

Prof. UW dr hab. Małgorzata Żytka

Wydział Pedagogiczny
Uniwersytet Warszawski

JAK SKUTECZNIE ROZBUDZIĆ I UTRZYMAĆ ZAINTERESOWANIE DZIECI MATEMATYKĄ?

Edukacja matematyczna dzieci rozpoczynających naukę szkolną to interesujące doświadczenie, ale i prawdziwe wyzwanie dla nauczycieli. Dzieci we wczesnej edukacji, jak wskazują badania, lubią rozwiązywać zagadki, łamigłówki, grać w gry pozwalające rozwijać intuicje matematyczne. Analiza praktyki edukacyjnej w szkole podstawowej w klasach I-III i IV-VI oraz wyniki badań polskich i międzynarodowych wskazują, że ta naturalna ciekawość poznawcza dzieci niejednokrotnie ulega stłumieniu. Dla wielu z nich matematyka zamiast fascynować, inspirować, bawić, rozwijać, staje się nudnym, pozbawionym aktywności badawczej terenem zdobywania wątpliwych rozwojowo doświadczeń edukacyjnych. Niechęć do matematyki, która pojawia się już w szkole podstawowej, ulega często wzmocnieniu na dalszych etapach kształcenia i skutkuje słabymi wynikami uzyskiwanymi przez uczniów na maturze.

Aktywność dzieci podstawą rozwoju

Współczesne badania neurobiologiczne dotyczące mózgu¹, uwarunkowań jego rozwoju i funkcjonowania oraz wiedza psychologiczna i pedagogiczna na temat specyfiki procesu uczenia się wskazują, jak ważną rolę odgrywa stwarzanie uczniom sytuacji edukacyjnych sprzyjających aktywności poznawczej, konstruowaniu własnych strategii rozwiązywania problemów, uczestniczeniu w tworzeniu wiedzy, a nie tylko jej przyswajaniu i odtwarzaniu według narzuconych przez nauczyciela schematów. Dzieci „chcą być zajęte”, jak podkreśla angielski socjolog edukacji B. Bernstein², ich rozwojowi sprzyja aktywność poznawcza i społeczno-emocjonalna, pokonywanie trudności, a więc podejmowanie zadań stanowiących wyzwanie, sytuujących się w strefie najbliższego rozwoju (L. Wygotski)³.

¹ A. Gopnik, A.N. Meltzoff, P.K.Kuhl, *Naukowiec w kołysce. Czego o umyśle uczą nas małe dzieci?* Media Rodzin 2004

