KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Włodzimierz Bąk i Andrzej Spakowski
Uniwersytet Opolski, Instytut Matematyki i Informatyki

Komponent wspólny dla Kół Młodych Naukowców z przedmiotu matematyka dla klas 3 licealnych w roku szkolnym 2012 / 2013

Opis

Projekt zakłada zrealizowanie w Kołach Młodych Naukowców trzecich klas licealnych dziewięciu problemów matematycznych. Ostatnie 10-te zajęcia będą przeznaczone na przeprowadzenie testu z zakresu występującego w problemach 1-9.

Każdy temat zawiera˙ będzie sformułowanie problemu bazowego (A) wymagającego znajomości metod matematycznych z zakresu klas licealnych a jego rozszerzenie (B) będzie wymagało często poznania w uproszczonym zakresie metod matematycznych stosowanych na I roku uniwersyteckich studiów matematycznych.

Niezbędne informacje z zakresu matematyki uniwersyteckiej zostaną przekazane w formie krótkiego wykładu. Celem takiego podejścia jest wstępne zapoznanie uczniów z efektywnymi metodami matematyki wyższej z wykorzystaniem granic i pochodnych.

Każdy temat - tak jak to było w poprzednich dwóch edycjach – będzie dawał dużo swobody w formułowaniu i analizowaniu dodatkowych pokrewnych problemów. Czasami podane będą sugestie takich problemów.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tematyka zajęć w kołach matematycznych

Lp.	Temat
1	*Wymierne czy niewymierne?*
2	*Indukcja matematyczna – zadania różne*
3	*Zbieżność ciągów liczbowych*
4	*Symetrie wykresów funkcji*
5	*Funkcje monotoniczne*
6	*Wielomiany numeryczne*
7	*Rozwiązywanie równań - rola funkcji ciągłych*
8	*Maksymalne wartości funkcji – zastosowania pochodnej*
9	*Nierówności trygonometryczne i granice funkcji*
10	*Test końcowy*

Wszelkie uwagi proszę zgłaszać drogą elektroniczna na adres: *aspakowski@wp.pl*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SZCZEGÓŁOWA
TEMATYKA ZAJĘĆ

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 1

WYMIERNE CZY NIEWYMIERNE?

Problem bazowy.

(A) Czy liczba 0,11235831459..., której każda cyfra (począwszy od trzeciej) po przecinku jest cyfrą jedności sumy dwóch poprzednich cyfr, jest wymierna?
Czy odpowiedź na to pytanie zmieni się, gdy zamiast sumy dwóch będziemy rozważać sumę trzech poprzednich cyfr, jak w liczbie 0,1113597175353...?

Problemy do wyboru.

(B) Czy liczba 0,13579111315171921..., której wszystkie cyfry po przecinku tworzą wypisane kolejne liczby naturalne nieparzyste, jest wymierna?

(C) Czy istnieje taka liczba niewymierna x, że suma $x + \dfrac{1}{x}$ ma wartość wymierną?

(D) Pokazać, że $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

(E) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Sugestie: Wskazanie liczby wymiernej (odp. niewymiernej) w dowolnym przedziale (a, b), gdzie $a < b$; własność gęstości zbioru liczb wymiernych (odp. niewymiernych) w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wskazówki metodologiczne.

(A) Jak wiadomo liczba rzeczywista jest wymierna jeśli da się przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$ dla p, q całkowitych i $q \neq 0$. Innym sposobem rozstrzygania o tym czy dana liczba jest niewymierna jest sprawdzenie, czy jej rozwinięcie dziesiętne jest okresowe lub skończone. Okazuje się, że pierwsza podana w zadaniu liczba jest wymierna – można to stwierdzić wypisując kolejne jej cyfry rozwinięcia dziesiętnego tak długo, aż powtórzy się pewna ich kolejna para. Można jednak przewidzieć taką sytuację używając argumentów kombinatorycznych: różnych par cyfr jest dokładnie 100, więc maksymalny okres rozwinięcia dziesiętnego badanej liczby to 100. Podobnie dla drugiego przykładu – tu okres może być nieco dłuższy (choć tak naprawdę, w pierwszym przypadku okres wynosi 60, a w drugim tylko 32).

Przy okazji omawiania zadania bazowego warto przypomnieć uczniom przytoczone własności liczb wymiernych.

(B) Taka liczba jest niewymierna. Gdyby bowiem jej rozwinięcie dziesiętne było okresowe, o okresie $k > 0$, to ponieważ wśród kolejnych bloków cyfr tej liczby wystąpi (jako liczba nieparzysta) np. $1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ cyfr}}1$, więc okres składałby się z samych zer. To jednak jest niemożliwe (w rozwinięciu tej liczby dowolnie daleko pojawia się m.in. cyfra 1).

(C) Zadanie ma rozwiązanie pozytywne. Wygodniej jest jednak rozwiązywać je ,,od tyłu" szukając takiej wartości x, dla której wyrażenie ma wartość wymierną (np. równe jest 4). Prowadzi to do równania kwadratowego:

$$x + \frac{1}{x} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Pierwiastki wynoszą $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ i $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Jak nietrudno wykazać, są to liczby niewymierne, gdyż $\sqrt{3}$ nie jest liczbą wymierną.

(D) Zgodnie z definicją funkcji logarytmicznej, równość $\log_2 5 = \frac{p}{q}$ jest równoważna z $2^{\frac{p}{q}} = 5$, czyli $2^p = 5^q$. Widzimy, że równanie to nie ma rozwiązań dla liczb całkowitych p i q – czyli $\log_2 5$ jest liczbą niewymierną.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(E) Sugerowane problemy warto początkowo rozpatrywać na konkretnych wartościach (np. w przedziale $(0, \frac{1}{100})$). Podanie sposobu konstrukcji liczby wymiernej (niewymiernej) leżącej w takim przedziale (bez użycia kalkulatora) bardzo prosto przenieść na przypadek ogólny. Gęstość oznacza tutaj, że w każdym przedziale I długości dodatniej znajduje się nieskończenie wiele liczb wymiernych (niewymiernych), co sprowadza się do zbudowania nieskończonego ciągu rozłącznych przedziałow (długości dodatniej) zawartych w I.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 2

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Problem bazowy.

