KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Włodzimierz Bąk i Andrzej Spakowski

Uniwersytet Opolski, Instytut Matematyki i Informatyki

Komponent wspólny dla Kół Młodych Naukowców z przedmiotu matematyka dla klas licealnych 2 i 3 w roku szkolnym 2011 / 2012.

w miejscowościach

Kluczbork, Ostrzeszów, Syców i Wieluń

Opis

Projekt zakłada zrealizowanie w Kołach Młodych Naukowców klas licealnych 2 oraz 3 dziewięciu problemów matematycznych. Ostatnie 10-te zajęcia będą przeznaczone na przeprowadzenie testu z zakresu występującego w problemach 1-9 oraz w maturalnych zestawach egzaminacyjnych z matematyki.

Każdy temat zawiera sformułowanie problemu bazowego (a) - do rozwiązywania w obu klasach oraz jego rozszerzenia (b) i (c) - do wyboru dla klasy 2 lub klasy 3. Każdy temat daje ponadto swobodę w doborze dodatkowych problemów zwłaszcza tych dostrzeżonych przez uczniów. Czasami podane są sugestie takich problemów.

Uwagi proszę zgłaszać drogą elektroniczna na adres: *aspakowski@wp.pl*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan realizacji zadań

Lp.	Temat
1	*Indukcja matematyczna*
2	*Funkcje monotoniczne*
3	*Ruch piłki po paraboli*
4	*Optymalna droga*
5	*Wysokości w trójkącie*
6	*Rozmień na drobne*
7	*Całkowite wartości*
8	*Środki boków czworokątów*
9	*Dodawanie figur.*
10	*Test końcowy*

Wskazówki dotyczące sposobu opracowania

Raportu z realizacji komponentu wspólnego

MATEMATYKA

Do opracowania Raportu z realizacji komponentu wspólnego niezbędne są następujące sprawozdania:

A. Sprawozdania z każdych zajęć winny być przesyłane na bieżąco (do 7 dni) do OPTIMY w formie elektronicznej. Sprawozdania te powinny zawierać następujące elementy:

1. Nazwa ośrodka, numer i temat zajęć.
2. Data przeprowadzenia zajęć.
3. Krótki opis zrealizowanych zadań / ćwiczeń / problemów /etc.
4. Uwagi uczniów i nauczyciela.

B. Sprawozdanie z testu końcowego na ostatnich zajęciach. Sprawozdanie to powinno być przesłane do OPTIMY w terminie do 14 dni i powinno zawierać następujące elementy:

1. Nazwa ośrodka.
2. Data przeprowadzenia testu.
3. Wyniki testu w formie tabeli: „ilość punktów” - „ilość uczniów”.
4. Uwagi uczniów i nauczyciela.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Załącznik A

Programy zajęć dydaktycznych w kołach matematycznych

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 1

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Problem bazowy

(a) Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $2^n > n$.

Problemy do wyboru

(b) Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $2^n > n^2$.

(c) Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $2^n > n^3$.

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.
Sugestie: $n! > 2^n$; $n! > 3^n$; $n! > n2^n$; $n! > n^2 2^n$.

Wskazówki

(A) Badamy nierówność (a) $2^n > n+1$ dla początkowych liczb naturalnych. Dla $n = 1$ mamy $2^1 > 1$, dla $n = 2$ mamy $2^2 = 4 > 2$, dla $n = 3$ mamy $2^3 = 8 > 3$, itd. Dochodzimy do przekonania, że nierówność (a) będzie prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych. Udowodnimy to stosując zasadę indukcji matematycznej (4 kroki dowodowe).

(1) Dla $n = 1$ nierówność (a) jest prawdziwa (sprawdziliśmy to przed chwilą).

(2) Niech (założenie indukcyjne) (a) zachodzi dla pewnej liczby $n \geq 1$.

(3) Pokażemy, że (a) zachodzi dla liczby $n + 1$. Z (2) mamy:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 = 2n.$$

Wystarczy zatem pokazać, że $2n \geq n + 1$. Przeprowadzamy analizę tej nierówności. Mamy $2n \geq n + 1 \;\Leftrightarrow n \geq 1$.
Ponieważ $n \geq 1$ dla każdej liczby naturalnej, to $2n \geq n+1$ także dla każdej liczby naturalnej. W konsekwencji: $2^{n+1} > n+1$, tj. (a) zachodzi dla liczby $n + 1$.

(4) Na mocy zasady indukcji matematycznej, nierówność (a) zachodzi dla każdej liczby naturalnej ($n = 1, 2, ...$).

(B) Tak jak w problemie bazowym badamy (b) dla początkowych liczb naturalnych. Dochodzimy do przekonania, że (b) powinna zachodzić dla $n = 1$ oraz dla $n \geq 5$. Przypadek $n = 1$ jest oczywisty. Dla liczb $n \geq 5$ przeprowadzamy dowód indukcyjny.

(1) Dla $n = 5$ mamy $2^5 = 32 > 5^2 = 25$.

(2) Niech (b) zachodzi dla pewnej liczby $n \geq 5$ (założenie indukcyjne).

