę zawodową, czy funkcjonując w różnych grupach społecznych. Dlatego niezmiernie ważną jest taka organizacja zajęć, aby wspomagać procesy socjalizacyjne.

- *Ukazywanie praktycznych zastosowań poznanej wiedzy.*

Istotną rolę w każdym kształceniu, a w matematycznym szczególnie odgrywa motywacja. Nie wszyscy uczniowie gimnazjum mają już tak ukształtowany system wartości, że zdobywanie wiedzy jest wartością samą w sobie. Ważną funkcją nauczyciela jest więc wzbudzanie motywacji poprzez pokazywanie walorów nabywanych kompetencji. Jest on w działaniu tym bardziej wiarygodny, im bliżej praktycznych zastosowań jest dana umiejętność.

Każdy dzień zajęć, każdej z sesji, kończy się podsumowaniem oraz dyskusją z uczestnikami i ewaluacją. Ponadto każdy z uczniów może korzystać co miesiąc z 1 godziny konsultacji udzielanych przez 4 tutorów (po 1 na 10 uczniów), specjalistów matematyki lub psychologów, którzy spotykają się on-line z uczniami, a w zależności od potrzeb również z ich rodzicami i nauczycielami.

Ponadto przygotowując realizację zajęć należy wykorzystać wytyczne dotyczące metod pracy z uczniami zawarte w rozdziale *Wskazówki do pracy dla członków zespołów przedmiotowych* będącego częścią *Innowacyjnego programu wsparcia psychologiczno-pedagogicznego uczniów uzdolnionych, ich rodziców i nauczycieli.* Przyjęcie takiego modelu pracy pozwoli zrealizować wszystkie cele szczegółowe i wychowawcze programu. Przy czym poszczególne cele wychowawcze zostaną osiągnięte nie poprzez pojedyncze techniki pracy z uczniem czy realizację poszczególnych tematów, ale są efektem udziału ucznia w całym programie wsparcia. Realizacji celów wychowawczych zorientowanych na kształcenie kompetencji społecznych takich jak umiejętność prowadzenia merytorycznej dyskusji i przyjętych sposobów przekazywania i obrony własnych przekonań, umiejętność trafnej, racjonalnej oceny swojej osoby, budowania poczucia własnej wartości i akceptacji siebie w tym umiejętność przyjmowania krytyki, ocen i pochwał, rozwijanie umiejętności radzenia sobie z porażką, umiejętność współpracy w zespole i kultury dyskusji w tym umiejętność prowadzenia sporu sprzyjają zwłaszcza zaplanowane metody interaktywne, oparte na dyskusji.

Integralną częścią pracy z uczniami podczas sesji jest również udział w aktywnościach kulturalnych, w tym wizyty w instytucjach kultury wysokiej (filharmonia, teatr, opera), które stanowią dopełnienie działań dydaktycznych i stymulują szeroki rozwój społeczno-kulturalny uczestników programu- w myśl przyjętych założeń holistycznego rozwoju i zgodnie z wytycznymi zawartymi w *Innowacyjnym programie wsparcia psychologiczno–pedagogicznego uczniów uzdolnionych, ich rodziców i nauczycieli*. Włączenie tego typu działań wzmocni procesy osiągania celów edukacyjnych i wychowawczych.

6.1. Preferowana metoda nauczania

Zajęcia w sesjach stacjonarnych o zróżnicowanej formie – z wykorzystaniem metody projektu, dyskusji, grupowego rozwiązywania problemu itp.

Ponadto każdy z uczniów może korzystać co miesiąc z 1 godziny konsultacji udzielanych przez 28 tutorów (po 1 na 10 uczniów), specjalistów danego przedmiotu lub psychologów, którzy spotykają się on-line z uczniami, a w zależności od potrzeb również z ich rodzicami i nauczycielami.

6.2. Sposoby i techniki pracy

Podczas sesji stosowane Sesyjny system nauki wspierany i uzupełniany jest e-learningiem wykorzystującym platformę Moodle, w szczególności do publikowania i komentowania zagadnień oraz materiałów omawianych na sesjach, zamieszczania dodatkowych zadań realizowanych przez uczniów pomiędzy sesjami, udzielania porad i wyjaśnień przez prowadzących poszczególne sesje.

Przykładowe scenariusze zajęć

6.2.1. Konkurs zadań diagramowych (Grupy I i II, sesja I)

Na początku prowadzący wyjaśnia zasady każdego z typów zadań. Następnie należy wspólnie rozwiązać przynajmniej po jednym zadaniu z każdego typu. W zależności od kondycji grupy można przeprowadzić konkurs indywidualnie, w parach lub w zespołach 3-4 osobowych.

Sudoku:

				6	4
			2	3	
			5		
		1			
	4	6			
2	1				

	6	3	1	2	
	2			6	
	5			1	
	3	6	2	4	

6	4	1			
	6		2		
		5		3	
			5	1	4

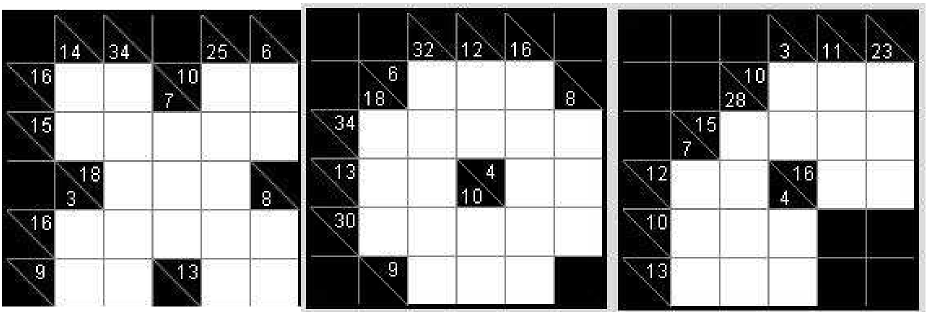
Wieżowce:

