Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Komponent wspólny
dla Kół Młodych Naukowców
z przedmiotu matematyka
dla klas licealnych 1 i 2
w roku szkolnym 2010 / 2011.

w miejscowościach
Kluczbork, Ostrzeszów, Syców i Wieluń

Opis

Projekt zakłada zrealizowanie w Kołach Młodych Naukowców (MN) klas licealnych 1 i 2 - liceów w Kluczborku, Ostrzeszowie, Sycowie oraz Wieluniu - dziesięciu tematów z zakresu przedstawionego w niniejszym projekcie.

Koła MN klas 1 i 2 otrzymają do realizacji po 10 tematów. Każdy temat zawiera sformułowanie konkretnego problemu o charakterze badawczym wraz ze wskazówkami dla nauczyciela prowadzącego zajęcia. Stawiane problemy mogą wchodzić w zakres różnych grup tematycznych a ich część związana z zastosowaniami na pierwszym etapie rozwiązywania wymaga zbudowania odpowiedniego opisu - modelu matematycznego - w postaci równania, nierówności czy też doboru odpowiedniej funkcji. Każdy temat daje ponadto swobodę w doborze dodatkowych problemów zwłaszcza tych dostrzeżonych przez uczniów.

Tematyka zajęć podzielona jest na 4 cztery grupy: 1. Liczby; 2. Równania i nierówności; 3. Geometria analityczna i elementarna; 4. Funkcje i ciągi.

Szczegóły tych grup tematycznych i ich zakres opisują podane niżej tablice. Ostatnie tablice „**Plany realizacji zadań**” to zestawienie w porządku chronologicznym tematów zajęć w poszczególnych klasach licealnych. W razie potrzeby nauczyciel prowadzący zajęcia może w zmienić ten porządek ze względu na program nauczania realizowany w danej szkole. Ostatnia część zawiera zestawienie oczekiwanych rezultatów będących wynikiem zaplanowanych działań dydaktycznych w trakcie realizacji projektu.

Załącznik A „**Schematy zajęć dydaktycznych**” zawiera szczegółowe treści zadań, problemów oraz wskazówki metodologiczne do realizacji każdego ze wskazanych tematów.

Ewaluacja projektu zostanie przeprowadzona w dwóch etapach i będzie polegała na porównawczym opisie wyników prac w ww. czterech ośrodkach. Etap pierwszy to „Test otwarcia” sprawdzający wiedzę matematyczna w zakresie określonym w tym projekcie na początku jego realizacji. Etap drugi to „Test zamknięcia” sprawdzający nabyte umiejętności matematyczne na koniec realizacji projektu.

Zadania testowe będą stanowiły załączniki B i C do niniejszego opracowania i zostaną przekazane w odpowiednim terminie tuż przed datą ewaluacji celem zachowania niezbędnej poufności treści zadań.

dr Andrzej Spakowski
Instytut Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Opolski

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Grupy tematyczne zajęć i ich tematyka

Grupa tematyczna 1	Tematyka zajęć
Liczby	Klasa 1. 1. Indukcja matematyczna i podzielność liczb. 2. Podzielność liczb ze stałą resztą. W szczególności: liczby naturalne, zasada indukcji matematycznej, podzielność liczb naturalnych, podzielność z resztą, podzielność potęg liczb naturalnych, podzielność sumy lub różnicy liczb naturalnych.
	Klasa 2. 1. Indukcja matematyczna i sumowanie iloczynów. 2. Liczby Mersenne'a. W szczególności: liczby naturalne, zasada indukcji matematycznej, silnie, liczby Mersenne'a, liczby pierwsze, podzielność liczb naturalnych, podzielność potęg i sumy liczb naturalnych.

Grupa tematyczna 2	Tematyka zajęć
Równania i nierówności	Klasa 1. 3. Równania kwadratowe z parametrem. 4. Równania liniowe i nierówności z wartością bezwzględną. 5. Jak zmiana ceny wpływa na dochód? W szczególności: badanie różnych aspektów równania z parametrem, liczba rozwiązań, zmienność wartości pierwiastków, równania liniowe i kwadratowe, przekształcanie równań, równania i nierówności z wartością bezwzględna, interpretacja geometryczna równań, przykład zastosowania w analizie planu biznesowego, procenty, prognozowanie dochodu, wartości krytyczne zmian parametrów.
	Klasa 2. 3. Nierówności z pierwiastkami stopnia 2-go lub 3-go. 4. Wartości bezwzględne z dwiema zmiennymi. 5. Jak zmiana ceny wpływa na dochód? W szczególności: pierwiastki stopnia drugiego i stopnia trzeciego, nierówności, nieograniczoność zbioru liczb, wzór na sześcian sumy, wartości bezwzględne, układy

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	równań i nierówności z parametrem, proste na płaszczyźnie, przykład zastosowania w analizie planu biznesowego, procenty, prognozowanie dochodu, wartości krytyczne zmian parametrów.

Grupa tematyczna 3	Tematyka zajęć
Geometria analityczna i elementarna	Klasa 1. 6. Zbiór punktów równoodległych od prostej i punktu. 7. Okręgi przecinające się w dwóch punktach. 8. Trójkąty podobne. W szczególności: odległość punktu od prostej, parabola jako miejsce geometryczne, zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, równania z pierwiastkami kwadratowymi, okręgi na płaszczyźnie, układ równań, równanie kwadratowe, prostokąt, trójkąt, trójkąty podobne, trójkąty przystające, cechy podobieństwa trójkątów, cechy przystawania trójkątów, kąty w trójkącie, trójkąt równoramienny, kąty naprzemianległe.

	Klasa 2. 6. Płaszczyzna w przestrzeni. 7. Punkty równoodległe od prostej i okręgu. 8. Twierdzenia Talesa i Pitagorasa a mierzenie odległości. W szczególności: układ współrzędnych w przestrzeni, równanie płaszczyzny w przestrzeni, objętość czworościanu, pole trójkąta, odległość punktu od płaszczyzny, twierdzenie Pitagorasa, okrąg styczny do prostej, zbiór punktów równoodległych od prostej i od okręgu, parabola, równanie z pierwiastkiem kwadratowym, równanie okręgu, odległość punktów na płaszczyźnie, azymut, prostopadłość, twierdzenie Talesa, środek odcinka, odcinek równoległy.

Grupa tematyczna 4	Tematyka zajęć
Funkcje i ciągi	Klasa 1. 9. Przekształcanie wykresu paraboli. 10. Optymalny wybór działki budowlanej. W szczególności: przekształcenia płaszczyzny w płaszczyznę, obraz

	wykresu poprzez przekształcenie, powinowactwo względem osi Ox ze skalą, przesunięcia (translacje), złożenie przekształceń, zastosowanie równania kwadratowego do optymalizacji, pole prostokąta, procenty, parabola, monotoniczność, największa wartość funkcji kwadratowej.
	Klasa 2. 9. Własności i wykresy funkcji homograficznych. 10. Ciągi określone rekurencyjnie. W szczególności: funkcje homograficzne, wykresy, własności, hiperbola 1/x, funkcja nieparzysta, przekształcenia płaszczyzny w płaszczyznę, monotoniczność, asymptoty, punkty przecięcia z osiami, zbiory na prostej (osi) symetryczne względem zera, ciągi, równanie rekurencyjne ciągu - przykłady, ciąg Fibonacciego, ciąg geometryczny, rozwiązania równania rekurencyjnego.

Oczekiwane rezultaty

Efektem pracy uczniów w Kołach Młodych Naukowców będzie pogłębienie i poszerzenie wiedzy i umiejętności w zakresie matematyki a także nabycie umiejętności badawczych, tj. samodzielnego stawiania rozmaitych problemów i rozwiązywanie ich przy zastosowaniu matematyki.

