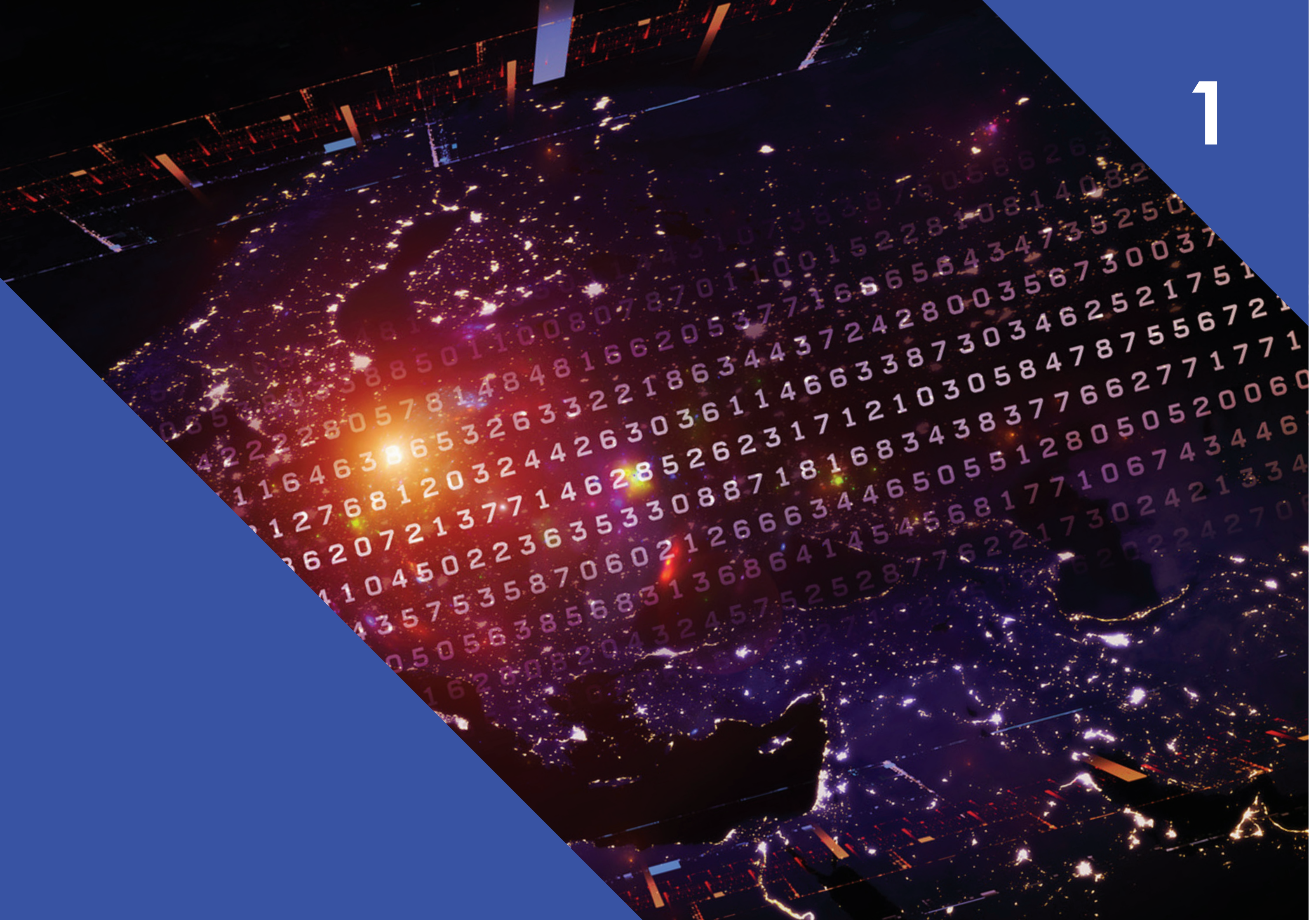


1

Dariusz Kulma Witold Pająk

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Liczby rzeczywiste

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autorzy: **Dariusz Kulma, Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.fotolia.com:
© agsandrew - id. 42076089; © evgenyatamanenko - id. 55578965; © Jose Ignacio Soto - id. 36778284; © Pavel Ignatov - id. 48172735;© larisabozhikova - id. 49989103; © Maksim Kabakou - id. 41908523; © singkham - id. 61443980; © Friedberg - id. 40502604; © mills21 - id. 11761333; © Maksim Kabakou -id. 60613008; © PixBox - id. 31636550; © WavebreakmediaMicro - id. 68673495; © WavebreakmediaMicro - id. 68673960; © Ivan Kireiev - id. 49984561; © piai - id. 59206454; © Andrey Kudrin - id. 20936587; © Marek -id. 19616488; © valdis torms - id. 66702797; © ArchMen - id. 19400633; © ag visuell - id. 53584856; © arsdigital - id. 56402903; © cutimage - id. 61114710

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2014. Wydanie pierwsze

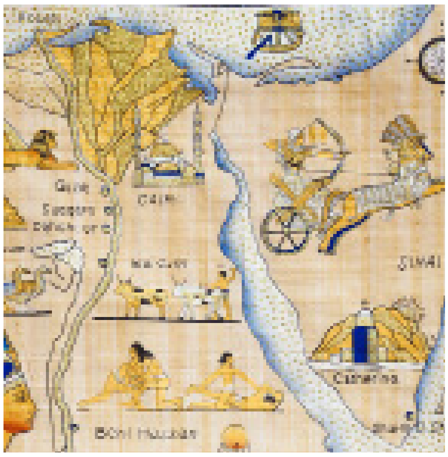
ISBN: 978-83-63975-08-1

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

1

Liczby rzeczywiste



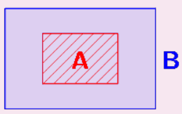
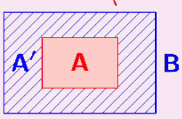
Liczby są wszędzie. Świat nie mógłby bez nich istnieć. Od zarania dziejów stopniowo odkrywano kolejne zbiory liczbowe. Człowiek posługiwał się najpierw tylko podstawowymi liczbami naturalnymi. Nie było ani potrzeby używania innego rodzaju liczb, ani potrzeby posługiwania się liczbami bardzo dużymi. Jednak wraz z rozwojem ludzkiej działalności stopniowo się to zmieniało i do przeprowadzania trudniejszych obliczeń potrzebne stało się nawet zero. Do dziś matematycy nie potrafią ustalić, czy zero jest liczbą naturalną, czy nie. Skąd się wzięło to zero? Otóż Hindusi w starożytnych Indiach dokonywali obliczeń z wykorzystaniem kamieni, kładąc je na piasku. Gdy podnosili kamień, na piasku zostawał dołeczek w kształcie koła. Ustalili, że tak będą oznaczać coś, czego nie ma. Greccy filozofowie, będący jednocześnie matematykami, nie byli już tacy pewni, gdy mówili: „Jak coś, co nie istnieje, może być liczbą?”.
Już w najdawniejszych wiekach ludzie wymieniali się dobrami materialnymi lub udzielali sobie pożyczek. „Dałem ci 4 wozy zboża, więc musisz dać mi 2 krowy”. Liczby ujemne, wyrażające dług, powstały ze zwykłej materialnej potrzeby. Wraz z ewoluowaniem komplikacji związanych z wymianą i pożyczkami okazało się, że dług może wynosić mniej niż pewna całość, np. krowa. Mniej więcej... pół krowy? Na potrzeby dokładnych ustaleń powstały ułamki — liczby wymierne. Ale to nie koniec odkryć! Pitagorejczycy, czyli zwolennicy nauki Pitagorasa, zauważyli, że przekątna kwadratu o boku długości 1 jest niewspółmierna w stosunku do liczb znanych ówcześnie. Nie było wiadomo, do czego ta liczba może się przydać. Odkrycie to pitagorejczycy uznali za tak niezwykłe, że trzymali tę informację w tajemnicy pod groźbą kary śmierci. Zginąć za $\sqrt{2}$? Trochę niewspółmierna to kara!