	2		1	2		
3						3
4						
4						
						3
	2	1	5		4	

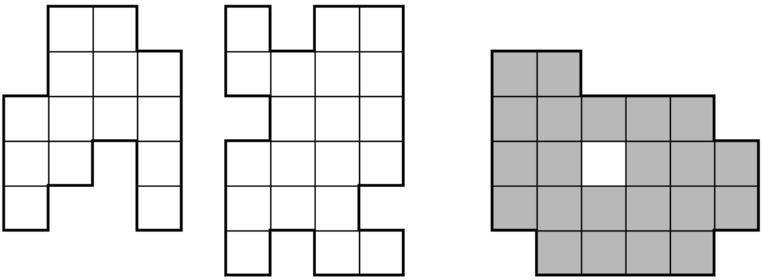
	4	1	2	2	3	2	
2							2
3							4
3							2
4							3
2							1
1							4
	1	3	5	2	4	2	

	5	4				
						1
2						4
		2				

Kakuro:



Podział na dwie identyczne części (mogą być odbicia lustrzane):



6.2.2. Wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia (Grupa I, sesja II)

Zadanie 1. Sprawdź prawdziwość poniższych wzorów skróconego mnożenia:

a/ $(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$,
b/ $(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$,
c/ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
d/ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
e/ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
f/ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
g/ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$,
h/ $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$,
i/ $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$,
j/ $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$,

Zadanie 2. Odgadnij wzory:
a/ $a^n - b^n = (a - b) \cdot \ldots$
b/ $a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a + b) \cdot \ldots$

Zadanie 3. Przekształć wyrażenie i przedstaw je w najprostszej postaci:
a/ $(a - b)^2 - (a + b)^2$,
b/ $(a - b)^3 - (a + b)^3$,
c/ $\dfrac{x}{x + y} - \dfrac{y(y - x)}{x + y}$,
d/ $\dfrac{(3a^2 - ab) \cdot (3a - b)}{9a^2 - 6ab + b}$,
e/ $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 1} - \dfrac{-3 - 3x}{x^2 + 2x + 1}$

Zadanie 4. Skróć ułamek:

$$\frac{x - y}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} .$$

Zadanie 5. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $\dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{2}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 6. Udowodnij graficznie wzory na kwadrat i sześcian sumy.

Zadanie 7. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
Zadanie 8. Wykaż, że dla każdej liczby pierwszej $p > 5$ liczba $p^4 - 1$ jest podzielna przez 240.

Zadanie 9. Wiadomo, że $a + \frac{1}{a} = 3$. Oblicz:
a/ $a^2 + \frac{1}{a^2}$, b/ $a^5 + \frac{1}{a^5}$, c/ $a^2 - \frac{1}{a^2}$.

6.2.3. Równania z zaokrągleniem (Grupa I, sesja I)

1. Zaznacz kropkami na osi liczbowej liczby: 0,3, 2,8, 3,5, $4\frac{2}{5}$, $\sqrt{50}$.
Dla każdej z tych liczb zaznacz krzyżykiem najbliższą jej liczbę całkowitą.

2. Zaokrąglij
a/ do części dziesiątych: 0,899, 0,988, 0,998
b/ do części setnych: 12,90909, 12,090909, 12,09999
c/ do części tysięcznych: 59,8899, 59,8999, 59,9999

3. Zaznacz na osi liczbowej wszystkie liczby, których zaokrąglenie do części dziesiątych jest równe 0,7.

4. a/ Zaokrąglij liczbę 0,421 do części setnych. Podaj liczbę mniejszą od niej, ale mającą takie samo zaokrąglenie do części setnych.
b/ Zaokrąglij liczbę 0,7999 do części dziesiątych. Podaj liczbę większą od niej, ale mającą takie samo zaokrąglenie do części dziesiątych.

5. Podaj co najmniej 6 różnych liczb, których zaokrąglenie do jedności jest równe 9.

<u>Oznaczmy przez)x(zaokrąglenie liczby x do jedności.</u>

6. Sporządź wykres funkcji $f(x)$ = $)x($ dla x ³ 0.

Dla każdego x ³ 0 zachodzą równości: $)x($ = $\left[x+\frac{1}{2} \right]$,

$)x(- \frac{1}{2}$ £ x < $)x(+ \frac{1}{2}$

7. Rozwiąż równania: a/ $)x(= 3$, b/ $)x(= 0$, c/ $)x(= \frac{1}{3}$,
d/ $8 \cdot)x(+ 14 = 54$.

8. Rozwiąż równania: a/ $)2x(= 5$, b/ $)20x(= 5$, c/ $)x + 4(= 6$,
d/ $)5 - x(= 1$, e/ $)8 - x(= 0$, f/ $)2x - 7(= 4$

9. Rozwiąż równania: a/ $)\frac{1}{x}($ = 4, b/ $)x2(= 1$.

<u>Oznaczmy przez]x[zaokrąglenie liczby x do pełnych setek.</u>

10. Rozwiąż równania: a/ $]x[= 800$, b/ $]x[= 1000$, c/ $]x[= 40$, d/ $]x[= 0$,
e/ $4 \cdot]x[+ 44 = 4444$

11. Rozwiąż równania: a/ $\left] \frac{1}{2}x \right[$ = 80, b/ $]100x[= 100$

12. Rozwiąż równania: a/ $]x[= x$, b/ $]x[=)x($

13. Rozwiąż równanie $]x2 - 26[= 600$

<u>Oznaczmy przez }x{ zaokrąglenie liczby x do części setnych.</u>

14. Rozwiąż równania: a/$\}x\{ = 0{,}08$, b/ $\}x\{ = 0{,}10$, c/ $\}x\{ = 0{,}001$,
d/ $\}x\{ = 0$, e/ $9 \cdot \}x\{ + 0{,}099 = 0{,}999$

