



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



---

# Program profilu matematycznego

---

Program ramowy

Programy szczegółowe

---

Opracowanie: Anna Fatz-Grupka, Mariusz Adamczak,  
Danuta Nowicka, Agnieszka-Banaszak-Piechowska

---

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktywnyuczen.byd.pl](http://www.aktywnyuczen.byd.pl), [aktywnyuczen@byd.pl](mailto:aktywnyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Opis profilu:

Program profilu matematycznego ma na celu pokazanie matematyki jako nauki prostej, naturalnej i przyjaznej.

Zajęcia w pierwszym etapie pokazują uczniom potrzebę istnienia liczb i działań i w konsekwencji uczestnicy zajęć mogą poznać ukryte w nich tajemnice. Poprzez budowanie modeli matematycznych dla opisu zależności występujących w takich naukach jak: fizyka, chemia, ekonomia czy informatyka, a także w otaczającym nas świecie, uczniowie mają okazję przyznać rację G.W. Leibnizowi, że „na całym świecie wszystko przebiega matematycznie”.

W kolejnym etapie nauki uczniowie poznają ciekawe funkcje, także takie których nie obejmuje program szkoły, a które zmieniają wizerunek matematyki. Uzasadniając własności figur geometrycznych poznają metody umiejętnego wykorzystywania przesłanek w procesie wnioskowania. Zdobywają w ten sposób nowe kompetencje, istotne nie tylko w świecie matematyki. Uczniowie zapoznają się również z konstrukcjami geometrycznymi, które rozbudzą ich wyobraźnię przestrzenną. Słuchacze zaznajomią się także z rachunkiem prawdopodobieństwa, czyli działem matematyki zajmującym się zdarzeniami losowymi.

Zajęcia w ostatnim etapie pomogą uczniom w powtórce i dobrym przygotowaniu do egzaminu maturalnego z matematyki.

Cały program da uczniom interdyscyplinarne spojrzenie na wiedzę matematyczną w aspekcie użyteczności matematyki.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



---

# Ramowy program nauczania zajęć uniwersalnych

---

## Idea programu:

Zasadniczą ideą programu jest ukazanie matematyki w procesie tworzenia, aby okazała się prosta, naturalna i przyjazna uczniom. Z tego względu program profilu stanowi odniesienie do wiedzy zdobytej w gimnazjum, a dalej sukcesywnie w liceum. Wzbogacono go odmiennym spojrzeniem na matematykę i odmiennymi metodami nauczania.

Program stawia ucznia w roli aktywnego współuczestnika procesu twórczego, przedstawiającego drogą poprawnego rozumowania własne pomysły i metody w poszukiwaniu różnych nietypowych rozwiązań problemów matematycznych. Głównym celem jest aktywizowanie ucznia, zachęcanie do wykazywania inicjatywy i realizowania własnych pomysłów oraz kształtowanie pozytywnego nastawienia do podejmowania intelektualnego wysiłku.

Nastawienie interdyscyplinarne ukazuje tematykę realizowaną w szkole z innej perspektywy. Matematyczne opisy zależności występujących w fizyce, biologii, geografii, ekonomii czy informatyce uczą jak dostrzegać zależności matematyczne w otaczającym świecie, a jednocześnie pokazują, że matematyka jest użyteczna i pomaga zrozumieć otaczającą nas rzeczywistość.

Program podkreśla szczególne znaczenie geometrii w procesie kształtowania wyobraźni oraz poprawnego wnioskowania. Odpowiednio dobrane zadania dotyczące geometrii mają na celu kształcenie umiejętności wykorzystywania założeń w procesie poprawnego wnioskowania. Wykonywanie i analizowanie konstrukcji geometrycznych ma na celu rozbudzenie wyobraźni ucznia i jest jednocześnie doskonałym ćwiczeniem koncentracji oraz precyzji w działaniu.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Zakres materiału rozplanowano na 5 semestrów. W każdym semestrze wyróżniono kilka modułów, wokół których skupiają się poszczególne tematy. Tematyka klasy pierwszej dotyczy abstrakcyjnych obiektów, które pełnią rolę narzędzi używanych w matematyce, pokazując ich praktyczny rodowód i zastosowania. Uzupełniają i porządkują wiadomości o liczbach, zbiorach liczbowych, działaniach, wyrażeniach algebraicznych, podstawowych figurach geometrii płaskiej, aby dojść do najtrudniejszego obiektu, jakim jest funkcja.

Zagadnienia klasy drugiej pomagają uporządkować wiadomości o świecie funkcji elementarnych. Każdą z omawianych funkcji nauczyciel tworzy wspólnie z uczniami jako opis zależności występujących w świecie rzeczywistym. Uczniowie poznają również podstawy geometrii analitycznej, która daje największe możliwości utrwalenia nawyku sporządzania planu rozwiązywania zadania oraz jego konsekwentnej realizacji.

W trzeciej klasie uczniowie zapoznają się z konstrukcjami geometrycznymi, które rozbudzają ich wyobraźnię przestrzenną. Poznają również rachunek prawdopodobieństwa, czyli dział matematyki zajmujący się badaniem prawidłowości, jakie rządzą zjawiskami losowymi. Zajęcia w trzeciej klasie pomogą uczniom w powtórce i dobrym przygotowaniu do egzaminu maturalnego z matematyki.

## **Związek programu nauczania z podstawą programową szkoły średniej:**

Realizacja programu polega na utrwaleniu wiedzy matematycznej, jaką uczeń posiadał w szkole, z jednoczesnym ukazaniem jej w nowym kontekście poprzez odniesienie do innych przedmiotów. Budowanie modeli matematycznych dla opisu zależności występujących np. w fizyce, geografii, biologii, ekonomii, uświadomi uczniom użyteczność i uniwersalność matematyki. Odpowiednio ukierunkowana przez nauczyciela dyskusja z uczniem ułatwi mu zrozumienie struktur matematycznych jako wyniku procesu uogólniania i abstrahowania.

## **Cele dydaktyczne:**

Cele dydaktyczne ujęte zostały odrębnie dla poszczególnych semestrów.



## Semestr II, Klasa I

**Wymiar godzin w semestrze: 24**

**Moduły tematyczne:**

- Tajemnice ukryte w liczbach i działaniach
- Geometria płaszczyzny
- Funkcje, czyli modelowe związki

**Formy zajęć:** pogadanka heurystyczna, dyskusja, warsztaty ćwiczeniowe, praca indywidualna, praca grupowa

Lp.	Jaką wiedzę, powinien posiadać uczeń?
1.	Podstawowe podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, w szczególności przedziały liczbowe wraz z interpretacją geometryczną i działaniami. Zasady wykonywania działań na liczbach wymiernych, na potęgach i pierwiastkach z zastosowaniem do szacowania i określenia błędu przybliżenia.
2.	Działania na wyrażeniach algebraicznych wraz z wzorami skróconego mnożenia i obliczaniem wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego.
3.	Metody rozwiązywania równań i nierówności liniowych także z wartością bezwzględną.
4.	Zrozumienie idei Euklidesa w porządkowaniu geometrii, roli definicji, twierdzenia, aksjomatu w geometrii, a tym samym także w matematyce.
5.	Znajomość podstawowych figur geometrycznych – punktu, prostej, odcinka, kąta, trójkąta, wielokąta, okręgu, kątów w kole.
6.	Twierdzenie Talesa i jego zastosowania w zadaniach dotyczących podziału odcinka.



7.	Sposoby obliczania pól i obwodów wielokątów także w zastosowaniach praktycznych .
8.	Twierdzenia o czworokątach wpisanych i opisanych na okręgu.
9.	Podstawowe konstrukcje geometryczne – symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, trójkąta wpisanego i opisanego na okręgu.
10.	Zrozumienie pojęcia wektora umiejscowionego i swobodnego jako matematycznego narzędzia w fizyce, jego współrzędnych i ich roli w określeniu wektora.
11.	Zrozumienie pojęcia funkcji jako abstrakcyjnego modelu opisującego zjawiska występującego w życiu codziennym, ujawniającego własności tego zjawiska.

Lp.	Jakie umiejętności i kompetencje powinien zdobyć uczeń?
1.	Prawidłowe interpretowanie tekstu matematycznego, w szczególności umiejętność analizowania wzorów funkcji.
2.	Umiejętność matematycznej notacji treści podanych w języku naturalnym.
3.	Analizowanie treści zadania, wyodrębnienie przesłanek, opracowanie planu rozwiązania zadania, prawidłowe wykorzystanie przesłanek oraz poprawne formułowanie wniosków.
4.	Prawidłowe przekształcanie wzorów i wyrażeń algebraicznych.
5.	Konstruowanie odcinków spełniających zadane warunki w aspekcie twierdzenia Talesa.
6.	Budowanie prostych modeli matematycznych opisujących zjawiska w przyrodzie i w fizyce.



## Semestr I, Klasa II

**Wymiar godzin w semestrze: 24**

**Moduły tematyczne:**

- Ciekawy świat funkcji
- Równania
- Matematyka w eksperymencie

**Formy zajęć:** pogadanka heurystyczna, dyskusja, warsztaty ćwiczeniowe, praca indywidualna, praca grupowa

Lp.	Jaką wiedzę, powinien osiąść uczeń?
1.	Znajomość funkcji liniowej (wzoru, własności, interpretacji geometrycznej) jako matematycznego modelu zależności występujących w otaczającym nas świecie, także w zastosowaniu do zadań tekstowych w aspekcie praktycznym.
2.	Znajomość funkcji kwadratowej ( wzoru ogólnego, innych postaci wzoru, własności, interpretacji geometrycznej) jako matematycznego modelu toru pocisku w rzucie poziomym i ukośnym oraz modelu drogi w ruchu jednostajnie przyspieszonym.
3.	Znajomość metod rozwiązywania równań kwadratowych w zastosowaniu do zadań tekstowych, także w odniesieniu praktycznym.
4.	Rozwiązywanie zagadnień optymalizacyjnych dotyczących funkcji kwadratowej.
5.	Działania na wielomianach – dodawanie, odejmowanie, mnożenie.



6.	Znajomość funkcji wielomianowych ze szczególnym uwzględnieniem rozkładu wielomianu na czynniki.
7.	Znajomość funkcji homograficznej postaci $f(x) = a/(x-b) + c$ .
8.	Znaczenie dziedziny funkcji i jej związek z wykresem funkcji.

Lp.	Jakie umiejętności i kompetencje powinien zdobyć uczeń?
1.	Poprawne wykonywanie działań na wielomianach – dodawanie, odejmowanie i mnożenie.
2.	Prawidłowe wydobywanie i interpretowanie treści matematycznych ukrytych w zadaniach tekstowych.
3.	Tworzenie planu rozwiązywania zadania i konsekwentna jego realizacja, w szczególności w rozwiązywaniu zadań tekstowych.
4.	Rozwiązywanie zadań tekstowych prowadzących do równań liniowych, kwadratowych oraz związanych z proporcjonalnością prostą i odwrotną także w kontekście praktycznym.
5.	Rozwiązywanie nierówności liniowych i układów nierówności liniowych wraz z zastosowaniem w zadaniach tekstowych także w kontekście praktycznym (w ekonomii).
6.	Stosowanie funkcji dla analitycznego wyrażania własności geometrycznych.
7.	Modelowanie przy pomocy funkcji prostych zjawisk występujących w fizyce, ekonomii, biologii, geografii i geometrii.
8.	Interdyscyplinarne spojrzenie na wiedzę matematyczną w aspekcie użyteczności matematyki.