(A) Udowodnić tzw. nierównośc Bernoulliego: $(1+a)^n \geq 1+an$ dla dowolnego $a > -1$ i dowolnego $n \in \mathbf{N}$.

Problemy do wyboru.

(B) Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 6$ dowolny kwadrat można podzielić na n kwadratów.

(C) Wyjaśnić na czym polega błąd w podanym rozumowaniu.

Pokażemy, że dla wszystkich $n \in \mathbf{N}$ jest

$$30n < 2^n + 110.$$

Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio: $30 < 2 + 110 = 112$. Załóżmy więc dalej, że dla pewnej wartości n nasza nierówność jest prawdziwa. Stosując ją możemy napisać ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi gdy $2^n > 30$. Zatem mamy dowód dla $n \geq 5$. Pozostaje sprawdzić pozostałe wartości n. Dla $n = 2$ jest $60 < 4 + 110 = 114$. Dla $n = 3$ jest $90 < 8 + 110 = 118$. Dla $n = 4$ jest $120 < 16 + 110 = 126$. To kończy dowód indukcyjny.

(D) Wykazać, że planszę kwadratową o wymiarach $2^n \times 2^n$ z usuniętym dowolnym polem jednostkowym można wypełnić płytkami w kształcie litery L – złożonymi z trzech kwadratów jednostkowych.

(E) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Wskazówki metodologiczne.

(A) W myśl zasady indukcji matematycznej, dla ustalonego $a > -1$, należy pokazać, że:

(I) nierówność jest prawdziwa dla $n = 1$, tzn. $(1 + a)^1 \geq 1 + a$ – co jest oczywiste,

(II) z nierówności $(1 + a)^n \geq 1 + an$ wynika nierówność otrzymana przez zastąpienie w niej liczby n przez liczbę $n + 1$:

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad \Longrightarrow \qquad (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a.$$

Mamy

$$(1+a)^n \geq 1+na \qquad \Longrightarrow \qquad (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na) \cdot (1+a)$$

czyli

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

bo $na^2 \geq 0$ dla każdego $a \geq -1$ i $n \in \mathbf{N}$. To dowodzi implikacji (II) i kończy indukcję. Dana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

(B) W tym zadaniu wykorzystamy zasadę indukcji matematycznej nieco inaczej. Udowodnimy następujące fakty:

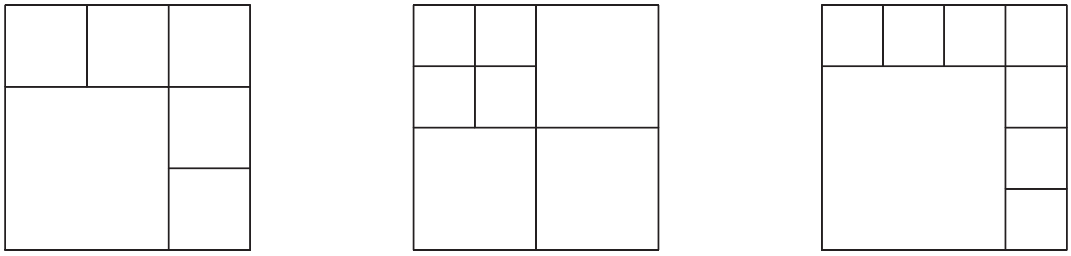
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

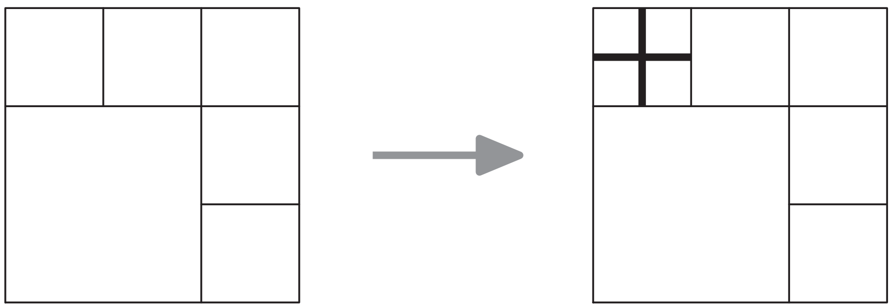
(I') każdy kwadrat można podzielić na 6, 7 i 8 kwadratów,

(II') dla $n \geq 6$, jeśli kwadrat można podzielić na n kwadratów, to można go podzielić także na $n + 3$ kwadraty.

Krok (I') najprościej zilustrować rysunkiem.



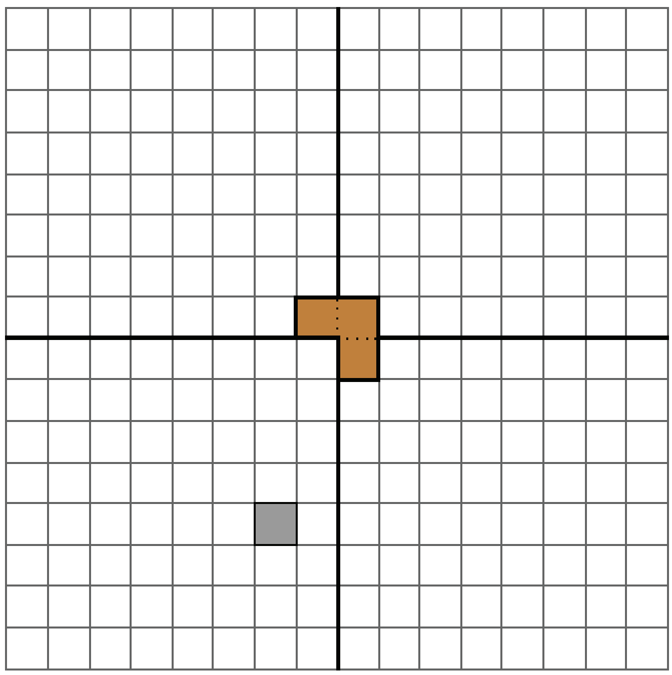
Dla dowodu kroku (II) zauważmy, że mając dowolny podział kwadratu na m kwadratów jeden z nich możemy w naturalny sposób podzielić na 4 przystające kwadraty. W ten sposób wyjściowy duży kwadrat podzielimy na $m + 4 - 1 = m + 3$ kwadraty.