² B. Bernstein, *Odtwarzanie kultury*. PIW 1990

³ L. Wygotski, *Myślenie i mowa*. PIW 1989

Mózg rozwija się bardzo intensywnie w ciągu pierwszych 10 lat życia dziecka, jego rozwojowi nie sprzyja nuda, schematyzm myślenia, uczenie się pamięciowe bez rozumienia pojęć matematycznych, sterowanie poleceniami nauczyciela, brak zainteresowania dziecięcymi sposobami rozwiązywania zadań, ich odkryciami poznawczymi oraz brak współpracy między dziećmi, dzielenia się swoimi pomysłami, konsultowania rozwiązań, dyskusji i wymiany opinii. W badaniach procesu komunikowania się nauczyciela z uczniami w klasach trzecich szkoły podstawowej uzyskano wyniki wskazujące na jednostronność i powierzchowność relacji⁴. Uczniowie na lekcjach matematyki przede wszystkim uczestniczą w sprawdzaniu wiedzy (85% czasu obserwowanych zajęć), słuchaniu nauczyciela (15%) . Natomiast dyskusja z kolegami i nauczycielem, twórcze działania stanowią zaledwie 0,2%-0,4% czasu na obserwowanych zajęciach, a uczestnictwo w grach i zabawach dydaktycznych – 6,2% czasu na lekcji. Na obserwowanych lekcjach matematyki w klasach trzecich aktywność nauczycieli sprowadza się do wydawania co 2,2 minuty poleceń, co 6,9 minuty podpowiadania, odpowiadania za ucznia, a tylko co 160 minut zadawania pytań otwartych o wyjaśnienie czy uzasadnienie oraz co 72 minuty wspieranie, ukierunkowywanie pracy uczniów, a co 55 minut nauczyciel słucha uczniów i akceptuje ich pomysły i odpowiedzi. Wyraźnie więc widać, że w pracy nauczyciela na lekcjach matematyki dominuje model transmisyjny i dyrektywno-instruktażowy. Dzieci ćwiczą wykonywanie typowych zadań , aby lepiej zapamiętać jeden, z góry określony, sposób ich rozwiązywania. Nie zawsze nauczyciel jest zainteresowany pomysłami, samodzielnymi sposobami rozwiązywania zadań i aktywnością poznawczą dzieci. Konstruowanie wiedzy i umiejętności matematycznych w szkole wymaga zaangażowania myślenia (rozwiązywania problemów), aktywności werbalnej (wyjaśnianie, opowiadanie, pytanie, argumentowanie), budowania własnych strategii rozwiązania, współpracy z rówieśnikami w klasie, akceptacji dla uczniowskich błędów jako podstawy uczenia się. Proces dochodzenia do rozumienia pojęć matematycznych wymaga także wyeksponowania wizualizacji i obrazowej, graficznej reprezentacji problemów matematycznych⁵.

Efektywność nauczania matematyki w świetle badań

Edukacja matematyczna i jej efektywność w polskiej szkole jest przedmiotem dyskusji i krytycznych analiz od wielu lat. Niskie wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w 2014

⁴ B. Murawska, M. Żyto(red.), Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Uczeń, szkoła. Dom. IBE 2012

⁵ D. Wood, *Jak dzieci uczą się i myślą. Społeczne konteksty rozwoju poznawczego*. Wydawnictwo UJ 2006

roku (25% uczniów nie zdało egzaminu) napawają niepokojem i każą powrócić do problemu jakości kształcenia w szkołach na różnych etapach edukacji, ale także sposobu kształcenia i doskonalenia nauczycieli. Wyniki badań ogólnopolskich i międzynarodowych wskazują, że osiągnięcia uczniów w zakresie matematyki są zróżnicowane i dominuje odtwórcze, podporządkowane schematom i algorytmom podejście do zadań matematycznych. Problemy nietypowe, wymagające elastyczności myślenia, odnalezienia własnej strategii rozwiązania, zbadania zagadnienia, wskazania prawidłowości czy wykorzystania wiedzy i umiejętności matematycznych w praktyce, sprawiają uczniom trudność i powodują rezygnację z podejmowania wysiłku rozwiązania problemu. Trudności i zniechęcenie do uczenia się matematyki pojawiają się już na pierwszym etapie kształcenia w szkole podstawowej.

Wyniki badań trzecioklasistów opublikowane w kilku raportach wydanych w latach 2008-2012⁶ oraz wyniki badań OBUT wskazują, że w edukacji matematycznej w klasach 1-3 znaczna część uczniów opanowuje jedynie pewną liczbę utrwalonych schematów postępowania w typowych sytuacjach oraz wiele różnych strategii obronnych, których zadaniem jest ukrycie przed nauczycielem, że nie rozumie się matematyki. Dzieci są przekonane, że rozwiązanie zadania polega na zapisaniu obliczenia, w którym trzeba wykorzystać wszystkie liczby podane w treści zadania. Nie rozwiązują więc problemu, ale „zagospodarowują” liczby. Oto przykład takie zadania i różnych sposobów jego rozwiązania przez dzieci.

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.
Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.
Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$$130 : 10 = 13$$

Odpowiedź: Posadzono 13 drzewek.

$$\begin{array}{r} 130\text{m} \\ - 10\text{m} \\ \hline 130 \end{array}$$

Odpowiedź: Posadzono 130 drzewek.

$$\begin{array}{r} 130 \\ + 10 \\ \hline 140 \end{array}$$

Odpowiedź: Posadzono 140 drzewek.

$$130\text{ m} - 10\text{ m} = 120\text{ m}$$

Odpowiedź: Posadzono 120 drzewek.