## Semestr II, Klasa II

**Wymiar godzin w semestrze: 16**

**Moduły tematyczne:**

- Prosta i jej równanie
- Związki miarowe w trójkącie dowolnym
- Geometria okręgów i kół
- Ciągi a problem kapitalizacji
- Funkcje szybkiego wzrostu a funkcje powolnego wzrostu

**Formy zajęć:** pogadanka heurystyczna, dyskusja, warsztaty ćwiczeniowe, praca indywidualna, praca grupowa

Lp.	Jaką wiedzę, powinien posiadać uczeń?
1.	Elementy trygonometrii kąta ostrego i rozwartego wraz z zastosowaniami do obliczania długości nieznanych boków i kątów z odniesieniem do fizyki i geografii.
2.	Elementy geometrii analitycznej: a) równania prostej (ogólne, kierunkowe, odcinkowe) wraz z interpretacją współczynników, b) kryteria przynależności punktu do prostej, c) wzajemne położenie dwóch prostych, w szczególności kryteria równoległości i prostopadłości prostych.
3.	Elementy geometrii trójkąta w aspekcie funkcji trygonometrycznych: a) rozwiązywanie trójkątów prostokątnych,



	b) rozwiązywanie trójkątów dowolnych (twierdzenie sinusów i cosinusów), c) pole trójkąta ( różnorodność wzorów).
4.	Geometria okręgów i kół: a) długość okręgu ( sposoby wyznaczania liczby $\pi$ - metoda Kochańskiego) b) pole koła – zastosowanie w zadaniach o kontekście praktycznym.
5.	Pojęcie ciągu liczbowego, sposoby jego notacji oraz interpretacja geometryczna.
6.	Ciąg arytmetyczny i geometryczny, własności, wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu oraz ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań tekstowych.
7.	Znajomość funkcji wykładniczej jako modelu opisującego szybki wzrost lub szybki spadek wartości. Wzór, własności i wykresy dla różnych podstaw w praktycznych odniesieniach do opisu liczebności populacji, rozkładu promieniotwórczego pierwiastków i datowania wieku znalezisk archeologicznych, do opisu procesu stygnięcia wody w szklance.
8.	Znajomość pojęcia czynnika procentowego, stopy procentowej, procentu składanego, kapitalizacji ciągłej w aspekcie praktycznym.
9.	Znajomość logarytmu, działań na logarytmach i ich własności i zastosowania do skalowania różnych wielkości fizycznych – skala Richtera, pomiar natężenia dźwięku w dB, skala kwasowości pH.

Lp.	Jakie umiejętności i kompetencje powinien zdobyć uczeń?
1.	Umiejętność rozwiązywania zagadnień geometrycznych w prostokątnym układzie współrzędnych.
2.	Korzystanie z funkcji trygonometrycznych w rozwiązywaniu zagadnień dotyczących związków w figurach płaskich.
3.	Umiejętność rozwiązywania zadań dotyczących problemu stałego wzrostu i spadku procentowego – stałego przyrostu płac, amortyzacji, procentu składanego.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



4.	Umiejętność skalowania różnych wielkości fizycznych – skala Richtera, pomiar natężenia dźwięku w dB, skala kwasowości pH.
----	---



## Semestr I, Klasa III

**Wymiar godzin w semestrze: 12**

**Moduły tematyczne:**

- W świecie niepewności
- Bryły i powierzchnie
- Repetytorium maturzysty

**Formy zajęć:** pogadanka heurystyczna, dyskusja, warsztaty ćwiczeniowe, praca indywidualna, praca grupowa

Lp.	Jaką wiedzę, powinien osiąść uczeń?
1.	Znajomość podstaw kombinatoryki – zrozumienie istoty i metod obliczania permutacji, wariacji, kombinacji oraz stosowanie praktyczne w zadaniach.
2.	Pojęcie przestrzeni zdarzeń elementarnych danego doświadczenia oraz sumy, iloczynu, różnicy zdarzeń.
3.	Pojęcie prawdopodobieństwa w ujęciu klasycznym, własności prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństwa metodą klasyczną oraz metodą drzewek.
4.	Wielościąny – graniastosłupy i ostrosłupy, w szczególności sześciąt i czworokątów. Wzajemne położenie krawędzi wobec ścian. Obliczanie pola powierzchni i objętości.
5.	Bryły obrotowe – walec, stożek i kula, jako powierzchnie powstałe przez obrót prostokąta, trójkąta i okręgu. Zastosowanie ich własności do obliczania pól powierzchni i objętości.



6.	Repetytorium maturzysty
----	-------------------------

Lp.	Jakie umiejętności i kompetencje powinien zdobyć uczeń?
1.	Zrozumienie roli zjawisk losowych w życiu codziennym.
2.	Umiejętność tworzenia prostych modeli rachunku prawdopodobieństwa do badania przykładowych zjawisk losowych.
3.	Umiejętność określania wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn.
4.	Umiejętność badania zależności w bryłach.
5.	Wykorzystanie interdyscyplinarnego spojrzenia na wiedzę matematyczną w przygotowaniu do matury.
6.	Umiejętność analizowania postawionego problemu z wykorzystaniem wiedzy dotyczącej różnych obszarów tematycznych niezbędnych na maturze.
7.	Syntetyczne ujęcie i przedstawienie planu rozwiązywania zadania i konsekwentna jego realizacja, w szczególności dotycząca obszerniejszych tematycznie zagadnień maturalnych.
8.	Prawidłowe wydobywanie, interpretowanie i notacja treści matematycznych ukrytych w postawionych zagadnieniach maturalnych.
9.	Umiejętność celowego działania i prezentowanie zamierzeń i sposobów realizacji na egzaminie maturalnym i w dalszej edukacji.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Semestr II, Klasa III

---

### **Wymiar godzin w semestrze: 12**

Powtarzanie materiału z nastawieniem zaprezentowania zdobytej wiedzy i kompetencji na egzaminie maturalnym.

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktywnyuczen.byd.pl](http://www.aktywnyuczen.byd.pl), [aktywnyuczen@byd.pl](mailto:aktywnyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



---

# Program szczegółowy

---

## Semestr 1. (semestr II klasy I)

---

Systematyczne ukazywanie przez nauczyciela interdyscyplinarnych aspektów omawianych treści matematycznych wyrobi w uczniach przekonanie, że abstrakcyjne obiekty matematyki utworzono dla uogólnienia opisu badanego problemu. Uczeń przekona się, że używanie wyrażeń algebraicznych lub funkcji jest bardziej uniwersalne, a wykształcenie umiejętności postępowania się obiektami abstrakcyjnymi wyposaży go w kompetencje niezbędne, nie tylko na egzaminie maturalnym, ale także w dalszej edukacji.



## Zajęcia uniwersalne – 24h

Temat	Liczba godzin	Treści programowe	Proponowana forma realizacji
<b>Tajemnice ukryte w liczbach i działaniach (7 godzin)</b>			
<b>Dlaczego człowiek odkrył liczby?</b>	2	Usystematyzowanie wiedzy o liczbach rzeczywistych: konieczność odkrycia liczby, własności znanych zbiorów liczbowych, ich interpretacja geometryczna, oś liczbowa a uporządkowanie liczb rzeczywistych, odległość na osi liczbowej.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia utrwalające
<b>Potrafię działać nie tylko na liczbach</b>	2	Wyrażenia algebraiczne – modele związków między działaniami i liczbami. Działania na wyrażeniach algebraicznych oraz ich wartości liczbowe. Porządkowanie wiedzy o działaniach w znanych zbiorach liczbowych.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia.
<b>Równania a nierówności</b>	3	Podobieństwa i różnice między równaniem a nierównością. Budowanie modeli w otaczającym nas świecie - zadania tekstowe prowadzące do równań liniowych.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia indywidualne.
<b>Geometria płaszczyzny (10 godzin)</b>			
<b>Jak Euklides zbudował pierwszy system logiczny?</b>	1	Uporządkowanie geometrii poprzez wprowadzenie podstawowych pojęć Euklidesa – pojęć pierwotnych, aksjomatów, definicji i twierdzeń. Rola dowodów w scementowaniu systemu.	Pogadanka heurystyczna





<b>Dlaczego suma kątów w trójkącie wynosi 180°?</b>	1	Twierdzenie o kątach przy prostych równoległych przeciętych sieczną. Wyprowadzenie wzoru na sumę kątów wewnętrznych trójkąta.	Pogadanka heurystyczna, praca grupowa.
<b>Wielokąty i ich pola</b>	2	Wyprowadzanie wzorów na pola wielokątów oraz ich praktyczne zastosowania.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna .
<b>Twierdzenie Pitagorasa</b>	2	Dowód twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Zastosowanie praktyczne w zadaniach.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna
<b>Podział odcinka na równe części</b>	1	Zastosowanie praktyczne twierdzenia Talesa w zadaniach rachunkowych oraz konstrukcyjnych.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna
<b>Kąty w kole. Czworokąty wpisane i opisane na okręgu</b>	2	Twierdzenia proste i odwrotne o kątach w kole. Kryteria wpisania w okrąg i opisanie na okręgu czworokąta wraz z zadaniami.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna
<b>Prosta i okrąg</b>	1	Stosowanie cech podobieństwa trójkątów w odkrywaniu twierdzeń o prostych siecznych oraz o siecznej i stycznej.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna uczniów
<b>Funkcje czyli modelowe związki (7 godzin)</b>			
<b>Algebra w geometrii</b>	1	Prostokątny układ współrzędnych jako algebraiczna metoda określenia położenia punktu na płaszczyźnie.	Pogadanka heurystyczna, praca samodzielna uczniów
<b>Wędrujemy po płaszczyźnie</b>	1	Wektor i jego współrzędne. Długość wektora. Działania geometryczne na wektorach.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna uczniów



<b>Dlaczego człowiek stworzył funkcję?</b>	1	Funkcja – matematyczny model opisujący zależności w fizyce, ekonomii, geometrii. Wskazane użycie technologii komputerowej.	Pogadanka heurystyczna z wykorzystaniem technologii komputerowej.
<b>O czym mówią wykresy funkcji?</b>	2	Podstawowe własności funkcji – odczytywanie z wykresu. Wskazane użycie technologii komputerowej.	Praca indywidualna uczniów
<b>Tajemnice wzorów</b>	2	Uczniowie przypominają wzory na prawo Ohma lub prawo II zasady dynamiki i analizują zależności między wielkościami. Uczniowie rozważają różne wersje zmian. Podobnie analizują wzory opisujące zależności w geometrii, a następnie przekształcają je.	Pogadanka heurystyczna, praca samodzielna uczniów.