Używając własności (I') i (II') można uzyskać podział kwadratu na dowolną liczbę $n \geq 6$ mniejszych kwadratów.

(C) Zasadniczy błąd tkwi w stwierdzeniu, że mamy dowód dla $n \geq 5$. Dopóki indukcja ,,nie wystartuje", główny krok indukcyjny jest pusty. To, co tak naprawdę jest dowiedzione to implikacja, że **jeżeli** dana nierówność jest prawdziwa dla pewnego $n \geq 5$, **to będzie też prawdziwa** dla parametru $n+1$. Jednak, jak łatwo widać dla $n = 5$ jest $150 > 142 = 2^5 + 110$ – czyli nierówność nie jest prawdziwa; także dla $n = 6$ jest kłopot. Dopiero dla $n = 7$ sprawdzamy, że $210 < 2^7 + 110$, więc dopiero od tego miejsca krok indukcyjny zaczyna „działać”.

(D) Dla $n = 1$ plansza 2×2 z usuniętym dowolnym polem ma kształt płytki, którą możemy go przykryć. W tym przypadku nasze twierdzenie jest prawdziwe. Założymy, że dla pewnego $k \in \mathbf{N}$ każdą planszę $2^k \times 2^k$ można pokryć L-płytkami i rozważmy planszę o wymiarach $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ z usuniętym polem.



Dzieląc ją na cztery plansze o wymiarach $2^k \times 2^k$, a usunięte pole znajdzie się w jednej z mniejszych plansz. Ten niepełny kwadratowy fragment wyjściowej dużej planszy możemy (zgodnie z poczynionym założeniem)

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

pokryć L-płytkami. Z pozostałych trzech, stykających się narożami, mniejszych fragmentów usuńmy po jednym polu, tak, że łącznie utworzą one kształt jednej L-płytki. W ten sposób dostaniemy trzy plansze o wymiarach $2^k \times 2^k$ – każde z usuniętym jednym polem. Wykorzystując ponownie założenie indukcyjne otrzymamy pokrycie dużej planszy.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 3

ZBIEŻNOŚĆ CIĄGÓW LICZBOWYCH

Problem bazowy.

(A) Dla każdej liczby naturalnej n określamy liczby całkowite a_n i b_n w ten sposób, że prawdziwa jest równość:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

– Wyznacz kilka początkowych wyrazów ciągów (a_n) i (b_n).

– Znajdź zależność rekurencyjną wiążącą n-te wyrazy tych ciągów z wyrazami następnymi (o numerach $n+1$).

– Dla ciągu $x_n = a_n - b_n\sqrt{3}$ uzasadnij, że wraz ze wzrostem indeksu n liczba $|x_n|$ jest coraz bliższa zeru.

– Wyznacz wartość, do której ,,dąży" ciąg ilorazów $\frac{a_n}{b_n}$ przy $n \to \infty$.

Problemy do wyboru.

(B) Prawdziwe jest (zgodne z intuicją) twierdzenie, że jeśli ciąg liczbowy jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny. Korzystając z tego faktu uzasadnij, że ciąg określony rekurencyjnie $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{2}$ jest zbieżny. Jaka jest jego granica?

(C) Niech $a_n = \underbrace{\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12}}}}_{n \text{ pierwiastków}}$. Pokaż, że ciąg ten jest zbieżny.

(D) Czasami wyznaczenie granicy ciągu jest trudne, choć stosunkowo prosto można pokazać, że sam ciąg musi być zbieżny. Przykładem takiego ciągu jest

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Wykaż, że jest to ciąg ograniczony i rosnący. Spróbuj (np. wykorzystując program komputerowy) wyznaczyć jego granicę lub jej przybliżenie.

(E) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Sugestie: samodzielna konstrukcja przykładow ciągow zbieżnych do zadanych granic; pojęcie podciągu; twierdzenie Bolzano-Weierstrassa; zbadanie zbieżności ciągu $x_n = \operatorname{tg} n$.

Wskazówki metodologiczne.

(A) Rozpisując potęgi $\left(1+\sqrt{3}\right)^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ łatwo wyznaczamy

$$(a_n) = (1, 4, 10, 28, 76, \ldots), \qquad (b_n) = (1, 2, 6, 16, 44, \ldots).$$

Mamy

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^{n+1} = \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) = a_n + 3b_n + (a_n + b_n)\sqrt{3}.$$

Stąd $a_{n+1} = a_n + 3b_n$ oraz $b_{n+1} = a_n + b_n$.

Jeśli $x_n = a_n - b_n\sqrt{3}$, to nietrudno zauważyć, że $x_n = \left(1-\sqrt{3}\right)^n$. Stąd $|x_n| = \left(\sqrt{3}-1\right)^n$. Ponieważ $\sqrt{3}-1 \approx 0{,}732 < 1$, więc kolejne wartości $|x_n|$ tworzą ciąg geometryczny o małym ilorazie – jest on zbieżny do zera.

Mamy teraz

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{x_n + b_n\sqrt{3}}{b_n} = \frac{x_n}{b_n} + \sqrt{3} \to \sqrt{3},$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

gdyż ciąg ułamków $\frac{x_n}{b_n}$ bardzo szybko zbiega do 0 ($b_n \to +\infty$ i $x_n \to 0$).

Warto jeszcze sprawdzić kilka początkowych ilorazów $\frac{a_n}{b_n}$ i porównać je z granicą $\sqrt{3}$, np. $\frac{76}{44} = 1{,}7272\ldots$, co daje dokładność rzędu 0,005.

Przy okazji omawiania zadania bazowego warto wyjaśnić uczniom zjawisko zbieżności ciągów liczbowych i podstawowe własności granic ciągów zbieżnych.

