**Mirosław Dąbrowski** mirekd@mimuw.edu.pl
Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki UW

# Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy" – pomysł na wspieranie edukacji matematycznej dzieci i jego wykorzystanie w praktyce szkolnej

*„Rozumienie jest procesem, który może być przez innych wspomagany, nigdy jednak nie może zostać przez nich dla kogoś wypracowany"* [1].

## Wprowadzenie

Edukacja matematyczna dzieci rozpoczynających naukę szkolną to interesujące doświadczenie, ale i prawdziwe wyzwanie dla nauczycieli. Dzieci we wczesnej edukacji, jak wskazują badania, lubią rozwiązywać zagadki, łamigłówki, grać w gry pozwalające rozwijać intuicje matematyczne. Większość z nich przekraczając próg szkoły ma już wiele doświadczeń, umiejętności i wiedzy zdobytych z różnych źródeł. Rozpoczynając naukę, oczekują więc ciekawych zajęć, chcą się dowiedzieć czegoś nowego, rozwinąć swoje umiejętności, pokazać, co już potrafią i dzielić się z innymi swoimi doświadczenia, a także wykorzystywać zdobywaną wiedzę w praktyce. Taka aktywność powinna motywować do uczenia się, zachęcać do współpracy z rówieśnikami. Analiza praktyki edukacyjnej na początkowym etapie szkoły podstawowej oraz wyniki badań polskich i międzynarodowych wskazują, że ta naturalna ciekawość poznawcza dzieci ulega stłumieniu w ciągu pierwszych lat nauki szkolnej, a dotyczy to w szczególności matematyki. Dzieci są bowiem w procesie matematycznego „kształcenia" trenowane w rozwiązywaniu typowych zadań, uczeniu się zgodnie z przyjętymi przez nauczyciela schematami, bez zrozumienia podstawowych pojęć i sensu ich wykorzystania w praktyce. Przestają samodzielnie myśleć, bo w wielu podręcznikach i zeszytach ćwiczeń znajdą szczegółowe instrukcje rozwiązania zadań, a wręcz czasami zapisany schemat, który tylko trzeba uzupełnić. Dla wielu dzieci matematyka zamiast fascynować, inspirować, bawić, rozwijać, staje się nudnym, pozbawionym aktywności badawczej terenem zdobywania wątpliwych rozwojowo doświadczeń edukacyjnych.

---

[1] G. Mietzel, *Psychologia kształcenia. Praktyczny podręcznik dla pedagogów i nauczycieli.* Gdańsk 2003, GWP s.324

Jak zatem można wspierać rozwój umiejętności matematycznych dzieci w szkole? Jak stwarzać warunki do zdobywania intuicji matematycznych, bawienia się matematyką, rozumienia pojęć i sensownego, elastycznego wykorzystywania wiedzy i umiejętności w konkretnym kontekście codziennych aktywności i działań człowieka? Jak wzmacniać motywację dzieci do uczenia się?

W tym miejscu warto pokusić się o refleksję dotyczącą dyskusji, jaka toczy się w ciągu ostatnich dziesięcioleci, a dotyczy spojrzenia na matematykę z perspektywy filozoficznej. Funkcjonują bowiem dwa podstawowe podejścia: normatywne i deskryptywne. W podejściu normatywnym zasadniczym zadaniem filozofii matematyki staje się poszukiwanie określonych zasad i reguł, które utrwalają status wiedzy z tego zakresu jako pewnej, wyraźnie zdefiniowanej i sformalizowanej. Natomiast perspektywa deskryptywna w ujęciu filozoficznym oznacza odejście od rozumienia dowodu matematycznego wyłącznie w kategoriach formalnego konstruktu na rzecz interpretacji akcentującej ten typ argumentacji, który ma służyć przekonaniu innych o trafności danej tezy. Oznacza to wyeksponowanie dyskursywnego charakteru matematyki, a tym samym faktu, że pojęcia matematyczne mogą być zmienne i podlegać falsyfikacji, nawiązując do koncepcji K. Poppera. Najbardziej znanym zwolennikiem tego drugiego podejścia był filozof matematyki Imre Lakatos[2] twórca quasi-empirycznego ujęcia filozofii matematyki, a więc sądu, iż przedmiotem analizy filozofii matematyki ma być proces dochodzenia do twierdzeń, a nie tylko sam efekt.

Ta dyskusja pozwala spojrzeć też głębiej na nauczanie matematyki, w tym edukację matematyczną najmłodszych w kontekście współczesnej wiedzy psychologicznej, pedagogicznej i właśnie filozoficznej wizji matematyki, jako dziedziny nauki o charakterze empirycznym, eksponującej argumentację i proces dochodzenia do twierdzeń.