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
ZADANIA TESTOWE.	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE.	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

1.A ▶ Zbiory i działania na zbiorach

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Jednym z istotnych pojęć w matematyce jest zbiór elementów. Zbiór to pojęcie pierwotne, którego nie definiujemy. Zbiór oznaczamy dużymi literami, np. A, B, X itd. Elementy zbiorów oznaczamy małymi literami lub liczbami. Wymieniając elementy zbioru, wypisujemy je z zastosowaniem nawiasu klamrowego. W nawiasie klamrowym możemy wymieniać wszystkie elementy zbioru, możemy również wymienić kilka, wskazując na sposób ich tworzenia, możemy również wskazać cechy elementów zbioru. Jeśli dany element należy do zbioru, to możemy to oznaczyć symbolem $\in$, np. $a \in A$. Jeśli dany element nie należy do zbioru, to używamy symbolu $\notin$, np. $b \notin B$.	$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. W tym zbiorze jest siedem elementów. $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots 23\}$. Ten zbiór został opisany, ale nie podano wszystkich jego elementów; natomiast zgodnie z widoczną regularnością wymieniania elementów wiadomo, że kolejnymi niewymienionymi elementami są: 11, 13, 15, 17, 19, 21. Zatem: $17 \in B, 22 \notin B$. $C = \{x : x \text{ jest liczbą parzystą dodatnią}\}$ (czytaj: Zbiór C jest zbiorem takich elementów x, które są liczbami parzystymi dodatnimi). Ten zbiór został opisany ze wskazaniem cechy elementów x. Zatem: $24 \in C, 3 \notin C$.
Wyróżniamy zbiory skończone, czyli takie, które mają skończoną liczbę elementów.	$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{2, 4, 6, \ldots, 128\}$
Wyróżniamy zbiory nieskończone, czyli takie, które mają nieskończoną liczbę elementów.	Jest to np. zbiór liczb naturalnych: $N = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$
Zbiór, do którego nie należy żaden element, nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy go symbolem $\varnothing$.	$A = \varnothing$
Zbiór A jest podzbiorem zbioru B, jeśli każdy element zbioru A należy do zbioru B. Mówimy wtedy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B i zapisujemy to następująco: $A \subset B$. **A ⊂ B** 	Dane są zbiory: $A = \{2, 4, 6\}$ oraz $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Wszystkie elementy zbioru A należą do zbioru B, więc $A \subset B$.
Jeśli zbiór A zawiera się w zbiorze B, to dopełnieniem zbioru A nazywamy różnicę $B \setminus A$ i zapisujemy to następująco: $A' = B \setminus A$. **A′ = B\A** 	Dane są zbiory: $A = \{2, 4, 5, 7\}$ oraz $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Wyznacz A'. $A' = B \setminus A = \{1, 3, 6, 8, 9\}$
Jeśli iloczyn zbiorów jest zbiorem pustym (co zapisujemy jako $A \cap B = \varnothing$), to zbiory A i B określamy jako zbiory rozłączne.	Dane są zbiory: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ oraz $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Wyznacz $A \cap B$. $A \cap B = \varnothing$

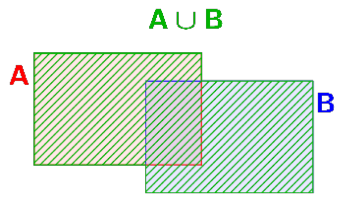
► Działania na zbiorach

P.1.A.1

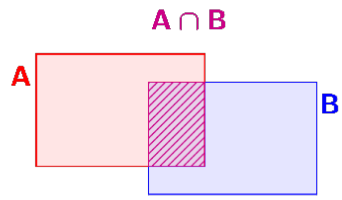
Na zbiorach możemy wykonywać działania, czyli wyznaczać sumę, różnicę oraz iloczyn (część wspólną) zbiorów.

DEFINICJE / PRZYKŁAD

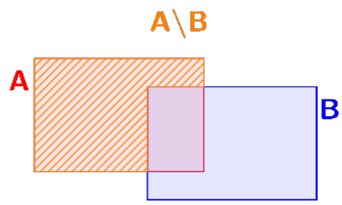
Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów należących do zbioru A lub do zbioru B i zapisujemy ją jako $A \cup B$.



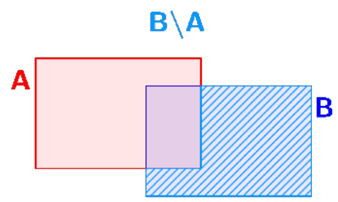
Iloczynem (częścią wspólną) zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów należących jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.



Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór elementów należących do A i nienależących do B i oznaczamy ją jako $A \setminus B$.



Różnicą zbiorów B i A nazywamy zbiór elementów należących do B i nienależących do A i oznaczamy ją jako $B \setminus A$.



PRZYKŁAD 1

P.1.A.2

Dany jest zbiór $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i zbiór $B = \{d, e, f, h, g, j\}$. Wyznacz sumę zbiorów, iloczyn zbiorów, różnicę zbiorów $A \setminus B$ oraz różnicę zbiorów $B \setminus A$.

1° Suma zbiorów	$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h, g, j\}$
2° Iloczyn (część wspólna zbiorów)	$A \cap B = \{d, e, f\}$
3° Różnica $A \setminus B$	$A \setminus B = \{a, b, c\}$
4° Różnica $B \setminus A$	$B \setminus A = \{h, g, j\}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.A.1. Dane są zbiory $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$. Wyznacz:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $A \setminus B$ **d.** $B \setminus A$

1.A.2. Dane są zbiory $A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{b, c, 1, 4\}$. Wyznacz:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $A \setminus B$ **d.** $B \setminus A$

1.A.3. Dane są trzy zbiory K, L, M takie, że:
K — zbiór dodatnich liczb parzystych mniejszych od 15,
L — zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3,
M — zbiór liczb, które są naturalnymi dzielnikami liczby 12.
Wyznacz zbiór:

a. K **c.** M **e.** $K \cap L \cap M$ **g.** $(K \cup M) \setminus L$

b. L **d.** $(K \cup L) \cap M$ **f.** $M \setminus L$ **h.** $(L \cap M) \setminus L$

1.A.4. Dane są trzy zbiory A, B, C takie, że:
A — zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych mniejszych od 21,
B — zbiór liczb naturalnych dwucyfrowych, które są wielokrotnością liczby 10,
C — zbiór liczb naturalnych, mniejszych od 90, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 1.
Wyznacz zbiór:

a. A **c.** C **e.** $C \setminus (A \cap B)$ **g.** $(A \cap B) \setminus (B \cap C)$

b. B **d.** $A \cup (B \cap C)$ **f.** $A \cap B \cap C$ **h.** $(B \setminus C) \setminus A$

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.1.A

1.A.5. Dane są zbiory $A = \{5, 7, 9, 11\}$ oraz $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Prawdziwą zależnością jest:

A. $B \setminus A = \{3, 5, 7\}$ **B.** $A \setminus B = \varnothing$ **C.** $A \setminus B = \{3, 13\}$ **D.** $A \cap B = \{3, 13\}$

1.A.6. Dane są zbiory $K = \{a, b, c\}$ i $L = \{b, c, d\}$, więc:

A. $K \cap L = \{a, b, c, d\}$ **B.** $K \cup L = \{a, b, c, d\}$ **C.** $K \cup L = \{b, c\}$ **D.** $K \setminus L = \{d\}$

1.A.7. Dane są zbiory:
A — zbiór liczb naturalnych parzystych mniejszych od 12,
B — zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 4, mniejszych od 20.
Wynika z tego, że:

A. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ **C.** $A \cap B = \{0, 4, 8\}$

B. $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ **D.** $A \cup B = \{4, 8, 12, 16\}$

1.A.8. Dane są zbiory $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ i $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Wynika z tego, że zbiór $C \setminus (A \cap B)$ równy jest:

A. C **B.** A **C.** B **D.** $B \setminus A$

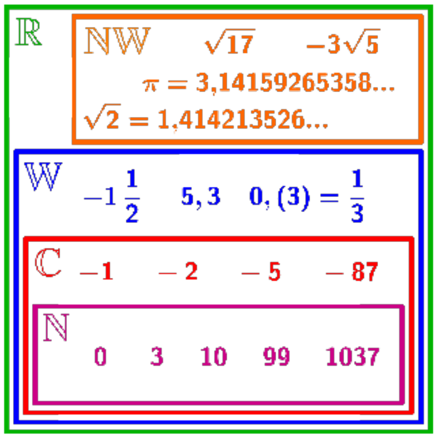
1.A.9. Dane są zbiory A i B takie, że $A \cap B = \varnothing$. Prawdziwa jest zależność:

A. $A \setminus B = B$ **B.** $A \setminus B = A$ **C.** $A \cap B = A$ **D.** $A \cup B = B$

1.B ► Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

► Definicje podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych

P.1.B.1

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Liczby $0, 1, 2, 3, 4...$ to liczby naturalne. Literą $\boldsymbol{N}$ będziemy oznaczać zbiór liczb naturalnych.	$0; 3; 10; 99; 1037$
Literą $\boldsymbol{C}$ oznaczamy zbiór liczb całkowitych. Liczby całkowite zawierają liczby naturalne oraz liczby przeciwne do nich.	$0; 3; 10; 99; 1037$ $-1; -2; -5; -87$
Literą $\boldsymbol{W}$ oznaczamy zbiór liczb wymiernych. Liczbą wymierną nazywamy liczbę, którą można przedstawić jako nieskracalny ułamek zwykły o postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q to liczby całkowite oraz $q \neq 0$.	$0; 3; 10; 99; 1037$ $-1; -2; -5; -87$ $-1\frac{1}{2}; 5,3; 0,(3) = \frac{1}{3}$ Liczby: $\frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \frac{34}{68}$ to przykłady różnych reprezentacji tej samej liczby wymiernej.
Liczby, które nie są wymierne (tzn. nie można ich przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego), noszą nazwę liczb niewymiernych. Zbiór liczb niewymiernych będziemy oznaczać symbolem $\boldsymbol{NW}$.	$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{17}, -3\sqrt{5}$
Wszystkie liczby, którymi się posługujesz, tworzą zbiór liczb rzeczywistych. Oznaczamy go literą $\boldsymbol{R}$.	

► Liczby przeciwne i odwrotne do danej

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$.	Liczbą przeciwną do 3 jest liczba -3. Liczbą przeciwną do 0 jest liczba 0. Liczbą przeciwną do $-\frac{1}{2}$ jest liczba $\frac{1}{2}$.
Liczbą odwrotną do liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$.	Liczbą odwrotną do 2 jest liczba $\frac{1}{2}$. Liczbą odwrotną do $-\frac{2}{3}$ jest liczba $-\frac{3}{2}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.B.1. Dany jest zbiór $A=\left\{-7;-2\frac{1}{2};-1;0;0,(3);\sqrt{3};\pi;2\sqrt{5};2^3;\sqrt{81};9\frac{1}{3};13\right\}$. Wypisz ze zbioru A liczby:

a. naturalne, **b.** całkowite, **c.** wymierne, **d.** niewymierne.

1.B.2. Dany jest zbiór $P=\left\{-3\sqrt{2};-2;\frac{\pi}{\pi};5^0;3{,}75;-\frac{2}{11};10,(6);0;(\sqrt{3})^2\right\}$. Wypisz ze zbioru P liczby:

a. naturalne, **b.** całkowite, **c.** wymierne, **d.** niewymierne.

1.B.3. Uzupełnij tabelę.

a	3					$-1,3$				$1\frac{1}{5}$
$-a$			-2				$\sqrt{5}$			
$\frac{1}{a}$		$\frac{1}{4}$			$1\frac{1}{3}$				-4	
$-\frac{1}{a}$				8				$-0{,}2$		

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.1.B

1.B.4. Dany jest zbiór $A=\left\{-7;3\frac{1}{4};2\sqrt{5};2\pi;8\sqrt{3};-11,(2)\right\}$. W zbiorze A są:

A. cztery liczby wymierne,
B. dwie liczby wymierne,
C. trzy liczby niewymierne,
D. dwie liczby całkowite.

1.B.5. Liczbą odwrotną do $8\frac{1}{3}$ jest liczba:

A. $-8\frac{1}{3}$ **B.** 11 **C.** $\frac{25}{3}$ **D.** $\frac{3}{25}$

1.B.6. Liczbą przeciwną do liczby $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ jest liczba:

A. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **B.** $-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

1.B.7. Dany jest zbiór liczb $A=\{0,(2);0,(3);0,(4)\}$. Suma elementów tego zbioru nie jest liczbą:

A. wymierną, **B.** niewymierną, **C.** całkowitą, **D.** naturalną.

1.B.8. Suma danej liczby całkowitej i odwrotnej do niej nie może być liczbą:

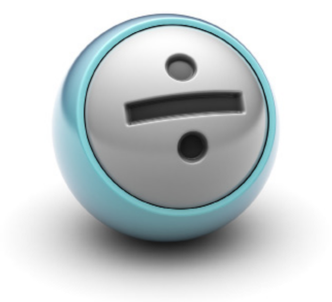
A. naturalną,
B. całkowitą,
C. wymierną,
D. nieparzystą dodatnią.

1.C ▶ Podzielność liczb całkowitych. Liczby pierwsze i złożone, parzyste i nieparzyste. Największy wspólny dzielnik (NWD). Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

▶ Podzielność liczb

Jednym z podstawowych zagadnień w matematyce jest podzielność liczb całkowitych, a co za tym idzie, określenie własności poszczególnych liczb, jak np. stwierdzenie parzystości czy nieparzystości liczby.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Mówimy, że liczba całkowita k jest podzielna przez 2 (lub parzysta), gdy możemy ją zapisać w postaci $k = 2n$, gdzie n jest również liczbą całkowitą. Powiemy, że liczba 2 jest dzielnikiem liczby k.	Liczba 4 jest podzielna przez 2, ponieważ możemy liczbę 4 zapisać w postaci $4 = 2 \cdot 2$. Liczba -6 jest parzysta, ponieważ możemy ją zapisać w postaci: $-6 = 2 \cdot (-3)$.
Wszystkie liczby całkowite, które nie są parzyste, noszą nazwę liczb nieparzystych.	Liczba 5 jest liczbą nieparzystą, ponieważ nie można jej przedstawić w postaci iloczynu liczby 2 i innej liczby całkowitej.
Analogicznie możemy powiedzieć, że liczba całkowita k jest podzielna przez liczbę całkowitą n (różną od zera), gdy możemy zapisać związek: $k = n \cdot m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Możemy również powiedzieć, że liczba n jest dzielnikiem liczby k.	



▶ Cechy podzielności liczb całkowitych

Do rozkładania liczb na czynniki pierwsze, a także do wyznaczania największego wspólnego dzielnika (NWD) i najmniejszej wspólnej wielokrotności (NWW) przydatna jest znajomość podstawowych cech podzielności. Oto kilka najważniejszych z nich.

CECHA PODZIELNOŚCI	PRZYKŁAD
Liczba jest podzielna przez 2, jeśli cyfra jedności jest liczbą parzystą, czyli $0, 2, 4, 6, 8$.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 2, bo cyfra jedności (6) jest parzysta. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 2, bo cyfra jedności (7) nie jest parzysta.
Liczba jest podzielna przez 3, jeśli suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 3.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 3, bo suma jej cyfr $1 + 2 + 6 = 9$ jest liczbą podzielną przez 3. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 3, bo suma jej cyfr $1 + 2 + 7 = 10$ nie jest liczbą podzielną przez 3.

Liczba jest podzielna przez 4, jeśli liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr liczby jest podzielna przez 4.	Liczba 128 jest podzielna przez 4, ponieważ liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr (28) jest podzielna przez 4. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 4, ponieważ liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr (26) nie jest podzielna przez 4.
Liczba jest podzielna przez 5, jeśli cyfra jedności wynosi 0 lub 5.	Liczba 125 jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności wynosi 5. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfrą jedności nie jest ani 5, ani 0.
Liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 9.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 9, bo suma jej cyfr, $1+2+6=9$, jest liczbą podzielną przez 9. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 9, bo suma jej cyfr, $1+2+7=10$, nie jest liczbą podzielną przez 9.
Liczba jest podzielna przez 10, jeśli cyfra jedności wynosi 0.	Liczba 130 jest podzielna przez 10, ponieważ jej cyfra jedności wynosi 0. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 10, ponieważ jej cyfrą jedności nie jest 0.

PRZYKŁAD 1

P.1.C.1

Określ, czy podana liczba dzieli się przez 2, 3, 5, 9.