Zakres zagadnień przedstawiony w bloku zajęć specjalistycznych stanowi **propozycję** tematyczną, którą nauczyciel (w zależności od oceny potrzeb uczniów) może realizować lub zaproponować własny zestaw tematyczny.

### **Zajęcia specjalistyczne – 10 godzin**

<b>Temat</b>	<b>Liczba godzin</b>	<b>Treści programowe</b>	<b>Proponowana forma realizacji</b>
<b>Tajemnice ukryte w liczbach i działaniach ( 7 godzin)</b>			
<b>Trójkąt zbudowany z liczb a wzory skróconego mnożenia</b>	1	Konstrukcja trójkąta Pascala i jego związek z wzorami skróconego mnożenia.	Pogadanka heurystyczna, praca indywidualna uczniów
<b>Czy zawsze <math>2 + 3 = 5</math>?</b>	2	Porządkowanie wiedzy o działaniach w znanych zbiorach liczbowych, o ich hierarchii i własnościach. Działania na zbiorach, notacja i własności. Działania na zdaniach, notacja koniunkcji, alternatywy i negacji. Działania na dowolnych obiektach. Tworzymy własne działanie.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, praca grupowa
<b>Tworzymy modele w otaczającym nas świecie</b>	2	Zadania tekstowe prowadzące do równań liniowych	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Metody rozwiązywania układów równań liniowych i nierówności liniowych</b>	2	Utrwalenie umiejętności rozwiązywania układów równań liniowych: metodą podstawiania, metodą przeciwnych współczynników, metodą geometryczną.	Warsztaty ćwiczeniowe



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Geometria płaszczyzny

<b>Klasyczne konstrukcje geometryczne.</b>	1	Przypomnienie i utrwalenie wybranych konstrukcji, np. symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, stycznej do okręgu przechodzącej przez dany punkt. Rozwiązywanie prostych zadań konstrukcyjnych.	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Geometrie nieeuklidesowe.</b>	2	Omówienie roli aksjomatu Euklidesa o prostych równoległych. Pokazanie istnienia geometrii nieeuklidesowych i ich zastosowania np. w geografii.	Samodzielne prezentacje multimedialne uczniów.

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktynyuczen.byd.pl](http://www.aktynyuczen.byd.pl), [aktynyuczen@byd.pl](mailto:aktynyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia uniwersalne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Tajemnice ukryte w liczbach i działaniach</b>	
<b>Dlaczego człowiek odkrył liczby?</b>	<p>Nauczyciel omawia problem potrzeby odkrycia liczb przez człowieka – uczniowie podają powody, dla których człowiek musiał odkryć istnienie liczb. Uczniowie określają rolę liczb w życiu człowieka dawniej i dzisiaj – dawniej człowiek opisywał przy pomocy liczb stan posiadania, a człowiek współczesny numeruje także siebie i to na wiele sposobów. Nauczyciel mówi o kłopotach odkrycia zera, uczniowie przypominają znane zbiory liczbowe, ich notacje i własności – wypisują na tablicy. Poprzez odpowiedź na pytanie – czy liczby istnieją w otaczającym nas świecie – uczniowie postrzegają, że są to obiekty abstrakcyjne, które stają się narzędziem dla opisu świata rzeczywistego. Stwierdzają potrzebę ich interpretacji geometrycznej na osi liczbowej. Rozważając problem - czy każda liczba jest ułamkiem? – nauczyciel mówi o klubie pitagorejczyków i odkryciu liczb niewymiernych. Uczniowie na przykładzie liczby <math>\sqrt{2}</math> odczytują na kalkulatorze przybliżenia w postaci ułamka dziesiętnego nieskończonego, a następnie konstruują odcinek, którego długość interpretuje geometrycznie tę liczbę i omawiają znaczenie przybliżenia liczby rzeczywistej w obliczeniach. Uczniowie porządkują liczby rzeczywiste na osi liczbowej, nauczyciel omawia problem ich gęstości pokazując, że między dwiema liczbami rzeczywistymi mieści się zawsze ich średnia arytmetyczna. Uczniowie konstatują, że na prostej nie ma sąsiednich punktów. Nauczyciel omawia pojęcie odległości punktów na osi liczbowej wprowadzając pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej – wprowadzając notację alternatywy i koniunkcji. Wskazane jest rozwiązywanie prostych równań i nierówności z wartością bezwzględną dwoma sposobami – z definicji oraz korzystając z interpretacji geometrycznej.</p>
<b>Potrąfię działać nie tylko na liczbach.</b>	<p>Nauczyciel obliczając pole prostokąta lub innej figury geometrycznej pokazuje przewagę notacji literowej nad liczbową, a następnie pod jeden schemat literowy podkłada różne treści tekstowe. Uczniowie sami tworzą wyrażenia algebraiczne,</p>



	a następnie wykonują na nich działania. Nauczyciel wskazuje na przykładach rolę nawiasów.
<b>Równania a nierówności</b>	Ucniowie przypominają sposoby rozwiązywania równań i nierówności (także z wartością bezwzględną). Nauczyciel zwraca uwagę na poprawną formę zapisu rozwiązania. Uczniowie porównują prawa, według których rozwiązujemy równania z prawami dla nierówności, a następnie porównują uzyskane rozwiązania równań i nierówności. Rozwiązując zadania tekstowe nauczyciel zapisuje w tabelce treści wyrażone w języku naturalnym, a obok w notacji matematycznej. Nauczyciel wskazuje przesłanki. Uczniowie omawiają plan rozwiązywania zadania, zwracając uwagę na rolę przesłanek w rozumowaniu. Nauczyciel zwraca uwagę na poprawne udzielenie odpowiedzi. Analizując etapy rozwiązania zadania pokazują etap konstrukcji modelu matematycznego.
<b>Geometria płaszczyzny</b>	
<b>Jak Euklides zbudował pierwszy system logiczny?</b>	Po wprowadzeniu nauczyciela, uczniowie uświadamiają sobie na czym polega czynność porządkowania geometrii – rozumieją że pojęć geometrycznych nie ma w świecie rzeczywistym, że są to modele abstrakcyjne służące do opisywania świata. Uczniowie rozróżniają rolę definicji i twierdzenia, a w szczególności aksjomatu. Nauczyciel stawia problem – czy wobec stanu dzisiejszej wiedzy istnieją w makroprzestrzeni (we wszechświecie) i w mikroprzestrzeni (w mikrobiologii) punkty, odcinki i proste? Czy geometria Euklidesa wystarcza do opisu tych przestrzeni? Czy są inne geometrie? Nauczyciel wspomina o geometrii, w której pojęciami pierwotnymi są punkty, okręgi i kule.
<b>Dlaczego suma kątów w trójkącie wynosi 180°</b>	Nauczyciel omawia aksjomat Euklidesa i jego rolę w geometrii. Uczniowie konstruują prostą równoległą do danej prostej i przechodzącą przez z góry zadany punkt. Przypominają kąty powstałe przy prostych równoległych przeciętych sieczną. Formułują twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta i przeprowadzają jego dowód, wskazując przesłanki i konkluzję. Nauczyciel stawia problem trójkąta na powierzchni kuli oraz na siodle. Uczniowie stwierdzają, że suma kątów jest inna niż 180°.
<b>Wielokąty i ich pola.</b>	Ucniowie wyprowadzają wzory na pola podstawowych wielokątów, a następnie rozwiązują zadania przede wszystkim o charakterze praktycznym.  Dla każdego zadania podają szczegółowy plan rozwiązywania, wypisując przesłanki czyli tzw. „dane” i wskazując wielkości „szukane”. Uczniowie analizują problem wskazując związki między „danymi” a „szukanymi”; tłumaczą z języka naturalnego na



	język matematyki informacje o tych związkach. Nauczyciel czuwa, aby proces rozumowania był poprawny. Warto wprowadzić notację implikacji.
<b>Twierdzenie Pitagorasa</b>	Uczniowie przypominają twierdzenie Pitagorasa, przeprowadzają jeden z dowodów, może to być dowód geometryczny. Nauczyciel wprowadza pojęcie równoważności zdań i jego notację. Według uznania nauczyciel może wprowadzić ogólniejsze twierdzenie Pitagorasa o sumie pól wielokątów podobnych zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego. Warto potwierdzić rozwiązywaniem zadań ze wskazaniem momentu korzystania z twierdzenia.
<b>Podział odcinka na równe części</b>	Uczniowie stosują twierdzenie Talesa, rozwiązując zadania rachunkowe z odniesieniem praktycznym, przedstawiając plan rozwiązywania. Wykonują konstrukcję podziału odcinka na wskazane części, na przykład z podaniem proporcji.
<b>Kąty w kole</b> <b>Czworokąty wpisane i opisane na okręgu</b>	Uczniowie przypominają twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wspartych na tym samym łuku. Uzasadniają twierdzenie proste i odwrotne o trójkącie prostokątnym wpisanym w okrąg. Nauczyciel decyduje, czy wprowadzić konstrukcję „złotego podziału odcinka”.
<b>Prosta i okrąg</b>	Uczniowie wskazują możliwości wzajemnego położenia prostej i okręgu, nauczyciel wskazuje jak sformułować wnioski w postaci twierdzeń. Utrwalenie twierdzeń poprzez rozwiązywanie zadań.
<b>Funkcje czyli modelowe związki</b>	
<b>Algebra w geometrii</b>	Uczniowie przypominają wiadomości o prostokątnym układzie współrzędnych. Rysują punkty o danych współrzędnych i odwrotnie, mając punkty na płaszczyźnie odczytują ich współrzędne.
<b>Wędrujemy po płaszczyźnie</b>	Nauczyciel proponuje obserwację przemieszczania się obiektu na ekranie radaru policji. Wykonując rysunek w pewnej skali można określić zmianę położenia obiektu od punktu $P_1$ do punktu $P_2$ . Zaznaczając położenie punktów w układzie współrzędnych możemy analitycznie określić zmianę położenia obiektu od punktu $P_1$ do punktu $P_2$ . Tę zmianę przedstawiamy za pomocą wektora. Wektor jest więc modelem matematycznym zmiany położenia obiektu materialnego. Uczniowie definiują wektor jako