R. Fisher podkreśla, że *„nauczyciel, aby zachęcić uczniów do myślenia matematycznego, musi być „akuszerem" ich matematycznych pomysłów"*. Dodaje, że „*Kluczem do myślenia matematycznego jest rozpoznawanie konfiguracji i dostrzeganie powiązań. Matematyka to silnie ustrukturyzowana sieć pojęć. Myśleć matematycznie, to łączyć elementy tej sieci. Matematyki nie tworzą odrębne umiejętności i informacje, to raczej szkielet złożony ze wzajemnie złożonych pojęć i procedur. Naszym zadaniem jest pomóc dzieciom ujrzeć struktury matematyczne, nie tylko reguły i fakty poznawane w izolacji"*[3]. Analizując mechanizmy psychologiczne związane z uczeniem się matematyki Fisher, nawiązując do rozróżnienia wprowadzonego przez R. Skempa, wyodrębnia dwa podejścia: instrumentalne i

[2] I. Lakatos, *Pisma z filozofii nauk empirycznych*, Warszawa 1995, PWN
[3] R. Fisher, *Uczymy jak myśleć*, Warszawa 1999, WSiP s. 203-204

relacyjne. Instrumentalne zakłada opanowanie przez dziecko reguł, algorytmów i posługiwanie się nimi w ściśle określonych sytuacjach. Ale taka wiedza jest ulotna, krótkotrwała. Podejście relacyjne zapewnia poznanie rozumowania, które prowadzi do określonego uogólnienia, zasady, twierdzenia czy reguły. Wtedy dziecko odkrywa regułę, staje się jej współtwórcą, a nie tylko biernym odbiorcą i uczestnikiem treningu zapamiętywania. Tak zdobywane umiejętności matematyczne są trwalsze, głębsze, wiążą się niejednokrotnie z emocjami i przeżyciami, które towarzyszą prawdziwym badaczom i odkrywcom.

Jednym z najczęściej popełnianych błędów w edukacji matematycznej dzieci jest dominacja metod nauczania eksponujących myślenie symboliczne, jako jedynie ważne, prowadzące do rzetelnej wiedzy. Ignoruje się inne rodzaje myślenia, bliższe dzieciom, uruchamiające proces samodzielnego dochodzenia do określonych pojęć. Fisher przypomina, że można wyodrębnić kilka form myślenia matematycznego: materialne (bazujące na konkretach, aktywności praktycznej), wizualne, symboliczne, werbalne (nadawanie indywidualnego znaczenia procedurom, planowanie w myśli, przekładanie na słowa), społeczne (uczenie się poprzez współpracę z innymi)[4].

W edukacji matematycznej najmłodszych warto korzystać z wiedzy psychologicznej, w tym rozróżnienia wprowadzonego przez J. Brunera w latach 60-tych na trzy rodzaje reprezentacji wiedzy: enaktywną, ikoniczną i symboliczną[5]. Współcześnie zbyt szybko przechodzi się w nauczaniu matematyki od aktywności na poziomie enaktywnym do aktywności abstrakcyjnej na symbolach. Gdzieś zniknął ze świadomości dydaktyków matematyki etap pośredni, ikoniczny, odpowiadający w pewnym stopniu myśleniu wizualnemu w ujęciu Fishera. Obrazowa prezentacja problemów, konstruowanie modeli i wizualizacji zagadnień matematycznych, graficzna komunikacja to niezbędny etap wspierający proces zrozumienia matematyki, wypracowania własnych strategii rozwiązywania zadań, ułatwiający działanie w nietypowych sytuacjach. W dydaktyce wczesnej edukacji matematycznej często błędnie interpretowano znaczenie trzech reprezentacji wiedzy J. Brunera, zakładając, że w każdym przypadku wspierania rozumienia pojęć matematycznych trzeba koniecznie przeprowadzić dziecko, po kolei przez wszystkie wymienione etapy po to, by efektem końcowym była dominacja myślenia symbolicznego. Tymczasem Bruner wyraźnie akcentuje fakt, że w ciągu całego naszego życia korzystamy ze wszystkich form reprezentacji wiedzy. Natomiast ucząc dzieci matematyki warto pamiętać, że nie zawsze wszyscy muszą zaczynać od konkretu, by