Liczba 54 dzieli się przez:

2 — TAK, ponieważ cyfrą jedności tej liczby jest liczba parzysta.

3 — TAK, ponieważ suma cyfr tej liczby, równa 9, jest podzielna przez 3.

5 — NIE, ponieważ cyfrą jedności tej liczby nie jest 0 ani 5.

9 — TAK, ponieważ suma cyfr tej liczby, równa 9, jest podzielna przez 9.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Określ, czy podane w przykładach liczby dzielą się przez 2, 3, 5, 9.

PRZYKŁAD 2. 75

PRZYKŁAD 3. 90

PRZYKŁAD 4. 42

PRZYKŁAD 5. 105

PRZYKŁAD 6. 98

PRZYKŁAD 7. 39

PRZYKŁAD 8. 114

PRZYKŁAD 9. 135

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.C.1. Zaznacz, przez które podzielniki dzielą się wybrane liczby.

Liczba	Podzielność przez:					
	2	3	4	5	6	9	10
24							
225							
30	✓	✓		✓	✓		✓
48							
174							
1200							
190							
216							

► Liczby pierwsze i złożone

Jednym z ciekawych i bardzo ważnych dla matematyki zbiorów jest zbiór liczb pierwszych.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Liczbę naturalną *p* nazywamy liczbą pierwszą, jeśli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i samą siebie. Liczbami pierwszymi są np. 2, 3, 5, 7, 11 ...	Liczba 2 jest liczbą pierwszą, ponieważ jest liczbą naturalną większą od 1 oraz posiada dwa różne dzielniki: 1 oraz 2. Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ posiada więcej dzielników niż dwa; jej dzielniki to: 1, 2, 3, 6.

Czy wiesz, że…

Liczby pierwsze są zadziwiające mimo swej prostoty. Rzadko sobie uświadamiamy, że mamy z nimi do czynienia wszędzie, a szczególnie w przypadku ochrony danych — dotyczy to kart bankowych, systemów bezpieczeństwa komputerów, ochrony prywatności korespondencji mailowej czy rozmów telefonicznych. Jeden z nowoczesnych systemów kryptograficznych KRYPTOSYSTEM RSA opiera się właśnie na operacjach z wykorzystaniem liczb pierwszych.

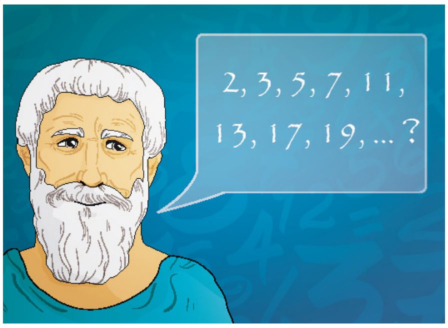
Czy wiesz, że...

P.1.C.2

W celu wyznaczania mniejszych liczb pierwszych możemy posłużyć się sitem Eratostenesa.

Zapoznaj się z tą metodą, posługując się planszą interaktywną.

Metoda ta polega na wykreślaniu ze zbioru liczb naturalnych kolejnych wielokrotności liczby 2 większych od niej samej, potem wielokrotności liczby 3 większych od niej samej itd. Liczby, które pozostaną, są liczbami pierwszymi.



DEFINICJA

Liczbę z nazywamy liczbą złożoną, gdy jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych.

PRZYKŁAD

Liczba 6 jest liczbą złożoną, ponieważ możemy ją zapisać: $6 = 2 \cdot 3$, a liczby 2 oraz 3 są liczbami pierwszymi.

Liczba 30 jest również liczbą złożoną, gdyż możemy ją zapisać: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, a liczby 2, 3 oraz 5 są liczbami pierwszymi.

Liczbę złożoną możemy również rozpoznać po tym, że posiada więcej niż dwa różne dzielniki. Liczba 9 jest liczbą złożoną, gdyż ma trzy dzielniki: 1, 3, 9.

PRZYKŁAD 1

P.1.C.3

Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę 120.

Liczba 120 dzieli się przez 2
Liczba 60 dzieli się przez 2
Liczba 30 dzieli się przez 2
Liczba 15 dzieli się przez 3
Liczba 5 dzieli się przez 5

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Liczbę 120 można przedstawić jako:
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Rozłóż podane liczby na czynniki pierwsze.

PRZYKŁAD 2. 84

PRZYKŁAD 3. 136

PRZYKŁAD 4. 196

► Największy wspólny dzielnik (NWD)

DEFINICJA

Największym wspólnym dzielnikiem dwóch liczb naturalnych a i b nazywamy największą liczbę naturalną, która jest jednocześnie dzielnikiem liczb a i b i oznaczamy ją jako $NWD(a, b)$.

Umiejętność wyznaczania największego wspólnego dzielnika wykorzystujemy m.in. przy skracaniu ułamka zwykłego.

PRZYKŁAD 1

P.1.C.4

Znajdź największy wspólny dzielnik (NWD) liczb 84 i 120.
Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

W obu liczbach występuje iloczyn czynników $2 \cdot 2 \cdot 3$, więc $NWD(84, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Znajdź *NWD* liczb.

PRZYKŁAD 2. 132 i 242

PRZYKŁAD 3. 108 i 162

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.C.2. Wyznacz największy wspólny dzielnik (NWD) podanych liczb:

a. 180; 225

b. 198; 242

c. 170; 408

► Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW)

DEFINICJA

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną różną od zera, która jest podzielna przez a i przez b, i oznaczamy ją jako $NWW(a,b)$.

Umiejętność znajdowania najmniejszej wspólnej wielokrotności zastosujemy przy sprowadzaniu ułamków do wspólnego mianownika.

PRZYKŁAD 1

P.1.C.5

Znajdź najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) liczb 48 i 80.

Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze.

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

W rozkładach na czynniki pierwsze w obu liczbach występuje iloczyn czterech dwójek oraz liczby 3 i 5, które występują jednokrotnie, ale powtarzające się liczby bierzemy pod uwagę tylko jeden raz, więc $NWW(48,80) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Znajdź NWW liczb.

PRZYKŁAD 2. 132 i 242

PRZYKŁAD 3. 108 i 162

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.C.3. Wyznacz najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) podanych liczb:

a. 36; 48

b. 56; 168

c. 102; 136

1.C.4. Wyznacz NWW i NWD:

a. liczby 52 i liczby 78,

b. liczby 56 i liczby 140,

c. liczby 36 i liczby 96,

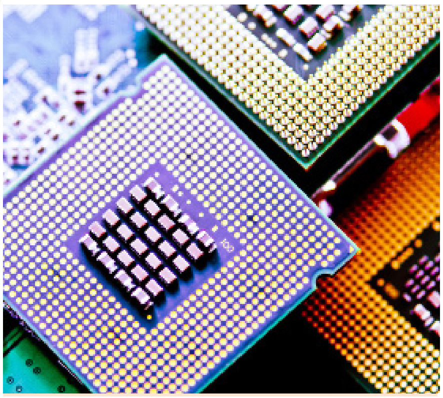
d. liczby 65 i liczby 143.

Możesz sprawdzić poprawność swoich odpowiedzi, posługując się edytorem wyznaczania NWW i NWD.

P.1.C.6

Czy wiesz, że...

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Obecnie największą znaną liczbą pierwszą jest $2^{57\,885\,161}-1$, która liczy sobie 17 425 170 cyfr w zapisie dziesiętnym. Została ona odkryta 25 stycznia 2013 r., a dokonał tego Curtis Cooper z University of Central Missouri w ramach projektu Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS), do którego realizacji wykorzystano 360 tysięcy procesorów połączonych ze sobą komputerów. Nadal trwają poszukiwania kolejnych liczb pierwszych, a amerykańska fundacja Electronic Frontier Foundation wyznaczyła nagrodę 150 000 dolarów za zidentyfikowanie liczby pierwszej mającej ponad 100 milionów cyfr w zapisie dziesiętnym.



ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.1.C

1.C.5. Liczba 852 nie dzieli się przez:

A. 4 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 2

1.C.6. Dane są liczby 120 i 18. Prawdą jest, że:

A. $NWW(120;18)=240$

B. $NWD(120;18)=9$

C. $NWW(120;18)=20NWD(120;18)$

D. $NWW(120;18)=360$

1.C.7. W zbiorze $A=\{1,2,3,4,5\ldots49\}$ jest:

A. 14 liczb pierwszych,

B. 15 liczb pierwszych,

C. 16 liczb pierwszych,

D. 17 liczb pierwszych.

1.C.8. Dane są liczby $a=84$ i $b=126$. Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) jest liczba:

A. 42 **B.** 21 **C.** 7 **D.** 14

1.C.9. Liczby 6 i 15 są jednocześnie dzielnikami liczby:

A. 190 **B.** 45 **C.** 90 **D.** 75

1.1 ▶ Różne postaci liczb rzeczywistych

DEFINICJA

Ułamek właściwy to taki ułamek, w którym licznik i mianownik są liczbami dodatnimi oraz licznik jest mniejszy od mianownika.

Ułamek niewłaściwy to taki ułamek, w którym licznik i mianownik są liczbami dodatnimi oraz licznik jest większy od mianownika. Ułamki niewłaściwe dodatnie są nie mniejsze od 1. Przedstawiamy je w postaci liczby naturalnej i ułamka właściwego (czyli jako ułamek mieszany).

▶ Skracanie ułamków

P.1.1.1

DEFINICJA

Skrócić ułamek oznacza podzielić licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera.

PRZYKŁAD 1

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{11}{\cancel{55}}} = \frac{3}{11}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Uprość ułamki do postaci nieskracalnej.

PRZYKŁAD 2. $\frac{48}{64}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{30}{42}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{65}{95}$

PRZYKŁAD 5. $\frac{72}{81}$

PRZYKŁAD 6. $\frac{64}{88}$

PRZYKŁAD 7. $\frac{31}{93}$

PRZYKŁAD 8. $\frac{16}{96}$

PRZYKŁAD 9. $\frac{28}{70}$

▶ Rozszerzanie ułamków

P.1.1.2

DEFINICJA

Rozszerzyć ułamek oznacza pomnożyć licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera.

PRZYKŁAD 1

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Rozszerz ułamek do określonego mianownika lub licznika.

PRZYKŁAD 2. $\frac{14}{17} = \frac{42}{?}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{4}{11} = \frac{?}{66}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{12}{23} = \frac{?}{115}$

PRZYKŁAD 5. $\frac{17}{49} = \frac{34}{?}$

PRZYKŁAD 6. $\frac{25}{27} = \frac{?}{135}$

PRZYKŁAD 7. $\frac{7}{4} = \frac{84}{?}$

PRZYKŁAD 8. $\frac{2}{9} = \frac{30}{?}$

PRZYKŁAD 9. $\frac{7}{11} = \frac{?}{121}$

► Zamiana ułamków mieszanych na niewłaściwe

PRZYKŁAD 1

P.1.1.3

Zamień ułamek $2\frac{3}{5}$ na niewłaściwy.

$2\frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 2 + 3}{5} = \frac{13}{5}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zamień ułamki mieszane na niewłaściwe.

PRZYKŁAD 2. $10\frac{6}{7}$

PRZYKŁAD 3. $20\frac{1}{11}$

PRZYKŁAD 4. $18\frac{2}{3}$

PRZYKŁAD 5. $30\frac{4}{9}$

PRZYKŁAD 6. $11\frac{4}{5}$

PRZYKŁAD 7. $7\frac{1}{11}$

PRZYKŁAD 8. $100\frac{2}{3}$

PRZYKŁAD 9. $12\frac{11}{40}$

► Zamiana ułamków niewłaściwych na mieszane

PRZYKŁAD 1

P.1.1.4

Zamień ułamek $\frac{21}{5}$ na mieszany.

1° Część całkowita z dzielenia licznika przez mianownik wynosi:	4
2° Mnożymy mianownik przez całości.	$5 \cdot 4 = 20$
3° Otrzymaną wartość odejmujemy od wyjściowego licznika.	$21 - 20 = 1$
4° Otrzymana wartość jest licznikiem ułamka po wyłączeniu całości.	$\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zamień ułamki niewłaściwe na mieszane.

PRZYKŁAD 2. $\frac{60}{7}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{200}{23}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{79}{12}$

PRZYKŁAD 5. $\frac{151}{9}$

PRZYKŁAD 6. $\frac{113}{11}$

PRZYKŁAD 7. $\frac{62}{5}$

PRZYKŁAD 8. $\frac{46}{7}$

PRZYKŁAD 9. $\frac{119}{40}$

► Rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Ułamki dziesiętne to ułamki, które w mianowniku mają 10, 100, 1000 ... (czyli kolejne potęgi liczby 10).	$\frac{2}{10}=0{,}2$ $\frac{25}{100}=0{,}25$ $3\frac{9}{10}=3{,}9$

Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Ułamek dziesiętny skończony to taki, w którym po przecinku znajduje się skończona liczba cyfr.	$23{,}345$ $-4{,}0023$ $0{,}02301$
Ułamek dziesiętny okresowy to taki ułamek, w którego rozwinięciu dziesiętnym występuje nieskończenie wiele cyfr oraz można wyodrębnić taką grupę cyfr, która się cyklicznie powtarza.	3,123123123123... 8,0981212121212... Powtarzającą się grupę cyfr zapisujemy w następujący sposób: 3,(123) — zapis ten oznacza: 3,123123123123123... Ułamek 8,0981212121212... możemy zapisać w postaci: 8,098(12).
Powtarzającą się grupę cyfr nazywamy okresem.	W liczbie $3,(123)$ okresem jest (123). W liczbie $8{,}098(12)$ okresem jest (12).
Liczbę cyfr występujących w okresie nazywamy długością okresu.	W liczbie $3,(123)$ długość okresu wynosi 3. W liczbie $8{,}098(12)$ długość okresu wynosi 2.

TWIERDZENIA
Jeżeli liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, to jest to liczba wymierna.
Jeżeli liczba ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, to jest to liczba niewymierna.

► Zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe

PRZYKŁAD 1 P.1.1.5

Zamień ułamek 0,002 na ułamek zwykły.

$$0{,}002=\frac{2}{1000}=\frac{1}{500}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zamień ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe.

PRZYKŁAD 2. 0,32

PRZYKŁAD 3. 0,0125

PRZYKŁAD 4. 0,356

PRZYKŁAD 5. 0,035

PRZYKŁAD 6. 8,2

PRZYKŁAD 7. 0,005

► Zamiana ułamków zwykłych na ułamki dziesiętne

PRZYKŁAD 1

Zamień ułamek $\frac{2}{3}$ na ułamek dziesiętny.

PRZYKŁAD 2 P.1.1.6

Zamień ułamek $\frac{3}{8}$ na ułamek dziesiętny.

Aby zamienić ułamek zwykły na dziesiętny, należy podzielić sposobem pisemnym licznik przez mianownik.

$$\begin{array}{r} \underline{0,666\ldots} \\ 2 : 3 \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 20 \\ \underline{-18} \\ 2 \end{array} \quad \Rightarrow \frac{2}{3} = 0,(6) \Rightarrow \text{Ułamek jest okresowy.}$$

$$\begin{array}{r} \underline{0,375} \\ 3 : 8 \\ 30 \\ \underline{-24} \\ 60 \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-40} \\ 0 \end{array} \quad \Rightarrow \frac{3}{8} = 0,375$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zamień ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne.

PRZYKŁAD 3. $\frac{15}{11}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{4}{9}$

► Zamiana ułamków okresowych na ułamki zwykłe

PRZYKŁAD 1 P.1.1.7

Zamień ułamek okresowy $0,(5)$ na ułamek zwykły.

1° Oznaczamy ułamek jako x, otrzymując równanie: $x = 0,(5) = 0,55555\ldots$

2° W okresie liczby jest jedna powtarzająca się cyfra, więc mnożymy powstałe równanie przez 10. Nowe równanie napiszemy nad równaniem wyjściowym.

$$\begin{aligned} 10x &= 5,555555\ldots \\ x &= 0,555555\ldots \end{aligned}$$

3° Odejmujemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} 10x = 5{,}555555\ldots \\ -\quad x = 0{,}555555\ldots \\ \hline 9x = 5 \quad |:9 \end{array}$$

4° Wyznaczamy x.

$$x = \frac{5}{9} \Rightarrow 0{,}(5) = \frac{5}{9}$$

PRZYKŁAD 2

P.1.1.7

Zamień ułamek okresowy $0{,}(17)$ na ułamek zwykły.