	<p>parę punktów, która określa trzy własności – kierunek, długość i zwrot. Uczniowie wyprowadzają wzór na długość wektora. Nauczyciel wprowadza działania geometryczne na wektorach, omawia pojęcie wektora swobodnego i jego współrzędne. Wskazane użycie technologii komputerowej.</p>
<b>Dlaczego człowiek stworzył funkcję?</b>	<p>Nauczyciel analizuje różne zależności występujące w fizyce lub ekonomii, następnie tworzy ich opis, używając symboli matematycznych. Uczniowie dochodzą do wniosku, że funkcja jest abstrakcyjnym obiektem, podobnie jak trójkąt, tylko bardziej złożonym, bo opisującym zależności między obiektami. Uczniowie podają inne przykłady funkcji oraz przypominają sposoby ich określania. Nauczyciel podaje przykłady funkcji, które można opisać wzorem, ale nie można przedstawić ich wykresu.</p>
<b>O czym mówią wykresy funkcji?</b>	<p>Nauczyciel przedstawia różne ciekawe wykresy funkcji, a uczniowie odczytują ich własności. Wskazane wykorzystanie technologii komputerowej. Wskazane ćwiczenia, na których uczniowie uzupełniają wykresy funkcji zgodnie z określonymi własnościami, w szczególności w przypadku funkcji określonej przedziałami.</p>
<b>Tajemnice wzorów</b>	<p>Uczniowie analizują wzór na pole prostokąta i odczytują jak zmieni się pole, gdy jeden z boków zwiększy się dwukrotnie. Jak zmieni się pole prostokąta, gdy jeden bok zwiększy się dwukrotnie, a drugi zmniejszy się trzykrotnie. Uczniowie rozważają różne wersje zmian. Wskazane ćwiczenia usprawniające określanie własności funkcji na podstawie jej wzoru, w szczególności określanie dziedziny funkcji i jej miejsc zerowych.</p> <p>Nauczyciel na przykładzie jednego wzoru na obliczanie pola trójkąta wyznacza zależność podstawy trójkąta od jego pola i wysokości. Uczniowie przekształcają inne wzory.</p>





## Propozycje metodyczne

### Zajęcia specjalistyczne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Tajemnice ukryte w liczbach i działaniach</b>	
<b>Trójkąt zbudowany z liczb a wzory skróconego mnożenia</b>	Nauczyciel omawia koncepcję trójkąta Pascala, uczniowie kontynuują samodzielnie kilka następnych wierszy. Nauczyciel pokazuje przydatność trójkąta Pascala i związek z wzorami skróconego mnożenia. Uczniowie w ramach ćwiczeń odczytują z trójkąta wzory na sześcian sumy i różnicy i stosują je do zadań. Nauczyciel potwierdza przewagę notacji literowej nad liczbową.
<b>Czy zawsze <math>2 + 3 = 5</math>?</b>	Nauczyciel omawia semantykę pojęcia „działanie”. Odwołuje się do wiedzy uczniów o działaniach wykonalnych w znanych zbiorach liczbowych i inicjuje dyskusję wokół własności tych działań. Uczniowie przypominają własności działań na zbiorach i ich notację. Uczniowie tworzą tabelkę z działaniami: w zbiorach liczbowych, w rachunku zbiorów oraz w rachunku zdań, omawiając ich wspólne własności. Nauczyciel określa w zbiorze liczb całkowitych nowe działanie, uczniowie badają jego własności. Uczniowie prezentują pomysły na zdefiniowanie nowego działania. Wskazane kontynuowanie tematu na konsultacjach.
<b>Tworzymy modele w otaczającym nas świecie</b>	Uczniowie rozwiązują zadania tekstowe dotyczące różnych dziedzin, transponując treści z języka naturalnego na język matematyki, wskazują przesłanki, przedstawiają plan rozwiązywania zadania, konsekwentnie realizują ten plan i formułują poprawną odpowiedź.
<b>Metody rozwiązywania układów równań liniowych i nierówności liniowych</b>	Uczniowie utrwalają rozwiązywanie układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi lub według uznania nauczyciela rozwiązują układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Nauczyciel według uznania omawia sposób geometryczny rozwiązywania układu dwóch nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Klasyczne konstrukcje geometryczne.</b>	Uczniowie przypominają sobie i utrwalają poprzez ćwiczenia podstawowe konstrukcje geometryczne. Nauczyciel zapoznaje uczniów z zasadami rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.
<b>Geometrie nieeuklidesowe.</b>	Uczniowie przygotowują samodzielnie prezentacje multimedialne o różnych geometriach.



---

# Program szczegółowy

---

## Semestr 2. (semestr I klasy II)

---

### *Zajęcia uniwersalne – 24h*

Temat	Liczba godzin	Treści programowe	Proponowana forma realizacji
<b>Ciekawy świat funkcji (16 godzin)</b>			
Równomierny wzrost i równomierny spadek	2	Funkcja liniowa i jej własności. Wykorzystanie funkcji liniowej do modelowania zjawisk w otaczającym świecie.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia z wykorzystaniem technologii komputerowej.



<b>Odkrywanie toru pocisku w rzucie poziomym</b>	2	Parabola jako wykres funkcji kwadratowej. Własności paraboli.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, pokaz animacji komputerowej.
<b>Szukamy kąpieliska o największej powierzchni</b>	2	Zastosowanie funkcji kwadratowej do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia grupowe.
<b>Funkcja kwadratowa z parametrem i jej interpretacja geometryczna</b>	2	Zależność położenia wykresu funkcji kwadratowej w układzie współrzędnych od wartości współczynników we wzorze ogólnym tej funkcji.	Pogadanka heurystyczna, warsztaty ćwiczeniowe z wykorzystaniem technologii komputerowej.
<b>Jak możemy rozwiązać równanie kwadratowe?</b>	2	Prezentacja różnych metod rozwiązywania równań kwadratowych. Analiza sytuacji problemowych prowadzących do rozwiązania równania kwadratowego – zadania tekstowe.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, praca indywidualna .
<b>Poznajemy funkcje wielomianowe</b>	2	Funkcja wielomianowa i jej własności.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja , ćwiczenia z wykorzystaniem technologii komputerowej.



<b>Matematyka w eksperymencie</b>	2	Zapisywanie zależności między wielkościami w eksperymencie przy pomocy wzoru.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja.
<b>Kłopoty z prędkościami</b>	2	Analiza sytuacji problemowych prowadzących do rozwiązywania równań wymiernych .	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, praca w grupach.
<b>Analizujemy średni koszt produkcji</b>	2	Funkcja homograficzna jako przykład funkcji opisującej zależności w ekonomii. Własności funkcji homograficznej.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia z wykorzystaniem technologii komputerowej.
<b>Elementy trygonometrii (6 godzin)</b>			
<b>Podobieństwo trójkątów podstawą trygonometrii</b>	3	Wprowadzenie definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. Podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. Rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych o zadanych wartościach funkcji trygonometrycznych.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia.
<b>Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego</b>	2	Wprowadzenie definicji funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego. Wzory redukcyjne kąta drugiej ćwiartki.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia.
<b>Tożsamość a równanie</b>	1	Rozwiązywanie tożsamości trygonometrycznych.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia.



Zakres zagadnień przedstawiony w bloku zajęć specjalistycznych stanowi **propozycję** tematyczną, którą nauczyciel (w zależności od oceny potrzeb uczniów ) może realizować lub zaproponować własny zestaw tematyczny.

Tematy modułu **Równania i nierówności** w sposób naturalny występują tutaj przemiennie z tematyką modułu **Ciekawy świat funkcji**.

### **Zajęcia specjalistyczne – 16 godzin**

<b>Temat</b>	<b>Liczba godzin</b>	<b>Treści programowe</b>	<b>Proponowana forma realizacji</b>
<b>Równania i nierówności (6 godzin), Ciekawy świat funkcji (4 godziny)</b>			
<b>Umiem rozwiązywać nierówności kwadratowe</b>	2	Nierówność kwadratowa i sposoby jej rozwiązywania. Zastosowanie nierówności kwadratowych w zadaniach problemowych.	Pogadanka heurystyczna, warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Czy potrafię działać na wielomianach?</b>	2	Działania na wielomianach, także z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia. Rozkład wielomianu na czynniki.	Warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Umiem rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe</b>	2	Metody rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych. Zastosowanie równań i nierówności wielomianowych w zadaniach problemowych.	Pogadanka heurystyczna, warsztaty ćwiczeniowe
<b>Czy mianownik ułamka musi być liczbą?</b>	3	Wyrażenia wymierne. Dziedzina wyrażeń wymiernych. Przekształcania wyrażeń wymiernych. Działania na wyrażeniach wymiernych.	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Umiem rozwiązywać równania i nierówności wymierne</b>		Metody rozwiązywania prostych równań i nierówności wymiernych.	



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Zabawy z funkcjami</b>	1	Ciekawe wykresy funkcji.	Ćwiczenia z wykorzystaniem technologii komputerowej.
---------------------------	---	--------------------------	--



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia uniwersalne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Ciekawy świat funkcji</b>	
<b>Równomierny wzrost i równomierny spadek</b>	<p>Nauczyciel z pomocą uczniów analizuje różne zależności między wielkościami w otaczającym świecie, które można opisać wzorem funkcji liniowej, np. zależność temperatury panującej w głębi Ziemi od głębokości, zużycie paliwa przez samochód jako funkcja liczby przejechanych kilometrów, funkcja zysku w prostym modelu ekonomicznym uwzględniającym koszty stałe i jednostkowe koszty zmienne firmy produkcyjnej. Uczniowie opisują zależności wzorami funkcji liniowej, podają interpretację współczynników w zapisanych wzorach oraz sporządzają wykresy uzyskanych funkcji liniowych. Przypominają własności funkcji liniowej. Przy sporządzaniu wykresów funkcji liniowych nauczyciel podkreśla rolę współczynników we wzorze tej funkcji. Wykorzystuje animacje komputerowe do pokazania zależności położenia wykresu funkcji liniowej od wartości współczynników we wzorze tej funkcji. Na zakończenie uczniowie sporządzają wykresy funkcji liniowych określonych przedziałami (można podać przykład funkcji zapasu w ekonomii lub funkcję określającą wartość podatku dochodowego) oraz funkcji liniowych z wartością bezwzględną.</p> <p>Do rysowania wykresów funkcji liniowej można zastosować dowolny program komputerowy do sporządzania wykresów funkcji (np. Graph 4.3).</p>
<b>Odkrywanie toru ruchu pocisku w rzucie poziomym</b>	<p>Nauczyciel analizuje tor ruchu pocisku w rzucie poziomym (z pominięciem oporu) prezentując symulacje komputerowe rzutów. Można wykorzystać stronę internetową <a href="http://www.dynamit.im.pwr.wroc.pl/agryz/l/fizyka/fizyka.html">www.dynamit.im.pwr.wroc.pl/agryz/l/fizyka/fizyka.html</a>. Uczniowie z pomocą nauczyciela piszą równanie toru pocisku (zależność wysokości, na której znajduje się pocisk, od czasu), które jest wzorem funkcji kwadratowej. Opisują własności paraboli.</p> <p>Można rozszerzyć temat i wprowadzić ścisłą, matematyczną definicję paraboli.</p>