15. Rozwiąż równanie $\left\} \frac{1}{5}x \right\{$ = 5,05

16. Rozwiąż równania: a/ $\}x\{ = x$, b/ $\}x\{ =)x($, c/ $\}x\{ =]x[$

17. Rozwiąż równanie $\}\sqrt{x}\{ = 0{,}04$

6.2.4. Równania kwadratowe (Grupa I, Sesja II)

Zadanie 1. Rozwiąż równania;
a/ $x^2 - 4 = 0$,
b/ $x^2 + 9 = 0$,
c/ $x^2 - 5x = 0$,
d/ $x^2 + 6x = 0$,

Zadanie 2. Rozwiąż równanie:
$(2x - 4)^2 = 7$

Zadanie 3. Odgadnij rozwiązania równania:
$x^2 - 6x + 5$

Zadanie 4. Znajdź wymierne rozwiązania równań:
a/ $x^2 - 13x + 5 = 0$,
b/ $2x^2 - 7x + 5 = 0$,
c/ $7x^2 - x + 3 = 0$,

Zadanie 5. Rozwiąż równania dopełniając do kwadratu:
a/ $x^2 - 4x + 3 = 0$,
b/ $x^2 - 4x + 2 = 0$,
c/ $x^2 + 6x + 3 = 0$,
d/ $x^2 - 7x + 3 = 0$

Zadanie 6. Rozwiąż równania:
a/ $x^4 - 4x^2 - 3 = 0$,
b/ $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$,
c/ $x^4 + 2x^2 = 24$.

6.2.5. Różne oblicza Twierdzenia Pitagorasa (Grupa I, Sesja III)

Twierdzenie. Wszystkie trójkąty pitagorejskie pierwotne (x, y, z) , w których jest liczbą parzystą, otrzymuje się ze wzorów:
$x = kl$, $y = \frac{k^2 - l^2}{2}$, $z = \frac{k^2 - l^2}{2}$, gdzie $k>l$, biorąc za k, l wszystkie pary liczb naturalnych nieparzystych względnie pierwszych. Każdy trójkąt pitagorejski pierwotny, gdzie jest liczbą parzystą otrzymuje się w ten sposób tylko jeden raz.

Zadanie 1. Uzasadnij, że jeśli trójkąt (x, y, z) jest pierwotny, to liczby x i y nie mogą być jednocześnie nieparzyste.

Zadanie 2. Ile jest wszystkich trójkątów pitagorejskich, których boki są mniejsze od 100?

Zadanie 3. Znajdź wszystkie trójkąty pitagorejskie, w których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie trójkąty pitagorejskie, w których dowolne dwa boki są liczbami naturalnymi.

Zadanie 5. Mucha spaceruje po powierzchni sześcianu o krawędzi 10 cm. Jaka jest długość najkrótszej drogi, którą może przejść między dwoma przeciwległymi wierzchołkami?

Zadanie 6. Ile jest różnych trójkątów prostokątnych mających boki o długościach całkowitych i obwód równy 2011?

Zadanie 7. W kwadrat o boku długości 1 cm wpisano ośmiokąt foremny. Jaka jest długość boku tego ośmiokąta?

Zadanie 8. [Sprawdzian uzdolnień matematycznych do klas uniwersyteckich, XIV LO Wrocław, 2009r] Bok prostokąta ma długość 16 cm, a przekątna 34 cm. Przekątna podzieliła prostokąt na dwa trójkąty. W każdy z nich wpisano koło. Oblicz odległość między środkami tych kół.

Zadanie 9. [Sam Lloyd, 1800r] Wyznacz pole trójkątnego jeziora do którego przylegają kwadratowe działki o polach 370 akrów, 116 akrów i 74 akry. Ciekawostka: Akr to jednostka miary powierzchni używana w krajach anglosaskich. Był to obszar, który mógł zostać zaorany przez pług zaprzęgnięty w woły w ciągu jednego dnia.

6.2.6. Paradoksy probabilistyczne (Grupa II, Sesja IV)

Zadanie 1. (paradoks de Méré)
Rzucamy trzema kostkami do gry. Rozważmy zdarzenia: A-suma oczek wynosi 11 oraz B-suma oczek wynosi 12. Zauważmy, że zarówno 11 jak i 12 możemy dostać na sześć sposobów (rozpisz jakie to możliwości poszczególnych wyników). Dlaczego więc wykonując dużo powtórzeń 11 wypada częściej (może spróbuj sprawdzić to doświadczalnie lub przy pomocy komputera)?

Wskazówka. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A i B zakładając, że kostki są rozróżnialne (w tym przypadku kolejność wyników ma znaczenie), a także przyjmując, że są takie same.

Zadanie 2. (paradoks Bertranda3)

Dany jest okrąg o promieniu 1. Jaka jest szansa, że losowo wybrana cięciwa AB będzie dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

Uwaga. Na tak postawione pytanie nie można odpowiedzieć w sposób jedno-znaczny. Z treści zadania nie wynika jaką przestrzeń zdarzeń elementarnych rozważamy, więc słowo „losowo" znaczy tu tyle co nic:).

Zadanie 3. (losowe liczby naturalne)

Franek i Janek grają w następującą grę: maszyna losująca losuje pary sąsiednich liczb naturalnych i każdy z graczy otrzymuje jedną z nich. Zasada jest taka, że każdy zna liczbę przeciwnika, lecz nie zna swojej. Gracz z mniejszą liczbą płaci drugiemu tyle złotych, ile wynosi przypisana mu liczba. Każdy z uczestników może w dowolnym momencie poprosić o ponowne wylosowanie pary liczb. Jednak okazuje się, że żaden z graczy nie korzysta z tego prawa-dlaczego?

Obydwoje rozumują tak: „Gdy widzę, że przeciwnik ma liczbę k, to ja mam k - 1 bądź k + 1. Obydwie te liczby są jednakowo prawdopodobne. Zatem jeśli ja wygram, to zyskuję k złotych, a gdy przegram, tracę k-1. Ostatecznie średnio zawsze wygrywam 50 groszy". Każdy z graczy rozumuje tak samo. Czy to oznacza, że w tej grze nikt nie przegra?