1° Oznaczamy ułamek jako x, otrzymując równanie: $x = 0{,}(17) = 0{,}171717\ldots$

2° W okresie liczby są dwie powtarzające się cyfry, więc mnożymy powstałe równanie przez 100. Nowe równanie napiszemy nad równaniem wyjściowym.

$$\begin{array}{r} 100x = 17{,}171717\ldots \\ x = 0{,}171717\ldots \end{array}$$

3° Odejmujemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} 100x = 17{,}171717\ldots \\ -\quad x = 0{,}171717\ldots \\ \hline 99x = 17 \quad |:99 \end{array}$$

4° Wyznaczamy x.

$$x = \frac{17}{99} \Rightarrow 0{,}(17) = \frac{17}{99}$$

PRZYKŁAD 3

P.1.1.7

Zamień ułamek okresowy $0{,}5(8)$ na ułamek zwykły.

1° Oznaczamy ułamek jako x, otrzymując równanie: $x = 0{,}5(8) = 0{,}588888\ldots$

2° W podanym ułamku jedna z cyfr nie znajduje się w okresie, więc mnożymy równanie przez 100 i przez 10, aby część ułamkowa (po przecinku) była jednakowa.

$$\begin{array}{r} 100x = 58{,}88888\ldots \\ 10x = 5{,}88888\ldots \end{array}$$

3° Odejmujemy równania stronami.

$$\begin{array}{r} 100x = 58{,}88888\ldots \\ -10x = 5{,}88888\ldots \\ \hline 90x = 53 \quad |:90 \end{array}$$

4° Wyznaczamy x.

$$x = \frac{53}{90} \Rightarrow 0{,}5(8) = \frac{53}{90}$$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.1.1. Zamień ułamki okresowe na ułamki zwykłe.

a. $0{,}(7)$ **c.** $2{,}(5)$ **e.** $0{,}(209)$

b. $0{,}(49)$ **d.** $0{,}3(4)$ **f.** $0{,}2(11)$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.1.1

1.1.2. Liczba $0,(43)$ jest równa:

A. $\frac{43}{100}$ B. $\frac{43}{90}$ C. $\frac{43}{99}$ D. $\frac{43}{10}$

1.1.3. Liczba $\frac{125}{999}$ jest równa:

A. $0,(124)$ B. $0,(125)$ C. $0,(9)$ D. $0,(36)$

1.1.4. Dana jest zależność $\frac{a}{15}=\frac{15}{75}$. Wynika z tego, że liczba a jest równa:

A. 5 B. 15 C. 3 D. 1

1.1.5. Dana jest liczba $13,(1234)$. Dwudziestą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego tej liczby jest cyfra:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

1.1.6. Jeżeli $a=\frac{5}{6}$, $b=\frac{6}{7}$ i $c=\frac{8}{9}$, to prawdziwa będzie zależność:

A. $a>b>c$ B. $a<b<c$ C. $c<a<b$ D. $a<c<b$

1.1.7. Dana jest liczba $0,142434444\ldots$. Długość okresu tej liczby wynosi:

A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

1.1.8. Dany jest zbiór liczb $\left\{\frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right\}$. Jeżeli zamienimy podane ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne, to otrzymamy:

A. jeden ułamek okresowy,

B. dwa ułamki okresowe,

C. trzy ułamki okresowe,

D. cztery ułamki okresowe.

1.1.9. Liczba $0,121212\ldots$ jest równa:

A. $\frac{12}{100}$ B. $\frac{6}{50}$ C. $\frac{3}{25}$ D. $\frac{4}{33}$

1.1.10. Liczba $\frac{561}{594}$ jest równa:

A. $\frac{123}{126}$ B. $\frac{17}{18}$ C. $\frac{31}{32}$ D. $\frac{41}{43}$

1.1.11. Liczba $\frac{129}{17}$ jest równa:

A. $7,9$ B. $7,58$ C. $7\frac{10}{17}$ D. $7\frac{8}{17}$

1.2 ► Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych)

► Kolejność wykonywania działań

P.1.2.1

TEORIA

Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego, wykonujemy kolejno:

1° Działania w nawiasach: $(2+3)$, $[1+(2-5)]$.

2° Potęgowanie i pierwiastkowanie: 3^5, $\sqrt{144}$.

3° Mnożenie i dzielenie: $5 \cdot 2\sqrt{3}$, $10 : 7$.

4° Dodawanie i odejmowanie: $4+5$, $11-7$.

Należy pamiętać, że jeżeli w wyrażeniu nie ma nawiasów oraz występują działania tej samej rangi, to wykonujemy obliczenia od lewej strony do prawej.

PRZYKŁAD 1

Wykonaj działanie: $\sqrt{14-10} \cdot (3+2)^2$.

$$\underbrace{\sqrt{14-10}}_{1} \cdot \underbrace{(3+2)^2}_{2} = \underbrace{\sqrt{4}}_{3} \cdot \underbrace{5^2}_{4} = 2 \cdot 25 = 50$$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wykonaj działanie: $\sqrt[3]{7+20} \cdot (15-12 : 2)^2$.

► Działania na ułamkach

P.1.2.2

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Dodając dwa ułamki, należy je najpierw sprowadzić do wspólnego mianownika, a następnie dodać liczniki, pozostawiając wspólny mianownik bez zmian.	$\frac{5}{8}+\frac{3}{5}=\frac{25+24}{40}=\frac{49}{40}=1\frac{9}{40}$
Odejmując dwa ułamki, należy je najpierw sprowadzić do wspólnego mianownika, a następnie odjąć liczniki, pozostawiając wspólny mianownik bez zmian.	$\frac{5}{8}-\frac{3}{5}=\frac{25-24}{40}=\frac{1}{40}$
Mnożąc dwa ułamki, mnożymy ich liczniki przez siebie, zapisując wynik w liczniku, oraz mnożymy ich mianowniki, zapisując wynik w mianowniku.	$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot 3}{8\cdot\underset{1}{\cancel{5}}}=\frac{3}{8}$
Dzieląc dwa ułamki, mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego.	$\frac{5}{8}:\frac{3}{5}=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{3}=\frac{25}{24}=1\frac{1}{24}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\frac{2}{3}+\frac{3}{11}$, $\frac{2}{3}-\frac{3}{11}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{11}$, $\frac{2}{3}:\frac{3}{11}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{4}{5}+\frac{1}{12}$, $\frac{4}{5}-\frac{1}{12}$, $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{12}$, $\frac{4}{5}:\frac{1}{12}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{7}{10}+\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}-\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{5}$, $\frac{7}{10}:\frac{2}{5}$

► Działania łączne na ułamkach zwykłych

P.1.2.3

PRZYKŁAD 1

Oblicz: $\left(3\frac{3}{5}-2\frac{2}{7}\right)\cdot 5\frac{5}{6}$.

$$\left(3\frac{3}{5}-2\frac{2}{7}\right)\cdot 5\frac{5}{6}=\left(3\frac{21}{35}-2\frac{10}{35}\right)\cdot 5\frac{5}{6}=1\frac{11}{35}\cdot 5\frac{5}{6}=\frac{\cancel{46}^{\,23}}{\cancel{35}_{\,1}}\cdot\frac{\cancel{35}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}}=\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $4\frac{2}{3}:1\frac{1}{6}+2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{13}{27}$

PRZYKŁAD 3. $\left(1\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\right)\cdot 6-\left(2\frac{3}{5}-1\frac{5}{6}\right):1\frac{8}{15}$

► Działania łączne na ułamkach zwykłych i dziesiętnych

P.1.2.4

PRZYKŁAD 1

Oblicz: $3\frac{1}{5}+6{,}8$.