<b>Szukamy prostokątnego kąpieliska o największej powierzchni</b>	<p>Nauczyciel wychodzi od praktycznego problemu optymalizacyjnego np. problemu podanego w temacie i rozwiązuje go wspólnie z uczniami bez stosowania wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli, przekształcając wzór do postaci kanonicznej. Analizując wyprowadzoną zależność uczniowie dochodzą do rozwiązania problemu. Następnie sporządzają wykres otrzymanej zależności w układzie współrzędnych.</p> <p>Bazując na analizie zagadnienia uczniowie wyprowadzają wzory na współrzędne wierzchołka paraboli i rozwiązują podane przez nauczyciela problemy optymalizacyjne stosując te wzory.</p>
<b>Funkcja kwadratowa z parametrem i jej interpretacja geometryczna</b>	<p>Nauczyciel przeprowadza warsztaty ćwiczeniowe z wykorzystaniem technologii komputerowej połączone z dyskusją.</p> <p>Pierwszą godzinę zajęć przeznaczamy na zapoznanie uczniów ze znaczeniem współczynników <math>a, b, c</math> we wzorze funkcji kwadratowej <math>y = ax^2 + bx + c</math>. Uczniowie sporządzają wykresy odpowiednich funkcji kwadratowych i formułują wnioski. Uczniowie sami proponują wzory funkcji dla analizy problemu.</p> <p>Następnie uczniowie badają własności funkcji kwadratowej z parametrem w zależności od wartości tego parametru.</p> <p>Można rozszerzyć problem i wprowadzić pojęcie miejsca geometrycznego punktów. Przykładowy problem do przeanalizowania: Jakie jest równanie krzywej utworzonej z wierzchołków parabol o równaniu <math>y = -\frac{1}{2}x^2 + mx = 1, m \in R</math>.</p> <p>Materiały do tego tematu można znaleźć na stronie <a href="http://www.interklasa.pl">www.interklasa.pl</a> (scenariusz lekcji „Funkcja kwadratowa z parametrem”) oraz na stronie <a href="http://www.jakubas.pl">www.jakubas.pl</a>.</p>
<b>Jak możemy rozwiązać równanie kwadratowe?</b>	<p>Nauczyciel wprowadza równanie kwadratowe w kontekście wyznaczania miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Uczniowie wyprowadzają wzory na pierwiastki równania kwadratowego.</p> <p>Nauczyciel może zaprezentować uczniom arabski sposób rozwiązywania równań (odniesienie do geometrii).</p> <p>Następnie uczniowie rozwiązują zadania tekstowe prowadzące do równania kwadratowego.</p>



<p><b>Poznajemy funkcje wielomianowe</b></p>	<p>Uczniowie analizują problem zależności objętości sześcianu od długości jego krawędzi. Sporządzają wykres tej zależności i opisują własności otrzymanej funkcji wielomianowej. Nauczyciel zwraca uwagę na problem dziedziny praktycznej funkcji.</p> <p>Następnie uczniowie z pomocą nauczyciela badają jak zmieni się objętość bryły przy zmianie długości odpowiednich krawędzi (zwiększenie lub zmniejszenie długości odpowiedniej krawędzi o daną wartość liczbową). W tym celu zapisują wzór zależności w postaci funkcji wielomianowej <math>f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)</math>, gdzie <math>x \in R</math> jest długością krawędzi sześcianu oraz <math>a, b, c \in R</math>, analizują problem dziedziny naturalnej i dziedziny praktycznej funkcji, sporządzają jej wykres w dziedzinie naturalnej i praktycznej oraz omawiają własności funkcji na podstawie wykresu.</p> <p>Po przeanalizowaniu podanego problemu nauczyciel analizuje z uczniami wykresy różnych funkcji wielomianowych.</p> <p>W celu utrwalenia materiału uczniowie dopasowują wykresy do wzorów.</p>												
<p><b>Matematyka w eksperymencie</b></p>	<p>Wskazane, aby funkcja opisująca zależność między danymi w eksperymencie była opisana wzorem <math>y = \frac{a}{x} + b</math>.</p> <p>Można rozważyć następujące problemy.</p> <p>1) W pewnym eksperymencie uzyskano następujące wyniki:</p> <table border="1" data-bbox="539 978 891 1118"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>7</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>5.5</td> <td>4.5</td> <td>4</td> <td>3.8</td> <td>3.7</td> </tr> </table> <p>a) przedstawić dane graficznie,</p> <p>b) wykreślić krzywą o równaniu <math>y = \frac{1}{x}</math>.</p>	x	1	2	4	7	10	y	5.5	4.5	4	3.8	3.7
x	1	2	4	7	10								
y	5.5	4.5	4	3.8	3.7								



	<p>Korzystając z punktów a) i b) zapisać wzór algebraiczny opisujący zależność między danymi <math>x</math> i <math>y</math> w eksperymencie. Jakiego wyniku można spodziewać się dla <math>x = 12</math>?</p> <p>2) W doświadczeniu badającym, w jaki sposób objętość pewnej ilości powietrza zmienia się pod wpływem różnych ciśnień, uzyskano następujące wyniki:</p> <table border="1" data-bbox="539 475 1223 616"> <tr> <td>Ciśnienie <math>P</math> (N/cm<sup>3</sup>)</td> <td>20</td> <td>25</td> <td>30</td> <td>35</td> <td>40</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>Objętość <math>V</math> (cm<sup>3</sup>)</td> <td>158</td> <td>115</td> <td>105</td> <td>90</td> <td>79</td> <td>63</td> </tr> </table> <p>Zaproponuj odpowiedni model algebraiczny, a następnie wskaż, który odczyt jest prawdopodobnie błędny.</p> <p>Należy przedstawić czytelną ilustrację graficzną problemu, najlepiej z wykorzystaniem technologii komputerowej.</p> <p>Literatura: „Matematyka w szkole średniej” tom 1, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne.</p>	Ciśnienie $P$ (N/cm <sup>3</sup> )	20	25	30	35	40	50	Objętość $V$ (cm <sup>3</sup> )	158	115	105	90	79	63
Ciśnienie $P$ (N/cm <sup>3</sup> )	20	25	30	35	40	50									
Objętość $V$ (cm <sup>3</sup> )	158	115	105	90	79	63									
<p><b>Kłopoty z prędkościami</b></p>	<p>Nauczyciel rozwiązuje z uczniami zadania typu maturalnego, które prowadzą do rozwiązania równania wymiernego.</p> <p>Dobrym przykładem takich zadań są zadania z prędkościami. Wskazane, aby w miarę możliwości zaproponować kilka rozwiązań zadania, także bez wykorzystania równań.</p> <p>Literatura: Podręcznik do matematyki dla liceum ogólnokształcącego z serii Matematyka Wojciecha Babiańskiego i Lecha Chańko, klasa 2, poziom podstawowy lub poziom rozszerzony.</p>														
<p><b>Analizujemy średni koszt produkcji</b></p>	<p>Celem zajęć jest wprowadzenie funkcji homograficznej oraz omówienie własności tej funkcji. Z uwagi na obowiązującą podstawę programową w liceum, nauczyciel omawia z uczniami zagadnienia związane tylko z funkcją homograficzną opisaną wzorem <math>y = \frac{a}{x - b} + c</math>.</p>														



Zajęcia można rozpocząć od krótkiej pogadanki na temat kosztów w firmie produkcyjnej, której celem będzie ustalenie wzoru określającego przeciętny koszt produkcji jednostki towaru przy dużej skali produkcji. Po wyszczególnieniu kosztów stałych produkcji (inwestycje, koszty administracyjne itp.) oraz kosztów zmiennych zależnych od wielkości produkcji (materiały, robocizna), uczniowie zapisują wzór :

$$K_p(x) = \frac{K_c(x)}{x} = \frac{Ax + B}{x} = A + \frac{B}{x}, \text{ gdzie } x > 0 \text{ oznacza wielkość produkcji (w jedn. produkcji), } K_p(x) \text{ - całkowity}$$

koszt przeciętny produkcji jednostki towaru ( w jedn. Zł),  $K_c(x)$  - całkowity koszt produkcji (w jedn. Zł),  $B$  - koszty stałe (w jedn. Zł),  $A$  - koszty zmienne (w jedn. Zł). Nauczyciel podkreśla, że koszty całkowite można opisać funkcją liniową tylko przy założeniu, że koszty zmienne są wprost proporcjonalne do wielkości produkcji. W przeciwnym przypadku funkcja kosztów całkowitych może być np. funkcją kwadratową.

Po takim wprowadzeniu uczniowie mogą już sami, przy pomocy nauczyciela, ustalić treść konkretnego problemu do analizy. Podają wzór funkcji określającej koszt przeciętny w podanym zadaniu, sporządzają jej wykres i omawiają jej własności.

Dla szerszej ilustracji problemu wykorzystania funkcji homograficznej, można dodatkowo przeanalizować, jak zmienia się stężenie roztworu, który powstaje np. ze zmieszania 300 g wodnego roztworu pewnego kwasu o stężeniu 80% z dowolną ilością tego samego kwasu o stężeniu 30%.

Do sporządzania wykresów funkcji można wykorzystać dowolny program komputerowy.

Literatura: M. Zakrzewski, T. Żak, E. Jakubas, „Matematyka przyjemna i pożyteczna” – podręcznik do liceum ogólnokształcącego, zakres rozszerzony, klasa 2, Wyd. Szkolne PWN 2003, str. 164-171.



### Elementy trygonometrii (6 godzin)

<b>Podobieństwo trójkątów podstawą trygonometrii</b>	Nauczyciel rysuje kilka trójkątów prostokątnych tak, aby miały wspólny kąt ostry. Wprowadza funkcje trygonometryczne kąta, jako wspólne własności tych trójkątów, wynikające z ich podobieństwa. Uczniowie wyprowadzają wartości funkcji trygonometrycznych kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ , a następnie utrwalają je rozwiązując różne zadania, także praktyczne. Warto pokazać interpretacje wartości funkcji trygonometrycznych w kole trygonometrycznym – widoczne są wówczas wartości funkcji trygonometrycznych kąta $0^\circ$ oraz kąta $90^\circ$ . Uczniowie konstruują kąty o zadanych wartościach funkcji trygonometrycznych.
<b>Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego</b>	Nauczyciel wprowadza pojęcie funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego, nie większego niż $180^\circ$ . Można wykorzystać koło trygonometryczne – łatwo wyprowadza się wzory redukcyjne.
<b>Tożsamość a równanie</b>	Nauczyciel wyjaśnia na czym polega różnica między tożsamością a równaniem. Uczniowie wykazują prawdziwość kilku tożsamości trygonometrycznych przypominając tożsamości algebraiczne. Wskazana jest kontynuacja tematu na zajęciach specjalistycznych lub konsultacjach.