Wskazówka. Co by było gdyby każda liczba naturalna była losowana z takim samym prawdopodobieństwem? Czy w ogóle jest to możliwe?

Zadanie 4. („Idź na całość!")

Trwa teleturniej. Są trzy bramki do wyboru i tylko w jednej z nich jest nagroda. Wybierasz losowo jedną z nich. Wtedy prowadzący teleturniej (on wie gdzie jest nagroda) odsłania jedną z dwóch pozostałych bramek, która okazuje się być pusta. Gospodarz pyta Cię więc, czy pozostajesz przy swoim wyborze czy zmieniasz bramkę na pozostałą?

Wskazówka. Analizując otrzymany schemat oblicz jakie jest prawdopodobieństwo wygranej gdy nie zmienimy bramki, a także gdy dokonamy zmiany.

Zadanie 5. (dylemat więźnia)

W więzieniu szykuje się ułaskawienie jednego z trzech więźniów: A, B lub C.

Więzień A ma wśród klawiszy swoją „wtyczkę", która wie kto zostanie zwolniony. Skazaniec boi się zapytać go o siebie, więc pyta który z więźniów B, C ma zostać w więzieniu. Oczywiście przed zapytaniem strażnika A ocenia swoją szanse na wyjście jako 1/3. Jeśli strażnik powie mu, że zostaje np. C, wtedy jego szanse rosną do 1/2 (bo zostanie zwolniony on-A lub B). Czy na pewno jego szanse wzrastają aż do 50%?

Wskazówka. Zastanów się czy informacja otrzymana od strażnika zmienia coś z punktu widzenia więźnia A.

6.2.7. Seminarium olimpijskie - równania funkcyjne (Grupa II, Sesja 5)

Wnioski z wdrożenia. Warto to zagadnienie realizować podczas 4 godzin lekcyjnych.

Zadanie 1. Niech $f(x+7) = x^2 - 5x + 2$. Znajdź $f(x)$.
Zadanie 2. Niech $\frac{f(x)}{3+f(x)} = \frac{4+x^2}{x^2}$. Znajdź $f(x)$.
Zadanie 3. Niech $f(\ln x) = x^2 + x + 1$ dla $x > 0$. Znajdź $f(x)$.
Zadanie 4. Niech $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 1 + x$. Znajdź $f(x)$.
Zadanie 5. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ spełnione jest równanie

$$2f(x) + f(1-x) = x^2.$$

Zadanie 6. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

Zadanie 7. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x)f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

Zadanie 8. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2.$$

Zadanie 9. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x)f(y).$$

Zadanie 10. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

Zadanie 11. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

Zadanie 12. Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2-y^2).$$

Wskazówka: wprowadź nowe zmienne $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$.

****Zadanie 13.** Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające trzy poniższe warunki:

(1) $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x+1) = f(x) + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} f(x)$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.2.8. Ciekawe krzywe (Grupa II, Sesja VI)

Zadanie 1.
Napisz jak wygląda parametryzacja odcinka $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Zadanie 2.
Pokaż, że zbiór punktów płaszczyzny (x, y) opisany równaniami

$$\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}$$

dla $t \in [0, 2\pi]$ jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu R. Czy ten sam okrąg można sparametryzować w inny sposób?
Zadanie 3.
Jak sparametryzować okrąg o środku w punkcie (a, b)?
Zadanie 4.
Napisz równanie parametryczne elipsy o środku $(0, 0)$ i półosiach a, b.
Zadanie 5.
Pokaż, że dla $y \in [0, 2a]$ cykloida spełnia równanie

$$x = a \arccos(1 - \frac{y}{a}) - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Zadanie 6.
Dowiedz się z internetu co to jest brachistochrona.

Zadanie 7.
Pokaż, że liść Kartezjusza opisany jest równaniem

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Sprawdź, że jest on symetryczny względem prostej $y = x$ oraz ma asymptotę o równaniu $y = -x - a$.

Zadanie 8.
Rozważmy asteroidę $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Pokaż, że ma ona parametryzację

$$\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}$$

dla $0 \leq t \leq 2\pi$. W tym celu rozważ wielkości $(x/a)^{1/3}$ i $(y/a)^{1/3}$.

Zadanie 9.
Napisz równanie okręgu $K_R(a, b)$ we współrzędnych biegunowych (r, ϕ).

Zadanie 10.
Jak wygląda równanie spirali Archimedesa we współrzędnych biegunowych (r, ϕ)?

Zadanie 11.
Przechodząc do współrzędnych prostokątnych pokaż, że lemniskata Bernoulliego $r^2 = 2a^2\cos(2\phi)$ spełnia równanie

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

7. Warunki realizacji programu

Program zakłada, że zajęcia będą odbywały się w sześciu 40 godzinnych sesjach stacjonarnych, rozłożonych na 2 lata szkolne. W związku z tym uczniowie zakwalifikowani do udziału z zajęciach, a uczęszczający do klasy VI szkoły podstawowej oraz klasy III gimnazjum w czasie trwania działań wsparcia zmieniają etap edukacyjny na wyższy.

Forma sesji stacjonarnych wiąże się z koniecznością zapewnienia dla wszystkich uczniów zakwaterowania. Należy umożliwić zamieszkanie ze wszystkimi uczestnikami także uczniom zamieszkującym w miejscowości, w której prowadzone są zajęcia. Wszyscy uczniowie powinni zostać objęci całodobowym wyżywieniem oraz mieć dostęp do sali gimnastycznej lub basenu.

Integralną częścią zajęć są warsztaty rozwojowe z psychologami i pedagoga-mi oraz wyjścia kulturalne, dlatego niezbędne jest zapewnienie opieki wychowawców przed i po zajęciach merytorycznych – także w nocy.