---

[4] Tamże, s.204

[5] J. Bruner, *Poza dostarczone informacje.* Warszawa 1978, PWN

potem przejść do reprezentacji ikonicznej i symbolicznej[6]. W zależności od indywidualnych potrzeb i poziomu rozwoju dzieci mogą wykorzystywać różne rodzaje reprezentacji, zaczynając często od ikonicznej, wizualizując sobie problemy matematyczne, bez konieczności odwoływania się do konkretów. Ale kluczowym elementem „dobrego nauczania” i rozwoju są różne strategie działania konstruowane, projektowane przez dzieci, a nie powielanie schematów proponowanych przez nauczycieli. Wspomina o tym J. Piaget przestrzegając przed werbalizmem obrazkowym, a więc używaniem graficznych obrazów w sposób odtwórczy, przez uczniów, schematyczny, bez możliwości ich samodzielnego konstruowania[7].

Integralną częścią procesu konstruowania wiedzy matematycznej jest wykorzystywanie języka w różnych sytuacjach do wyjaśniania, argumentowania, udowadniania, opowiadania, opisywania, przekonywania, uczenia się i nauczania innych. Aktywność werbalna porządkuje wiedzę, pozwala na jej wykorzystanie w nowych sytuacjach. Interakcyjny charakter edukacji matematycznej zakłada także uczenie się w relacjach społecznych, z udziałem tutoringu rówieśniczego.

**Opis środka dydaktycznego „Gramy w piktogramy”**

Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy” stworzony w ramach projektu *PIKTOGRAFIA Rozwijanie umiejętności posługiwania się językiem symbolicznym w edukacji z zakresu nauk matematycznych z zastosowaniem piktogramów Asylco* to środek dydaktyczny, który powstał we współpracy Wydawnictwa Bohdan Orłowski (lider) oraz Uniwersytetu Warszawskiego Wydziału Pedagogicznego (partner).

Celem ogólnym projektu było podwyższenie u uczniów szkół podstawowych i gimnazjów poziomu rozumienia matematyki i posługiwania się nią w praktyce poprzez wykorzystanie innowacyjnego pakietu edukacyjnego „Gramy w piktogramy”. Konstruowanie wiedzy i umiejętności matematycznych w szkole wymaga zaangażowania myślenia (rozwiązywania problemów), aktywności werbalnej (wyjaśnianie, opowiadanie, pytanie, argumentowanie), budowania własnych strategii rozwiązania, współpracy z rówieśnikami w klasie, akceptacji dla uczniowskich błędów jako podstawy uczenia się. Proces dochodzenia do rozumienia pojęć matematycznych wymaga wyeksponowania wizualizacji i obrazowej, graficznej

[6] D. Klus-Stańska, *Dydaktyka wobec chaosu pojęć i zdarzeń.* Warszawa 2010, Wydawnictwo Akademickie „Żak”

[7] J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja.* Warszawa 1977, PWN

reprezentacji problemów matematycznych, stąd głównym elementem pakietu edukacyjnego są zestawy piktogramów o różnym znaczeniu i formie.

Praca z pakietem edukacyjnym „Gramy w piktogramy” ma stwarzać okazje w procesie kształcenia do:

- modelowania sytuacji matematycznych
- samodzielności poznawczej uczniów,
- krytycznego myślenia oraz twórczego działania,
- współpracy w grupie podczas rozwiązywania problemów

Celami szczegółowym projektu były następujące zadania:

- podwyższenie u uczniów umiejętności dobierania modeli matematycznych do analizowanych sytuacji z uwzględnieniem posługiwania się językiem symbolicznym,
- podwyższenie poziomu rozumienia pojęć matematycznych, także dzięki ich samodzielnemu konstruowaniu przez uczniów,
- podwyższenie poziomu umiejętności rozwiązywania problemów o charakterze matematycznym z wykorzystywanie procesów poznawczych istotnych dla myślenia matematycznego (dostrzeganie związków, prawidłowości, myślenie przez analogię… ).

Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy” został przygotowany w trzech wariantach: dla klas 1-3 i 4-6 szkoły podstawowej oraz gimnazjum. Zawiera on następujące elementy:

- zestawy pomocy dla uczniów (jeden zestaw dla czteroosobowej grupy dzieci):
    - piktogramy do modelowania sytuacji matematycznych,
    - stemple z piktogramami do wykorzystania podczas rozwiązywania i układania zadań oraz projektowania własnych piktogramów,
    - gry (plansze, pionki, kostki) rozwijające umiejętności matematyczne,
    - żetony i kostki wspierające rozumienie systemu dziesiętnego,
    - tabliczki suchościeralne i mazaki do zapisywania rozwiązań zadań, projektowania piktogramów itp.
- zestaw pomocy dla nauczyciela:
    - piktogramy demonstracyjne,