W szczególności zakłada się, że pogłębiona i poszerzona zostanie wiedza matematyczna uczniów dotycząca:

liczb naturalnych, metody dowodzenia opartej na zasadzie indukcji matematycznej, liczb pierwszych a w szczególności tzw. liczb Mersenne'a, podzielności liczb naturalnych, podzielności potęg i sum, silni,

rozwiązywania równań kwadratowych i liniowych z parametrem, przekształcania równań liniowych i kwadratowych, interpretacji geometrycznej równań, zastosowania równań w zagadnieniach praktycznych, stosowania procentów, pierwiastków stopnia drugiego i trzeciego, logarytmów,

rozwiązywania układów równań oraz nierówności z parametrem,

okręgów na płaszczyźnie, trójkątów, trójkątów podobnych, trójkątów przystających, cech podobieństwa i cech przystawania trójkątów, kątów w trójkącie, kątów naprzemianległych,

zastosowań twierdzenia Pitagorasa,

zastosowań twierdzenia Talesa,

objętości czworościanu, pola trójkąta,

układu współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni, odległości punktu od płaszczyzny, prostych na płaszczyźnie, odległości punktu od prostej, miejsc geometrycznych (paraboli), powinowactwa względem osi, translacji o wektor,

funkcji i ich wykresów, przekształcania wykresów funkcji, funkcji liniowych, funkcji kwadratowych, funkcji homograficznych, hiperboli, funkcji nieparzystych,

ciągów, ciągów arytmetycznych, ciągów geometrycznych, przykładów ciągów określonych rekurencyjnie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan realizacji zadań dla klas licealnych 1

Lp.	Temat
1	Indukcja matematyczna i podzielność liczb
2	*Podzielność liczb ze stałą resztą*
3	*Równania kwadratowe z parametrem*
4	*Równania liniowe i nierówności z wartością bezwzględną*
5	*Jak zmiana ceny wpływa na dochód?*
6	*Zbiór punktów równoodległych od prostej i punktu*
7	*Okręgi przecinające się w dwóch punktach*
8	*Trójkąty podobne*

9	*Przekształcanie wykresu paraboli*
10	*Optymalny wybór działki budowlanej*

Plan realizacji zadań dla klas licealnych 2

Lp.	Temat
1	*Indukcja matematyczna i sumowanie iloczynów*
2	*Liczby Mersenne'a*
3	*Nierówności z pierwiastkami stopnia drugiego i trzeciego*
4	*Wartości bezwględne z dwiema zmiennymi*
5	*Jak zmiana ceny wpływa na dochód?*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

6	*Płaszczyzna w przestrzeni*
7	*Punkty równoodległe od prostej i okręgu*
8	*Twierdzenia Talesa i Pitagorasa a mierzenie odległości*
9	*Własności i wykresy funkcji homograficznych*
10	*Ciągi określone rekurencyjne*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Załącznik A

Schematy
zajęć dydaktycznych
z przedmiotu
matematyka

dla
klas licealnych 1 i 2

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 1

INDUKCJA MATEMATYCZNA I PODZIELNOŚĆ LICZB

A. Problem badawczy

Niech $p = 3$. Zbadać własność: Dla każdego $n = 1, 2, \dots$ liczba

(*) $$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{p} \text{ jest liczbą naturalną.}$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną p o własności (*).

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Dla $p = 3$ przeprowadzić dowód indukcyjny własności (*).

(b) Znaleźć wszystkie liczby naturalne p o własności (*).

(c) Jak zmieni się odpowiedź, gdy a_n zastąpimy przez

(**) $$b_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{p} \ ?$$

(d) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Dowód hipotezy należy przeprowadzić w oparciu o twierdzenie o liczbach naturalnych nazywane zasadą indukcji matematycznej. Należy opisać oraz przedyskutować tę zasadę przed rozpoczęciem dowodu.

2. Procedura dowodu indukcyjnego jest tu następująca:

(1) Sprawdzamy prawdziwość wzoru (*) dla $n = 1$.
(2) Przyjmujemy założenie indukcyjne: wzór (*) zachodzi dla pewnej liczby $n \geq 1$.
(3) Na podstawie założenia indukcyjnego (2) wyprowadzamy wzór (*) dla liczby $n + 1$. Istotnie mamy:

$$(n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n+2)n + (n+1)(n+2) \cdot 3.$$

Pierwszy składnik jest podzielny przez 3 na podstawie założenia indukcyjnego. Podzielność przez 3 drugiego składnika jest oczywista. Zatem (*) zachodzi dla liczby $n+1$.

(4) Stwierdzamy, że: Na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór (*) zachodzi dla każdej liczby naturalnej.

Procedury, tj. struktury logicznej dowodu indukcyjnego należy skrupulatnie przestrzegać.

2. Wyznaczyć kilka pierwszych liczb postaci (*), np. dla $n = 1, 2, 3$ i zauważyć, że dzielnikami wszystkich liczb postaci $n(n+1)(n+2)$ są tylko liczby 1, 2 i 3.

3. Zauważyć, że każda liczba postaci $n(n+1)(n+2)$ jest podzielna przez 2 (dowód tego faktu nie wymaga indukcji matematycznej).

4. W konsekwencji $p = 2 \cdot 3 = 6$ jest maksymalną liczbą o własności (*).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 2

PODZIELNOŚĆ LICZB ZE STAŁĄ RESZTĄ

A. Problem badawczy

Liczba naturalna p jest podzielna przez 3 z resztą 1. Zbadać podzielność przez 3 liczb p^n, $n = 1, 2, \ldots$.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Rozważyć podzielność przez 3 z resztą 2.

(b) Rozważyć podzielność przez 2 z resztą 1.

(c) Zbadać podzielność przez 3 liczby $13^{31} - 10^{22}$.

(d) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Niech $p = 3k_0 + 1$ dla pewnej liczby naturalnej k_0. Przeprowadzamy analizę indukcyjną dzielenia liczb postaci p^n przez 3. Mamy:

$p^1 = p = 3k_0 + 1$.

Niech $p^n = 3k + 1$ dla pewnego $n \geq 1$. Wtedy

$p^{n+1} = p^n p = (3k+1)p = 3kp + p = 3kp + 3k_0 + 1$.

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej: Liczby postaci p^n, $n = 1, 2, \ldots$, dzielą się przez 3 z resztą 1.

2. Rozważamy teraz podzielność przez 3 z resztą 2. Niech $p = 3k_0 + 2$. Przyjmując, że $p^n = 3k + 2$ mamy

$$p^{n+1} = (3k+2)p = 3kp + 2p = 3kp + 6k_0 + 4 = 3kp + 6k_0 + 3 + 1.$$

Jest widoczne, że dowodu nie da się przeprowadzić. Należy poszukać odpowiedniego przykładu.

Dla $p = 5$ mamy:

$$5 = 3 + 2 \quad \text{ale} \quad 5^2 = 25 = 24 + 1 = 3 \cdot 8 + 1.$$

3. Rozważamy podzielność przez 2 z resztą 1. Niech $p = 2k_0+1$. Zakładając, że $p^n = 2k + 1$ mamy

$$p^{n+1} = (2k+1)p = 2kp + p_0 = 2kp + 2k_0 + 1.$$

Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej podzielność przez 2 z resztą 1 zachodzi dla każdej liczby p^n.

4. Analiza liczby $13^{31} - 10^{22}$ pokazuje, że:

13 jest liczbą podzielną przez 3 z resztą 1,

10 jest liczbą podzielną przez 3 z resztą 1.