Uczniowie powinni być kwalifikowani do poszczególnych grup wiekowych na podstawie wyników procesu rekrutacyjnego.

7.1. Odbiorcy programu

Uczniowie ponadprzeciętnie uzdolnieni ze szkoły podstawowej (klas V i VI), uczniowie gimnazjum (klas I – III) oraz uczniowie szkół ponadgimnazjalnych (klas I i II) podzieleni na dwie podgrupy:

- Grupa I - Uczniowie klas V i VI szkoły podstawowej oraz klas I i II gimnazjum.
- Grupa II - Uczniowie klasy III gimnazjum oraz klasy I i II szkoły ponadgimnazjalnej.

Zastrzeżenia może budzić fakt, że w młodszej grupie rozpiętość wiekowa wynosi aż cztery roczniki. Należy jednak pamiętać, że program jest adresowany do uczniów uzdolnionych, którzy dość szybko potrafią nadrobić ewentualne braki. Dlatego należy zwrócić szczególną uwagę na rekrutowanie najmłodszych uczestników projektu. Muszą to być uczniowie szczególnie uzdolnieni, dla których udział w projekcie to wielka nobilitacja. Ze strony prowadzącego konieczne jest wykazanie szczególnej wrażliwości na tą różnorodność wiekową odbiorców, aby umożliwić najmłodszym uczniom podążanie za treściami.

Dopuszcza się łączenie grup na pojedynczych wykładach dotyczących szczególnie tematyki popularyzującej matematykę, gdzie różnice wiekowe nie są tak istotne, a dużo większe znaczenie ma umiejętne zaprezentowanie tematu przez nauczyciela/wykładowcę.

7.2. Proponowany podział godzin

6 sesji po 40 godzin realizowanych przez 5-6 dni każda. Każda z 6 sesji winna obejmować po 5h zajęć doświadczalnych realizowanych w laboratoriach dolnośląskich uczelni wyższych.

Podczas każdej sesji przedmiotowej należy uwzględnić od 2 do 4 godzin warsztatów rozwojowych z psychologami i/lub pedagogami realizowanych w oparciu o *Innowacyjny program wsparcia psychologiczno-pedagogicznego uczniów uzdolnionych, ich rodziców i nauczycieli*. Wymiar i tematykę tych warsztatów rekomenduje zespół realizujący program na podstawie bieżącej ewaluacji postępów i potrzeb każdej grupy uczniowskiej.

7.3. Liczebność grupy

Grupa 40 uczniów – 20 uczniów w każdej z dwóch podgrup – I podgrupa uczniowie klas V i VI szkoły podstawowej oraz klas I i II gimnazjum, II podgrupa uczniowie klasy III gimnazjum oraz klas I i II szkoły ponadgimnazjalnej.

Uczniowie kwalifikowani do poszczególnych grup na podstawie własnych deklaracji oraz oceny ich osiągnięć w danej dziedzinie dokonanej przez Zespoły Przedmiotowe.

7.4. Rekrutacja uczestników

Nad przebiegiem procesu rekrutacji powinna czuwać komisja rekrutacyjnej, w skład której winne wchodzić 4 osoby – przedstawiciel organizatora zajęć, osoba odpowiedzialna za aspekty merytoryczne (matematyk), psycholog i pedagog. Warunkiem koniecznym jest, by psycholog wchodzący w skład zespołu posiadał doświadczenie w pracy z uzdolnioną młodzieżą, a wskazane jest, by takim doświadczeniem legitymowała się większość zespołu.

Proces rekrutacji powinien obejmować kilka działań:

- zgłoszenie kandydatury przez ucznia w formie listu motywacyjnego;
- przesłanie opinii nauczyciela dotyczącej kandydata;
- przesłanie zgody rodziców na uczestnictwo dziecka w zajęciach pozaszkolnych wraz z listem motywacyjnym;
- rozwiązanie zadania bądź zadań rekrutacyjnych przedmiotowych przygotowanych przez osobę odpowiedzialną za merytoryczną stronę zajęć wsparcia, najlepiej specjalistę w pracy z młodzieżą uzdolnioną przedmiotowo, które pozwoliłby na identyfikację uzdolnień i predyspozycji; wskazane jest by rozwiązanie zadania pozwoliło zróżnicować kandydatów, a jego rozwiązanie nie mogło być z łatwością odszukane (warunek ten spełniają otwarte zadanie autorskie); alternatywnie komisja może przeprowadzić egzamin rekrutacyjny w formie sprawdziany bądź testu;
- rozmowa rekrutacyjna prowadzona przed komisją, w składa której wchodzą psychologa oraz specjalista przedmiotowy; zadaniem komisji jest przede wszystkim identyfikacja kompetencji społecznych oraz predyspozycji do pracy w warunkach planowanego wsparcia.

W związku z wykorzystaniem podczas trwania sesji przedmiotowych technologii informacyjnych – platformy edukacyjnej – miedzy innymi do komunikacji pomiędzy beneficjentami a organizatorami i realizatorami wsparcia niezbędne jest prowadzenie procesu rekrutacji on-line.

7.5. Środki dydaktyczne

W realizacji poszczególnych sesji wykorzystywane są zarówno tradycyjne jak i nowoczesne środki dydaktyczne tj. tablica, kartki, ksero, kalkulatory, rekwizyty, łamigłówki manualne (np. kostka Rubika, tangram), projektor multimedialny z komputerem, tablica interaktywna i pomoce naukowe przygotowane przez młodzież i prowadzących zajęcia.

7.6. Kwalifikacje i kompetencje nauczyciela

Jako jeden z ważniejszych czynników w rozwoju ucznia zdolnego wskazuje się na rolę nauczyciela. Nauczyciela, o którym śmiało można powiedzieć, że ma nieprzeciętne predyspozycje. W odniesieniu do ucznia zdolnego często używa się takich określeń jak: ekspert, mistrz, mentor, guru, które już w samej nazwie eksponują predyspozycje [10]. Należy dodać, że powyższa charakterystyka dotyczy nauczycieli uczniów wybitnie zdolnych.