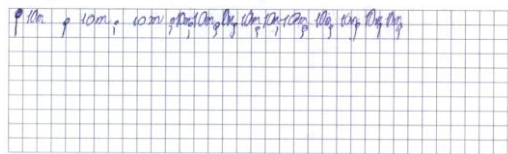
9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka.
Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu.
Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?

$$130 : 10 = 130$$

Odpowiedź: Posadzono 130 drzewek.

⁶ M. Dąbrowski, Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej. Trzecioklasiści 2010. CKE 2011; M. Dąbrowski, (Za) trudne, bo trzeba myśleć. O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia. IBE 2013

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 130 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



Odpowiedź: Posadzono 14 drzewek.

Wśród rozwiązań dominuje właśnie sposób, który można nazwać „zagospodarowywaniem liczb”, czy poszukiwaniem działania, które pozwoli wykorzystać liczby zawarte w zadaniu, a nie znaleźć rozstrzygnięcie problemu, który jest w nim przedstawiony. Dopiero wykonanie rysunku przez dziecko, a więc wizualizacja treści zadania, modelowanie sytuacji matematycznej na poziomie ikonicznej reprezentacji wiedzy pozwala odkryć poprawne rozwiązanie. Warto podkreślić, że rozwiązanie zadania tekstowego polega na znalezieniu, za pomocą dowolnej skutecznej strategii, poprawnej odpowiedzi na postawione w nim pytanie, a nie wykonanie jakiegoś obliczenia. Tymczasem większość uczniów bezrefleksyjnie operuje symbolami, bez wnikania w ich sens oraz cel ich użycia. Wskazywała ten problem już wiele lat temu Prof. Z. Krygowska – wybitna dydaktyk matematyki, nazywając je „zdegenerowanym formalizmem”. Efektem takich działań jest zdobycie przez uczniów biegłości w stosowaniu wyuczonych schematów postępowania w typowych sytuacjach oraz ogromne trudności w stosowaniu wiedzy w nowych, nieznanych wcześniej sytuacjach. A to właśnie decyduje o znaczeniu matematyki dla rozwoju współczesnego społeczeństwa.

Droga do symbolu matematycznego

Zapomina się w procesie matematycznego kształcenia jak trudny do zrozumienia dla uczniów jest symboliczny język matematyki. W polskiej szkole dzieci są „zapoznawane” z językiem symbolicznym od początku procesu kształcenia, a znaczna część nauczycieli jest przekonana, że jest to najważniejsze zadanie i cel edukacji matematycznej w klasach 1-3. To przekonanie wzmacniają materiały edukacyjne (podręczniki, zeszyty ćwiczeń), w których już przy pierwszych zadaniach tekstowych rozwiązywanych przez uczniów oczekuje się wpisania w pozostawione puste miejsca odpowiedniego działania arytmetycznego. W ten sposób dziecko - nie rozumiejąc jeszcze języka symbolicznego - jest zmuszane do wykonania bardzo trudnego zadania: formalnego modelowania matematycznego. Aktywności na poziomie

reprezentacji enaktywnej czy ikonicznej⁷, budujące rozumienie matematyki i jej języka, są w szkole pomijane i eliminowane, jako „niematematyczne”. Pomoce dydaktyczne, które mogą wspierać przechodzenie od konkretności do abstrakcji w procesie poznawania pojęć i symboli matematycznych są używane sporadycznie. Zjawisko to nasila się znacznie w klasach 4-6 i w gimnazjum, gdzie nowe zagadnienia matematyczne wprowadza się zazwyczaj, rozpoczynając od najtrudniejszego poziomu – symbolicznego i na nim się pozostaje. Skutki takiego podejścia to fakt, że znaczny odsetek polskich uczniów nie rozumie języka symbolicznego matematyki oraz nie potrafi się nim efektywnie posługiwać. Potwierdzają to wyniki egzaminów zewnętrznych po klasie 6. i po gimnazjum oraz część matematyczna badań międzynarodowych, np. PISA czy TIMSS⁸.