(B) Przed właściwym rozwiązaniem warto wyliczyć kilka początkowych wyrazów danego ciągu i zaznaczyć je na osi liczbowej. Na rysunku niemal widać, że szukaną granicą jest wartość 1. Formalny dowód tego faktu, zgodnie z sugestią podaną w opisie problemu, możemy oprzeć na monotoniczoności i ograniczoności ciągu (a_n). Ograniczoność jest jasna – żaden z wyrazów badanego ciągu nie przekracza 1. Jest to też ciąg rosnący – mamy bowiem (dzięki wcześniejszej obserwacji, że $a_n \leq 1$)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 + a_n}{2} - a_n = \frac{1 + a_n - 2a_n}{2} = \frac{1 - a_n}{2} \geq 0.$$

To dowodzi, że ciąg a_n jest zbieżny. Jeśli g będzie granicą tego ciągu, to

$$g = \frac{1 + g}{2}.$$

Stąd $g = 1$.

(C) Postępujemy jak poprzednio. Najpierw pokazujemy, że $a_n \leq 4$ (np. indukcyjnie). Jest tak istotnie, gdyż $a_1 = \sqrt{12} < 4$. Jeśli $a_k \leq 4$, to

$$a_{k+1} = \sqrt{12 + \underbrace{\sqrt{12 + \ldots + \sqrt{12}}}_{k \text{ pierwiastków}}} = \sqrt{12 + a_k} \leq \sqrt{12 + 4} = 4.$$

Stąd ograniczoność danego ciągu. To, że ciąg (a_n) jest rosnący wynika wprost z określającego go wzoru. Jest to ciąg zbieżny; niech (jak poprzednio) g będzie jego granicą. Wtedy

$$g = \sqrt{12 + g},$$

stąd $g = 4$ lub $g = -3$. Drugą możliwośc oczywiście wykluczamy.

(D) Zauważmy, że w sumie ułamków, która zadaje ciąg (a_n) kolejne składniki są coraz mniejsze (bo ich mianowniki rosną), zatem

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Std ograniczoność badanego ciągu. Dla monotoniczności obliczamy różnicę kolejnych wyrazów:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Stąd ciąg (a_n) jest rosnący, więc zbieżny.

Tempo zbieżności nie jest zbyt dobre. Mamy $a_{100} \approx 0{,}690$, $a_{1000} \approx 0{,}6929$, podczas gdy tak naprawdę $a_n \to \ln 2 = 0{,}69314\ldots$.

(E) Wyjaśnienia może wymagać przykład ciągu $x_n = \operatorname{tg} n$. Niech $x_1 = \operatorname{tg} 1 = \alpha \neq 0$. Załóżmy, że ciąg (x_n) jest zbieżny do liczby g. Wówczas mamy

$$\operatorname{tg}(n+1) = \frac{\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1}{1 - \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg} 1}.$$

Stąd $x_{n+1}(1 - \alpha x_n) = x_n + \alpha$ i dalej

$$g(1 - \alpha g) = g + \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad g^2 = -1.$$

Sprzeczność dowodzi, że ciąg (x_n) nie ma granicy.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 4

SYMETRIE WYKRESÓW

Problem bazowy.

(A) Sprawdź, że punkt o współrzędnych (s', t') jest symetryczny do punktu (s, t) względem prostej o równaniu $y = ax + b$ dokładnie wtedy, gdy

$$t + t' = a(s + s') + 2b \qquad \text{oraz} \qquad s + at = s' + at'.$$

Problemy do wyboru.

(B) Pokaż, że wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest symetryczny względem punktu (a, b) dokładnie wtedy, gdy funkcja f spełnia równanie

$$f(a + x) + f(a - x) = 2b \qquad \text{dla wszystkich } \ x \in \mathbf{R}.$$

(C) Znajdź warunek na to, aby wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ był symetryczny względem prostej pionowej o równaniu $x = a$.

(D) Wykaż, że wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ma oś symetrii $y = ax + b$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia równanie

$$(a^2 + 1) \cdot f(x') = (a^2 - 1) \cdot f(x) + 2ax + 2b,$$

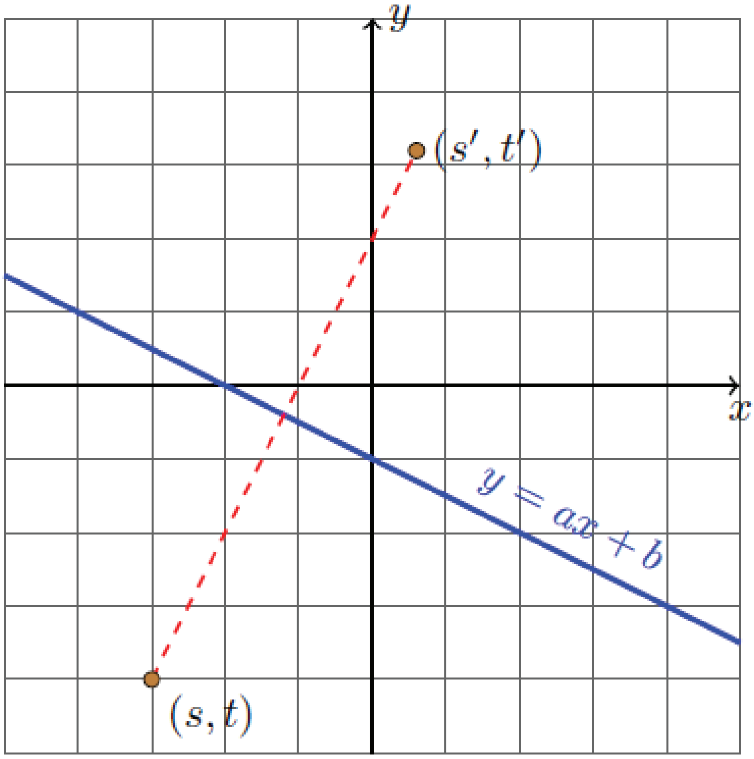
gdzie $x' = \dfrac{2a \cdot f(x) - (a^2 - 1)x - 2ab}{a^2 + 1}$.