$3\frac{1}{5}+6{,}8=3{,}2+6{,}8=10$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $4\frac{2}{3}+2{,}25$

PRZYKŁAD 3. $1\frac{2}{3}-5{,}7$

PRZYKŁAD 4. $9\frac{3}{8}-3{,}75$

PRZYKŁAD 5. $4{,}4\cdot 1\frac{5}{11}$

PRZYKŁAD 6. $6\frac{2}{3}\cdot 1{,}2$

PRZYKŁAD 7. $11{,}25:\frac{9}{32}$

PRZYKŁAD 8. $8{,}5:3\frac{2}{5}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.2.1. Oblicz, pamiętając o kolejności działań:

a. $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\frac{1}{3}\cdot 2{,}5$

b. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2-0{,}5^3\right]\cdot\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{14}\right)$

c. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}:\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{1}{9}}}$

d. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

e. $\dfrac{2}{2-\frac{2}{2-\frac{2}{3}}}$

f. $\dfrac{\sqrt{6{,}25}:\left(\frac{1}{4}\right)^2+0{,}2\cdot 4\frac{4}{9}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^2}$

Czy wiesz, że...

Szybkie liczenie wzbudza podziw u innych osób. Któż z nas nie chciałby szybko liczyć? Owszem, mamy kalkulatory — są już nawet w telefonach — ale przecież nie zawsze możemy ich używać. Pomnożyć 42 przez 48 i odpowiedzieć błyskawicznie, że to jest 2016, lub 53 przez 57 i po sekundzie podać wynik 3021 — to byłoby coś! Niektórzy nie zdążą w tym czasie dokonać obliczeń na kalkulatorze. Czy to możliwe? Okazuje się, że tak.

Jeden ze sposobów szybkiego liczenia można wykorzystać przy mnożeniu liczb dwucyfrowych typu XY przez XZ, gdzie $Y+Z=10$. W celu pomnożenia wyżej wymienionego typu liczb należy cyfrę X pomnożyć przez liczbę o jeden większą, a następnie dopisać iloczyn cyfr Y i Z w postaci dwucyfrowej.

PRZYKŁAD 1

P.1.2.5

Oblicz w pamięci $24\cdot 26$.

Aby pomnożyć $24\cdot 26$, należy cyfrę X (2) pomnożyć przez liczbę o jeden większą (3), a następnie dopisać iloczyn cyfr Y (4) i Z (6) w postaci dwucyfrowej (24).

$2\cdot(2+1)=2\cdot 3=6$

$$24\cdot 26=624$$

$4\cdot 6=24$

PRZYKŁAD 2

P.1.2.5

Oblicz w pamięci $31\cdot 39$.

Aby pomnożyć $31\cdot 39$, należy cyfrę X (3) pomnożyć przez liczbę o jeden większą (4), a następnie dopisać iloczyn cyfr Y (1) i Z (9) w postaci dwucyfrowej (09).

$3\cdot(3+1)=3\cdot 4=12$

$$31\cdot 39=1209$$

$1\cdot 9=9$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz w pamięci.

PRZYKŁAD 3. $52\cdot 58$

PRZYKŁAD 4. $73\cdot 77$

PRZYKŁAD 5. $65\cdot 65$

PRZYKŁAD 6. $47\cdot 43$

PRZYKŁAD 7. $81\cdot 89$

PRZYKŁAD 8. $34\cdot 36$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

1.2.2. Liczbą odwrotną do liczby $a = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{8} \cdot 0{,}4$ jest liczba:

A. $\frac{5}{16}$ **B.** $\frac{16}{5}$ **C.** $-\frac{5}{16}$ **D.** $-3\frac{1}{5}$

1.2.3. Jeśli $x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$, to:

A. $x < 1$ **B.** $x > 1$ **C.** $x > 2$ **D.** $x < \frac{1}{2}$

1.2.4. Liczba $2 + 2 \cdot 2 - 2 : 2$ jest równa:

A. 3 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 0

1.2.5. Dane są liczby: $a = -2 \cdot (-2) - 2^2$ oraz $b = 3 \cdot (-3) + (-3)^2$. Wynika z tego, że:

A. $a > b$ **B.** $a < b$ **C.** $a = b$ **D.** $2a = 3b - 1$

1.2.6. Kwadrat liczby $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ jest równy:

A. $\frac{9}{400}$ **B.** $\frac{49}{3600}$ **C.** $\frac{121}{3600}$ **D.** $\frac{529}{3600}$

1.2.7. Liczba 7 jest wynikiem działania:

A. $7 + 7 \cdot 7 : 7 - 7$ **B.** $7 : 7 + 7 \cdot 7 - 7$ **C.** $7 \cdot 7 : 7 + 7 - 1$ **D.** $7 - 7 \cdot 7 : 7$

1.2.8. Samochód zużywa 9,5 litra benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5,60 zł. Koszt przejazdu trasy o długości 420 km wynosi:

A. 213,40 zł **B.** 22,34 zł **C.** 182,60 zł **D.** 223,44 zł

1.2.9. Turysta jeździ rowerem 5 godzin dziennie, jadąc ze średnią prędkością 17,2 $\frac{km}{h}$. Pokonanie trasy z Warszawy do Rzymu (1806 km) zajmie turyście:

A. 18 dni **B.** 14 dni **C.** 21 dni **D.** 23 dni

1.2.10. Kasia zakupiła na przyjęcie 24 butelki soku o pojemności 0,5 litra. Sok rozleje do szklanek o pojemności $0,3$ litra. Soku wystarczy do napełnienia:

A. 33 szklanek **B.** 40 szklanek **C.** 14 szklanek **D.** 160 szklanek

1.2.11. Zawodnik startujący w triathlonie sprinterskim pokonał 750 metrów, płynąc z prędkością 5 $\frac{km}{h}$, jadąc rowerem 20 km z prędkością 24 $\frac{km}{h}$, a następnie biegnąc 5 km z prędkością 12 $\frac{km}{h}$. Całą trasę triathlonista pokonał w:

A. 74 minuty **B.** 1,5 godziny **C.** 84 minuty **D.** 96 minut

1.3 ▶ Pierwiastki dowolnego stopnia. Prawa działań na pierwiastkach.

▶ Pierwiastki dowolnego stopnia

stopień pierwiastka

$$\sqrt[n]{a} = b$$

liczba podpierwiastkowa *wartość pierwiastka*

DEFINICJA

Pierwiastkiem stopnia n, gdzie n jest liczbą naturalną,	
parzystą większą od 0 z liczby nieujemnej a $(a \geq 0)$	nieparzystą większą od 1 z liczby rzeczywistej a $(a \in \boldsymbol{R})$
nazywamy	
taką liczbę nieujemną b $(b \geq 0)$	taką liczbę rzeczywistą b $(b \in \boldsymbol{R})$
która podniesiona do potęgi n jest równa a, czyli $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$	
Np. pierwiastek kwadratowy (drugiego stopnia) $\sqrt{a} = b$, gdy $a \geq 0$, $b \geq 0$ i $b^2 = a$	Np. pierwiastek sześcienny (trzeciego stopnia) $\sqrt[3]{a} = b$, gdy $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ i $b^3 = a$

PRZYKŁADY

P.1.3.1

Oblicz:

PRZYKŁAD 1. $\sqrt{144} = 12 \quad \rightarrow \quad 12^2 = 144$

PRZYKŁAD 2. $\sqrt{625} = 25 \quad \rightarrow \quad 25^2 = 625$

PRZYKŁAD 3. $\sqrt[3]{27} = 3 \quad \rightarrow \quad 3^3 = 27$

PRZYKŁAD 4. $\sqrt[3]{-64} = -4 \quad \rightarrow \quad (-4)^3 = -64$

PRZYKŁAD 5. $\sqrt[5]{32} = 2 \quad \rightarrow \quad 2^5 = 32$

PRZYKŁAD 6. $\sqrt[4]{81} = 3 \quad \rightarrow \quad 3^4 = 81$

PRZYKŁAD 7. $\sqrt[6]{1\,000\,000} = 10 \quad \rightarrow \quad 10^6 = 1\,000\,000$