(3) Pokażemy (b) dla liczby $n + 1$. Mamy: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 = 2n^2$. Wystarczy zatem pokazać, że $2n^2 \geq (n + 1)^2$ dla $n \geq 5$. Mamy:

$$2n^2 \geq (n+1)^2 \;\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \;\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0.$$

Wystarczy teraz przeprowadzić analizę nierówności kwadratowej

$$x^2 - 2x - 1 \geq 0, \; x \text{ zmienna rzeczywista.}$$

Mamy: $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} < 0, \quad x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \in (2, 3).$$

Stąd (można tu narysować parabolę $y = x^2 - 2x - 1$) mamy: $2n^2 \geq (n+1)^2$ dla $n \geq 3$. W konsekwencji, ponieważ $n \geq 5$, mamy (b) dla liczby $n + 1$.

(4) Na mocy zasady indukcji matematycznej (a) zachodzi dla każdej liczby naturalnej $n \geq 5$ oraz oczywiście dla $n = 1$.

(C) Postępujemy podobnie jak w (B). W punkcie (3) dowodu indukcyjnego mamy $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2n^3$. Wystarczy zatem uzyskać nierówność $2n^3 \geq (n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Mamy

$$2n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Analiza nierówności stopnia 3 nie jest łatwa ale wystarczy zredukować problem do nierówności stopnia ≤ 2. Na przykład tak: wystarczy aby

$$2n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + n = n^3 + 3n^2 + 4n.$$

ponieważ $n^3 + 3n^2 + 3n + n \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Do analizy pozostaje zatem nierowność kwadratowa $2n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 4n$, równoważnie: $2n^2 \geq n^2 + 3n + 4$.

PROBLEM 2

FUNKCJE MONOTONICZNE

Problem bazowy

(a) Określić dziedziny i zbadać monotoniczność funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x > 0; \qquad g(x) = \frac{1}{|x|},\ x \neq 0.$$

Problemy do wyboru

(b) Wykazać, że funkcja $h(x) = x + \dfrac{a^2}{x}$ rośnie na $[a, \infty)$ oraz maleje na $(0, a]$, gdzie $a > 0$.

(c) Zbadać monotoniczność funkcji $k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Sugestie: Funkcje podobne jak wyżej, np., $|x + 1/x|$; $|x| + 1/|x|$.

Wskazówki

(A) Przypominamy najpierw podstawowe definicje. Niech $P \subset \mathbb{R}$ dowolny przedział. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest rosnąca, jeśli $f(x_1) < f(x_2)$ dla każdych $x_1 < x_2$ z przedziału P. Funkcja $f : P \to \mathbb{R}$ jest malejąca, jeśli $f(x_2) < f(x_1)$ dla każdych $x_1 < x_2$ z przedziału P.

Niech $f(x) = 1/x$ dla $x > 0$. Szkicujemy wykres funkcji f i dochodzimy do przekonania (rysunek nie jest dowodem), że f jest malejąca na $(0, +\infty)$. Teraz przeprowadzamy dowód (matematyczny) tego stwierdzenia. Niech $x_1, x_2 > 0$. Mamy: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$. W konsekwencji, f jest funkcją malejącą.

(B) Niech $a = 1$ i $x_2 > x_1 \geq 1$. Wtedy $h(x_1) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x_2) - h(x_1) > 0$ $\Leftrightarrow$

$$x_2 + \frac{1}{x_2} - x_1 - \frac{1}{x_1} = x_2 - x_1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(x_2 - x_1)(1 - \frac{1}{x_1 x_2}) = (x_2 - x_1)\frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

Podobnie argumentujemy dla $x_1, x_2 < 1$. Dla dowolnego $a > 0$ dowód łatwo zmodyfikować.

(C) Analiza (algebraiczna) monotoniczności funkcji k jest żmudna i skomplikowana. Problem ulega znacznemu uproszczeniu, gdy posłużymy sie rachunkien różniczkowym wprowadzonym ad hoc - w ograniczonym zakresie na potrzeby tylko tego problemu. Granicę funkcji w punkcie x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = b$$

wprowadzamy intuicyjnie jako "zbliżanie się" $f(x)$ do liczby b, gdy x zbliża się do x_0, równoważnie, gdy h "zbliża się" do zera. Granica

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

to tzw. pochodna funkcji w punkcie x. Przykłady:

$$f(x) = x^2,\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x,$$

$$f(x) = 1/x,\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1/(x+h) - 1/x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Łatwe jest uzasadnienie wzoru: pochodna sumy jest równa sumie pochodnych. Stąd w rozważanym przykładzie mamy: $(x^2 + 1/x)' = 2x - 1/x^2$. Teraz wykorzystamy twierdzenie o znakach pochodnej: Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest rosnąca na (a, b). Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest malejąca na (a, b). Twierdzenie to podajemy bez dowodu. Mamy:

$$k'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} > 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{2x^3 - 1}{x^2} > 0 \ \Leftrightarrow\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

W konsekwencji, k jest rosnąca na $[1/\sqrt[3]{2}, +\infty)$ oraz malejąca na $(0, 1/\sqrt[3]{2}]$.

Poprzednie zadania, gdzie $x > 0$, można także rozwiązać przy użyciu pochodnych:

$$f'(x) = (1/x)' = -1/x^2 < 0,\ \text{stąd } f \text{ jest malejąca na } (0, +\infty);$$

$$h'(x) = 1 - 1/x^2 > 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 1 > 0 \ \Leftrightarrow\ x > 1.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 3

RUCH PIŁKI PO PARABOLI

Problem bazowy

(a) Piłka o średnicy 30 cm rzucana jest przez koszykarza znajdującego się w odległości poziomej 6 metrów od kosza umieszczonego na wysokości 3 metrów. Piłka startuje z wysokości 2 metrów a następnie leci po paraboli $y = ax^2 + bx + c$ i trafia centralnie do kosza o średnicy 50 cm.