(D) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Sugestie: znaleźć wszystkie osie symetrii wykresu funkcji $x \mapsto \sin x$; podać przykłady wzorów kilku funkcji nieliniowych mających oś symetrii $y = ax + b$; uzasadnić, że jeśli wykres funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ma oś symetrii $y = ax + b$ i $a \neq 0$, to funkcja f jest nieograniczona.

Wskazówki metodologiczne.

(A)



Gdy $a = 0$, to prosta, względem której rozpatrujemy symetrie jest prostą równoległą do osi odciętych układu współrzędnych $y = b$. Punkt (s', t') symetryczny do punktu (s, t) ma współrzędne: $(s', t') = (s, 2b - t)$. Dokładnie to opisują podane równości.

Załóżmy teraz, że $a \neq 0$. Prosta prostopadła do $y = ax + b$ przechodząca przez punkt (s, t) ma równanie:

$$y = -\frac{1}{a}x + b' = -\frac{1}{a}x + \left(t + \frac{s}{a}\right).$$

Równanie to spełniać muszą współrzędne (s', t'). Stąd

$$t' = -\frac{1}{a}s' + t + \frac{s}{a} \qquad \iff \qquad at' + s' = at + s.$$

Dodatkowo, środek odcinka o końcach (s,t) i (s',t') leży na prostej $y = ax+b$. To daje nam równanie

$$\frac{t+t'}{2} = a\cdot\frac{s+s'}{2} + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad t+t' = a(s+s') + 2b.$$

(B) Każdy punkt wykresu funkcji $f(x)$ ma postać $(t, f(t))$. Jeżeli punkty $(t, f(t))$ i $(s, f(s))$ są symetryczne względem punktu (a,b), to

$$s+t = 2a \qquad \text{oraz} \qquad f(t)+f(s) = 2b.$$

Stąd $s = 2a-t$ i $f(s) = 2b - f(t)$. To daje nam równanie

$$f(2a-t) = 2b - f(t) \qquad \text{dla } t \in \mathbf{R}.$$

Podstawiając $t = x+a$ otrzymamy żądaną zależność $f(a-x) = 2b - f(a+x)$; dowolność zmiennej t implikuje dowolność zmiennej $x \in \mathbf{R}$.

Gdy $(a,b) = (0,0)$, to funkcja f jest nieparzysta: $f(-x) = -f(x)$.

(C) Ponieważ punkt $(x, f(x))$, leżący na wykresie funkcji f symetryczny względem prostej $x = a$ mający współrzędne $(2a-x, f(x))$, także ma leżeć na wykresie tej funkcji, więc musi być

$$f(x) = f(2a-x) \qquad \text{dla } x \in \mathbf{R}.$$

Warto dodać, że dla $a = 0$ otrzymujemy warunek charakteryzujący funkcje parzyste: $f(x) = f(-x)$.

(D) Wykorzystamy obserwację zawartą w (A). Z podanych tam wzorów obliczamy jawne wzory na współrzędne s' i t'. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} as' - t' = t - as - 2b \\ s' + at' = s + at \end{cases}$$

otrzymujemy

$$s' = \frac{2at - a^2s - 2ab + s}{a^2+1}, \qquad t' = \frac{2as + a^2t + 2b - t}{a^2+1}.$$

Jeśli teraz przyjmiemy $(s,t) = (x, f(x))$ i założymy, że punkt symetryczny do niego względem danej prostej także leży na wykresie funkcji f i ma współrzędne $(x', f(x'))$, to ze znalezionych zależności dostaniemy

$$f(x') = \frac{2ax + a^2 \cdot f(x) + 2b - f(x)}{a^2+1} \quad \text{i} \quad x' = \frac{2af(x) - a^2x - 2ab + x}{a^2+1}.$$

To kończy rozwiązanie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 5

FUNKCJE MONOTONICZNE

Problem bazowy.

(A) Dane są funkcje $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Uzupełnij podaną tabelkę wpisując w pola odpowiedni przymiotnik (rosnąca, malejąca, nieokreślona) opisujący dane odwzorowanie. Uzasadnij swoje odpowiedzi podając dowód bądź adekwatny przykład.

f	g	$f+g$	$f \cdot g$	$f \circ g$
rosnąca	rosnąca			
rosnąca	malejąca			
malejąca	rosnąca			
malejąca	malejąca			

Problemy do wyboru.

(B1) Funkcje ściśle rosnące (malejące) są szczególnymi przypadkami funkcji różnowartościowych. Dla odwzorowania różnowartościowego f określamy funkcję odwrotną f^{-1} w następujący sposób:

$$f^{-1}(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(s) = t.$$

Dziedziną funkcji odwrotnej jest zbiór wartości funkcji wyjściowej.

Przypomnij definicję funkcji i wyjaśnij celowość założenia różnowartościowości funkcji f w powyższej definicji. Sprawdź, że wykres funkcji odwrotnej f^{-1} jest symetryczny do wykresu funkcji wyjściowej. Jak to jest symetria?

(B2) Pokaż, że funkcja odwrotna do funkcji rosnącej (odpowiednio: malejącej) jest też funkcją rosnącą (malejącą).

(C) Nie używając kalkulatora sprawdź, która liczba jest większa:

$5000000^2 + 5000010^2$ czy $2 \cdot 5000005^2$?

$\sqrt{2011} + \sqrt{2013}$ czy $2\sqrt{2012}$?

$\log_5 12$ czy $\frac{32}{21}$?

(D) Problemy dodatkowe proponowane przez uczniów lub nauczyciela.

Wskazówki metodologiczne.

