KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

OPTIMA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PROJEKT „Z PERYFERII DO CENTRUM”

KONKURS PRZEDMIOTOWY
Z MATEMATYKI

ETAP 2 - ZADANIA

OPTIMA, Opole 2010

Z PERYFERII DO CENTRUM

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1.

Wyznaczyć prostą $y = 2x + b$, która dzieli kwadrat o wierzchołkach

$$(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$$

na 2 części o polach $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie.

Dla $b = 0$ proste $y = 2x$ i $y = 1$ przecinają się punkcie $(1/2, 1)$. Wtedy

$$\text{pole} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$$

Zatem b musi być ujemne. Proste $y = 2x + b$ i $y = 1$ przecinają się w punkcie

$$B = \left(\frac{1-b}{2}, 1\right). \qquad \frac{1-b}{2} < 1 \;\Leftrightarrow b > -1.$$

Proste $y = 2x + b$ i $y = 0$ przecinają się w punkcie

$$A = \left(-\frac{b}{2}, 0\right). \qquad -\frac{b}{2} < 1 \;\Leftrightarrow b > -2.$$

Niech zatem $-1 < b < 0$. Wtedy

$$\text{pole} = 1 \cdot (-b/2) + 1 \cdot \left(\frac{1-b}{2} - (-b/2)\right) \cdot (1/2) = -b/2 + 1/4.$$

Stąd

$$-b/2 + 1/4 = 1/3 \;\Leftrightarrow b = -1/6.$$

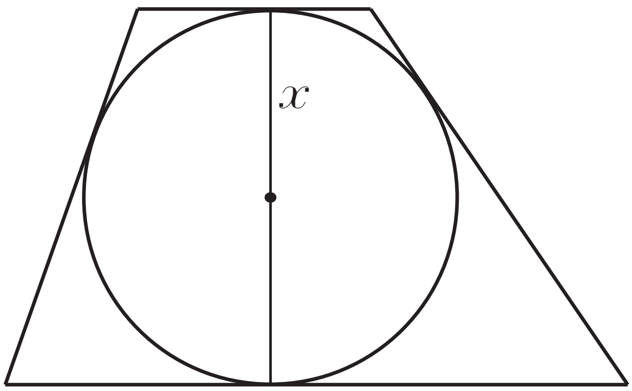
Zatem $y = 2x - 1/6$. W szczególności: $A = (1/12, 0)$ oraz $B = (7/12, 1)$.

$\square$

Zadanie 2.

Obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w trapez o polu P i obwodzie S.

Rozwiązanie.



Niech x będzie długością promienia. Mamy zależności:

$$S/2 = \text{suma podstaw (dolnej i gornej trapezu)},$$

$$P = \frac{\text{suma podstaw}}{2} \cdot 2x.$$

Stąd

$$P = \frac{S/2}{2} \cdot 2x,$$

$$x = \frac{2P}{S}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
OPTIMA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3.

Wyznaczyć wszystkie zbiory 2-elementowe $A = \{a, b\}$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi, które mają własność: kwadrat każdego elementu z A należy do A. Odpowiedź musi byc uzasadniona.

Rozwiązanie.

$a^2 \in A \;\Leftrightarrow a^2 = a$ lub $a^2 = b \;\Leftrightarrow a = 0$ lub $a = 1$ lub $b = a^2$.

Mamy 3 przypadki:

(1) $a = 0$. Wtedy:

$A = \{0, b\}$, $b^2 = 0$ lub $b^2 = b$, skąd $b = 1$.

Zatem $A = \{0, 1\}$.

(2) $a = 1$. Wtedy:

$A = \{1, b\}$, $b^2 = 1$ lub $b^2 = b$, skąd $b = -1$ lub $b = 0$.

Zatem $A = \{1, -1\}$ lub $A = \{1, 0\}$.

(3) $b = a^2$. Wtedy $b > 0$ i mamy:

$A = \{a, a^2\}, \;\; a \neq 0, \;\; a \neq 1$.

Niech $a < 0$. Wtedy $a^4 = a^2$. Stąd $a = 0$ (odpada) lub $a = -1$. Zatem

$A = \{-1, 1\}$.

Przypuśćmy, że $0 < a < 1$. Wtedy:

$a^4 < a^2 < a$. Sprzeczność, bo A jest 2-elementowy.

Przypuśćmy, że $a > 1$. Wtedy:

$a < a^2 < a^4$. Sprzeczność, bo A jest 2-elementowy.

Analiza: $b^2 \in A \;\Leftrightarrow$ ... daje te same rezultaty.