Wyznaczyć wszystkie parabole takich (centralnie trafnych) rzutów. Narysować kilka przykładów takich parabol.

Problemy do wyboru

(b) Wyznaczyć wszystkie parabole trafnych "czystych rzutów", tj. gdy piłka nie dotyka obręczy kosza.

(c) Sformułować ogólną definicję "trafnego rzutu" i wyznaczyć wszystkie parabole trafnych rzutów.

Wskazówki

Rozwiązywanie należy rozpocząć od interpretacji geometrycznej i narysowania kilku przykładowych rozwiązań (parabol).

(A) Środek piłki umieszczamy na osi pionowej w punkcie $A = (0, 2)$. Centralne trafienie ma miejsce tylko wtedy, gdy środek piłki lecąc po paraboli $y = ax^2 + bx + c$ trafia w punkt $B = (6, 3)$ a jednocześnie parabola lotu nie przecina odcinka CA, gdzie $C = (56/10, 3) = (28/5, 3)$, ponieważ 25 cm+15 cm=40 cm=4/10 m. Stąd mamy warunki:

$$2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c, \text{ stąd } c = 2,$$
$$3 = 36a + 6b + 2, \text{ stąd } b = 1/6 - 6a.$$

Ponadto $a < 0$. Rozwiązaniami tych warunków są wszystkie parabole postaci:

$$y = ax^2 + \left(\frac{1}{6} - 6a\right)x + 2, \text{ gdzie } a < 0.$$

Warunek nieprzecinania się paraboli z odcinkiem CD ma postać:

$$ax^2 + \left(\frac{1}{6} - 6a\right)x + 2 > 3 \text{ dla } x = 28/5, \text{ tj.}$$

$$a(28/5)^2 + \left(\frac{1}{6} - 6a\right)28/5 > 1,$$

$$a(28/5)^2 + 28/30 - 6a \cdot 28/5 > 1,$$

$$a \cdot (28/5) \cdot (28/5 - 6) > 1 - 28/30.$$

Stąd dostajemy

$$a < -\frac{2}{5} \cdot \frac{1 - 14/15}{28/5} = -\frac{1}{14} \cdot (1 - 14/15).$$

(B) Postępujemy podobnie jak w (A) dopuszczając odchylenia środka piłki od środka kosza o odpowiednią wielkość. Jaką?

(C) Tu możemy dopuścić jeszcze większe odchylenia. Jakie?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 4

OPTYMALNA DROGA

Problem bazowy

(a) Działka budowlana jest prostokątem ABCD o wymiarach 10x30 metrów. Krótsze boki tej działki to odcinki AD i BC. Należy poprowadzić drogę przez tę działkę w taki sposób aby: (1) droga miała szerokość 4 metrów, (2) obie krawędzie drogi przecinały boki AD i BC, (3) jedna z krawędzi przecinających bok AD przechodziła przez punkt A, (4) obszar działki zajęty przez drogę był najmniejszy. Wyznaczyć taką drogę o ile ona istnieje.

Problemy do wyboru

(b) Warunek (2) zastępujemy warunkiem: (2') obie krawędzie drogi przecinają boki AD i CD.

(c) Warunek (2) zastępujemy warunkiem: (2") obie krawędzie drogi przecinają bok AD.

(d) Co się stanie, gdy opuścimy warunek (3)?

Wskazówki

Analizę należy rozpocząć wykonując serię rysunków dla możliwych dróg spełniających warunki (1) - (4). Czy można intuicyjnie wskazać optymalną drogę?

(A) Prostokąt ABCD umieszczamy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ tak aby punkt A pokrywał się z punktem $(0, 0)$ a bok AB leżał na osi Ox. Rozważamy dwie proste równoległe reprezentujące krawędzie drogi. Proste te dla problemu (a) będą miały równania postaci:

$$y = ax \quad \text{oraz} \quad y = ax + b. \tag{*}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Parametr b możemy wyznaczyć z warunku (1): odległość tych prostych jest równa 4.

Warunek (2) pozwala wyznaczyć zakres zmienności parametru a.

Kolejny etap to wyznaczenie punktów, w których proste (*) przecinają boki kwadratu.

Teraz proste wzory pozwalają obliczyć pole tej części drogi, która znajduje się w prostokącie ABCD.

Pole to jest funkcją parametru a. Niech $f(a)$ będzie tą funkcją.

Pozostaje wyznaczyć (jeśli istnieje) najmniejszą wartość funkcji f.

(B) Postępujemy podobnie jak w (A).

(C) Przyjmujemy tu jeszcze bardziej słabe założenia. Postępujemy podobnie jak w (A) i (B) i dążymy do wyznaczenia funkcji wyrażającej pole tej części drogi, która znajduje się w prostokącie ABCD.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 5.

WYSOKOŚCI W TRÓJKĄCIE

Problem bazowy

(a) Czy liczby 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ mogą być długościami wysokości pewnego trójkąta?

Problemy do wyboru

(b) Jakie warunki muszą spełniać liczby dodatnie h_1, h_2, h_3, aby były one wysokościami pewnego trójkąta?