(A) Poprawnie uzupełniona tabelka powinna wyglądać następująco:

f	g	$f+g$	$f \cdot g$	$f \circ g$
rosnąca	rosnąca	**rosnąca**	**rosnąca**	**rosnąca**
rosnąca	malejąca	**nieokreślona**	**nieokreślona**	**malejąca**
malejąca	rosnąca	**nieokreślona**	**nieokreślona**	**malejąca**
malejąca	malejąca	**malejąca**	**nieokreślona**	**rosnąca**

Przykładowe rozumowanie pokazujące, że złożenie dwóch funkcji malejących jest odwzorowaniem rosnącym może wyglądać tak. Załóżmy, że $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ są funkcjami malejącymi i niech $x_1 < x_2$. Wtedy $g(x_1) > g(x_2)$. Nakładając na tą nierówność obustronnie funkcję f otrzymamy

$$f \circ g(x_1) = f(g(x_1)) < f(g(x_2)) = f \circ g(x_2).$$

To dowodzi, że $f \circ g$ jest funkcją rosnącą.

(B1) W zadaniu chodzi o symetrię osiową względem prostej $y = x$. Punkt symetryczny do (x, y) względem tej prostej ma współrzędne (y, x). Wprost z definicji funkcji odwrotnej mamy: jeśli punkt $(x, y) = (x, f(x))$ należy do wykresu funkcji f, to $y = f(x)$, czyli $x = f^{-1}(y)$. Zatem punkt $(y, x) = (y, f^{-1}(y))$ leży na wykresie funkcji odwrotnej f^{-1}.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(B2) Załóżmy, że f jest funkcją rosnącą. Rozważmy dwie dowolne liczby $y_1 < y_2$ będące wartościami funkcji f. Niech np. $y_1 = f(x_1)$ oraz $y_2 = f(x_2)$. Oczywiście musi być $x_1 < x_2$ (to wynika stąd, że f jest rosnąca). To jednak oznacza, że funkcja f^{-1} jest rosnąca, gdyż

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2).$$

(C) Niech $f(x) = (x+5)^2 - x^2$. Mamy $f(x) = 10x+25$, czyli jest to funkcja rosnąca. To oznacza w szczególności że $f(5000005) > f(5000000)$, czyli

$$5000000^2 + 5000010^2 > 2 \cdot 5000005^2.$$

Tym razem niech $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Nietrudno zauważyć, że $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, a więc funkcja ta jest malejąca (dla $x > 0$ wraz ze wzrostem argumentu rośnie mianownik ułamka i maleje jego wartość). Stąd mamy $g(2011) < g(2012)$, czyli

$$\sqrt{2011} + \sqrt{2013} > 2\sqrt{2012}.$$

Ostatni przykład najprościej rozwiązać używając własności funkcji logarytmicznej. Mamy $\log_5 3 = \log_{125} 27 > \log_{125} 25 = \frac{2}{3}$. Podobnie $\log_5 4 = \log_{125} 64 > \log_{128} 64 = \frac{6}{7}$. Stąd

$$\log_5 12 = \log_5 3 + \log_5 4 > \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{32}{21}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 6
WIELOMIANY NUMERYCZNE
(wielomiany o wartościach całkowitych)

A. Problem bazowy

Wielomian $W(t)$ nazywamy wielomianem numerycznym, jeśli dla każdej liczby całkowitej m, $W(m)$ jest liczbą całkowitą (mimo tego, że ich współczynniki nie są liczbami całkowitymi). Wykazać, że wielomiany

$$\frac{t^2-t}{2}, \quad \frac{t^2+t}{2} \text{ oraz } \frac{t^2+3t+2}{2}$$

są numeryczne. Podać kilka innych przykładów wielomianów numerycznych (o współczynnikach niecałkowitych).

B. Rozszerzenia i problemy do wyboru

(B1) Wykazać, że dla każdego $k = 1, 2, ...$ wielomian

$$W_k(t) = \frac{t(t-1)(t-2)...(t-k+1)}{k!}$$

jest wielomianem numerycznym.

(B2) Wykazać, że dla każdych liczb $n = 1, 2, ...,$ $k = 0, 1, 2, ...,$ takich, że $k \leq n$ liczba $\binom{n}{k}$ jest całkowita.

C. Wskazówki metodologiczne.

(A) Zauważyć, że liczniki to iloczyny kolejnych liczb całkowitych. Zatem jeden czynnik jest parzysty a drugi nieparzysty. W konsekwencji licznik jest liczbą podzielną przez 2.

(B1) Niech t będzie liczbą całkowitą. mamy wówczas następujące 3 przypadki: (1) $t \geq k$. Wtedy

$$W_k(t) = \frac{t(t-1)(t-2)...(t-k+1)}{k!} = \frac{t!}{k!(n-k)!} = \binom{t}{k}.$$

symbol Newtona

(2) $0 \leq t < k$. Wtedy $W_k(t) = 0$.

(3) $t < 0$. Wtedy $t = -(-t)$ oraz $-t + k > k$. Stąd

$$W_k(t) = \frac{t(t-1)(t-2)...(t-k+1)}{k!} =$$

$$\frac{(-1)^k(-t)(-t+1)(-t+2)...(-t+k-1)}{k!} = (-1)^k\binom{-t+k-1}{k}.$$

Ponieważ dla $k \leq n$ symbol Newtona $\binom{n}{k}$ jest zawsze liczbą całkowitą (co można udowodnić indukcyjnie, por. (B2)), to dla każdego całkowitego t wartość $W_k(t)$ jest liczbą całkowitą. Zatem wielomian W_k jest wielomianem numerycznym.

(B2) Szybki "dowód" korzysta z interpretacji kombinatorycznej: $\binom{n}{k}$ = liczba możliwych wyborów k elementów spośród n elementów. Nie jest to jednak dowód w sensie matematycznym. Dowód matematyczny możemy oprzeć na zasadzie indukcji matematycznej wzgl. n. Dla $n = 1$ oraz $0 \leq k \leq n = 1$ mamy: $k = 0$ lub $k = 1$, skąd $\binom{1}{0} = 1$ oraz $\binom{1}{1} = 0$. Niech teraz $\binom{n}{k}$ będzie liczbą całkowitą dla pewnego $n \geq 1$ i każdego k takiego, że $0 \leq k \leq n$. Pokażemy, że $\binom{n+1}{k}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $0 \leq k \leq n+1$. Na podstawie (łatwej do udowodnienia) reguły Pascala:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \text{ dla } k \leq n,$$

oraz założenia indukcyjnego mamy $\binom{n+1}{k}$ jest liczbą całkowitą dla $0 \leq k \leq n$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przypadek $k = n+1$ jest trywialny ponieważ $\binom{n+1}{n+1} = 1$. Pokazaliśmy zatem, że dla każdego $0 \leq k \leq n+1$ liczba $\binom{n+1}{k}$ jest całkowita. W konsekwencji na mocy zasady indukcji matematycznej dla każdego $n = 1, 2, ...$ oraz kazdego $0 \leq k \leq n$ liczba $\binom{n}{k}$ jest całkowita.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 7
ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ
(rola funkcji ciągłych)

A. Problem bazowy

Rozwiązać równanie $x^3 + x - 1 = 0$.