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia specjalistyczne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Równania i nierówności, Ciekawy świat funkcji</b>	
<b>Umiem rozwiązywać nierówności kwadratowe</b>	<p>Po krótkiej pogadance nauczyciel prowadzi warsztaty ćwiczeniowe proponując ciekawe zadania prowadzące do rozwiązania nierówności kwadratowych.</p> <p>Wskazane, aby uczniowie zapisywali nierówności kwadratowe przy zadanych z góry rozwiązaniach. Warto także rozwiązać kilka nierówności kwadratowych o dziedzinach ograniczonych do z góry zadanych zbiorów liczbowych. rozwiązywali nierówności w różnych dziedzinach, rozwiązywali układy nierówności.</p> <p>Ważne, aby rozwiązać z uczniami chociaż jedno zadanie problemowe prowadzące do rozwiązania nierówności kwadratowej.</p>
<b>Czy potrafię działać na wielomianach?</b>	<p>Warsztaty ćwiczeniowe utrwalające materiał z działu wielomiany. Według uznania nauczyciel może wprowadzić dzielenie wielomianów. Ważne odniesienie do działań i praw działań na liczbach.</p>
<b>Umiem rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe</b>	<p>Celem zajęć jest przedstawienie metod rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych.</p> <p>Ważne, aby omówić metodę graficzną rozwiązywania równań, w której wykorzystuje się równość dwóch funkcji <math>f(x) = g(x)</math>. Np. rozwiązać równanie <math>x^3 -  x^2 - 2x  = 0</math>.</p> <p>Wskazane, aby rozwiązać chociaż jedną nierówność wielomianową z dokładną ilustracją graficzną problemu.</p>



<b>Czy mianownik ułamka musi być liczbą?</b>	Warsztaty ćwiczeniowe utrwalające materiał z działu wyrażeń wymiernych.
<b>Umiem rozwiązywać równania i nierówności wymierne</b>	Wskazane, aby w miarę możliwości prezentować ilustrację graficzną równania i nierówności. Bardzo pomocne wykorzystanie technologii komputerowej.
<b>Zabawy z funkcjami</b>	Najbardziej odpowiednią formą zajęć będą warsztaty ćwiczeniowe w pracowni komputerowej. W przypadku braku możliwości przeprowadzenia takiej lekcji, można je przeprowadzić w formie wykładu z prezentacją komputerową. Celem zajęć jest wprowadzenie uczniów w tematy komputerowej sztuki matematycznej. Warto pokazać im jakie obrazy można tworzyć wykorzystując wzory matematyczne oraz zachęcić ich do eksperymentów w tym zakresie. Materiały do takiej lekcji można znaleźć na stronie <a href="http://www.jakubas.pl">www.jakubas.pl</a> (artykuł „Matematyka i sztuka” w dziale artykułów związanych z nauczaniem matematyki w szkole średniej). Poza tym po zainstalowaniu programu Graph do wykreślania funkcji w folderze ...Program Files/Graph/Examples można znaleźć przykłady ciekawych wykresów funkcji i relacji.



# Program szczegółowy

## Semestr 3. (semestr II klasy II)

Zajęcia: semestr II (klasa II)

*Zajęcia uniwersalne – 16h*

Temat	Liczba godzin	Treści programowe	Proponowana forma realizacji
<b>Prosta i jej równanie (4 godziny)</b>			
<b>Równania prostej. Wzajemne położenie punktu i prostej na płaszczyźnie.</b>	2	Równania prostej (przechodzącej przez dwa punkty, równanie kierunkowe, równanie ogólne, równanie odcinkowe) wraz z interpretacją współczynników. Kryteria przynależności punktu do prostej.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia
<b>Wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie.</b>	2	Kryteria równoległości i prostopadłości prostych (poprzez związki współczynników kierunkowych w odniesieniu do interpretacji wektorowej). Wyznaczanie równań prostych zawierających wysokości, środkowe trójkąta.	Pogadanka heurystyczna, praca grupowa, ćwiczenia.





<b>Związki miarowe w trójkącie dowolnym (3 godziny)</b>			
<b>Rozwiązywanie trójkątów dowolnych.</b>	3	Twierdzenie sinusów i cosinusów. Obliczanie długości nieznanymi boków i miar kątów dowolnego trójkąta ze szczególnym zwróceniem uwagi na umiejętność stosowania wzorów redukcyjnych dla kątów II ćwiartki. Szczególną rolę należy przypisać zadaniom z kontekstem praktycznym.	Ćwiczenia grupowe
<b>Geometria okręgów i kół (2 godziny)</b>			
<b>Ludolfina</b>	1	Długość okręgu - sposoby wyznaczania liczby $\pi$ . Przybliżenie postaci Adama Kochańskiego polskiego matematyka XVII w.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia.
<b>Pole koła</b>	1	Zastosowanie wzoru na pole koła w zadaniach także praktycznych.	ćwiczenia
<b>Ciągi a problem kapitalizacji (4 godziny)</b>			
<b>Ciąg jako funkcja</b>	1	Wprowadzenie ciągu jako funkcji o dziedzinie naturalnej – wykres. Sposoby określania ciągów.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia
<b>Postęp arytmetyczny i geometryczny</b>	2	Określenie ciągu arytmetycznego i geometrycznego z podkreśleniem różniących ich własności. Wzory na wyraz n-ty, na sumę n wyrazów oraz ich zastosowanie w zadaniach także praktycznych.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia grupowe.
<b>Model kapitalizacji prostej i złożonej.</b>	1	Ilustracja różnicy między postępem arytmetycznym a geometrycznym na przykładzie procentu prostego i składanego.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia grupowe.



### Ciekawy świat funkcji (3 godziny)

<b>Funkcja szybkiego wzrostu</b>	2	Funkcja wykładnicza, jej dziedzina, własności i zastosowania.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia z wykorzystaniem technologii komputerowej.
<b>Dlaczego wynaleziono logarytmy?</b>	1	Logarytmy i ich własności. Zastosowanie logarytmów. Skala logarytmiczna. Przedstawianie danych eksperymentalnych za pomocą logarytmów.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia indywidualne.



Zakres zagadnień przedstawiony w bloku zajęć specjalistycznych stanowi **propozycję** tematyczną, którą nauczyciel (w zależności od oceny potrzeb uczniów) może realizować lub zaproponować własny zestaw tematyczny.

### Zajęcia specjalistyczne – 16h

<b>Temat</b>	<b>Liczba godzin</b>	<b>Treści programowe</b>	<b>Proponowana forma realizacji</b>
<b>Związki miarowe w trójkącie dowolnym (5 godzin)</b>			
<b>Różne wzory na pola trójkątów.</b>	2	Wyprowadzenie różnych wzorów na obliczanie pola trójkąta i ich zastosowania.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia indywidualne
<b>Tajemnice trójkątów.</b>	1	Twierdzenie o rzucie boków trójkąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego.	Pogadanka heurystyczna, warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Rozwiązywanie trójkątów.</b>	2	Zastosowanie poznanych twierdzeń do obliczania długości nieznanymi boków i kątów dowolnego trójkąta.	Warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Geometria okręgów i kół (6 godzin)</b>			
<b>Czy okrąg ma pole?</b>	1	Wyjaśnienie na przykładzie pojęcia miary Jordana.	Pogadanka heurystyczna.
<b>Czy punkty można podnosić do potęgi?</b>	1	Zastosowanie twierdzeń o siecznych w dowodzie twierdzenia o potędze punktu względem okręgu. Oś potęgowa.	Pogadanka heurystyczna, warsztaty ćwiczeniowe.



<b>Równania okręgu.</b>	2	Wyznaczanie równania okręgu opisanego na trójkącie. Badanie wzajemnego położenia dwóch okręgów.	Warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Prosta i okrąg.</b>	2	Badanie wzajemnego położenia prostej i okręgu. Wyznaczanie równania prostych stycznych do okręgu.	Warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Ciekawy świat funkcji (5 godzin)</b>			
<b>Stopa procentowa</b>	2	Procent składany, podwyżki i obniżki jako szczególny przykład zastosowań funkcji wykładniczej.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia w grupach.
<b>Funkcja powolnego wzrostu</b>	3	Funkcja logarytmiczna i jej własności. Funkcja logarytmiczna jako funkcja odwrotna do funkcji wykładniczej.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia w grupach.



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia uniwersalne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Prosta i jej równanie</b>	
<b>Równania prostej</b>	Wskazane omówienie różnych interpretacji współczynnika kierunkowego: z wartością funkcji tangens, a także jako wielkość opisującą przyrost współrzędnej y przypadającą na jednostkowy przyrost współrzędnej x .
<b>Wzajemne położenie punktu i prostej na płaszczyźnie.</b>	Pokazanie analitycznego sposobu sprawdzania położenia punktu na prostej – zwrócenie szczególnej uwagi na interpretację zmiennych x i y.
<b>Wzajemne położenie dwóch prostych.</b>	Uzasadnienie związków między współczynnikami kierunkowymi dwóch prostych równoległych i dwóch prostych prostopadłych. Wprowadzenie pojęcia i wzoru na odległość punktu od prostej oraz odległość między dwiema prostymi równoległymi.
<b>Związki miarowe w trójkącie dowolnym</b>	
<b>Rozwiązywanie trójkątów dowolnych.</b>	Dla każdego zadania uczniowie podają szczegółowy plan rozwiązywania, wypisując „dane” i wskazując wielkości „szukane”. Uczniowie analizują problem podając związki między „danymi” a „szukanymi”. Uczniowie ćwiczą umiejętność odczytywania z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.
<b>Różne wzory na pola trójkątów.</b>	Uczniowie wyprowadzają różne wzory na obliczanie pola trójkąta, a następnie rozwiązują zadania przede wszystkim o charakterze praktycznym.



## Geometria okręgów i kół

<b>Ludolfina</b>	<p>Przybliżenie postaci Adama Kochańskiego. Konstrukcja Kochańskiego, przy użyciu <a href="#">cyrkla i linijki</a> bez podziałki, odcinka o przybliżonej długości <math>\pi</math>.</p> <p>Literatura przykładowa: W. Krywicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, <i>Z geometrią za pan brat</i>, Iskry, Warszawa 1992</p>
<b>Pole koła</b>	<p>Uczniowie rozwiązują zadania o praktycznym kontekście z zastosowaniem wzoru na pole koła.</p> <p>Literatura przykładowa: E. Bańkowska, D. Stankiewicz, <i>Matematyka w zastosowaniach</i>, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001</p>
<b>Ciągi a problem kapitalizacji</b>	
<b>Ciąg jako funkcja</b>	<p>Nauczyciel stawia problemy: 1) Co znaczy ponumerować elementy zbioru skończonego? (Uczniowie numerują elementy zbioru wyjaśniają, że zwrot „ponumerować” oznacza przyporządkować każdemu elementowi zbioru liczbę naturalną. Zatem numerowanie jest konstruowaniem szczególnej funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych. 2) Czy zbiór, który numerujemy musi być zbiorem skończonym? 3) Czy można numerować tylko pewne wybrane elementy zbioru? 4) Czy można stworzyć kryterium wyboru elementów, którym przypisujemy numerację? 5) Czy takie kryterium można zapisać matematycznie?</p> <p>Uczniowie sami tworzą wzór na n-ty wyraz ciągu - kryterium wyboru, według którego liczbom rzeczywistym przypisujemy kolejne numerki. Nauczyciel wprowadza różne sposoby określania ciągów, w szczególności sposób rekurencyjny.</p>
<b>Postęp arytmetyczny i geometryczny</b>	<p>Nauczyciel omawia własność ciągu arytmetycznego, wzór na n-ty wyraz oraz na sumę n początkowych wyrazów ciągu. Szczególnie ważną jest własność nadająca nazwę ciągowi arytmetycznemu. Nauczyciel omawia własność ciągu geometrycznego, wzór na n-ty wyraz, sumę n początkowych wyrazów. Uczniowie wskazują różnice między tymi ciągami.</p> <p>Wskazane wyprowadzenie wzoru na n-ty wyraz ciągu pól trójkątów foremnych wpisanych jeden w drugi tak, aby wierzchołek każdego następnego trójkąta znajdował się w środku podstawy trójkąta poprzedniego.</p>