(c) Korzystając ze wzoru Herona na pole S danego trójkąta, sprawdzić, że

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)}},$$

gdzie h_1, h_2, h_3 są długościami wysokości tego trójkąta.

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela. Sugestie: jakie warunki muszą spełniać liczby dodatnie h_1, h_2, h_3, aby były one wysokościami trójkąta równoramiennego (ostrokątnego, rozwartokątnego)? Zastanowić się nad konstrukcją trójkąta o danych wysokościach.

Wskazówki

(A) Jak wiadomo, z odcinków a, b, c można zbudować trójkąt jedynie wtedy, gdy $a + b > c$, $a + c > b$ i $b + c > a$. Jeśli przez S oznaczymy pole trójkąta o wysokościach 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, to mamy

$$2S = a \cdot 1 = b \cdot \frac{1}{2} = c \cdot \frac{1}{3},$$

stąd $a = 2S$, $b = 4S$ i $c = 6S$. Widzimy więc, że $a + b = c$ – czyli nie ma takiego trójkąta.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(B) Rozumujemy podobnie jak w części (A). Korzystając ze wzoru na pole trójkąta otrzymujemy zależności $ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2S$, stąd $a = 2S/h_1$, $b = 2S/h_2$ i $c = 2S/h_3$. Aby istniał żądany trójkąt, suma długości dwóch boków musi być większa niż długość trzeciego boku, stąd mamy warunki:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} > \frac{1}{h_3}, \qquad \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} > \frac{1}{h_2}, \qquad \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} > \frac{1}{h_1}.$$

(C) Wzór Herona na pole S trójkąta o danych bokach a, b, c ma postać:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}, \qquad \text{gdzie} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \tag{1}$$

(można go wyprowadzić wprost ze szkolnego wzoru na pole $S = \frac{1}{2}ah$ obliczając wysokość h z twierdzenia Pitagorasa). Korzystamy z wcześniej wyprowadzonych zależności: $a = 2S/h_1$, $b = 2S/h_2$ i $c = 2S/h_3$. Podstawiając w (1) za a, b, c odpowiednie wyrażenia dostaniemy równość, o którą chodzi.

(D) Aby trójkąt o danych wysokościach h_1, h_2, h_3 był równoramienny, (poza warunkiem koniecznym na istnienie trójkąta) dwie z wysokości muszą być równe. Aby znaleźć warunek na na trójkąt ostrokątny, wygodnie jest najpierw wyznaczyć odpowiednią zależność dla jego boków (a, b, c). Z twierdzenia kosinusów wynika, że jeśli $a^2 + b^2 > c^2$ (ogólnie: suma kwadratów długości dwóch boków jest większa niż kwadrat trzeciego boku), to trójkąt jest ostrokątny; jeśli zaś $a^2 + b^2 < c^2$ (ogólnie: suma kwadratów długości dwóch boków jest mniejsza niż kwadrat trzeciego boku), to trójkąt jest rozwartokątny. Stąd odpowiednie warunki napisane dla danych wysokości mają postać: $\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} > \frac{1}{h_3^2}$ (wraz z cyklicznymi zamianami indeksów), bądź odpowiednio $\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} < \frac{1}{h_3^2}$ (wraz z cyklicznymi zamianami indeksów).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 6

ROZMIEŃ NA DROBNE!

Problem bazowy

(a) Na ile sposobów można wypłacić kwotę 15 zł przy użyciu jedno- i dwuzłotówek?

Problemy do wyboru.

(b) Rozwiązać zaproponowane zadanie dla dowolnej kwoty K zł, gdzie K jest daną liczbą naturalną.

(c) Na ile sposobów można wypłacić kwotę 15 zł używając tylko monet o nominale przynajmniej 1 zł? Jak jest odpowiedź dla dowolnej kwoty K?

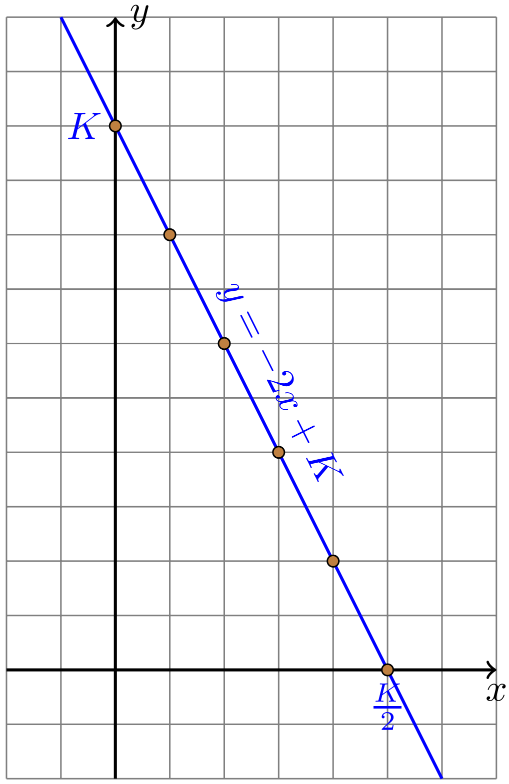
(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela. Sugestie: Spróbować znaleźć sposób na oszacowanie wynikowej liczby, gdy dopuścimy rozmienianie kwoty 15 zł dowolnymi monetami (także groszowymi). Czy rząd wielkości otrzymanego wyniku jest zgodny z oczekiwaniami?