Język symboliczny jest nie tylko skutecznym narzędziem komunikowania się w różnych sytuacjach, ale także narzędziem rozwiązywania problemów, także tych praktycznych, z codziennego życia. Jest też narzędziem wspierającym myślenie matematyczne, ale sam także musi być przez to myślenie wspierany.

W procesie kształcenia uczniowie muszą mieć okazję do poznawania oraz stosowania różnych sposobów rozumowania i wnioskowania, typowych dla matematycznej twórczości – rozumowania indukcyjnego i dedukcyjnego, uogólniania i specyfikacji, dostrzegania i wykorzystywania prawidłowości, rozumowania przez analogię. Powinno to być ich udziałem na każdym etapie rozwijania umiejętności matematycznych zarówno podczas manipulacji, jak operowania zapisami zaawansowanymi matematycznie.

Piktogramy wspierają uczenie się matematyki

Jednym z materiałów dydaktycznych wspierających u dzieci w klasach I-III i IV-VI zainteresowanie matematyką i rozwijanie umiejętności niezbędnych do rozumienia pojęć matematycznych oraz świadomego posługiwania się nimi w praktyce, w konkretnych sytuacjach związanych z codziennym doświadczeniem jest pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy”. Autorom pakietu „Gramy w piktogramy” zależało w szczególności na podwyższeniu u uczniów:

⁷ Nawiązanie do koncepcji J. Brunera dotyczącej trzech rodzajów reprezentacji poznawczej wiedzy: enaktywnej (reprezentacje odwołujące się do działania na konkretach), ikonicznej (reprezentacje świata za pomocą obrazów umysłowych w tym schematów graficznych), symbolicznych (systemy reprezentacji świata abstrakcyjne, z wykorzystaniem symboli: liczb, języka, notacji muzycznej).

⁸ K. Konarzewski, osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej.. TIMSS i PIRLS 2011. CKE 2012

- poziomu rozumienia pojęć matematycznych, także dzięki ich samodzielnemu konstruowaniu przez uczniów, krytycznemu myśleniu;
- poziomu umiejętności rozwiązywania problemów o charakterze matematycznym z wykorzystywaniem procesów poznawczych istotnych dla myślenia matematycznego (dostrzeganie związków, prawidłowości, myślenie przez analogię) oraz współpracy w grupie i tutoringu rówieśniczego;
- umiejętności dobierania modeli matematycznych do analizowanych sytuacji z uwzględnieniem posługiwania się językiem symbolicznym.

E-pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy”, z którym można zapoznać się na stronie www.piktografia.pl stwarza nauczycielom okazję do zmiany stylu pracy w szkole, w szczególności w obszarze edukacji matematycznej. Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy” powstał w ramach projektu *PIKTOGRAFIA Rozwijanie umiejętności posługiwania się językiem symbolicznym w edukacji z zakresu nauk matematycznych z zastosowaniem piktogramów Asylco*. To środek dydaktyczny stworzony we współpracy Wydawnictwa Bohdan Orłowski oraz Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Warszawskiego.

E-pakiet „Gramy w piktogramy” składa się z dwóch zasadniczych elementów: pomocy dla uczniów i dla nauczyciela. Do pobrania i wydrukowania przygotowano przewodniki, scenariusze zajęć i karty pracy dla uczniów na trzech poziomach edukacyjnych: klasy I-III, IV-VI i gimnazjum. Zasadniczą część tego środka dydaktycznego stanowią piktogramy – demonstracyjne dla nauczyciela i oraz uczniowskie do manipulowania, tworzenia modeli sytuacji matematycznych. Poza tym w zestawie są także gry planszowe, programy komputerowe, modele wagi do odkrywania zależności, domino, siatki brył. Są także wzory naklejek, które można przygotować do wykonania pieczętek, wzór planszy z naklejkami z piktogramami, żetony i woreczki strunowe, a także tabliczki suchościeralne. Dzieci, które w klasach I-III miały okazję korzystać z tego środka dydaktycznego podczas testowania uczyły się matematyki w zabawie, rozwiązując zagadki, manipulując piktogramami, grając w gry. Istota tego materiału dydaktycznego wiąże się ze stwarzaniem dzieciom okazji do pracy w grupach (jeden pakiet przeznaczony jest dla grupy 4-osobowej), manipulowania piktogramami (i innymi elementami) w celu zbudowania modelu- wizualizacji sytuacji matematycznej zaprezentowanej w zadaniu i rozwiązania problemu za pomocą właśnie takiej