Na podstawie wykazanego wyżej twierdzenia o podzielności przez 3 z resztą 1 mamy:

13^{31} i 10^{22} są podzielne przez 3 z resztą 1.

W konsekwencji liczba $13^{31} - 10^{22}$ jest podzielna przez 3.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 3

RÓWNANIE KWADRATOWE Z PARAMETREM

A. Problem badawczy

Zbadać różne aspekty równania

(*) $$\frac{a-x}{x^2-2} = 1$$

gdzie a jest parametrem rzeczywistym, tj. $a \in \mathbb{R}$.

B. Problemy szczegółowe i pochodne.

(a) Jaka jest i jak zmienia się liczba rozwiązań równania (*) w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$? Wyznaczyć wzór i narysować wykres funkcji $f(a) =$ liczba pierwiastków równania (*), $a \in \mathbb{R}$.

(b) Jak zmieniają się wartość pierwiastków równania (*)? Wyznaczyć i narysować wykresy funkcji: $p(a) =$ wartość najmniejszego pierwiastka równania (*), $q(a) =$ wartość największego pierwiastka równania (*).

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne.

1. Mianownik ułamka wymaga formalnego założenia $x^2 - 2 \neq 0$ ale

$$\frac{a-x}{x^2-2} = \frac{a-x}{(x-\sqrt{2})\cdot(x+\sqrt{2})}.$$

Zatem w szczególnych przypadkach - po uproszczeniu ułamka - równanie (*) przyjmie prostszą postać równania liniowego:

$$\frac{-1}{x+\sqrt{2}} = 1 \quad \text{dla } a = \sqrt{2},$$

tj.

$$-1 = x + \sqrt{2} \quad \text{dla } a = \sqrt{2} \text{ i } x \neq -\sqrt{2}$$

oraz

$$\frac{-1}{x-\sqrt{2}} = 1 \ \text{ dla } a = -\sqrt{2},$$

tj.

$$-1 = x - \sqrt{2} \ \text{ dla } a = -\sqrt{2} \text{ i } x \neq -\sqrt{2}.$$

2. W konsekwencji analizując równanie (*) należy rozpatrzyć trzy przypadki:

$$(1)\ a = \sqrt{2};$$

$$(2)\ a = -\sqrt{2};$$

$$(3)\ a \neq \pm\sqrt{2}.$$

3. Dla $a \neq \pm\sqrt{2}$ otrzymujemy do analizy równanie (kwadratowe) $a - x = x^2 - 2$. Dokonujemy przekształceń:

$$x^2 + x - (2 + a) = 0,$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - (2 + a) = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 + a = \frac{9 + 4a}{4}$$

i ostatecznie

$$(**) \qquad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9 + 4a}{4}.$$

W konsekwencji mamy następujące obserwacje.

Jeśli $9 + 4a < 0$, to równanie (**) nie ma rozwiązania.

Jeśli $9 + 4a = 0$, to równanie (**) ma jedno rozwiązanie $x = -1/2$.

Jeśli $9 + 4a > 0$, to mamy dwa rozwiązania:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4a},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{9 + 4a}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 4

RÓWNANIA LINIOWE I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

A. Problem badawczy

Niech $m \geq 0$. Wyznaczyć rozwiązania równania

(1) $$||x-2|-1| = m$$

oraz nierówności

(2) $$||x-2|-1| > m.$$

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jaka jest geometryczna interpretacja równania $|x-a| = d$? Wsk. $|b-a|$ wyraża odległość liczb rzeczywistych a i b.

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Dla $m = 0$ równanie (1) ma postać $|x-2|-1 = 0$. Stąd $|x-2| = 1$. Wyznaczyć rozwiązanie w oparciu o geometryczną interpretację tego równania. Podać także algebraiczną metodę rozwiązywania opartą na rozpatrywaniu przypadków:

$$x-2 \geq 0 \ \text{ i } \ x-2 < 0.$$

2. Dla $m > 0$ podstawić $y = |x-2|$ i rozwiązać najpierw równanie

$$|y-1| = m$$

a następnie równanie

$$|x-2| = y.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozumowanie wspomagać odpowiednimi rysunkami przedstawiającymi interpretację geometryczną.

3. Do rozwiązania nierówności (2) zastosować metody podobne do tych jakie zostały użyte do rozwiązywania równania. Poszczególne etapy obliczeń wspomagać interpretacją geometryczną wartości bezwzględnej oraz wykresami odpowiednich prostych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 5

JAK ZMIANA CENY WPŁYWA NA DOCHÓD?

A. Problem badawczy

Badania marketingowe wykazały, że zmniejszenie ceny biletu do kina o 20% spowoduje wzrost liczby widzów o 30%. O ile procent zwiększy się dochód (brutto) kina jeśli wprowadzona zostanie niższa cena biletu?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jaka jest krytyczna wartość ceny biletu? Wartość krytyczna to taka niższa cena biletu, która zwiększy ilość widzów ale nie zmieni dochodu.
(b) Jak można uogólniać rozważany problem?
(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Wprowadzamy następujące oznaczenia: k aktualna cena biletu, n liczba sprzedawanych (miesiecznie) biletów po cenie k. Wtedy:

$$kn = \text{dochód kina przy cenie biletu } k$$

$$\text{nowa cena biletu} = k - 20\% \cdot k = k - \frac{1}{5}k = \frac{4}{5}k,$$

prognozowana liczba widzów przy cenie biletu $(4/5)k$ wyniesie

$$n + 30\%n = n + \frac{3}{10}n = \frac{13}{10}n,$$

a prognozowany dochód przy zmiejszonej cenie wyniesie

$$\frac{4}{5}k \cdot \frac{13}{10}n = \frac{26}{25}kn.$$

Stąd otrzymujemy

$$\text{przyrost dochodu} = \frac{26}{25}kn - kn = \frac{1}{25}kn$$

a w konsekwencji prognozowany procentowy wzrost dochodu kina wyniesie

$$\frac{\text{przyrost dochodu}}{\text{aktualny dochód}} = \frac{(1/25)kn}{kn} = \frac{1}{25} = 4\%.$$

2. Rozpatrzmy teraz problem krytycznej wartości ceny biletu? Niech

x zmienna wyrażająca zmmniejszenie ceny biletu w %,

$p = p(x)$ funkcja przyrostu liczby widzów, $x \in [0, 99]$,

$p(x) =$ procentowy wzrost liczby widzów gdy cenę zmniejszono o x.

Na podstawie badań marketingowych mamy $p(0) = 0$ oraz $p(20) = 30$. Ponadto przyjmujemy założenie funkcja prognozująca procentową zmianę liczby widzów ma postać

$$p(x) = \sqrt{45x} \quad \text{dla } x \in [0, 99].$$

Wtedy: $p(0) = 0$, $p(20) = 30$, $p(99) \approx 66,75$.

UWAGA. Można przyjąć inną funkcję p, jeśli miałaby ona lepiej opisywać reakcje potencjalnych widzów na zmianę cen biletów.

3. Przystępujemy teraz do znalezienia wartości krytycznej ceny przy funkcji prognozującej $p(x) = \sqrt{45x}$. Liczba widzów przy zmniejszeniu ceny o x wyniesie

$$n + \frac{p(x)}{100}n = \left(1 + \frac{p(x)}{100}\right)n.$$

Przyrost dochodu będzie równy

$$\left(1 + \frac{p(x)}{100}\right)n \cdot \left(k - \frac{x}{100}k\right) - kn.$$

Pozostaje zatem rozwiązać wzgl. x równanie

$$\left(1 + \frac{\sqrt{45x}}{100}\right)n \cdot \left(k - \frac{x}{100}k\right) - kn = 0$$

a po uproszczeniu równanie

$$\left(1 + \frac{\sqrt{45x}}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{100}\right) - 1 = 0.$$

Rozwiązaniem nietrywialnym jest $x \approx 5,0186$. Zatem zmniejszenie ceny o mniej niż $5,0186\%$ nie spowoduje wzrostu zysku a wrecz spowoduje jego spadek.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 6

ZBIÓR PUNKTÓW RÓWNOODLEGŁYCH OD PROSTEJ I PUNKTU

A. Problem badawczy.

Pokazać, że zbiorem punktów równoodległych od punktu $A = (0, 1/4)$ i od prostej $y = -1/4$ jest parabola $y = x^2$.