Wskazówki

(A) Oznaczmy przez x i y odpowiednio liczby monet jednozłotowych i dwuzłotowych użytych do rozmienienia kwoty 15 zł. Mamy więc $x+2y = 15$. Zadanie można rozwiązać metodą prób i błędów: z równości $2y = 15 - x$ wynika, że x musi być liczbą nieparzystą $x \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Wtedy znajdziemy moliwe wartości jakie przyjmuje druga zmienna $y \in \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$. Zatem jest 8 takich sposobów.

(B) Dla dowolnej danej kwoty $K \in \mathbf{N}$ rozpatrywanie wszystkich możliwości metodą prób i błędów nie jest najlepszym sposobem. Zadanie można rozwiązać graficznie zauważając, że szukana wielkość jest liczbą punktów kratowych (czyli o całkowitych współrzędnych) leżących na odcinku prostej

$y = -2x + K$ znajdującym się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.



Łatwo widać, że w danym przypadku rozwiązań jest tyle, ile wyborów liczby całkowitej x, przy czym $0 \leq x \leq \frac{K}{2}$. Stąd odpowiedź: sposobów jest $\left[\frac{K}{2}\right]$ ($[a]$ oznacza część całkowitą liczby a).

(C) Jeśli do dyspozycji mamy także monety pięciozłotowe, to nietrudno zobaczyć, że tym razem wszystkich sposobów rozmienienia kwoty 15 zł jest $\left[\frac{15}{2}\right] + \left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 7 + 5 + 2 + 1 = 15$. Ogólnie, dla dowolnej kwoty K wartość ta wynosić będzie:

$$1 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{K}{5}\right]} \left[\frac{K - 5i}{2}\right]. \tag{1}$$

(D) Bardzo niedokładne szacowanie (od dołu) dostaniemy obliczając znalezioną metodą liczbę sposobów rozmienienia kwoty 15 zł (czyli 1500 groszy) na 1-, 2- i 5- groszówki nie dbając o pozostałe nominały. Zgodnie ze wzorem

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(1) ilość tych sposobów to

$$1 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{1500}{5}\right]} \left[\frac{1500-5i}{2}\right] = 1 + \sum_{i=0}^{300} \left[\frac{1500-5i}{2}\right] = 112801.$$

Tak naprawdę faktyczna liczba sposobów wydania kwoty 15 zł tylko bilonem jest wielokrotnie większa. (Można spróbować napisać odpowiedni program komputerowy, który wyliczy tę wartość).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 7.

CAŁKOWITE WARTOŚCI.

Problem bazowy.

(a) Wykazać, że jeżeli funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ przybiera wartości całkowite dla każdego całkowitego argumentu x, to liczby $2a$, $a+b$ i c muszą być całkowite.

Problemy do wyboru.

(b) Sformułować i zbadać prawdziwość twierdzenia odwrotnego.

(c) Czy jest prawdą, że jeśli $f(x)$ jest wymierne dla dowolnego $x \in \mathbb{Q}$, to a, b, $c \in \mathbb{Q}$?

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.
Sugestie: Jakie warunki muszą spełniać współczynniki a, b, c i d, aby funkcja $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ przyjmowała wartości całkowite dla całkowitych argumentów x? Rozwiązać zadanie analogiczne do (c) dla funkcji $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Wskazówki metodologiczne.

(A) Rozwiązanie można oprzeć na prostym spostrzeżeniu, że zgodnie z danym założeniem liczby $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ muszą być całkowite. Zatem liczby c, $a+b+c$ i $4a+2b+c$ są całkowite. Suma i różnica liczb całkowitych dalej jest całkowita, stąd $(a+b+c)-c = a+b \in \mathbb{Z}$ i dalej $(4a+2b+c)-2\cdot(a+b)-c = 2a \in \mathbb{Z}$. To kończy dowód.

(B) Twierdzenie odwrotne ma postać: *jeżeli liczby $2a$, $a+b$ i c są całkowite, to wartości trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ są całkowite* *dla całkowitych argumentów x.* Jest to twierdzenie prawdziwe. Można je udowodnić następująco. Mamy

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c. \tag{1}$$

Jeśli $x \in \mathbb{Z}$, to $x(x-1)/2$ też jest liczbą całkowitą, gdyż $x(x-1)$ jako iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest parzysty. Jeżeli liczby x, $2a$, $a+b$ i c są całkowite, to z (1) wynika, że $f(x)$ jest liczbą całkowitą.

(C) Zdanie to jest prawdziwe. Mamy bowiem $c = f(0) \in \mathbb{Q}$ (bo 0 jest liczbą wymierną). Podobnie otrzymujemy, że sumy

$$u = a + b = f(1) - c \qquad \text{oraz} \qquad v = a - b = f(-1) - c$$

są wymierne. Ale wtedy liczby $a = \frac{u+v}{2}$ i $b = \frac{u-v}{2}$ są wymierne – to kończy dowód.