<b>Model kapitalizacji prostej i złożonej.</b>	Różnicę między ciągiem arytmetycznym a geometrycznym ilustrujemy na przykładzie procentu prostego i procentu składanego. Uczniowie obliczają i prezentują graficznie jak zmieni się kwota 1000 zł zainwestowana w banku według procentu prostego 5% rocznie oraz według procentu składanego 5% rocznie.
<b>Ciekawy świat funkcji</b>	
<b>Funkcja szybkiego wzrostu i spadku.</b>	<p>Nauczyciel rozpoczyna zajęcia od krótkiej dyskusji na temat tempa wzrostu różnych wielkości w otaczającym świecie. Dyskusja ma celu uświadomienie uczniom konieczności stworzenia modelu matematycznego do opisu zmiany wielkości wykazujących równomierny szybki wzrost lub spadek swojej wartości.</p> <p>Następnie nauczyciel omawia z uczniami zagadnienia związane z funkcją wykładniczą. Duży nacisk należy położyć na budowanie modeli matematycznych z wykorzystaniem funkcji wykładniczej (opis wzrostu liczebności populacji, opis rozkładu promieniotwórczego pierwiastków, datowanie wieku znalezisk archeologicznych, opis procesu stygnięcia wody w szklance). W każdym przypadku nauczyciel ukazuje interpretację geometryczną omawianych zależności.</p> <p>Brak narzędzi do rozwiązania niektórych równań wykładniczych może być wprowadzeniem do tematu obejmującego logarytmy i ich zastosowanie.</p> <p>Czasopismo: „Matematyka w szkole”, GWO nr 4,5/2002</p>
<b>Stopa procentowa</b>	<p>Uczniowie przy pomocy nauczyciela analizują problemy dotyczące stałego procentowego wzrostu i spadku różnych wielkości., np. stały procentowy przyrost płac, problem amortyzacji, procent składany itp.</p> <p>Można wprowadzić liczbę <math>e</math>, analizując zagadnienie kapitalizacji ciągłej.</p> <p>Literatura: Michał Szurek, „O nauczaniu matematyki”, tom 7, GWO 2006.</p>



<p><b>Dlaczego wynaleziono logarytmy?</b></p>	<p>Na początku nauczyciel wprowadza pojęcie logarytmu przy podstawie 10 podkreślając fakt, że przyrost wartości logarytmu o 1 powoduje dziesięciokrotny wzrost liczby logarytmowanej, przyrost wartości logarytmu o 2 powoduje stukrotny wzrost liczby logarytmowanej.</p> <p>Następnie uświadamia uczniom, że ta własność może być wykorzystywana do skalowania różnych wielkości fizycznych, które mogą przyjmować bardzo duże i bardzo małe wartości. Uczniowie zapoznają się ze skalą Richtera pomiaru siły trzęsień ziemi, skalą kwasowości pH, problemem pomiaru natężenia dźwięku w dB.</p> <p>Po omówieniu zagadnień związanych ze skalą logarymiczną uczniowie przypominają sobie własności logarytmów i wykonują obliczenia z wykorzystaniem logarytmów. Nauczyciel wskazuje na usprawnienia w wykonywaniu obliczeń z potęgami o wykładniku wymiernym (powrót do tematu zastosowań funkcji wykładniczej).</p> <p>Literatura: M.Zakrzewska, T.Żak, E.Jakubas, P.Nodzynski, J.Szuty, D.Zakrzewska "Matematyka przyjemna i pożyteczna" Zakres rozszerzony Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2002</p>
---	---





## Propozycje metodyczne

### Zajęcia specjalistyczne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Związki miarowe w trójkącie dowolnym</b>	
<b>Różne wzory na pola trójkątów.</b>	Uczniowie wyprowadzają różne wzory na obliczanie pola trójkąta, a następnie rozwiązują zadania przede wszystkim o charakterze praktycznym.
<b>Tajemnice trójkątów.</b>	Nauczyciel motywuje uczniów do samodzielnych poszukiwań odpowiedzi na pytanie: Czy istnieje twierdzenie tangensów, cotangensów?
<b>Rozwiązywanie trójkątów.</b>	Uczniowie rozwiązują zadania dotyczące trójkątów, ze szczególnym uwzględnieniem zadań z kontekstem realistycznym.  Literatura przykładowa: E. Bańkowska, D. Stankiewicz, <i>Matematyka w zastosowaniach</i> , Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001
<b>Geometria okręgów i kół</b>	
<b>Czy okrąg ma pole?</b>	Wyjaśnienie na przykładzie pojęcia miary Jordana. Wyjaśnienie, czym dla matematyka jest pole figury. Zadanie uczniom pytania, czy są figury, które nie mają pola?
<b>Czy punkty można podnosić do potęgi?</b>	Zastosowanie twierdzeń o siecznych w dowodzie twierdzenia o potędze punktu względem okręgu. Wprowadzenie pojęcia osi potęgowej dwóch okręgów.
<b>Równania okręgu.</b>	Wykorzystanie definicji okręgu do wyprowadzenia równań okręgu.



<b>Prosta i okrąg.</b>	Uczniowie samodzielnie podają różne metody badania wzajemnego położenia prostej i okręgu.
<b>Ciekawy świat funkcji</b>	
<b>Stopa procentowa</b>	Uczniowie przy pomocy nauczyciela analizują problemy dotyczące stałego procentowego wzrostu i spadku różnych wielkości., np. stały procentowy przyrost płac, problem amortyzacji, procent składany itp.  Można wprowadzić liczbę $e$ , analizując zagadnienie kapitalizacji ciągłej.  Literatura przykładowa: Michał Szurek, „O nauczaniu matematyki”, tom 7, GWO 2006.
<b>Funkcja powolnego wzrostu</b>	Zwrócenie uwagi na wolne tempo przyrostu wartości funkcji logarytmicznej. Obliczenia z wykorzystaniem logarytmów. Wprowadzenie pojęcia funkcji odwrotnej na przykładzie funkcji logarytmicznej i funkcji wykładniczej,



# Program szczegółowy

## Semestr 4. (semestr I klasy III)

### Zajęcia uniwersalne – 12 h

Temat	Liczba godzin	Treści programowe	Proponowana forma realizacji
<b>Rachunek prawdopodobieństwa (6 godz.)</b>			
<b>Kombinatoryka</b>	2	Wprowadzenie pojęcia silni i symbolu Newtona. Rozpoznawanie sytuacji, w których stosujemy permutacje, kombinacje, wariacje bez powtórzeń i wariacje z powtórzeniami oraz wyznaczanie ich liczby.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia
<b>Doświadczenie losowe. Zbiór zdarzeń elementarnych. Działania na zdarzeniach</b>	2	Określanie zbioru zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i podawanie ich liczby. Ustalanie zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu i wyznaczanie ich liczby. Określanie sumy, iloczynu i różnicy zdarzeń.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia
<b>Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności</b>	2	Sformułowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzenia w modelu klasycznym oraz za pomocą drzewa stochastycznego. Rozwiązywanie zadań o tematyce praktycznej.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia



<b>Stereometria (6 godz.)</b>			
<b>Podstawowe figury geometryczne w przestrzeni</b>	2	Rozpoznawanie graniastosłupów i ostrosłupów. Rysowanie rzutów graniastosłupów i ostrosłupów i siatek graniastosłupów i ostrosłupów. Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe
<b>Bryły obrotowe</b>	1	Rozpoznawanie figur obrotowych. Projektowanie i sporządzanie siatki walca i stożka, umiejętność budowania modeli. Znajomość pojęcia kuli i sfery. Obliczanie pola powierzchni i objętości poznanych brył obrotowych.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe
<b>Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn</b>	2	Stosowanie pojęcia kąta dwuściennego, kąta między prostą i płaszczyzną w rozwiązywaniu zadań.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia
<b>Przekroje</b>	1	Wyznaczanie podstawowych przekrojów płaskich poznanych brył i obliczanie ich pól.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia



Zakres zagadnień przedstawiony w bloku zajęć specjalistycznych stanowi **propozycję** tematyczną, którą nauczyciel (w zależności od oceny potrzeb uczniów) może realizować lub zaproponować własny zestaw tematyczny.

### Zajęcia specjalistyczne – 12 h

<b>Temat</b>	<b>Liczba godzin</b>	<b>Treści programowe</b>	<b>Proponowana forma realizacji</b>
<b>Stereometria (6 godz.)</b>			
<b>Stereometria w otaczającym nas świecie</b>	2	Rozpoznawanie i rozwiązywanie problemów geometrii przestrzennej w życiu codziennym. Szczególną rolę przypisać zadaniom z kontekstem realistycznym.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia w grupach.
<b>Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni</b>	2	Określanie wzajemnego położenia krawędzi i ścian w bryłach, kątów między krawędziami, kątów między krawędziami i ścianami oraz kątów między ścianami w różnych bryłach.	Pogadanka heurystyczna, ćwiczenia indywidualne
<b>Trygonometria w przestrzeni</b>	2	Wykorzystanie definicji funkcji trygonometrycznych oraz związków między nimi w rozwiązywaniu zadań.	Warsztaty ćwiczeniowe.
<b>Statystyka opisowa (3 godz.)</b>			
<b>Elementy statystyki opisowej</b>	3	Porządkowanie wyników eksperymentu losowego. Obliczanie średniej arytmetycznej, średniej ważonej oraz mediany dla danego eksperymentu losowego. Obliczanie wariancji i odchylenia standardowego dla wyników eksperymentu losowego.	Pogadanka heurystyczna Ćwiczenia.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



### Rachunek prawdopodobieństwa (3 godz.)

<b>Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń</b>	3	Posługiwanie się własnościami prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń. Zastosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń. Rozwiązywanie zadań o tematyce praktycznej.	Pogadanka heurystyczna, dyskusja, ćwiczenia w grupach.
---	---	---	--

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktynyuczen.byd.pl](http://www.aktynyuczen.byd.pl), [aktynyuczen@byd.pl](mailto:aktynyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia uniwersalne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Rachunek prawdopodobieństwa (3 godz.)</b>	
<b>Kombinatoryka</b>	Uczniowie rozróżnianie sytuacji, w których mamy do czynienia z wariacjami, kombinacjami, permutacjami – obliczanie liczby kombinacji, permutacji, wariacji bez powtórzeń i wariacji z powtórzeniami – wykorzystywanie wzorów kombinatorycznych do rozwiązywania zadań
<b>Doświadczenie losowe. Zbiór zdarzeń elementarnych. Działania na zdarzeniach</b>	Nauczyciel podaje przykładowe doświadczenia o zdarzeniach elementarnych jednakowo prawdopodobnych oraz doświadczeń, w których zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne. Uczniowie wskazują zdarzenia elementarne w konkretnych doświadczeniach i obliczają liczby zdarzeń elementarnych dla konkretnych doświadczeń.
<b>Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności</b>	Uzasadnienie związków między współczynnikami kierunkowymi dwóch prostych równoległych i dwóch prostych prostopadłych. Wprowadzenie pojęcia i wzoru na odległość punktu od prostej oraz odległość między dwiema prostymi równoległymi.