aktywności. Oto przykład zadań zaczerpniętych ze scenariuszy zajęć zaproponowanych w tym pakiecie – temat: Ile to kosztuje? Dzieci rozwiązują następujące zagadki⁹:

1.



Trzy jabłka i jedna gruszka kosztują 7,50 zł, jedna kiść winogron i dwie gruszki 6 zł, a 2 kiście winogron 6 zł. Ile kosztują poszczególne owoce?

2.



Trzy jabłka i jedna gruszka kosztują 6 zł, gruszka i dwa jabłka kosztują 5 zł, a 2 kiście winogron 9 zł. Ile kosztują poszczególne owoce?

Dzieci rozwiązują te zagadki, manipulując piktogramami lub rysując sytuację matematyczną na tabliczkach suchościeralnych.



Po serii takich zadań dzieci w grupach układają, wykorzystując piktogramy czy rysując na kartkach papieru własne zagadki i prezentują je kolegom i koleżankom do rozwiązania.

Warto zauważyć, że w toku wykonywania takich zadań dzieci budują sobie dwie podstawowe metody rozwiązywania układów równań: eliminacji i odejmowania stronami. Konstruują rozumienie znaczenia działań, które za chwilę będą wykonywać na poziomie reprezentacji symbolicznych. Zatem manipulowanie piktogramami, wykonywanie schematów

⁹ Przykłady zaczerpnięte ze scenariusza M. Dąbrowskiego, Ile to kosztuje? Czy o rozwiązywaniu zadań tekstowych. przygotowanego na szkolenie nauczycieli zainteresowanych pracą w szkole z pakietem „Gramy w piktogramy” www.piktografia.pl

rysunkowych nie służy tylko ilustracji treści zadania, ale zbudowaniu rozumienia pojęcia matematycznego. Po takich doświadczeniach, które charakteryzuje stopniowe przechodzenie od działań na elementach graficznych do symbolicznych mogą rozwiązywać następne zadania w rodzaju:

- a. W pewnym sklepie sprzedawano owoce na sztuki. Wszystkie owoce tego samego gatunku, np. jabłka, kosztowały w tym sklepie po tyle samo. Pierwszy klient kupił jabłko i dwie gruszki i zapłacił 10 złotych. Następny kupił gruszkę i dwa jabłka i zapłacił 8 złotych. Trzeci za jabłko i dwa kiście winogron zapłacił 9 złotych. Ile kosztowały poszczególne owoce?*
- b. Za 6 filiżanek i 6 talerzyków mama zapłaciła 42 złote. Następnego dnia mama dokupiła jeszcze 2 filiżanki i 6 talerzyków z tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 26 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?*
- c. Jaś karmił w schronisku psy i koty. Każdy pies dostał 6 kawałków mięsa, a każdy kot 4 kawałki. Ile było psów, a ile kotów, jeśli łącznie było ich 14, a Jaś dał im 74 kawałki mięsa*
- d. Wzdłuż ulicy sadzono drzewa. Drzewa sadzono co 10 metrów. Pierwsze posadzono na początku, a ostatnie na końcu drogi. Ile drzew posadzono, jeśli droga ma 120 metrów?*