Niech $b > 0$. Jaka będzie odpowiedź dla punktu $A = (0, b)$ i prostej $y = -b$?

Niech $b > 0$ i $c \neq b$. Jaka będzie odpowiedź dla punktu $A = (0, b)$ i prostej $y = -c$?

B. Problemy szczegółowe i pochodne.

(a) Stosując Twierdzenie Pitagorasa wyprowadzić wzór na odległość dwóch punktów płaszczyzny.

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne.

1. Zrobić odpowiednie rysunki i przeprowadzić najpierw analizę geometryczną problemu. Zauważyć, że nie jest potrzebny żaden specjalny wzór na odległość punktu od prostej. Wystarcza znajomość wzoru na odleglość dwóch punktów płaszczyźny (można tu wspomnieć o twierdzeniu Pitagorasa): odległość punktów $P = (x, y)$ i$P' = (x', y')$ wyraża liczba

$$|PP'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

2. Przyjmując, że $B = (x, y)$ jest poszukiwanym punktem, tj. punktem równoodległym od punktu $A = (0, 1/4)$ i od punktu C na prostej $y = -1/4$ mamy:

$$|AB| = \sqrt{(0-x)^2 + (1/4-y)^2} = \sqrt{x^2 + (1/4-y)^2},$$

$$|BC| = \sqrt{(x-x)^2 + (y+1/4)^2} = |y+1/4|.$$

Stąd

$$|y+1/4| = \sqrt{x^2 + (1/4-y)^2},$$

$$(y+1/4)^2 = x^2 + (1/4-y)^2,$$

$$y = x^2.$$

3. W przypadkach $A = (0, b)$ i $y = -b$ lub $y = -c$ wykonujemy podobne rachunki otrzymując także parabole.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 7

OKRĘGI PRZECINAJĄCE SIĘ W DWÓCH PUNKTACH.

A. Problem badawczy

Wyznaczyć wszystkie okręgi przecinające się w punktach $A = (1, 0)$ i $B = (2, 0)$ płaszczyzny.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Wyznaczyć wszystkie okręgi przecinające się w punktach płaszczyzny $A = (1, 0)$ i $B = (0, 1)$.

(b) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Równanie okręgu o środku w punkcie (a, b) i promieniu $r > 0$ ma postać

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{1}$$

2. Zakładamy, że punkty A i B spełniają równanie (1). Stąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = r^2, \\ (a-2)^2 + b^2 = r^2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$(a-1)^2 + b^2 = (a-2)^2 + b^2,$$

$$a = \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = r^2,$$

$$b = \pm\sqrt{r^2 - 1/4}, \quad \text{gdzie } r \geq \frac{1}{2} \text{ dowolne.}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Należy tu zauważyć, że środki znalezionych okręgów leżą na prostej $x = 3/2$. Zrobić też odpowiednie rysunki.

3. Dla punktów $A = (1, 0)$ i $B = (0, 1)$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} (1-a)^2 + b^2 = r^2, \\ a^2 + (1-b)^2 = r^2. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$(1-a)^2 + b^2 = a^2 + (1-b)^2,$$

$$a = b,$$

$$(1-a)^2 + a^2 = r^2,$$

$$2a^2 - 2a + 1 - r^2 = 0.$$

Rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe względem a mamy:

$$\Delta = 4 - 8(1 - r^2) = 4(2r^2 - 1),$$

$$\Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |r| \geq \sqrt{2}/2.$$

Zatem dla $|r| \geq \sqrt{2}/2$ otrzymujemy

$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2r^2 - 1}.$$

Zauważyć, że środki otrzymanych okręgów leżą na prostej $y = x$ i zrobić odpowiednie rysunki.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 8

TRÓJKĄTY PODOBNE

A. Problem badawczy

Na boku AB prostokąta $ABCD$ wybrano punkt P. Kiedy trójkąty ADP i BCP są podobne lub przystające?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Podać odpowiedzi na powyższe pytania, gdy P jest środkiem boku AB.

(b) Kiedy trójkąt PCD jest podobny do trókątów APD i PBC?

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Trójkąty ABC i$A'B'C'$ są podobne, gdy ich odpowiednie boki są parami proporcjonalne, tj., jeśli

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Charakteryzują je też dobrze znane cechy podobieństwa: BBB - bok, bok, bok; KKK - kąt, kąt, kąt; BKB - bok, kąt, bok.

2. Analogiczna charakterystyka dotyczy trójkątów przystających. Jaka? Opisać ją. Trójkąty przystające są też podobne ale nie odwrotnie.

3. Rozważamy najpierw sytuację, gdy P jest środkiem boku AB. Wtedy boki PD i PC są równej długości. Niech

α kąt przy wierzchołku D w trójkącie APD,

β kąt przy wierzchołku P w trójkącie APD.

Wtedy:

$\alpha + \beta = 90^o$,

kąt przy wierzchołku P w trójkącie PBC jest równy β,

kąt przy wierzchołku C w trójkącie PBC jest równy α.

Trójkąty APD i PBC są wówczas przystające a więc i podobne.

Trójkąt PCD jest równoramienny. Ponadto, na podstawie twierdzenia o kątach naprzemianległych jego kąty przy wierzchołkach C i D są równe β a kąt przy wierzchołku P jest równy 2α.

Trókąt PCD jest więc podobny do trókątów APD i PBC wtedy i tylko wtedy, gdy $2\alpha = \pi/2$, a w konsekwencji wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha = \beta = 45^o.$$

4. Można analizować jeszcze sytuację, gdy punkt P został wybrany w taki sposób, że jego odległość od środka boku CD jest równa połowie długości boku CD (O ile taki wybór jest możliwy!). Wtedy trójkąt PCD jest prostokątny a jego pozostałe kąty są równe α i β. W konsekwencji wszystkie trzy rozważane trókąty są podobne.

KLASA 1. PROBLEM 9

PRZEKSZTAŁCANIE WYKRESU PARABOLI

A. Problem badawczy

Zbadać wpływ na parabolę różnych przekształceń $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tj., przekształceń płaszczyzny w płaszczyznę. Wyznaczyć takie przekształcenie P, które przeprowadza parabolę $y = x^2$ na parabolę $y = ax^2 + bx + c$.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Narysować obraz paraboli $y = x^2$ poprzez powinowactwo względem osi Ox ze skalą $a \neq 0$, tj. poprzez przekształcenie $P(x, y) = (x, ay)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla $a > 0$ i dla $a < 0$. [Można też używać wzorów $x' = x$ i $y' = ay$.] Napisać równanie tej paraboli.

(b) Narysować obraz paraboli $y = x^2$ poprzez przesunięcie (translację) o wektor $(x_0, 0)$, tj. poprzez przekształcenie $P(x, y) = (x, y) + (x_0, y) = (x + x_0, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla $x_0 \in \mathbb{R}$. Napisać równanie tej paraboli.

(c) Narysować obraz paraboli $y = x^2$ poprzez przesunięcie (translację) o wektor $(0, y_0)$, tj. poprzez przekształcenie $P(x, y) = (x, y) + (0, y_0) = (x, y + y_0)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla $y_0 \in \mathbb{R}$. Napisać równanie tej paraboli.