<b>Stereometria (6 godz.)</b>	
<b>Podstawowe figury geometryczne w przestrzeni</b>	Dla każdego zadania uczniowie podają szczegółowy plan rozwiązywania, wypisując „dane” i wskazując wielkości „szukane”. Uczniowie analizują problem podając związki między „danymi” a „szukanymi”. Uczniowie ćwiczą umiejętność odczytywania z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.
<b>Bryły obrotowe</b>	Uczniowie wyprowadzają różne wzory na obliczanie pola trójkąta, a następnie rozwiązują zadania przede wszystkim o charakterze praktycznym.
<b>Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn</b>	
<b>Przekroje</b>	Przybliżenie postaci Adama Kochańskiego. Konstrukcja Kochańskiego, przy użyciu <u><a href="#">cyrkla i linijki</a></u> bez podziałki, odcinka o przybliżonej długości $\pi$ .  Literatura przykładowa: W. Krywicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, <i>Z geometrią za pan brat</i> , Iskry, Warszawa 1992





## Propozycje metodyczne

### Zajęcia specjalistyczne

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Stereometria (6 godz.)</b>	
<b>Stereometria w otaczającym nas świecie</b>	Uczniowie wyprowadzają różne wzory na obliczanie pola trójkąta, a następnie rozwiązują zadania przede wszystkim o charakterze praktycznym.
<b>Wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni</b>	Nauczyciel motywuje uczniów do samodzielnych poszukiwań odpowiedzi na pytanie: Czy istnieje twierdzenie tangensów, cotangensów?
<b>Trygonometria w przestrzeni</b>	Uczniowie rozwiązują zadania dotyczące trójkątów, ze szczególnym uwzględnieniem zadań z kontekstem realistycznym.  Literatura przykładowa: E. Bańkowska, D. Stankiewicz, <i>Matematyka w zastosowaniach</i> , Wydawnictwo Podkova, Gdańsk 2001
<b>Statystyka opisowa (3 godz.)</b>	
<b>Elementy statystyki opisowej</b>	Wyjaśnienie na przykładzie pojęcia miary Jordana. Wyjaśnienie, czym dla matematyka jest pole figury. Zadanie uczniom pytania, czy są figury, które nie mają pola?



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



### Rachunek prawdopodobieństwa (3 godz.)

**Obliczanie  
prawdopodobieństw  
zdarzeń**

Wykorzystanie definicji okręgu do wyprowadzenia równań okręgu.

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktywnyuczen.byd.pl](http://www.aktywnyuczen.byd.pl), [aktywnyuczen@byd.pl](mailto:aktywnyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



# Program szczegółowy

## Semestr 5. (semestr II klasy III)

### Zajęcia uniwersalne – 12 h

Temat	Liczba godzin	Treści programowe	Proponowana forma realizacji
<b>Powtórzenie wiadomości (12 godz.)</b>			
<b>Równania i nierówności</b>	2	Powtórzenie i utrwalenie umiejętności rozwiązywania równań i nierówności liniowych, kwadratowych z parametrem, wielomianowych, prostych równań i nierówności wymiernych. Utrwalenie umiejętności rozwiązywania układów równań liniowych.	Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe
<b>Funkcje</b>	2	Powtórzenie i utrwalenie własności funkcji liniowej, kwadratowej, wymiernej, wykładniczej i logarytmicznej. Sporządzanie wykresów funkcji.	Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe
<b>Ciągi liczbowe</b>	2	Powtórzenie i utrwalenie własności ciągów arytmetycznych i geometrycznych, wzorów na n-ty wyraz oraz na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wyznaczanie wyrazów ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie.	Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Związki miarowe na płaszczyźnie</b>	3	Powtórzenie i utrwalenie podstawowych twierdzeń planimetrii i ich prostych zastosowań (twierdzenie Pitagorasa, Talesa, o linii środkowej w trójkącie i w trapezie, cechy przystawania i podobieństwa trójkątów, kąty w kole).	Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe
<b>Geometria analityczna</b>	3	Powtórzenie i utrwalenie równań prostych i okręgu, warunków równoległości prostokątności dwóch prostych, wzajemnego położenia dwóch okręgów, wzajemnego położenia okręgu i prostej, wektorów i sposobów obliczania pól różnych wielokątów.	Ćwiczenia Ćwiczenia grupowe

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktynyuczen.byd.pl](http://www.aktynyuczen.byd.pl), [aktynyuczen@byd.pl](mailto:aktynyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



Zakres zagadnień przedstawiony w bloku zajęć specjalistycznych stanowi **propozycję** tematyczną, którą nauczyciel (w zależności od oceny potrzeb uczniów) może realizować lub zaproponować własny zestaw tematyczny.

### Zajęcia specjalistyczne – 12 h

<b>Temat</b>	<b>Liczba godzin</b>	<b>Treści programowe</b>	<b>Proponowana forma realizacji</b>
<b>Powtórzenie wiadomości (12 godz.)</b>			
<b>Równania i nierówności</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych prowadzących do równań i nierówności liniowych, kwadratowych z parametrem, wielomianowych i wymiernych. Rozwiązywanie zadań maturalnych wykorzystujących układy równań liniowych.	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Funkcje</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych wykorzystujących własności funkcji liniowej, kwadratowej, wymiernej, wykładniczej i logarytmicznej.	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Ciągi liczbowe</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych dotyczących ciągów arytmetycznych i geometrycznych.	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Planimetria</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych wykorzystujących wszelkie związki miarowe w planimetrii ( w tym także twierdzenia sinusów i cosinusów).	Warsztaty ćwiczeniowe
<b>Stereometria</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych na temat poznanych figur przestrzennych. Rozpoznawanie i rozwiązywanie problemów geometrii przestrzennej w życiu codziennym. Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych oraz związków między nimi w rozwiązywaniu zadań.	Warsztaty ćwiczeniowe



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Geometria analityczna</b>	2	Rozwiązywanie zadań maturalnych z geometrii analitycznej.	Warsztaty ćwiczeniowe
------------------------------	---	---	-----------------------

Projekt „Aktywny uczeń, pracownik, obywatel – to ja, dzięki kompetencjom kluczowym”  
Wyższa Szkoła Gospodarki w Bydgoszczy, ul. Garbary 2, 85-229 Bydgoszcz, z dopiskiem „Aktywny uczeń...”  
tel. 52 567-07-80, [www.aktywnyuczen.byd.pl](http://www.aktywnyuczen.byd.pl), [aktywnyuczen@byd.pl](mailto:aktywnyuczen@byd.pl)  
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Człowiek – najlepsza inwestycja!**



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia uniwersalne

Polecamy książki, które mogą służyć jako pomoc zarówno nauczycielom jak i uczniom:

H. Pawłowski, „Obowiązkowa matura z matematyki. Prościej już się nie da!”, Oficyna Wydawnicza TUTOR, Toruń 2010,

H. Pawłowski, „Matematyka. Poziom podstawowy.”, Oficyna Wydawnicza TUTOR, Toruń 2005.

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Powtórzenie wiadomości (12 godz.)</b>	
<b>Równania i nierówności</b>	Uczniowie przypominają sobie sposoby algebraiczne i graficzne rozwiązywania równań i nierówności oraz układów równań, rozwiązują zadania w kontekście praktycznym prowadzące do równań i nierówności. Nauczyciel zwraca uwagę na poprawną formę zapisu rozwiązania oraz na poprawne udzielenie odpowiedzi.
<b>Funkcje</b>	Uczniowie przypominają sobie własności poznanych wcześniej funkcji i stosują te własności w zadaniach problemowych. Nauczyciel zwraca uwagę na poprawną formę zapisu rozwiązania oraz na poprawne udzielenie odpowiedzi.
<b>Ciągi liczbowe</b>	Uczniowie powtarzają i utrwalają własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego, z podkreśleniem różniących ich własności.
<b>Związki miarowe na płaszczyźnie</b>	Nauczyciel znając swoich uczniów samodzielnie decyduje, na które twierdzenia położyć większy nacisk.
<b>Geometria analityczna</b>	Powtórzenie i utrwalenie różnych interpretacji współczynnika kierunkowego prostej: z wartością funkcji tangens, a także jako wielkość opisującą przyrost współrzędnej $y$ przypadającą na jednostkowy przyrost współrzędnej $x$ . Porównanie metod obliczania pól figur na płaszczyźnie z układem współrzędnych i bez niego.



## Propozycje metodyczne

### Zajęcia specjalistyczne

Można uzupełnić cytowaną wyżej literaturę o pozycję:

H. Pawłowski, „*Matematyka. Poziom rozszerzony*”, Oficyna Wydawnicza TUTOR, Toruń 2005

Temat	Propozycje metodyczne
<b>Powtórzenie wiadomości (12 godz.)</b>	
<b>Równania i nierówności</b>	Uczniowie ustalają sposób rozwiązania zadania maturalnego oraz prezentacji tego rozwiązania, analizują otrzymane wyniki, sprawdzają wyniki z warunkami zadania. Nauczyciel powinien zwrócić szczególną uwagę na zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności i na poprawne udzielenie odpowiedzi w tego typu zadaniach.
<b>Funkcje</b>	Uczniowie dokonują analizy treści zadań maturalnych dotyczących funkcji. Nauczyciel podkreśla wagę wyznaczenia dziedziny funkcji dla poprawności rozwiązania zadania. Nauczyciel znając swoich uczniów samodzielnie decyduje, na który rodzaj funkcji położyć większy nacisk.
<b>Ciągi liczbowe</b>	Uczniowie systematyzują wiedzę o własnościach ciągów arytmetycznych i geometrycznych. Nauczyciel powinien zwrócić szczególną uwagę na związki pomiędzy wyrazami ciągu.
<b>Planimetria</b>	Nauczyciel powinien zwrócić szczególną uwagę na sposoby rozwiązywania zadań wymagających przeprowadzenia dowodu, ponieważ one sprawiają uczniom najwięcej trudności.
<b>Stereometria</b>	Uczniowie dokonują analizy treści zadań i sporządzają rysunki z poprawnym zaznaczeniem odpowiednich kątów między krawędziami, krawędziami i ścianami, między ścianami rozpatrywanych brył. Szczególną rolę przypisać zadaniom z kontekstem realistycznym.





**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Geometria analityczna</b>	Szczególną uwagę należy zwrócić na rozwiązywanie zadań przy użyciu wektorów, na związek między postacią ogólną równania prostej a współrzędnymi wektora do niej prostopadłego oraz na wykorzystanie twierdzeń geometrii elementarnej w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej.
------------------------------	--