Zajęcia powinni prowadzić nauczyciele matematyki i pracownicy naukowi mający doświadczenie w pracy z uczniami uzdolnionymi, posiadający duży zasób wiedzy metodycznej i merytorycznej (pozapodręcznikowej), lubiący nowe wyzwania, eksperymenty, nieobawiający się zaskoczenia przez młodych adeptów sztuki matematycznej.

Idealni kandydaci, to dawni uczestnicy olimpiad, wychowawcy laureatów konkursów i olimpiad, organizatorzy konkursów, „uczelniani" popularyzatorzy matematyki - nauczyciele z powołania w szerokim tego słowa znaczeniu.

Do realizacji części zajęć powinni zostać zaproszeni specjaliści z danej dziedziny matematyki.

7.7. Literatura pomocnicza dla ucznia

Istnieje bogata literatura i wciąż powstają nowe publikacje dotyczące matematyki adresowane do uczniów uzdolnionych matematycznie.

1. Witold Bednarek „Arabeski Matematyczne", Nowik, Opole 1998
2. W. Bednarek „ Arytmetyka dla dociekliwych" Nowik, Opole 1997
3. Krzysztof Ciesielski, Zdzisław Pogoda „Diamenty matematyki" Prószyński i S-ka 1996
4. R. Courant, H. Robbins „Co to jest matematyka" PWN Warszawa 1967
5. J. H. Conway R K. Guy "Księga liczb" WNT Warszawa 1999
6. P.J. Davis R. Hersh „Świat matematyki" PWN Warszawa 1994
7. P. Jędrzejewicz «Bukiety matematyczne dla liceum i technikum», GWO, Gdańsk 2009
8. P. Jędrzejewicz «Bukiety matematyczne dla gimnazjum. Zadania przygotowujące do konkursów», GWO, Gdańsk 2009
9. Lev Kourliandtchik „Etiudy matematyczne", Oficyna Wydawnicza TUTOR Toruń 2000

10. Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński „Wykłady z kombinatoryki", Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998
11. H. Pawłowski «Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Teoria liczb, algebra i elementy analizy matematycznej», TUTOR, Toruń 2011
12. H. Pawłowski «Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Planimetria i stereometria», TUTOR, Toruń 2011
13. H. Pawłowski «Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Trygonometria i geometria», TUTOR, Toruń 2003
14. L.A. Steen „Matematyka współczesna - dwanaście esejów" WNT Warszawa 1983
15. H. Steinhaus „Kalejdoskop matematyczny" wiele wydań.
16. http://archom.ptm.org.pl/- Archiwum olimpiady matematycznej.
17. http://om.edu.pl/- Strona olimpiady matematycznej.
18. http://omg.edu.pl/- Strona olimpiady matematycznej gimnazjalistów.
19. http://www.wolframalpha.com/ - strona internetowa, stworzona przez amerykańską firmę Wolfram Alpha LLC. Formułuje ona odpowiedź na pytanie zadane w języku naturalnym, wykonuje obliczenia, przedstawia dane statystyczne, rozwiązuje równania itp

8. Oczekiwane osiągnięcia ucznia

Spodziewane osiągnięcia uczniów, to odnoszenie sukcesów na szczeblu rejonowym, wojewódzkim, ogólnopolskim w konkursach i olimpiadach matematycznych. Warto jednak pamiętać, że zachęcanie do pracy przez rywalizację ma swoje złe strony. Nie można dopuścić, aby emocje związane z potwierdzeniem własnej wyższości stały się dla uczniów ważniejsze niż sam przedmiot zmagań. Ponadto rywalizacja oddziałuje destrukcyjnie na wewnętrzną motywację zdobywania wiedzy - jako wartości samej w sobie, czyniąc wartością uzyskany wysoki rezultat (działanie motywowane zewnętrznie). Istnieje też grupa uczniów zdolnych, którzy z niechęcią startują w jakichkolwiek konkursach. U takich uczniów należy podtrzymywać ciekawość i zapał do pracy.

8.1. Wiedza

Uczestnicy projektu powinni podczas poszczególnych sesji zdobyć wiedzę dotyczącą tematyki wiodącej. Dlatego istotne jest, aby oprócz tradycyjne formy wykładu miały miejsce ćwiczenia i warsztaty.

8.2. Umiejętności

Oczekiwane osiągnięcia uczniów można ująć w pięć standardów:

A. Sprawne wykonywanie typowych czynności matematycznych

Ten standard związany jest z nabyciem biegłości w posługiwaniu się narzędziami matematycznymi na takim poziomie, aby nie stanowiły one dodatkowej trudności przy wykonywaniu czynności wyższego rzędu. Do tych typowo technicznych umiejętności zaliczyć można: obliczanie, konstruowanie, przekształcanie (arytmetyczne, algebraiczne, geometryczne), układanie i rozwiązywanie równań, nierówności oraz ich układów, sporządzanie, zestawień, diagramów, wykresów, zapisywanie zależności językiem matematyki.

B. Umiejętne prowadzenie rozumowania

Tu także pobrzmiewa techniczna strona aktywności matematycznej, choć na znacznie wyższym poziomie ogólności. Przeważa tu mianowicie całościowe spojrzenie na prowadzony proces i dobieranie pod tym kątem określonych procedur. Jest to standard bardzo już oderwany od treści i dotyczący następujących (przykładowych) umiejętności: tworzenie logicznego ciągu wniosków, matematyzacja, interpretacja rozumowania lub jego rezultatów, wykorzystywanie i przetwarzanie informacji danych w różnych formach, wyjaśnianie zauważonych prawidłowości.