B. Rozszerzenia i problemy do wyboru

(B1) Rozwiązać (w przybliżeniu) równanie $2^x = 2 - x$.

C. Problemy wskazane przez uczniów lub nauczyciela

Sugestie: Czy ciąg przybliżeń (x_n) jest zbieżny do rozwiązania równania $f(x) = 0$? Czy rozwiązanie danego równania jest liczbą wymierną?

D. Wskazówki metodologiczne.

(A) Jeśli zapiszemy równanie w postaci $x^3 = 1 - x$, to ma ono prostą interpretację geometryczną. Rozwiązaniem równania jest liczba x_0 wyznaczona przez punkt przecięcia się krzywej $y = x^3$ z prostą $y = 1 - x$. Rysunek wskazuje ponadto, że rozwiązanie x_0 leży w przedziale $(0, 1)$.

Słynne wzory Cardano pozwalają wyznaczyć pierwiastki równania z problemu bazowego ale procedura ich wyznaczania jest nieco skomplikowana. Zamiast tych wzorów użyjemy pewnej własności funkcji ciągłych nazywanej własnością Darboux. Zacznijmy zatem od krótkiego wykładu o funkcjach ciągłych.

Funkcję $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będziemy nazywać funkcją ciągła w punkcie $x \in [a, b]$, jeśli $f(x_n) \to f(x)$ dla każdego ciągu $x_n \in (a, b)$ zbieżnego do x. f nazywamy ciągłą, jeśli jest ciągła w każdym punkcie przedziału (a, b). Taka definicja jest zgodna z geometryczną interpretacją ciągłości. Dla przykładu, proszę narysować i zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1/2, \\ 1, & 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

f jest ciągła we wszystkich punktach $[0, 1]$ z wyjątkiem $x = 1/2$. Zauważmy także, że suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

Własność Darboux stwierdza, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) < 0 < f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = 0$. Równoważnie: Jeśli $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f(a) < 0 < f(b)$, to równanie $f(x) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie w $[a, b]$. Ponadto, liczba $x_1 = (a + b)/2$ jest albo rozwiązaniem albo przybliżeniem rozwiązania z błędem $\le (b - a)/2$. Jeśli x_1 nie jest rozwiązaniem, to powyższą procedurę możemy zastosować ponownie do $[a, x_1]$ lub do $[x_1, b]$. Znajdziemy wówczas rozwiązanie lub jego przybliżenie x_2 z błedem $\le (b - a)/4$. W konsekwencji, postępując tak n-krotnie uzyskamy rozwiązanie albo jego przybliżenie z dokładnością $\le (b - a)/2^n$.

W przypadku równania $x^3+x-1 = 0$ rozważamy funkcję $f(x) = x^3+x-1$ na $[0, 1]$. f jest ciągła, $f(0) = -1 < 0 < f(1) = 1$. Zatem na podstawie własności Darboux $x_1 = 1/2$ jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania z dokładności $\le 1/2$. Ponieważ $f(1/2) = (1/2)^3 + 1/2 - 1 = -3/8 < 0 < f(1) = 1$, to $x_2 = 3/4$ jest przybliżeniem rozwiązania z dokładnością $1/4$. Itd.

(B1) Postępujemy podobnie jak w problemie bazowym.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 8
MAKSYMALNE WARTOŚCI FUNKCJI
(zastosowania pochodnej funkcji)

A. Problem bazowy

Na górnym półokręgu $x^2 + y^2 = 1$ znaleźć punkt (x, y) taki, że pole trójkąta o wierzchołkach $(x, y), (-1, 0), (1, 0)$ jest największe.

B. Rozszerzenia i problemy do wyboru

(B1) Na górnym półokręgu $x^2 + y^2 = 1$ znaleźć punkt (x, y) taki, że pole prostokąta o wierzchołkach $(x, y), (-x, y), (-x, 0), (x, 0)$ jest największe.

(B2) Niech $0 < s \leq 1$. Na górnym półokręgu $x^2 + y^2 = 1$ znaleźć wszystkie punkty (x, y) takie, że pole prostokąta takiego jak w (B1) jest równe s.

C. Problemy wskazane przez uczniów lub nauczyciela

Sugestia: Czy istnieje punkt (x, y) taki, że ww. pola są najmniejsze?

D. Wskazówki metodologiczne.

(A) Jeśli (x, y) jest punktem górnej części okręgu, to $y = \sqrt{1 - x^2}$. Pole wskazanego trójkąta określone jest wzorem

$$\text{pole} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Funkcja $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ jest rosnąca na $[-1, 0]$ oraz malejąca na $[0, 1]$. Zatem największa jej wartość to $f(0) = 1$. W konsekwencji, szukanym punktem jest $(0, 1)$.

(B1) Jeśli (x, y) jest punktem górnej części okręgu, to $y = \sqrt{1-x^2}$. Pole wskazanego prostokąta określone jest wzorem

$$\text{pole} = 2|x| \cdot y = 2|x|\sqrt{1-x^2}.$$

Podobnie jak w problemie bazowym badamy monotoniczność funkcji $f(x) = 2|x|\sqrt{1-x^2}$ na przedziale $[-1, 1]$. Z uwagi na parzystość funkcji wystarczy ograniczyć się do $[0, 1]$.

Możemy postępować elementarnie i analizować warunek monotoniczności $f(x_1) < f(x_2)$ dla $0 < x_1 < x_2 < 1$.