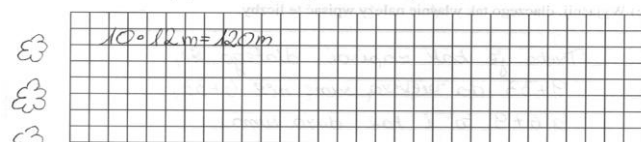
Poniżej są podane przykłady rozwiązań zadań podobnych do ostatniego z przedstawionych, które zostały zaczerpnięte z badań umiejętności matematycznych trzecioklasistów. Dzieci, a był to niewielki procent badanych, które posłużyły się rysunkiem pozwalającym stworzyć model sytuacji matematycznej przedstawionej w zadaniu poprawnie je rozwiązały. Natomiast duża grupa badanych próbowała zrobić coś z liczbami, „zagospodarować” je w tym zadaniu, a więc pomnożyć, podzielić, nawet dodać i odjąć, co nie pozwalało uzyskać rozwiązania, a świadczyło o braku zrozumienia problemu i schematyzmie myślenia w podejściu do rozwiązania.

9. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono co 10 metrów drzewka. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Droga ma 150 metrów długości. Ile drzewek posadzono?



Odpowiedź: Posadzono 16 drzewek.

6. Wzdłuż drogi, przy której mieszka Kamil, posadzono 13 młodych drzewek. Drzewka sadzono co 10 metrów. Pierwsze drzewko posadzono na początku drogi, a ostatnie na jej końcu. Jaka długość ma ta droga?



Odpowiedź: Ta droga ma 120 metrów.



Dzieci będą zainteresowane matematyką wtedy, gdy ją rozumieją, gdy doświadczą sytuacji, które pozwolą im samodzielnie budować rozumienie, gdy będą mogły współpracować ze sobą i wspierać się w rozwiązywaniu zadań, dzieleniu się pomysłami, rywalizowaniu ze sobą, prezentując zaskakujące rozwiązania czy tworząc trudne zagadki matematyczne dla rówieśników.

Dzieci, które uczestniczyły w testowaniu pakietu „Gramy w piktogramy” w klasach trzecich szkoły podstawowej tak podsumowały swoje doświadczenia w pracy z tym materiałem na zajęciach szkolnych:

- **Są ciekawsze zajęcia po prostu.**
- **Dzięki grze, niektórzy z naszej klasy, na przykład ten tu, nauczyli się liczyć.**
- **Tak, tu mogliśmy pracować sami. A ja wolę wymyślić sam.**
- **Uczymy się współpracy.**
- **Są różne pomysły, można podyskutować.**
- **To pomaga w życiu, bo ma się lepsze skojarzenia.**

Podsumowując refleksje dotyczące problematyki uczenia się matematyki w szkole i konieczności zmiany istniejącego dość powszechnie modelu nauczania warto podkreślić, że zainteresowanie dzieci matematykę wymaga zmiany sposobu myślenia o nauczaniu i stylu

pracy nauczyciela. Dzieciom trzeba stwarzać okazje do zdobywania określonych kompetencji i wykorzystywania ich w praktycznych działaniach. Oto kilka rekomendacji:

- Trzeba rozpoczynać edukację od poznania uczniów, ich możliwości i potencjału intelektualnego,
- Pozwolić uczniom mówić na zajęciach matematycznych, dzielić się spostrzeżeniami, zadawać pytania, opisywać rozwiązania zadań,
- Zachęcać do współpracy, stwarzać okazje, aby dzieci uczyły się od siebie, nauczyciel staje się tutorem, a nie instruktorem,
- Uwierzyć w możliwości dzieci i stawiać im zadania – wyzwania intelektualne, których podjęcie i rozwiązanie sprawi przyjemność, przyniesie satysfakcję, dzieci chcą mieć poczucie kompetencji,
- Pozwólmy uczniom na popełnianie błędów, błąd to początek uczenia się, inspiracja do działań pozwalających lepiej zrozumieć pojęcia matematyczne,
- Pozwolić uczniom budować i stosować własne strategie rozwiązania, nie narzucać jednej, nauczycielskiej metody, wtedy matematyka będzie sprawiać przyjemność, zachęcać do badań i poszukiwań.