C. Heurystyka matematyczna

Jest to standard, którego spełnienie świadczy o tym, że uczeń ma uzdolnienia kierunkowe. Od osób posiadających przeciętne predyspozycje matematyczne odróżnia go: bycie pomysłowym, błyskotliwym, prowadzenie prosto, oryginalnie rozumowania, dostrzeganie nowych, nie wykorzystywane dotychczas zastosowania algorytmów i metod.

D. Samodzielne rozwiązywanie problemów

Innym obszarem związanym z aktywnością matematyczną ucznia jest jego samodzielność, zwłaszcza w rozwiązywaniu problemów. Bez tego trudno mówić o pełnej realizacji celów nauczania matematyki. W czym zasadzają się umiejętności objęte tym standardem? Przede wszystkim jest to: odkrywanie struktury logicznej, stawianie i weryfikacja hipotez, dobór adekwatnych narzędzi, tworzenie i realizacja schematu rozwiązania problemu, odpowiednia interpretacja uzyskanych wyników.

E. Kreatywność matematyczna

Jest to najwyższy szczebel rozwoju matematycznego uczniów, stąd jest to również standard najtrudniejszy do osiągnięcia. Może właśnie dlatego stanowić powinien wyzwanie dla nauczyciela (dla ucznia chyba również) i motywować do znajdowania takich zabiegów dydaktycznych, które pozwoliłyby uczniom na skuteczne podjęcie prób takich działań, jak: formułowanie nowych problemów, dostrzeganie, wskazywanie analogii, dokonywanie uogólnień i klasyfikacji, tworzenie nowych struktur matematycznych, dostrzeganie modeli matematycznych w obszarach wcześniej nie eksplorowanych przez tę naukę. Jest to na poziomie uczniowskim model pracy niemalże naukowej.

8.3. Postawy

Praca nad postawą uczniów w trakcie trwania projektu powinna być skoncentrowana na twórczym i samodzielnym rozwijaniu ich zainteresowań i talentów. Samodzielność szczególnie istotna jest w grupie starszej. Wybitnie uzdolnieni matematycznie uczniowie w starszych klasach licealnych powinni osiągnąć poziom dużej samodzielności wręcz samokształcenia. Rola nauczyciela w edukacji takiego ucznia jest trudna. Powinien sprostać wysokim wymaganiom, być mentorem, mistrzem, powinien umieć wytyczyć indywidualną ścieżkę rozwoju ucznia i na bieżąco monitorować poziom jej realizacji.

Uczniowie uzdolnieni matematycznie mogą w swoim środowisku wykazywać trudności w relacjach społecznych, gdyż zwykle wybitne zdolności w jednej dziedzinie mogą oznaczać ograniczenia w pozostałych sferach. Zazwyczaj funkcjonują dwa stereotypy na temat uczniów zdolnych „prymus” i „zdolny leń”. Żadna z powyższych określeń nie gwarantuje automatycznej akceptacji rówieśników. Udział ucznia w projekcie może być częściowym rozwiązaniem tego typu problemów. Uczniowie spotkają się w dużej grupie z rówieśnikami, którzy są zdolni i zainteresowani tą samą dziedziną. Stwarza to realną możliwość (często po raz pierwszy) skonfrontowania swoich możliwości, osiągnięć, obrazu siebie na tle wspomnianej grupy odniesienia. Wśród zdolnych uzdolniony młody człowiek jest wreszcie zwyczajny – jak każdy posiada mocne i słabsze strony

Dlatego tak ważne podczas realizacji programu (oprócz treści merytorycznych) są wszelkie próby integracji uczestników, drużynowe konkursy zadaniowe, wspólne wyjścia, wieczorne gry i zabawy. Bardzo dobrym pomysłem jest zorganizowanie gry miejskiej, podczas której uczestnicy mają za zadanie w grupach «spenetrowanie» części miasta, bądź okolicy. Do pomocy można zatrudnić osobę doświadczoną w organizowaniu tego typu aktywności. Zwykle dość łatwo taką grę można «uprzedmiotowić» dodając przygotowane wcześniej przez zespół przedmiotowy lub koordynatora zadania z matematyki.

Doświadczenie pokazuje, że podczas zajęć i spotkań zawierane są wieloletnie przyjaźnie między uczniami z różnych szkół o podobnych zainteresowaniach, które prawdopodobnie nigdy nie mogłyby zaistnieć.

9. Kontrola i ocena osiągnięć uczestników

W trakcie trwania projektu analizie powinny być poddawane:

- prace, testy, ćwiczenia uczniów. Uczniowie powinni być zachęcani do uczestniczenia w konkursach sesyjnych,
- praca ucznia podczas zajęć w tym odpowiedzi ustne,
- udziały i sukcesy uczniów w konkursach szkolnych i pozaszkolnych, które miały miejsce pomiędzy poszczególnymi sesjami.

Z drugiej strony po każdej sesji powinny być przeprowadzone ankiety ewaluacyjne. Uczniowie anonimowo powinni móc wyrazić swoje wrażenia i odczucia. Pytania powinny być tak sformułowane, aby można było ocenić zainteresowanie grupy danym zagadnieniem oraz ocenę jego przydatności, poziom współpracy z wykładowcami.

9.1. Metody sprawdzania wiedzy, umiejętności i postaw

W ramach sesji oraz e-learningu powinny być organizowane konkursy wiedzy (umiejętności) dla uczniów, którzy nagradzani są również za systematyczne uczęszczanie na sesje i rzetelną pracę nad zadaniami domowymi oraz aktywność na zajęciach i koleżeńską postawę.

9.2. Przykładowe zadania kontrolne

Grupa I

A. Trzy soczki i dwa batony kosztują 9,60zł, trzy batony i dwa jogurty kosztują 8,70zł, a trzy jogurty i dwa soczki kosztują 7,20zł. Czy wystarczy 20zł, aby kupić cztery soczki, cztery batony i cztery jogurty?