- płyty CD zawierające materiały dodatkowe przydatne szczególnie do indywidualizowania pracy z dziećmi,
- plansze kalendarza do zaprojektowania i prowadzenia przez dzieci kalendarza klasowego,
- naklejki z piktogramami i puste kartoniki do wykorzystania przez uczniów,
- modele wagi pomagające uczniom dostrzegać zależności ważne podczas rozwiązywania zadań,
- programy komputerowe wspierające rozwój umiejętności matematycznych uczniów,

- przewodnik dla nauczycieli – przedstawia filozofię edukacyjną pakietu, opis zawartości i wskazania, jak pracować z zestawem pomocy

- scenariusze zajęć – zawierają projekty sytuacji dydaktycznych opartych na aktywności uczniów oraz uczeniu się we współpracy

- karty pracy – na trzech poziomach trudności: A, B i C (A dla uczniów z problemami w opanowaniu danej umiejętności, C dla uczniów, którzy opanowali tę umiejętność i należy stawiać przed nimi wyzwania wspierające rozwój) służą indywidualizacji pracy uczniów.

Opracowano też wersję e-pakietu z materiałami do pobrania oraz szkolenie e-learningowe dla nauczycieli chcących korzystać z pakietu.

**Wyniki testowania pakietu edukacyjnego „Gramy w piktogramy"**

Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy" został poddany weryfikacji w 20 oddziałach szkół podstawowych i gimnazjów w okresie od września 2012 do czerwca 2013 roku. W testowaniu pakietu wzięło udział 22 nauczycieli oraz 500 uczniów[8].

W celu określenia skuteczności oddziaływań pakietu przeprowadzono badanie wybranych matematycznych umiejętności uczniów w schemacie z pomiarem powtarzanym i grupą kontrolną. W badaniu zrealizowanym na poziomie klas trzecich, wzięło udział 8 klas eksperymentalnych oraz 8 klas kontrolnych. Wybór poziomu wiekowego uczniów był podyktowany przyjętą metodologią (por. dalej) oraz zakresem wykorzystania pomocy w procesie kształcenia – w klasie trzeciej możliwości jej zastosowania są największe.

[8] M. Dąbrowski M., M. Żytko (red.), *Raport z testowania innowacyjnej pomocy dydaktycznej: Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy",* Warszawa 2013: Wydawnictwo Bohdan Orłowski.

Klasy eksperymentalne dobrano tak, aby wypełniły każdą z ośmiu kombinacji stworzonych przez skrzyżowanie dwóch zmiennych:

- *lokalizacja szkoły*, która przyjmuje dwie wartości:
    - ✓ wieś i miasta poniżej 10 tysięcy mieszkańców
    - ✓ miasta powyżej 10 tysięcy mieszkańców
- *średni poziom szkoły*, który przyjmuje cztery wartości powstałe przez podział średnich wyników szkół w Ogólnopolskim Badaniu Umiejętności Trzecioklasistów OBUT 2012 na równoliczne ćwiartki za pomocą kwartyli rozkładu średnich wyników szkół.

Jako klasy kontrolne w siedmiu przypadkach wykorzystano równoległe klasy trzecie z tych samych szkół co klasy eksperymentalne. Ponieważ jedna z klas eksperymentalnych nie miała w swojej szkole klasy równoległej, do grupy klas kontrolnych dokooptowano klasę z jednociągowej szkoły o identycznej lokalizacji i analogicznym wyniku w badaniach OBUT. Uczniowie z klas kontrolnych nie mieli dostępu do pakietu.

Badanie testowe przeprowadzono we wrześniu 2012 roku (pretest) i w czerwcu 2013 roku (posttest), czyli na początku i pod koniec okresu weryfikacji pakietu w warunkach szkolnych. W preteście wzięło udział 160 uczniów w grupie klas eksperymentalnych oraz 170 w grupie klas kontrolnych, a w postteście – odpowiednio 149 oraz 163 uczniów. W testach wykorzystano zadania zastosowane na reprezentatywnej próbie w ogólnopolskich badaniach umiejętności trzecioklasistów realizowanych przez CKE w 2008 roku[9], co umożliwiło umieszczenie uzyskanych wyników na wspólnej skali[10].