(d) Co daje złożenie przekształceń opisanych w punktach (a), (b) i (c), tj. kolejne wykonanie tych przekształceń na paraboli $y = x^2$?

(e) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Analizę zaczynamy od prostych przykładów przekształceń, np.

$$P(x, y) = (x, ay) \text{ dla } a = 1, 2, -1,$$

$$P(x, y) = (x + x_0, y) \text{ dla } x_0 = 1, 2, -1;$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$P(x,y) = (x, y+b) \text{ dla } y_0 = 1, 2, -1;$$

i obserwujemy wpływ tych przekształceń na parabolę $y = x^2$, tj. wyznaczamy punkty płaszczyzny $P(x, x^2)$.

2. Powinowactwo względem osi Ox ze skalą a przeprowadza parabolę $y = x^2$ na $y = ax^2$ ponieważ dla $P(x,y) = (x, ay)$ i punktów paraboli $(x,y) = (x, x^2)$ otrzymujemy $P(x,x^2) = (x, ax^2)$.

3. Przesunięcie o wektor $(p, 0)$ przeprowadza parabolę $y = x^2$ na parabolę $y = (x-p)^2$ ponieważ dla $P(x,y) = (x+p, y)$ otrzymujemy $P(x,x^2) = (x+p, x^2)$ i podstawiając $t = x+p$ mamy $x = t-p$ oraz $P(x,x^2) = (t, (t-p)^2)$, tj wartości $t \in \mathbb{R}$ przyporządkowana jest wartość $(t-p)^2$. Zatem $y = (x-p)^2$ jest obrazem paraboli $y = x^2$ poprzez P.

4. Przesunięcie o wektor $(0, q)$ przeprowadza parabole $y = x^2$ na parabolę $y = x^2 + q$ ponieważ dla $P(x,y) = (x, y+q)$ otrzymujemy $P(x,x^2) = (x, x^2+q)$.

5. Dla $a \neq 0$ mamy

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Na podstawie wskazówek 2-5 mamy: wykres paraboli $y = ax^2 + bx + c$ uzyskamy poprzez kolejne wykonanie następujących przekształceń:

przesunięcie o wektor $(-b/2a, 0)$,
powinowactwo względem osi Ox ze skalą a,
przesunięcie o wektor $(0, -(b^2 - 4ac)/4a)$.

6. Zbadać, czy kolejność przekształceń ma znaczenie. Podać przykłady.

7. Znaleźć przekształcenia P dla paru konkretnych parabol, np. dla $y = 3x^2 - 2x + 4$ oraz dla $y = 10x - 7x$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 1. PROBLEM 10

OPTYMALNY WYBÓR DZIAŁKI BUDOWLANEJ

A. Problem badawczy

Do kupienia jest działka budowlana w kształcie kwadratu. Nabywca może jednakże kupić działkę w kształcie prostokąta zmniejszając długość jednego boku o x procent oraz zwiększając drugi bok o $2x$ procent przy warunku $x \leq 20$. Jaki kształt działki wybierze nabywca kierując się tym aby uzyskać działkę o maksymalnej powierzchni?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jak będzie odpowiedź przy braku warunku na x?

(b) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Możemy założyć, że bok kwadratu ma długość 1. Pole prostokąta powstałego z kwadratu po zmniejszeniu jednego boku o $x\%$ i zwiększeniu drugiego boku o $2x\%$ będzie równe

$$
\begin{aligned}
& p(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2x}{100}\right) = \\
& -\frac{2}{100^2}x^2 + \frac{1}{100}x + 1 = \\
& -\frac{2}{100^2}\left(x^2 - \frac{100}{2}x - \frac{100^2}{2}\right) = \\
& -\frac{2}{100^2}\left(x^2 - 2 \cdot 25 \cdot x + 25^2 - 25^2 - \frac{100^2}{2}\right) = \\
& -\frac{2}{100^2}\left((x-25)^2 - 9 \cdot 25^2\right) = \\
& -\frac{2}{100^2}(x-25)^2 + \frac{9}{8}.
\end{aligned}
$$

Pole prostokąta ma zatem największą wartość równą 9/8 dla $x = 25$.

2. Do wyznaczenia największej wartości funkcji kwadratowej p można użyć także gotowych wzorów na współrzędne wierzchołka paraboli $y = p(x)$.

3. Zauważmy teraz, że wartość $x = 25$ nie spełnia ograniczenia $x \leq 20$. Dopuszczalne są jedynie wartości $x \in [0, 25]$.

4. Wykres paraboli $y = p(x)$ pokazuje iż na przedziale $[0, 25]$ funkcja kwadratowa p jest rosnąca. Zatem p osiąga największą wartość w punkcie $x = 20$ oraz

$$p(20) = -\frac{2}{100^2}(20 - 25)^2 + \frac{9}{8} = \frac{28}{25} = 1,12.$$

5. W konsekwencji, przy ograniczeniu $x \leq 20$ nabywca wybierze działkę o wymiarach

$$\frac{4}{5} \times \frac{7}{5} \text{ i polu } = 1,12.$$

W przypadku braku ograniczeń nabywca wybierze działkę o wymiarach

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} \text{ i polu } = 1,13.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 1

INDUKCJA MATEMATYCZNA I SUMOWANIE ILOCZYNÓW

A. Problem badawczy

Uzyskać skrócony wzór dla sumy iloczynów postaci

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! \ .$$

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Obliczyć kilka pierwszych sum: S_1, S_2, S_3, S_4 i uzasadnić hipotezę $S_n = (n+1)! - 1$.

(b) Przeprowadzić dowód indukcyjny twierdzenia: Dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

(*) $$S_n = (n+1)! - 1 \ .$$

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Sumy S_1, S_2, S_3, S_4 są postaci:

$$S_1 = 1 \cdot 1! = 1,$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5,$$

$$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23,$$

$$S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119,$$

Teraz należy zauważyć, że

$$S_1 = 2! - 1, \quad S_2 = 3! - 1, \quad S_3 = 4! - 1, \quad S_4 = 5! - 1.$$

Uzasadniona jest więc hipoteza: $S_n = (n+1)! - 1$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

2. Dowód hipotezy należy przeprowadzić w oparciu o twierdzenie o zasadę indukcji matematycznej. Należy opisać oraz przedyskutować tę zasadę przed rozpoczęciem dowodu.

3. Procedura dowodu indukcyjnego jest tu następująca:

(1) Sprawdzamy prawdziwość wzoru (*) dla $n = 1$.
(2) Przyjmujemy założenie indukcyjne, że wzór (*) zachodzi dla pewnej liczby $n \geq 1$.
(3) Na podstawie założenia indukcyjnego (2) wyprowadzamy wzór (*) dla liczby $n + 1$.
(4) Stwierdzamy, że "Na podstawie zasady indukcji matematycznej wzór (*) zachodzi dla każdej liczby naturalnej".

Procedury tej należy skrupulatnie przestrzegać.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 2

LICZBY MERSENNE'A

A. Problem badawczy

Liczby $2^n - 1$, $n = 1, 2, ...$, nazywane są liczbami Mersenne'a. Niektóre z tych liczb są liczbami pierwszymi. Podać kilka przykładów liczb pierwszych Mersenne'a. Zbadać liczby Mersenne'a postaci $2^{4n} - 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Czy któraś z nich jest liczbą pierwszą?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Zbadać kilka początkowych liczb Mersenne'a. Które z nich nie są liczbami pierwszymi?

(b) Pokazać, że każda liczba $2^{4n} - 1$, $n = 1, 2, ...$, jest podzielna przez 5.