(D) Zupełnie analogicznie można pokazać, ze dla wielomianu trzeciego stopnia $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby $g(x) \in \mathbb{Z}$ jeśli tylko $x \in \mathbb{Z}$ jest by liczby $6a$, $2b$, $a+b+c$ i d były całkowite. Mamy bowiem $g(-1), g(0), g(1), g(2) \in \mathbb{Z}$ skąd natychmiast $d \in \mathbb{Z}$ oraz $a+b+c = g(1) - g(0) \in \mathbb{Z}$. Dalej $2b = g(1) + g(-1) - 2g(0) \in \mathbb{Z}$ i w końcu $6a = g(2) - 2g(1) - 2b - g(0) \in \mathbb{Z}$. Dowód implikacji odwrotnej wynika z równości:

$$g(x) = 6a \cdot \frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x + d.$$

W tym przypadku analogon stwierdzenia zawartego w zadaniu (c) także jest prawdziwy. Dowód jest podobny jak dla wielomianu stopnia drugiego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 8

ŚRODKI BOKÓW CZWOROKĄTÓW

Problem bazowy

(a) Dany jest czworokąt wypukły o polu S. Obliczyć pole czworokąta powstałego przez połączenie odcinkami sąsiednich środków boków tego czworokąta.

Problemy do wyboru

(b) Sprawdzić, czy założenie wypukłości jest istotne w powyższym zadaniu.

(c) Środki boków dwóch czworokątow wypukłych pokrywają się. Wykazać, że pola tych czworokątów są jednakowe.

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.
Sugestia: Zbadać, czy założenie wypukłości w zadaniu (c) ma znaczenie.

Wskazówki

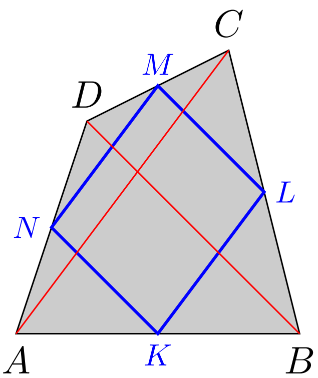
(A) Wykonując odpowiedni rysunek z pewnością zauważymy, że czworokąt, którego pole mamy wyznaczyć jest równoległobokiem. Dowód tej obserwacji (choć nie jest on niezbędny do rozwiązania zadania) jest natychmiastowy. Przyjmując oznaczenia jak na ilustracji poniżej, łatwo sprawdzamy, że odcinki NM i KL są równoległe do przekątnej AC. Podobnie odcinki NK i ML są równoległe do przekątnej DB czworokąta. Zauważmy teraz, że $P_{ANK} = \frac{1}{4}P_{ADB}$ i podobnie

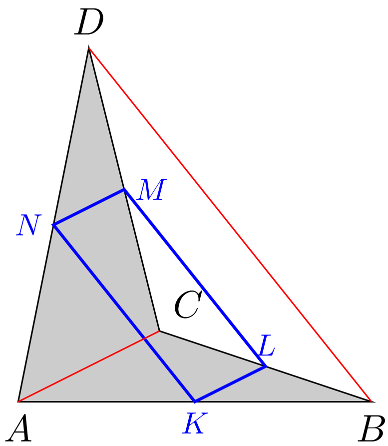
$$P_{BKL} = \frac{1}{4}P_{BAC}, \qquad P_{CLM} = \frac{1}{4}P_{CBD}, \qquad P_{DMN} = \frac{1}{4}P_{DCA}.$$

Dodając stronami równości pierwszą i trzecią oraz drugą i czwartą dostajemy

$$P_{ANK} + P_{CLM} = \frac{1}{4}S \qquad \text{oraz} \qquad P_{BKL} + P_{DMN} = \frac{1}{4}S.$$

Pozostaje zauważyć, że aby wyznaczyć pole czworokąta (równoległoboku) $KLMN$ wystarczy wziąć różnicę pola S i sumy pól trójkątów narożnych – czyli $P_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S$.





(B) Okazuje się, że założenie wypukłości można pominąć. Dowód z nieznacznymi zmianami przebiega analogicznie do pierwszego.

(C) Teza zadania wynika bezpośrednio z poprzedniej części. Jeśli środki boków dwóch czworokątow pokrywają się, to czworokąty wyznaczone przez te środki też się pokrywają. Każdy z takich czworokątów ma pole będące połową odpowiadającego mu czworokąta wyjściowego. Skoro te dwie liczby są równe, to pola wyjściowych figur także muszą być jednakowe.

(D) Oczywiście wypukłość nie ma znaczenia – twierdzenie pozostaje prawdziwe także dla czworokątów wklęsłych oraz dla par wklęsło-wypukłych. Ciekawym ćwiczeniem mogłoby być narysowanie przykładu dwóch czworokątów: wklęsłego i wypukłego o wspólnych środkach boków oraz podanie konstrukcji tego typu czworokątów (odpowiedników dla $ABCD$) dla danego równoległoboku $KLMN$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 9

DODAWANIE FIGUR

Problem bazowy.

(a) Dla dwóch płaskich figur F i G umieszczonych w prostokątnym układzie współrzędnych, określamy operację dodawania w następujcy sposób:

$$F+G=\{(x_F+x_G, y_F+y_G):\ (x_F,y_F)\in F\ \wedge\ (x_G,y_G)\in G\}.$$

Wiadomo, że F jest kwadratem o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, \pm 1)$, a G jest kwadratem, którego przekątną jest odcinek o końcach $(1,2)$ i $(2,3)$. Jaką figurą jest $F+G$?

Problemy do wyboru.

(b) Czy istnieje figura G mająca własność: $F+G=F$ dla dowolnej figury F? Czy zawsze zachodzi równość $F+G=G+F$?

(c) Znajdź pole figury będącej wynikiem działania $F+G$, jeśli wiadomo, że F i G są kwadratami o polach S_1 i S_2 i bokach równoległych do osi układu współrzędnych.