W testach wykorzystano pięć grup zadań:

- nietypowe zadania tekstowe, które pełniły funkcję egzemplifikacji modelowania matematycznego
- zadania badające rozumienie struktury systemu dziesiętnego, jako najważniejszej struktury matematycznej występującej w nauczaniu początkowym

[9] M. Dąbrowski (red.), (2009), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej. Raport z badań ilościowych 2008*, Warszawa 2009, Centralna Komisja Egzaminacyjna.

[10] B. Kondratek, *Weryfikacja skuteczności pakietu edukacyjnego „Gramy w piktogramy" w odniesieniu do umiejętności uczniów – analiza statystyczna*, w: Dąbrowski M., Żytko M. (red.) (2013), *Raport z testowania innowacyjnej pomocy dydaktycznej: Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy"*, Warszawa 2013, Wydawnictwo Bohdan Orłowski.

- zadania problemowe związane z dostrzeganiem i wykorzystywaniem prawidłowości
- przykłady badające sprawność obliczeniową
- typowe dla naszej szkoły zadania tekstowe.

Trzy początkowe grupy zadań wykorzystano, zgodnie z przyjętymi założeniami, do weryfikacji skuteczności testowanego pakietu. Dwie pozostałe dołączono w celu zbadania, czy zmiana stylu pracy nauczyciela, będąca efektem realizacji proponowanych w pakiecie scenariuszy, będzie rzutowała na najbardziej typowe i charakterystyczne dla naszej szkoły obszary działań uczniów i, jeśli tak, to w jaki sposób. Przyjrzyjmy się bliżej zadaniom i wynikom testów.

Na I etapie kształcenia najciekawszym i najbardziej zaawansowanym obszarem modelowania matematycznego jest rozwiązywanie zadań tekstowych. Dla wyeliminowania ewentualnego efektu „szkolnego wytrenowania", które dotyczy typowych zadań tekstowych „utrwalanych" w naszej szkole, zdecydowano się, badając ten obszar, sięgnąć po zadania o nietypowej, z punktu widzenia klas 1-3, strukturze. W każdym teście wykorzystano dwa takie zadania (por. tabela 1.).

Tabela 1. Wyniki pretestu i posttestu w obszarze modelowania matematycznego.

| | Klasy eksperymentalne | Klasy kontrolne |
|---|---|---|
| **Modelowanie matematyczne – pretest** | | |
| 5. Adam narysował szlaczek złożony z kółek, trójkątów i kwadratów. Kółek narysował 50. Trójkątów było o 9 więcej, a kwadratów o 12 mniej niż kółek. Ile kwadratów narysował Adam? | 51,3% | 47,1% |
| 6. Jacek i Wojtek mieli po tyle samo lizaków. Wojtek oddał Jackowi dwa swoje lizaki. Teraz więc Jacek ma więcej lizaków niż Wojtek. O ile więcej? | 8,8% | 12,4% |
| **Modelowanie matematyczne – średni wynik dla pretestu** | **30,1%** | **29,8%** |
| **Modelowanie matematyczne – posttest** | | |
| 5. Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut? | 78,5% | 68,1% |
| 6. Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka? | 27,5% | 23,9% |
| **Modelowanie matematyczne – średni wynik dla posttestu** | **53,0%** | **46,0%** |

Zadanie tekstowe uznawano za poprawnie rozwiązane, jeśli uczeń zademonstrował dobry tok rozumowania (błędy rachunkowe były pomijane) albo podał poprawną odpowiedź, bez zapisywania obliczeń. Jak widać, w preteście średni poziom dobrych rozwiązań dla klas eksperymentalnych i kontrolnych były bardzo zbliżony. W postteście sytuacja się zmienia – średni poziom wykonania dla klas eksperymentalnych jest o 7,0% wyższy niż dla klas kontrolnych.

Jednym z głównych zadań nauczania początkowego matematyki jest wyposażenie uczniów w dobre intuicje dotyczące systemu dziesiętnego. Jest to najważniejsza z matematycznych struktur, z którymi stykają się uczniowie na I etapie kształcenia. Jej dobre zrozumienie jest ogromnie istotne m.in. dla inteligentnego wykonywania obliczeń pamięciowych czy świadomego i efektywnego posługiwania się w kolejnych latach nauki algorytmami obliczeń pisemnych. W badaniach postanowiono sprawdzić, na ile uczniowie rozumieją strukturę systemu dziesiętnego, a okazją do tego było porównywanie liczb dwucyfrowych – ponownie w dość nietypowej sytuacji (por. tabela 2.).