(c) Pokazać, że liczba $4 + 4^2 + ... + 4^{1000}$ jest podzielna przez 20.

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Liczbę Mersenne'a $2^n - 1$ można określić jako sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...$ Istotnie, mamy

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1.$$

2. Kolejne liczby Mersenne'a: 1, 3, 7, 15, 31, 63, . . .

3. Kolejne liczby pierwsze Mersenne'a to: 3, 7, 31,. . .

4. Kolejne liczby Mersenne'a postaci $2^{4n} - 1$ to:

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15,$$

$$2^8 - 1 = 255,$$

$2^{12} - 1 = 4095,$

$\ldots$

Zauważyć, że każda z nich jest podzielna przez 5.

5. Stawiamy hipotezę, że każda liczba postaci $2^{4n} - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, jest podzielna przez 5.

6. Przeprowadzamy dowód indukcyjny. Przypadek $n = 1$ został już sprawdzony. Załóżmy (założenie indukcyjne), że: dla pewnego $n \geq 1$ liczba $2^{4n} - 1$ jest podzielna przez 5. Pokażemy, że liczba $2^{4(n+1)} - 1$ jest też podzielna przez 5. Mamy

$$2^{4(n+1)} - 1 = 2^{4n}2^4 - 1 = 2^{4n}2^4 - 2^4 + 2^4 - 1 =$$

$$2^4(2^{4n} - 1) + (2^4 - 1).$$

Na podstawie założenia indukcyjnego oraz przypadku $n = 1$ liczba $2^4(2^{4n} - 1) + (2^4 - 1)$ jest podzielna przez 5. W konsekwencji, na mocy zasady indukcji matematycznej, każda liczba postaci $2^n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$, jest podzielna przez 5. A zatem nie może być liczbą pierwszą.

7. Rozwiązanie problemu (c) przebiega teraz następująco:

$$4 + 4^2 + \ldots + 4^{1000} = 4\frac{1 - 4^{1000}}{1 - 4} = \frac{4}{3}(2^{2000} - 1) =$$

$$\frac{4}{3}(2^{4 \cdot 250} - 1).$$

Na podstawie (b) liczba $2^{4 \cdot 500} - 1$ jest podzielna przez 5. W konsekwencji, liczba $4 + 4^2 + \ldots + 4^{1000}$ jest podzielna przez 20.

KLASA 2. PROBLEM 3

NIERÓWNOŚCI Z PIERWIASTKAMI STOPNIA 2-GO I 3-GO

A. Problem badawczy

Wiadomo, że dla wszystkich $x, y \geq 0$ zachodzą nierówności:

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad \sqrt[3]{x+y} \leq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}.$$

Znaleźć najmniejsze stałe $a > 0$ i $b > 0$ takie, że dla dla wszystkich $x, y \geq 0$

(1) $$\sqrt{x+y} \leq a(\sqrt{x} + \sqrt{y}),$$

(2) $$\sqrt[3]{x+y} \leq b(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}).$$

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Wykazać, że nierówności $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ i $\sqrt[3]{x+y} \leq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ są prawdziwe.

(b) Przeprowadzić analizę nierówności (1) i (2) dla $0 < a, b < 1$.

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Nierówności $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ i $\sqrt[3]{x+y} \leq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ łatwo wykazać. Wystarczy obustronnie podnieść je do potęgi 2 i 3 odpowiednio.

2. Nierówność (1) jest równoważna kolejno nierównościom:

$$x + y \leq a^2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2, \ \ (1 - a^2)(x + y) \leq 2a^2\sqrt{xy}.$$

Dla $0 < a < 1$ - po prostych przekształceniach - otrzymujemy nierówność sprzeczną

$$\frac{x+y}{\sqrt{xy}} \leq \frac{2a^2}{1-a^2} \ \text{ dla } x, y > 0,$$

gdyż w szczególności dla $y = 1$ sprzeczna jest nierówność

$$\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2a^2}{1-a^2} \quad \text{dla } x > 0.$$

Wystarczy bowiem zauważyć, że $\sqrt{x}$ jest nieograniczony. W konsekwencji jedynie stałe $a \geq 1$ spełniają nierówność (1). Zatem stała $a = 1$ jest minimalna.

3. Podobnie jak poprzednio nierówność (2) jest równoważna nierówności

$$x + y \leq b^3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3.$$

Na podstawie wzoru na sześcian sumy i po prostych przekształceniach mamy

$$(1-b^3)(x+y) \leq 3b^3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}).$$

Stąd dla $0 < b < 1$ otrzymujemy nierówność sprzeczną

$$\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}} \leq \frac{3b^3}{1-b^3}.$$

Wystarczy bowiem przyjąć $y = 1$ i rozważać $x \geq 1$. Wtedy

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} = \frac{x}{2\sqrt[3]{x^2}} \leq \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{3b^3}{1-b^3}.$$

Stąd wynika ograniczoność $\sqrt[3]{x}$ przy wszystkich $x \geq 1$. Sprzeczność staje się więc oczywista bo wartości funkcji $\sqrt[3]{x}$ tworzą zbiór nieograniczony (wystarczy tu intuicyjne pojęcie zbioru nieograniczonego i wykres funkcji).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 4

WARTOŚCI BEZWZGLĘDNE Z DWIEMA ZMIENNYMI

A. Problem badawczy

Przedstawić geometrycznie zbiór rozwiązań nierówności

$$|x| + |y| \leq 2 \tag{1}$$

a następnie rozwiązać układ

$$|x| + |y| \leq 2 \;\text{ i }\; y = c, \tag{2}$$

gdzie c jest liczbą całkowitą.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jak zmieni się rozwiązanie układu (2), jeśli założymy, że c jest liczbą rzeczywistą?

(b) Jak zmieni się rozwiązanie układu (2), gdy prostą $y = c$ zastąpimy prostą $y = x + c$?

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Rozwiązania nierówności (1) znajdziemy rozpatrując przypadki:

1) $x \geq 0$ i $y \geq 0$,

2) $x \geq 0$ i $y < 0$,

3) $x < 0$ i $y \geq 0$,

4) $x < 0$ i $y < 0$.

Rysując proste $\pm x \pm y = 2$ wyznaczymy zbiór $D \subset \mathbb{R}^2$ reprezentujący rozwiązania nierówności (1).

2. Cięcie zbioru D prostymi $y = c$ pozwala opisać rozwiązania układu (2) w przypadku, gdy c jest liczbą całkowitą, jak i w przypadku, gdy c jest liczbą rzeczywistą.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 5

JAK ZMIANA CENY WPŁYWA NA DOCHÓD?

A. Problem badawczy

Badania marketingowe wykazały, że zmniejszenie ceny biletu do kina o 20% spowoduje wzrost liczby widzów o 30%. O ile procent zwiększy się dochód (brutto) kina jeśli wprowadzona zostanie niższa cena biletu?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jaka jest krytyczna wartość ceny biletu? Wartość krytyczna to taka niższa cena biletu, która zwiększy ilość widzów ale nie zmieni dochodu.
(b) Jak można uogólniać rozważany problem?
(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Wprowadzamy następujące oznaczenia: k aktualna cena biletu, n liczba sprzedawanych (miesiecznie) biletów po cenie k. Wtedy:

$$kn = \text{dochód kina przy cenie biletu } k$$

$$\text{nowa cena biletu} = k - 20\% \cdot k = k - \frac{1}{5}k = \frac{4}{5}k,$$

prognozowana liczba widzów przy cenie biletu $(4/5)k$ wyniesie

$$n + 30\%n = n + \frac{3}{10}n = \frac{13}{10}n,$$

a prognozowany dochód przy zmiejszonej cenie wyniesie

$$\frac{4}{5}k \cdot \frac{13}{10}n = \frac{26}{25}kn.$$

Stąd otrzymujemy

$$\text{przyrost dochodu} = \frac{26}{25}kn - kn = \frac{1}{25}kn$$

a w konsekwencji prognozowany procentowy wzrost dochodu kina wyniesie

$$\frac{\text{przyrost dochodu}}{\text{aktualny dochód}} = \frac{(1/25)kn}{kn} = \frac{1}{25} = 4\%.$$

2. Rozpatrzmy teraz problem krytycznej wartości ceny biletu? Niech

x zmienna wyrażająca zmniejszenie ceny biletu w %,

$p = p(x)$ funkcja przyrostu liczby widzów, $x \in [0, 99]$,

$p(x) =$ procentowy wzrost liczby widzów gdy cenę zmniejszono o x.