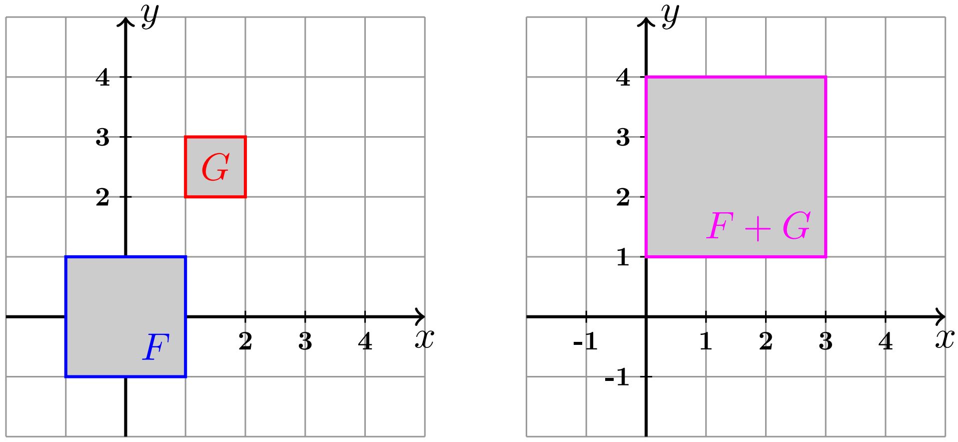
(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela. Sugestia: Sprawdź, czy wynikiem takiego dodawania dwóch odcinków jest zawsze odcinek? A czy dodając w podany sposób dwa koła zawsze otrzymamy koło?

Wskazówki metodologiczne.

(A) Nietrudno sprawdzić, że w opisanym przypadku $F+G$ jest kwadratem o boku długości 3 (rysunek). Aby to uzasadnić najlepiej najpierw zobaczyć co jest wynikiem działania $F+\{(a,b)\}$ – czyli gdy dodajemy daną figurę do figury złożonej z jednego punktu. Wtedy oczywiście wynikiem jest figura

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

F przesunięta o wektor $[a,b]$. W ten sposób można dojść do wniosku, że rezultatem działania $F+G$ będzie suma (mnogościowa) poprzesuwanych kwadratów G o wektory wyznaczone przez kwadrat F. Można już teraz zauważyć, ze wystarczy rozważyć pieć takich przesunięć: o wektor zerowy (bo $(0,0) \in F$) i o wektory o współrzędnych $[\pm 1, \pm 1]$ – związanych z wierzchołkami figury F.



(B) Tak. Jedynym takim zbiorem jest figura jednopunktowa: $G = \{(0,0)\}$ – co łatwo wyprowadzić wprost z definicji operacji dodawania figur. Opisana operacja jest też przemienna.

(C) Przeprowadzając analizę podobną do tej z pierwszego proponowanego zadania, łatwo dojść do wniosku, że wynkiem dodawania $F+G$ w opisanym przypadku także będzie kwadrat. Pozostaje wyznaczyć długość jego boku. Ponieważ interesuje nas tylko pole figury $F+G$, możemy założyć, że środek figury F pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. Niech $2d_1 = \sqrt{2S_1}$ będzie długością przekątnej kwadratu F, a $2d_2 = \sqrt{2S_2}$ – długością przekątnej kwadratu G. Kolejne wierzchołki kwadratu G przesunięte o odpowiadające im wektory $[\pm d_1, \pm d_2]$ są wierzchołkami kwadratu $F+G$. Zatem przekątna tego ostatniego ma długość $d = d_1 + 2d_2 + d_1$, jest więc sumą długości przekątnych kwadratów składowych. Pole $F+G$ wynosi

$$\frac{d^2}{2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right).$$

(D) Dodanie dwóch prostopadłych odcinków daje prostokąt – więc tu odpwowiedź jest negatywna. Natomiast wynikiem dodawania dwóch danych kół jest zawsze koło, przy czym jeśli F jest kołem o środku w (a_1, b_1) i promieniu r_1, a G jest kołem o środku w punkcie (a_2, b_2) i promieniu r_2, to $F + G$ jest kołem o środku $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ i promieniu $(r_1 + r_2)$.
Warto zbadać jak wygląda wynik dodawania figur o różnych kształtach, np. koła i kwadratu, albo odcinka i trójkąta...

PROBLEM 9

DODAWANIE FIGUR

Problem bazowy.

(a) Dla dwóch płaskich figur F i G umieszczonych w prostokątnym układzie współrzędnych, określamy operację dodawania w następujcy sposób:

$$F + G = \{(x_F + x_G, y_F + y_G) : \ (x_F, y_F) \in F \ \wedge \ (x_G, y_G) \in G\}.$$

Wiadomo, że F jest kwadratem o wierzchołkach w punktach $(\pm 1, \pm 1)$, a G jest kwadratem, którego przekątną jest odcinek o końcach $(1, 2)$ i $(2, 3)$. Jaką figurą jest $F + G$?

Problemy do wyboru.

(b) Czy istnieje figura G mająca własność: $F + G = F$ dla dowolnej figury F? Czy zawsze zachodzi równość $F + G = G + F$?