Możemy też zastosować proste twierdzenia dotyczące pochodnej funkcji (por. Problem 2, Komponent Wspólny, Matematyka 2011/2012). Przypomnijmy, że: Pochodna to granica $f'(x) = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$. Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca na (a, b). Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca na (a, b). Dla funkcji $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ (stały czynnik 2 możemy chwilowo pominąc) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}((x+h)\sqrt{1-(x+h)^2} - x\sqrt{1-x^2}) \\ &= x\frac{\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2}}{h} + \sqrt{1-(x+h)^2}. \end{aligned}$$

Mamy $\sqrt{1-(x+h)^2} \to \sqrt{1-x^2}$. Stosując wzór na różnicę kwadratów dostajemy przy $h \to 0$

$$\frac{\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2}}{h} = \frac{-h-2x}{\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2}} \to \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Stąd

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = f'(x).$$

Teraz mamy: $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow x < \sqrt{2}/2$, $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow x > \sqrt{2}/2$. Zatem f rośnie na $(0, \sqrt{2}/2$ oraz maleje na $(\sqrt{2}/2, 1)$. W konsekwencji f ma w $x = \sqrt{2}/2$ maksimum równe $f(\sqrt{2}/2) = 2 \cdot 1/2 = 1$.

(B2) Rozwiązać najpierw problem (B1) i uzasadnić, że (B2) ma tylko dwa rozwiązania wyznaczone przez $x = \pm\sqrt{2}/2$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROBLEM 9
NIERÓWNOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

A. Problem bazowy

Narysować koło jednostkowe o środku w $(0, 0)$, zaznaczyć dowolny kąt $x \in [0, \pi/2)$ i dwa odpowiednie trójkąty prostokątne o pewnych bokach dlugości $\cos x, \sin x$ oraz $\operatorname{tg} x$. Uzasadnić (geometrycznie) nierówności:

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \qquad \cos x \leq 1.$$

B. Rozszerzenia i problemy do wyboru

(B1) Wykazać, że $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$ dla $x \in (0, \pi/2)$.

(B2) Wykazać, że $|\sin x| \leq |x|$ dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(B3) Czy istnieje $c \in (0, 1)$ takie, że $\sin x \leq cx$ dla $x \in (0, \pi/2)$?

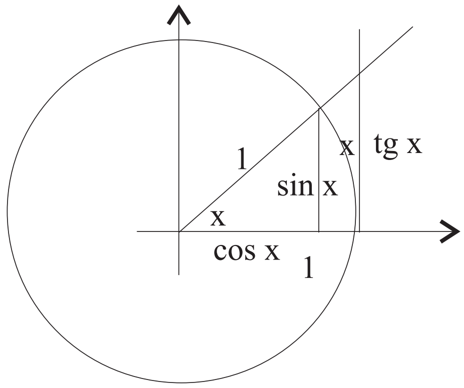
C. Problemy wskazane przez uczniów lub nauczyciela

Sugestia: Czy $\sin x \leq x$ dla wszystkich $x > 0$? Geometrycznie (patrząc na wykresy) jest to oczywiste. Ale jak to udowodnić?

D. Wskazówki metodologiczne.

(A) Dla $x \in (0, \pi/2)$ wykorzystać geometryczne definicje funkcji trygonometrycznych oraz rysunek

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Ponadto x = długość łuku koła jednostkowego. Przypadek $x = 0$ rozpatrywać osobno.

(B1) Łatwe do uzyskania z nierówności uzyskanych w problemie bazowym.

(B2) Zauważyć, że jeśli $x \in (-\pi/2, 0)$ to $-x \in (0, \pi/2)$.

(B3) Dowód można prowadzić nie wprost i wykorzystać pojęcie granicy funkcji.

Granica funkcji. Mówimy, że liczba d jest granicą funkcji $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ w punkcie $c \in (a, b)$, jeśli dla każdego ciągu argumentów $x_n \to c$, $f(x_n) \to d$. Zapis $x_n \to c$ oznacza "zbliżanie się" liczb x_n do liczby c wraz ze wzrostem n $(n \to \infty)$ [por Temat 3 o ciągach]. Piszemy wtedy: $f(x) \to d$ jeśli $x \to c$ lub $\lim\limits_{x\to c} f(x) = d$. Jeśli $c = a$ albo $c = d$, to mówimy, ściślej, o granicy jednostronnej (prawostronnej albo lewostronnej, odpowiednio). Piszemy wtedy $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = d$ albo $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = d$, odpowiednio. To krótkie wprowadzenie należy wzbogacić odpowiednią interpretacją geometryczną z wykresami funkcji.

Przykłady. $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$. Stąd i z bazowej nierówności $0 \leq |\sin x| \leq |x|$ mamy $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. Z równania $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ wynika, że $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0$. Z (B1) stosując łatwe do intuicyjnego uzasadnienia twierdzenie o trzech ciągach (granicach) otrzymujemy $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)/x = 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje $c \in (0,1)$ takie, że $\sin x \leq cx$ dla $x \in (0, \pi/2)$. Wtedy $\sin x/x \leq c < 1$. Ponieważ $\sin x/x \to 1$, gdy $x \to 0+$, to otrzymujemy $1 \leq c < 1$ i mamy sprzeczność $1 < 1$. Zatem odpowiedź w problemie (B3) jest negatywna.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Załącznik B

Test końcowy

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

T E S T

Rozwiązać poniższe zadania w ciągu 60 min
(za każde zadanie maksymalnie 10 pkt)

---

1. Wykazać, że liczba $11\dots1$ (3^n jedynek) jest podzielna przez 3^n.

2. Na paraboli $y = 1 - x^2$ znaleźć taki punkt (x, y), gdzie $y > 0$, aby pole prostokąta o wierzchołkach $(x, y), (x, 0), (0, 0), (0, y)$ było największe.

3. Ciąg (a_n) określony jest następująco:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu. Czy jest to ciąg zbieżny?

Wskazwka. Pokazać najpierw, że ciąg pomocniczy $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest geometryczny.