Na podstawie badań marketingowych mamy $p(0) = 0$ oraz $p(20) = 30$. Ponadto przyjmujemy założenie: funkcja prognozująca procentową zmianę liczby widzów ma postać

$$p(x) = \frac{30}{\log 21} \log(1 + x) \quad \text{dla } x \in [0, 99].$$

Wtedy: $p(0) = 0$, $p(20) = 30$, $p(99) \approx 45,38$. Należy tu zrobić wykres tej funkcji i zaakceptować jej przebieg zmienności. Można też przyjąć inną funkcję p, jeśli miałaby ona lepiej opisywać reakcje potencjalnych widzów na zmianę cen biletów.

3. Przystępujemy teraz do znalezienia wartości krytycznej ceny przy funkcji prognozującej $p(x)$. Liczba widzów przy zmniejszeniu ceny o x wyniesie

$$n + \frac{p(x)}{100} n = \left(1 + \frac{p(x)}{100}\right) n.$$

Przyrost dochodu będzie równy

$$\left(1 + \frac{p(x)}{100}\right) n \cdot \left(k - \frac{x}{100} k\right) - kn.$$

Pozostaje zatem rozwiązać wzgl. x równanie

$$\left(1 + \frac{p(x)}{100}\right) n \cdot \left(k - \frac{x}{100} k\right) - kn = 0.$$

a po uproszczeniu równanie

$$\left(1 + \frac{p(x)}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) - 1 = 0.$$

4. Do dalszych obliczeń można wykorzystać teraz komputer.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 6

PŁASZCZYZNA W PRZESTRZENI

A. Problem badawczy

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy płaszczyźny określone wzorami

$$(\alpha) \qquad x + y + \frac{z}{c} = 1,$$

gdzie $c > 0$. Niech A, B i C oznaczają odpowiednio punkty przecięcia płaszczyzny (α) z osiami Ox, Oy i Oz a $D = (0,0,0)$. Wyznaczyć objętość czworościanu $ABCD$ oraz pole trójkąta ABC.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Dla jakiego c czworościan $ABCD$ ma objętość równą 1?

(b) Dla jakiego c trójkąt ABC ma pole równe 1?

(c) Jaka jest odległość punktu D od płaszczyzny (α) ?

(d) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Zrobić - w układzie współrzędnych - rysunek czworościanu $ABCD$ oraz zaznaczyć trójkąt ABC.

2. Przyjąć za podstawę czworościanu trójkąt DAB a za jego wysokość odcinek DC. Stosując wzór na objętość ostrosłupa:

$$\textbf{objętość} = \frac{1}{3} \cdot \text{pole podstawy} \cdot \text{wysokość}$$

wyznaczamy objętość czworościanu $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot c = \frac{c}{6}.$$

3. Bok AB trójkąta ABC ma na podstawie twierdzenia Pitagorasa długość równą $\sqrt{2}$. Aby wyznaczyć pole trójkąta ABC należy wyznaczyć jeszcze jego wysokość. Niech E będzie środkiem odcinka AB. Wtedy (uzasadnić)

$$E = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Stąd wysokość CE trójkąta ABC wynosi

$$|CE| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + c^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + c^2}.$$

W konsekwencji, pole trójkąta ABC jest równe

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c^2}.$$

4. Odległość d punktu D od płaszczyzny (α) możemy wyznaczyć stosując wzór na objętość czworościanu $ABCD$ przyjmując trójkąt ABC za jego podstawę. d jest wówczas wysokością czworościanu $ABCD$. Otrzymujemy zatem do rozwiązania równanie

$$\frac{c}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2c^2} \cdot d.$$

Stąd

$$d = \frac{c}{\sqrt{1 + 2c^2}}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 7

PUNKTY RÓWNOODLEGŁE OD PROSTEJ I OKRĘGU

A. Problem badawczy

Dany okrąg jest styczny do pewnej prostej lub z nią rozłączny. Wyznaczyć zbiór punktów równoodległych od prostej i od okręgu.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Wyznaczyć zbiór punktów równoodległych od osi Ox i od okręgu $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

(b) Wyznaczyć zbiór punktów równoodległych od osi Ox i od okręgu $x^2 + (y-2)^2 = 1$.

(c) Czy każda parabola $y = ax^2$, $a > 0$, jest zbiorem punktów równoodległych od prostej $y = 0$ i pewnego okręgu $x^2 + (y-r)^2 = r^2$?

(d) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Zastosujemy metody analityczne badając problem na płaszczyźnie kartezjańskiej.

2. Rozważamy najpierw problem (a).

Niech $P = (x_1, y_1)$ punkt równoodległy od prostej $y = 0$ i od okregu $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (zrobić odpowiedni rysunek). Wtedy odległość punktu P od osi Ox wynosi y_1 a jego odległość od okręgu wynosi

$$\sqrt{x_1^2 + (y_1-1)^2} - 1.$$

Współrzędne punktu P spełniają więc równanie

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + (y_1-1)^2} - 1.$$

W konsekwencji zbiór punktów (x, y) równoodległych od prostej $y = 0$ i okręgu $x^2 + (y-1)^2 = 1$ spełnia równanie

$$y = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 1.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$(y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2,$$

$$y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$

$$4y = x^2.$$

Zbiorem punktów równoodległych od prostej $y = 0$ i okręgu $x^2+(y-1)^2 = 1$ jest zatem parabola

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

3. Problem (b) rozważamy podobnie.

4. Problem (c) jest tu problemem odwrotnym. Niech $P = (x_1, y_1)$ będzie punktem paraboli $y = ax^2$. Szukamy okręgu $x^2 + (y-r)^2 = r^2$, dla którego parabola $y = ax^2$ jest zbiorem punktów równoodległych od prostej jak i od tego okregu. Do rozważenia jest zatem równanie

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - r)^2} - r,$$

gdzie $y_1 = ax_1^2$. Przekształcając to równanie otrzymujemy

$$(y_1 + r)^2 = x_1^2 + (y_1 - r)^2,$$

$$4y_1 r = x_1^2, \quad \text{tj.} \quad 4ax_1^2 r = x_1^2.$$

Stąd, dla $x_1 \neq 0$, otrzymamy

$$r = \frac{1}{4a}.$$

Zatem szukanym okręgiem jest okrąg o równaniu

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(\frac{1}{4a}\right)^2.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 8

TWIERDZENIA TALESA I PITAGORASA A MIERZENIE ODLEGŁOŚCI

A. Problem badawczy

Jak obliczyć odległość między dwoma punktami A i B w terenie, jeśli nie ma możliwości bezpośredniego zmierzenia odległości AB ?

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Jak obliczyć odległość między dwoma punktami A i B, jeśli punkt A jest niedostępny, ale znane są azymuty z dowolnego punktu terenu na punkty A i B ?