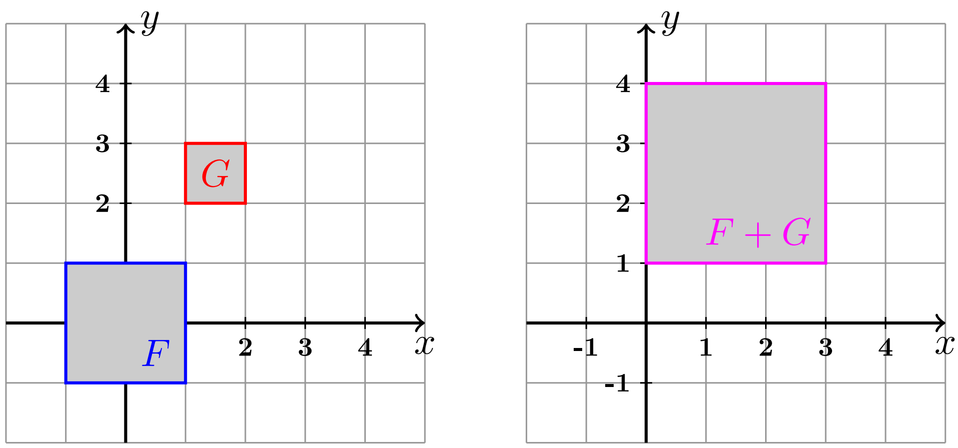
(c) Znajdź pole figury będącej wynikiem działania $F + G$, jeśli wiadomo, że F i G są kwadratami o polach S_1 i S_2 i bokach równoległych do osi układu współrzędnych.

(d) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela. Sugestia: Sprawdź, czy wynikiem takiego dodawania dwóch odcinków jest zawsze odcinek? A czy dodając w podany sposób dwa koła zawsze otrzymamy koło?

Wskazówki metodologiczne.

(A) Nietrudno sprawdzić, że w opisanym przypadku $F + G$ jest kwadratem o boku długości 3 (rysunek). Aby to uzasadnić najlepiej najpierw zobaczyć co jest wynikiem działania $F + \{(a, b)\}$ – czyli gdy dodajemy daną figurę do figury złożonej z jednego punktu. Wtedy oczywiście wynikiem jest figura

F przesunięta o wektor $[a, b]$. W ten sposób można dojść do wniosku, że rezultatem działania $F + G$ będzie suma (mnogościowa) poprzesuwanych kwadratów G o wektory wyznaczone przez kwadrat F. Można już teraz zauważyć, ze wystarczy rozważyć pieć takich przesunięć: o wektor zerowy (bo $(0, 0) \in F$) i o wektory o współrzędnych $[\pm 1, \pm 1]$ – związanych z wierzchołkami figury F.



(B) Tak. Jedynym takim zbiorem jest figura jednopunktowa: $G = \{(0, 0)\}$ – co łatwo wyprowadzić wprost z definicji operacji dodawania figur. Opisana operacja jest też przemienna.

(C) Przeprowadzając analizę podobną do tej z pierwszego proponowanego zadania, łatwo dojść do wniosku, że wynkiem dodawania $F+G$ w opisanym przypadku także będzie kwadrat. Pozostaje wyznaczyć długość jego boku. Ponieważ interesuje nas tylko pole figury $F+G$, możemy założyć, że środek figury F pokrywa się z początkiem układu współrzędnych. Niech $2d_1 = \sqrt{2S_1}$ będzie długością przekątnej kwadratu F, a $2d_2 = \sqrt{2S_2}$ – długością przekątnej kwadratu G. Kolejne wierzchołki kwadratu G przesunięte o odpowiadające im wektory $[\pm d_1, \pm d_2]$ są wierzchołkami kwadratu $F + G$. Zatem przekątna tego ostatniego ma długość $d = d_1 + 2d_2 + d_1$, jest więc sumą długości przekątnych kwadratów składowych. Pole $F + G$ wynosi

$$\frac{d^2}{2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right).$$

(D) Dodanie dwóch prostopadłych odcinków daje prostokąt – więc tu odpowowiedź jest negatywna. Natomiast wynikiem dodawania dwóch danych kół jest zawsze koło, przy czym jeśli F jest kołem o środku w (a_1, b_1) i promieniu r_1, a G jest kołem o środku w punkcie (a_2, b_2) i promieniu r_2, to $F + G$ jest kołem o środku $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ i promieniu $(r_1 + r_2)$.
Warto zbadać jak wygląda wynik dodawania figur o różnych kształtach, np. koła i kwadratu, albo odcinka i trójkąta...

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

T E S T

Rozwiązać poniższe zadania w czasie 60 min
(za każde zadanie maksymalnie 5 pkt)

---

(1) Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność $2^n > 4n - 3$?

(2) Zużycie paliwa w samochodzie określa funkcja: $z(x) = x^2 + 6x + 0,81$, gdzie $z(x)$ jest ilością spalanego paliwa wyrażoną w litrach na 100 km, a x jest chwilową prędkością samochodu wyrażoną w setkach km/h. Przy jakiej stałej prędkości x iloczyn: $z(x)\cdot$(czas podróży) będzie najmniejszy dla danej trasy. Wsk. droga = prędkość · czas.

(3) Narysować na płaszczyźnie zbiór wyznaczony przez warunek $|x|+|y| < 4$ i obliczyć jego pole. Rysunek uzasadnić odpowiednim rachunkiem (dowodem).

(4) Dany trókąt ABC ma obwód równy 1. Wykazać, że suma środkowych boków tego trójkąta jest większa od 3/4.