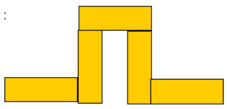
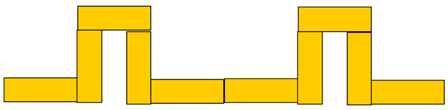
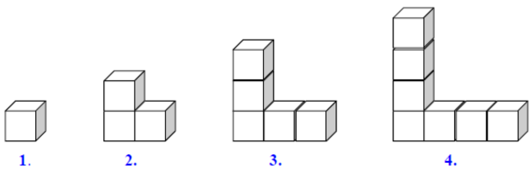
Tabela 2. Wyniki pretestu i posttestu w obszarze rozumienia pojęć na przykładzie rozumienia struktury systemu dziesiętnego.

| | **Klasy eksperymentalne** | **Klasy kontrolne** |
|---|---|---|
| **Rozumienie pojęć – pretest** | | |
| 3. W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry.<br>Tam, gdzie to możliwe, wstaw w okienko znak > albo <.<br>W pozostałe okienka wstaw znak zapytania: ?.<br><br>a) 7■ □ 48 b) ■6□ 33 c) 6■□ 2■ | a) 52,5%<br>b) 38,1%<br>c) 36,9% | a) 41,8%<br>b) 47,6%<br>c) 38,8% |
| **Rozumienie pojęć – średni wynik dla pretestu** | **42,5%** | **42,7%** |
| **Rozumienie pojęć – posttest** | | |
| 3. W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry.<br>Tam, gdzie to możliwe, wstaw w okienko znak > albo <.<br>W pozostałe okienka wstaw znak zapytania: ?.<br><br>a) ■6 □ 33 b) ■3□ 11 c) 2■□■5 | a) 61,7%<br>b) 60,4%<br>c) 69,8% | a) 51,5%<br>b) 62,6%<br>c) 60,1% |
| **Rozumienie pojęć – średni wynik dla posttestu** | **64,0%** | **58,1%** |

Ponownie, w preteście obie grupy klas uzyskały bardzo zbliżony wynik średni. W postteście klasy eksperymentalne mają średni wynik o 5,9% wyższy od klas kontrolnych. Warto także porównać wyniki uzyskane przez uczniów w obu testach dla przykładu, który się powtórzył, czyli dla przykładów 3b) z pretestu oraz 3a) z posttestu. W klasach eksperymentalnych wynik poprawił się o 23,6% przy wzroście o 3,9% dla klas kontrolnych.

W testach wykorzystano także po jednym zadaniu o charakterze problemowym badającym umiejętność dostrzegania i wykorzystywania prawidłowości oraz formułowania prostego wyjaśnienia (por. tabela 3.).

Tabela 3. Wyniki pretestu i posttestu w obszarze rozwiązywania problemów.

| | **Klasy eksperymentalne** | **Klasy kontrolne** |
|---|---|---|
| **Rozwiązywanie problemów – pretest** | | |
| 7. Karol budował bramy z identycznych klocków.<br>Do zbudowania jednej bramy użył 5 klocków: <br>Do zbudowania dwóch takich bram<br>Potrzebował 10 klocków:<br><br>a) Ilu klocków potrzebował Karol do zbudowania:<br>• trzech takich bram?<br>• czterech takich bram?<br>• dziesięciu takich bram?<br>• dwudziestu takich bram? | a1) 85,0%<br>a2) 81,9%<br>a3) 73,8%<br>a4) 68,8% | a1) 88,2%<br>a2) 84,7%<br>a3) 67,1%<br>a4) 64,7% |
| b) Jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy? Opisz, jak Ty to robisz. | 23,1% | 21,2% |
| **Rozwiązywanie problemów – średni wynik dla pretestu** | **66,5%** | **65,2%** |
| **Rozwiązywanie problemów – posttest** | | |
| 7. Te budowle powstały z identycznych drewnianych klocków. Zbudowano je zgodnie z pewną regułą. Odgadnij, jaka to reguła.<br><br>a) Z ilu klocków powinna się składać następna taka budowla.<br>b) Ile klocków potrzeba do zbudowania dziesiątej takiej budowli?<br>c) A ile potrzeba do zbudowania dwudziestej budowli z tej serii? | a) 79,2%<br>b) 51,7%<br>c) 30,9% | a) 63,2%<br>b) 33,7%<br>c) 19,6% |
| d) Opisz, jak można szybko obliczyć, ile klocków potrzeba do zbudowania dwudziestej budowli z tej serii. | 26,2% | 17,8% |
| **Rozwiązywanie problemów – średni wynik dla posttestu** | **47,0%** | **33,6%** |