B. Jeśli każdy bok kwadratu zwiększymy o 10 cm, to pole powiększy się o 600 cm2. O ile zmniejszy się pole tego kwadratu, gdy wszystkie jego boki skrócimy o 1 cm ?

C. Do pewnego roztworu cukru dosypano tyle cukru, że jego stężenie podwoiło się. Następnie dolano tyle wody, że stężenie wróciło do stanu początkowego. Co waży więcej: dosypany cukier, czy dolana woda ?

D. Liczby x, y są dodatnie i x < y. Jak zmieni się wartość wyrażenia, gdy x i y zamienimy miejscami?

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}+1}{\frac{x+y}{x-y}-1}$$

E. Czy w dziewięciokącie foremnym są dwie przekątne przecinające się pod kątem prostym? Jak to zadanie można uogólnić?

Grupa II

1. Ile prostych i ile okręgów przechodzi przez a) 1 punkt, b) 2 punkty, c) 3 punkty, 4 punkty, …, n punktów? Jaką figurę tworzą środki tych okręgów?
2. Czy jest metryką w zbiorze liczb naturalnych odległość określona następująco: d (m,n) = reszta z dzielenia m – n przez 3?

3. Matematycy określają metrykę jako niezmienniczą na translacje, jeśli po przesunięciu płaszczyzny odległość między nimi nie zmienia się. Które z poznanych metryk są niezmiennicze na translacje.
4. W którym teście łatwiej losowo udzielić prawidłowej informacji. Jeśli mamy 5 pytań z trzema odpowiedziami wielokrotnego wyboru TAK, NIE, czy mając 10 pytań z 3 odpowiedziami i jednokrotnym wyborem tylko jednej prawidłowej odpowiedzi.
5. Znajdź takie miejsce na linii bocznej boiska do piłki nożnej, aby z tego miejsca prawdopodobieństwo trafienia do bramki było największe. Zaproponuj stosowne założenia i obliczenia.
6. Oblicz współrzędne środka symetrii wykresu funkcji f(x)=x3+3x2+2x+1
7. Sprawdź, że wykres funkcji f(x)=1/x2+1/(1-x)2 ma oś symetrii. Znajdź jej równanie.
8. Czy istnieje naturalna potęga liczby 2 która w zapisie dziesiętnym posiada każdą cyfrę dokładnie 1 raz, 2 razy, itd. n razy?
9. Uzasadnij, że w dowolnym czworokącie wypukłym iloczyn sumy długości przeciwległych boków jest większy lub równy czterem polom tego czworokąta.
10. W nierównobocznym trójkącie ostrokątnym poprowadzono z kolejnych wierzchołków wysokość, dwusieczną i środkową. Sprawdź czy trójkąt utworzony przez ich przecięcie może być trójkątem równobocznym.
11. Ile istnieje sposobów ustawienia 8 wież na szachownicy tak, aby nie atakowały się wzajemnie?

9.3. Kryteria oceniania

Ocenianie powinno być tak prowadzone, aby w zrównoważony sposób były wykorzystywane najważniejsze jego funkcje, a więc:

- informacyjną,
- wspomagającą rozwój ucznia,
- motywacyjną
- stwarzającą możliwość doskonalenia procesu dydaktycznego.

Informacje niezbędne do sformułowania oceny powinny być zbierane z następujących źródeł:

- odpowiedź ustna ucznia,
- karta pracy na zajęciach,
- pisemne sprawdziany w formie:
- prac konkursowych
- testów,
- prace domowe,
- prezentacja opracowań wybranych tematów.

Wyróżniający się uczniowie powinni być nagradzani na zakończenie poszczególnych sesji choćby symbolicznie. Często im bardziej skromna nagroda tym większa radość z jej otrzymania.

10. Bibliografia

1. Christoph Drösser „Matematyka. Daj się uwieść!”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2011
2. Anna Dubiecka, Marek Gaweł: „Igraszki z matematyką”, NOWIK, Opole 1996
3. Jerzy Janowicz „Drogi i ścieżki prowadzące do rozwiązania”, Matematyka nr 1-10/2006
4. Jerzy Janowicz „Program nauczania matematyki w klasach 1-3 gimnazjum. Policzmy to razem”, Nowa Era, Warrszawa 2009, Plik w Internecie http://www.nowaera.pl/pomoce/program-nauczania/program-nauczania-policzmy-to-razem/details.html
5. Jerzy Janowicz „Standardy kształcenia uczniów zdolnych”, Matematyka nr 1/2005, s. 19-25
6. Szczepan Jeleński „Lilavati” PZWS, warszawa1968
7. Szczepan Jeleński „Śladami Pitagorasa” PZWS, Warszawa 1969
8. Marek Kordos „Wykłady z historii matematyki” WSiP, Warszawa 1994
9. Walter Lietzmann „Gdzie tkwi błąd?” PZWS, Warszawa 1958
10. Praca zbiorowa pod red. Wesławy Limont, Joanny Cieślikowskiej, Dominiki Jastrzębskiej, „Zdolni w szkole, czyli o zagrożeniach i możliwościach rozwojowych uczniów zdolnych”, ORE, Warszawa 2011
11. Henryk Pawłoski, Wojciech Tomalczyk „Zadania z matematyki dla olimpijczyków”, INDEX–BOOKS, Toruń, 1992
12. G. Polya „Jak to rozwiązać”, PWN Warszawa 1993
13. Zbigniew Romanowicz, Edward Piegat „100 zadań z błyskiem”, DWE, Wrocław 1996
14. A. Ross, C. R. B. Wright „Matematyka dyskretna” PWN Warszawa 1996
15. Roczniki czasopism: Delta, Matematyka, Matematyka w Szkole, Magazyn Miłośników Matematyki, Świat Matematyki.
16. Wacław Sierpiński „Wstęp do teorii mnogości i topologii”, Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, 1965.
17. M. Szcześniak, D. Szcześniak „Kalkulator w głowie”, Wrocław 1995

FEM
Fundacja Edukacji
Międzynarodowej