(b) Jak obliczyć odległość między dwoma dostępnymi punktami A i B, jeśli między nimi istnieje przeszkoda uniemożliwiająca bezpośredni pomiar odległości, a znany jest tylko kierunek prostopadły do odcinka AB ?

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Pomiar odległości w takiej sytuacji wydaje się pozornie niemożliwy ale pomocne w takich sytuacjach mogą być twierdzenie Talesa oraz twierdzenie Pitagorasa. Należy skonstruować tylko odpowiednią sytuację geometryczną. Będziemy przy tym zakładać, że powierzchnia ziemi lokalnie (tj. przy małych odległościach) jest płaszczyzną.

2. Twierdzeniu Talesa można nadać następująca formę: Dany jest trojkąt ABC. Na boku BC zaznaczamy dowolny punkt D i prowadzimy przez ten punkt odcinek równoległy do AB aż do przecięcia się w punkcie E należącym do boku CA. Wtedy:

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{|AC|}{|EC|}.$$

3. Problem (a) rozwiązujemy następująco. Wybieramy punkt C tak, aby punkty A, B i C tworzyły trójkąt oraz możliwy był pomiar odcinka BC. Na boku BC zaznaczamy punkt D będący (na przykład) środkiem odcinka BC. Na podstawie znajomości azymutów z punktu C na punkty A i B przez punkt D prowadzimy odcinek równoległy do boku AB aż do przecięcia się z bokiem AC. Otrzymany punkt oznaczamy literą E. Z Twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{|BC|}{|DC|} = \frac{2 \cdot |DC|}{|DC|} = 2.$$

Stąd

$$|AB| = 2 \cdot |ED|.$$

Wystarczy zatem dokonać pomiaru odcinka ED.

4. Punkt D nie musi być środkiem odcinka BC. Uzasadnić to.

5. W problemie (b), gdzie azymuty nie są dostępne, punkt C wybieramy w taki sposób, żeby odcinki AB i BC tworzyły kąt prosty. Mierzymy odległości $|BC|$ i $|AC|$. Na podstawie Twierdzenia Pitagorasa

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 - |BC|^2}.$$

KLASA 2. PROBLEM 9

WŁASNOŚCI I WYKRESY FUNKCJI HOMOGRAFICZNYCH

A. Problem badawczy

Zbadać różne aspekty (własności, wykresy, itp) funkcji homograficznych postaci

(*) $$f(x) = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}, \quad x \neq 0,$$

gdzie stałe a i b są rzeczywiste.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Narysować wykres i opisać własności funkcji $f(x) = 1/x$. To samo zrobić dla paru innych przykładów wykresów funkcji postaci (*).

(b) Znaleźć warunki na parametry a i b, przy których funkcja homograficzna postaci (*) jest nieparzysta.

(c) Znaleźć przekształcenie płaszczyzny $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które przeprowadza

$$\text{wykres } y = \frac{1}{x} \text{ na wykres } y = \frac{2x+3}{x}.$$

Narysować także wykresy tych funkcji.

(d) Narysować i porównać wykresy funkcji

$$g(x) = \left|\frac{2x+3}{x}\right|, \qquad h(x) = \frac{2|x|+3}{|x|}.$$

(e) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Analizę należy rozpocząć od kilku możliwie prostych przykładów funkcji postaci (*) rysując ich wykresy i opisując zauważalne własności (monotoniczność, asymptoty, punkty przecięcia z osiami). Sugerowane przykłady to:

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{2}{x}, \quad \frac{-1}{x}, \quad 1+\frac{1}{x}, \quad -1+\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x-1}, \text{ itd.}$$

2. Funkcja f określona na dziedzinie X symetrycznej wzgl. zera jest nieparzysta, jeśli $f(-x) = -f(x)$ dla każdego $x \in X$. Dla funkcji postaci (*) mamy

$$f(-x) = -f(x) \ \Leftrightarrow a + \frac{b}{-x} = -\left(a + \frac{b}{x}\right) \ \Leftrightarrow$$

$$a - \frac{b}{x} = -a - \frac{b}{x} \ \Leftrightarrow a = -a \ \Leftrightarrow a = 0.$$

Zatem nieparzyste są funkcje homograficzne postaci $f(x) = \frac{b}{x}$. Zrobić wykres takiej funkcji.

3. Aby znaleźć odpowiednie przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę należy zauważyć, że:

$$\frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}.$$

Jeśli więc weźmiemy przekształcenie $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem

$$P(x, y) = (x, 2 + 3y),$$

to otrzymamy

$$P(x, 1/x) = (x, 2 + 3 \cdot (1/x)) = (x, 2 + 3/x).$$

Zatem P przekształca w szczególności wykres $y = 1/x$ na wykres $y = 2 + 3/x = (2x+3)/x$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KLASA 2. PROBLEM 10

CIĄGI OKREŚLONE REKURENCYJNIE

A. Problem badawczy

Dane są liczby rzeczywiste a i b. Przeprowadzić analizę równania

(*) $$x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_n = 0,$$
$$n = 1, 2, ...,$$

gdzie $x_1, x_2, ...$ jest ciągiem liczb rzeczywistych. Podać przykłady rozwiązań. Równania tego typu nazywamy równaniami rekurencyjnymi.

B. Problemy szczegółowe i pochodne

(a) Czy równanie (*) określa jednoznacznie ciąg?

(b) Czy ciągi geometryczne spełniają równanie (*)?

(c) Inne problemy dostrzeżone przez uczniów i warte zbadania.

C. Wskazówki metodologiczne

1. Równanie (*) możemy zapisać w postaci

(**) $$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,\ n = 1, 2, ...$$

Zauważmy, że dla $a = b = 1$ otrzymujemy tu słynny ciąg Fibonacciego z 1202 roku związany z obliczaniem liczebności populacji królików. Ze wzoru (**) mamy:

$$x_3 = ax_2 + bx_1,$$

$$x_4 = ax_3 + bx_2,$$

itd.

Jest widoczne, ze ciąg jest jednoznacznie określony przez podanie jego pierwszych dwóch wyrazów x_1 i x_2. Pozostałe wyrazy ciągu są automatycznie określone przez równanie (**). Na przykład, przyjmując $a = b = 1$, $x_1 = 1$ i $x_2 = 1$ otrzymujemy:

$$x_3 = 1 + 1 = 2,\ x_4 = 1 + 2 = 3,\ x_5 = 3 + 2 = 5,$$
$$x_6 = 5 + 3 = 8,\ .\ .\ .$$

2. Rozważmy teraz ciąg geometryczny: $x_n = q^n$, $n = 1, 2, ...$, gdzie $q \neq 0$. Załóżmy, że ciąg (q^n) spełnia równanie (*). Wtedy:

$$q^{n+2} - aq^{n+1} - bq^n = 0, \text{ tj.,}$$

$$q^2 - aq - b = 0.$$

Równanie to ma rozwiązanie rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta = a^2 + 4b \geq 0$. Ponadto rozwiązanie (rozwiązania) ma (mają) postać

$$q = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

3. Rozważyć przykład dla $a = b = 1$. Mamy tu $\Delta = 5$. Zatem ciąg:

$$x_1 = q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$x_2 = q^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

$$.\ .\ .$$

jest przykładem rozwiązaniem równania (*).

4. Zauważyć, że jeśli ciąg (x_n) jest rozwiązaniem równania (*) a $c \in \mathbb{R}$, to ciąg (cx_n) jest także rozwiązaniem równania (*).

5. Podobnie, jeśli ciągi (x_n) i (y_n) są rozwiązaniami równania (*), to ich suma czyli ciąg $(x_n + y_n)$ jest również rozwiązaniem równania (*).

6. Zbadać, czy ciągi postaci (nq^n) mogą być rozwiązaniami równania (*).