Jak widać, oba zadania mają bardzo podobną strukturę i charakter – poszukiwana reguła przedstawiona jest za pomocą sekwencji rysunków budowli z klocków. Początkowe dwa pytania prowokują ucznia do „przedłużenia” tej sekwencji. Kolejne pytanie albo dwa kolejne (w preteście) uruchamiają próbę dokonania uogólnienia. Natomiast ostatnia część obu zadań wymaga sformułowania mniej lub bardziej formalnego opisu zauważonej prawidłowości. Sekwencja figur z pretestu dotyczy wielokrotności liczby 5, zatem prawidłowość jest stosunkowo łatwa do zauważenia i opisania. W postteście mamy do czynienia z ciągiem liczb nieparzystych, co znacznie podnosi poziom trudności zadania.

Również i w tym przypadku wyniki pretestu klas eksperymentalnych i kontrolnych są w pełni porównywalne. Średni wynik jest stosunkowo wysoki, co dobrze świadczy o potencjale dzieci – tym bardziej szkoda, że tego typu zadania bardzo rzadko pojawiają się w naszej szkolnej praktyce.

Wyniku posttestu są bardziej zróżnicowane. W zakresie dostrzegania i wykorzystywania prawidłowości uczniowie klas eksperymentalnych uzyskali średni wynik o ok. 15% wyższy od dzieci z klas kontrolnych. Także w obszarze wyjaśniania (ostatni podpunkt) wypadli oni lepiej – tym razem o ok. 8%. Łączny średni wynik klas eksperymentalnych w zakresie rozwiązywania problemów jest o ponad 13% lepszy od wyniku klas kontrolnych.

Oba testy uzupełniono zadaniami dotyczącymi dwóch obszarów umiejętności, które dominują w naszym nauczaniu początkowym: wykonywanie obliczeń (por. tabela 4.) oraz rozwiązywanie typowych zadań tekstowych (por. tabela 5.).

Tabela 4. Wyniki pretestu i posttestu w obszarze wykonywanie obliczeń.

| | **Klasy eksperymentalne** | **Klasy kontrolne** |
|---|---|---|
| **Wykonywanie obliczeń – pretest** | | |
| 1. Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.<br>a) 39 + 16 b) 67 – 49 | a) 66,3%<br>b) 43,1% | a) 75,9%<br>b) 45,3% |
| **Wykonywanie obliczeń – średni wynik dla pretestu** | **54,7%** | **60,6%** |
| **Wykonywanie obliczeń – posttest** | | |
| 1. Oblicz tak, jak Ci najwygodniej.<br>a) 199 + 87 b) 106 – 99 c) 150 : 25 | a) 69,8%<br>b) 70,5%<br>c) 62,4% | a) 74,2%<br>b) 66,9%<br>c) 58,3% |
| **Wykonywanie obliczeń – średni wynik dla posttestu** | **67,6%** | **66,5%** |

W preteście pojawiły się tylko dwa działania: dodawanie i odejmowanie, oba w zakresie 100. W postteście rozszerzono nieco zakres dodawania i odejmowania oraz wprowadzono dodatkowo dzielenie. Uczniowie kończący klasę trzecią nie znają algorytmu dzielenia pisemnego, dlatego też w tego typu przykładzie muszą, korzystając ze swojej wiedzy na temat dzielenia, poszukać innej metody znalezienia wyniku – mogą szukać odpowiedniego iloczynu, mogą dodawać albo odejmować, mogą sięgnąć np. po strategię prób i poprawek.

Tym razem „na starcie” nieco lepiej, bo o 5,9%, wypadli uczniowie klas kontrolnych, którzy przede wszystkim sprawniej dodawali. W postteście wyniki się wyrównują: uczniowie z klas eksperymentalnych nadal nieco gorzej dodają od swoich rówieśników z klas kontrolnych (o 4,4%), nieco lepiej od nich odejmują (o 3,6%) i – co najważniejsze – lepiej (o 4,1%) radzą sobie z nietypowym dzieleniem, co sumarycznie daje średni wynik nieznacznie wyższy niż w klasach kontrolnych.

Tabela 5. Wyniki pretestu i posttestu w obszarze rozwiązywania typowych zadań tekstowych.

| | **Klasy eksperymentalne** | **Klasy kontrolne** |
|---|---|---|
| **Rozwiązywanie typowych zadań tekstowych – pretest** | | |
| 2. Karol i Ela zbierali kasztany w parku. Karol zebrał ich 30, a Ela o 6 więcej. Ile kasztanów zebrała Ela? | 96,9% | 97,6% |
| 4. Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janem ma już 40 modeli. Piotr ma o osiem więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał? | 74,4% | 84,7% |
| **Rozwiązywanie typowych zadań tekstowych – średni wynik dla pretestu** | **85,7%** | **91,2%** |
| **Rozwiązywanie typowych zadań tekstowych – posttest** | | |
| 2. W małej zgrzewce wody mineralnej jest 8 butelek, a w dużej zgrzewce 14 butelek. Ile butelek jest razem w czterech małych i czterech dużych zgrzewkach? | 76,5% | 77,3% |
| 4. Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości. Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej siatki? | 74,5% | 66,3% |
| **Rozwiązywanie typowych zadań tekstowych – średni wynik dla posttestu** | **75,5%** | **71,8%** |

Średni wynik pretestu w tym obszarze dla klas kontrolnych jest o 5,5% wyższy od wyniku klas eksperymentalnych. Uderza poziom rezultatów dla zadania 2, we wszystkich klasach bliski 100%. I, podobnie jak wielokrotnie wcześniej, sytuacja ulega zmianie w postteście – średni wynik klas eksperymentalnych jest nieznacznie: o 3,7% wyższy od rezultatu klas kontrolnych.

Jak wspomniano wcześniej, wyniki trzech początkowych grup zadań zostały wykorzystane do oceny skuteczności oddziaływań pakietu edukacyjnego „Gramy z piktogramami”. W tym celu, wyniki pretestu i posttestu dla obu grup klas porównano (por. tabela 6.), po ulokowaniu ich, m.in. dzięki wykorzystaniu IRT, na wspólnej skali (Kondratek 2013).

Tabela 6. Porównanie wyników na wspólnej skali testu.

| | **pretest** | | **posttest** | |
|---|---|---|---|---|
| | klasy kontrolne | klasy eksperymentalne | klasy kontrolne | klasy eksperymentalne |
| średnia | 21,2 | 21,1 | 25,8 | 28,3 |
| % maksimum | 45,0% | 45,0% | 54,8% | 60,3% |

Wyniki klas eksperymentalnych w postteście wzrosły, w stosunku do pretestu, o 7,2 punktu, przy wzroście o 4,6 punktu w klasach kontrolnych. Oznacza to, że „dodatkowy" przyrost wyników specyficznie związany z wykorzystaniem pakietu „Gramy w piktogramy" wyniósł **55,6%** przyrostu, jaki następuje w czasie między pretestem a posttestem, niezależnie od warunków eksperymentalnych. Efekt oddziaływania eksperymentalnego jest istotny statystycznie.

Zmiany w dwóch pozostałych obszarach: wykonywanie obliczeń oraz rozwiązywanie typowych zadań tekstowych cieszą tym bardziej, że w pakiecie edukacyjnym „Gramy w piktogramy" nie zaproponowano żadnych działań o charakterze obliczeniowym czy dotyczących typowych zadań tekstowych. Znając realia naszego nauczania początkowego, można nawet przypuszczać, że realizacja proponowanych scenariuszy odbywała się w mniejszym czy większym stopniu „kosztem" zajęć poświęconych „utrwalaniu" tych właśnie umiejętności uczniów. Należy więc sądzić, że mamy do czynienia z dodatkowym efektem proponowanej zmiany podejścia do rozwijania umiejętności matematycznych dzieci.

**Podsumowanie**

Pakiet edukacyjny „Gramy w piktogramy" to jeden z środków dydaktycznych, który może wspierać rozwój umiejętności matematycznych, ale także językowych, społecznych i poznawczych dzieci. Wszystko jednak zależy od stopnia świadomości i profesjonalnego przygotowania nauczyciela, a dokładniej jego gotowości do wprowadzania zmian w sposobie pracy z uczniami. Wymaga bowiem odejścia od tradycyjnego nauczania, które eksponuje instruktażowo-dyrektywną rolę nauczyciela. Propozycje scenariuszy zajęć, które znalazły się w pakiecie pokazują, że rolą nauczyciela jest organizowanie sytuacji edukacyjnych, tworzenie stymulującej rozwój przestrzeni edukacyjnej, zachęcanie dzieci do współpracy i samodzielności działania i myślenia oraz rozwiązywania problemów. Wyniki testowania pakietu wskazują, że przynosi to pozytywne efekty w obszarze ważnych umiejętności matematycznych i co więcej następuje transfer i podwyższenie kompetencji dzieci w zakresach, które nie były przedmiotem szczególnej aktywności podczas testowania pakietu, jak na przykład typowe zadania rachunkowe czy tekstowe.