PRZYKŁAD 8. $\sqrt[7]{-128} = -2 \quad \rightarrow \quad (-2)^7 = -128$

PRZYKŁAD 9. $\sqrt[5]{3125} = 5 \quad \rightarrow \quad 5^5 = 3125$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.3.1. Oblicz:

a. $\sqrt{\frac{81}{121}}$

b. $\sqrt{\frac{49}{64}}$

c. $\sqrt{6\frac{1}{4}}$

d. $\sqrt{12{,}25}$

e. $\sqrt{0{,}0729}$

f. $\sqrt{5{,}76}$

g. $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

h. $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

i. $\sqrt[3]{0{,}216}$

j. $\sqrt[4]{160\,000}$

k. $\sqrt[5]{0{,}00032}$

l. $\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$

m. $\sqrt{67\,600}$

n. $\sqrt[3]{-343\,000}$

o. $\sqrt{\frac{529}{576}}$

p. $\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$

r. $\sqrt[3]{1\,000\,000\,000\,000}$

s. $\sqrt{1\frac{315}{841}}$

t. $\sqrt{13\frac{4}{9}}$

u. $\sqrt[3]{10\frac{81}{125}}$

w. $\sqrt[4]{0{,}00000001}$

z. $\sqrt[4]{9\frac{97}{256}}$

► Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka kwadratowego

PRZYKŁAD 1

P.1.3.2

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

$\sqrt{25}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

PRZYKŁAD 2. $\sqrt{98}$

PRZYKŁAD 3. $\sqrt{640}$

PRZYKŁAD 4. $\sqrt{44}$

PRZYKŁAD 5. $\sqrt{108}$

PRZYKŁAD 6. $\sqrt{162}$

PRZYKŁAD 7. $\sqrt{240}$

PRZYKŁAD 8. $\sqrt{150}$

PRZYKŁAD 9. $\sqrt{275}$

► Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka trzeciego stopnia

PRZYKŁAD 1

P.1.3.3

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{27}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

PRZYKŁAD 2. $\sqrt[3]{686}$ PRZYKŁAD 4. $\sqrt[3]{88}$ PRZYKŁAD 6. $\sqrt[3]{7290}$ PRZYKŁAD 8. $\sqrt[3]{375}$

PRZYKŁAD 3. $\sqrt[3]{5120}$ PRZYKŁAD 5. $\sqrt[3]{432}$ PRZYKŁAD 7. $\sqrt[3]{192}$ PRZYKŁAD 9. $\sqrt[3]{135}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.3.2. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka.

a. $\sqrt{18}$ **c.** $\sqrt{27}$ **e.** $\sqrt[3]{40}$ **g.** $\sqrt[4]{48}$

b. $\sqrt{50}$ **d.** $\sqrt{242}$ **f.** $\sqrt[3]{128}$ **h.** $\sqrt[5]{320}$

► Włączanie czynnika pod znak pierwiastka kwadratowego

PRZYKŁAD 1

P.1.3.4

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$5^2$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

PRZYKŁAD 2. $7\sqrt{2}$ PRZYKŁAD 4. $2\sqrt{11}$ PRZYKŁAD 6. $9\sqrt{2}$ PRZYKŁAD 8. $8\sqrt{5}$

PRZYKŁAD 3. $3\sqrt{10}$ PRZYKŁAD 5. $6\sqrt{3}$ PRZYKŁAD 7. $4\sqrt{10}$ PRZYKŁAD 9. $5\sqrt{20}$

► Włączanie czynnika pod znak pierwiastka trzeciego stopnia

PRZYKŁAD 1

P.1.3.5

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

$$4\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{64 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$$

4^3

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

PRZYKŁAD 2. $7\sqrt[3]{3}$

PRZYKŁAD 3. $6\sqrt[3]{7}$

PRZYKŁAD 4. $3\sqrt[3]{11}$

PRZYKŁAD 5. $5\sqrt[3]{3}$

PRZYKŁAD 6. $8\sqrt[3]{2}$

PRZYKŁAD 7. $6\sqrt[3]{10}$

PRZYKŁAD 8. $9\sqrt[3]{5}$

PRZYKŁAD 9. $5\sqrt[3]{15}$

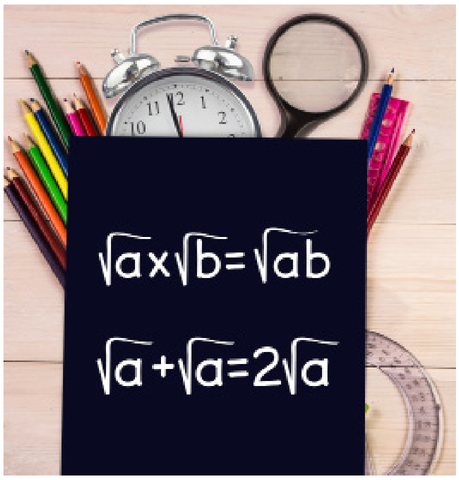
ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.3.3. Włącz czynnik pod znak pierwiastka.

a. $4\sqrt{2}$
b. $5\sqrt{3}$
c. $3\sqrt{7}$
d. $10\sqrt{11}$
e. $2\sqrt[3]{6}$
f. $4\sqrt[3]{2}$
g. $5\sqrt[4]{2}$
h. $10\sqrt[5]{7}$

1.3.4. Doprowadź do najprostszej postaci:

a. $4\sqrt{5} + \sqrt{20}$
b. $6\sqrt{3} - 2\sqrt{12}$
c. $8\sqrt{7} + 3\sqrt{63}$
d. $\sqrt{18} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$
e. $\sqrt{242} - 2\sqrt{50} + 3\sqrt{288}$
f. $2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} + \sqrt{125}$
g. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$
h. $\sqrt[3]{2000} + 3\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{1024}$



► Twierdzenia dotyczące pierwiastków tego samego stopnia

P.1.3.6

TWIERDZENIE 1

ZAŁOŻENIA	WZÓR	PRZYKŁAD 1
$n \geq 2$ i $n \in \boldsymbol{N}$ Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy dodatkowo, że liczby a i b są nieujemne.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{4,5} = \sqrt{2 \cdot 4,5} = \sqrt{9} = 3$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz: $\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz: $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}$.

TWIERDZENIE 2

ZAŁOŻENIA	WZÓR	PRZYKŁAD 1
$n \geq 2$ i $n \in \boldsymbol{N}$ i $b \neq 0$ Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy dodatkowo, że liczby a i b są nieujemne.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4,5}} = \sqrt{\frac{18}{4,5}} = \sqrt{4} = 2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz: $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz: $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$.

TWIERDZENIE 3

ZAŁOŻENIA	WZÓR	PRZYKŁAD 1
$n \geq 2$ i $n \in \boldsymbol{N}$ Dla n będącego liczbą parzystą zakładamy dodatkowo, że liczby a i b są nieujemne.	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt{13^2} = 13$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz: $\sqrt[7]{11^7}$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz: $\sqrt[3]{99^3}$.

TWIERDZENIE 4

ZAŁOŻENIA	WZÓR	PRZYKŁAD 1
$k \geq 2, n \geq 2, k \in \boldsymbol{N}, n \in \boldsymbol{N}$ Dla n lub k będącego liczbą parzystą zakładamy dodatkowo, że liczby a i b są nieujemne.	$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a}$	$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{16}} = \sqrt[2 \cdot 2]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz: $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{100}}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.3.5. Oblicz:

a. $\sqrt{512} \cdot \sqrt{2}$

b. $\sqrt[3]{-375} : \sqrt[3]{3}$

c. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15}$

d. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} : \sqrt{14}$

e. $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$

f. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$

g. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

h. $\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{3}$

i. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{98}$

j. $\sqrt{68} \cdot \sqrt{17}$

k. $\sqrt{675} : \sqrt{3}$

l. $\sqrt{448} : \sqrt{7}$

m. $\sqrt[3]{104} : \sqrt[3]{13}$

n. $\sqrt[5]{128} : \sqrt[5]{4}$

o. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{2}{25}}$

p. $\sqrt[5]{\frac{15}{8}} \cdot \sqrt[5]{\frac{4}{15}}$

r. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{7}} \cdot \sqrt[6]{49} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{343}}$

s. $\sqrt{1{,}4} \cdot (\sqrt{700} : \sqrt{5})$

t. $\sqrt[10]{\sqrt{\frac{121}{144}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1728}{1331}}}$

1.3.6. Oblicz i przedstaw wynik w postaci $a\sqrt{b} + c$.

a. $(2\sqrt{2} - 3) \cdot (\sqrt{8} + 1)$

b. $(4\sqrt{5} - 2) \cdot (2 + \sqrt{125})$

c. $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{27}) \cdot (3 + \sqrt{3})$

d. $(2\sqrt{10} - 4) \cdot (5\sqrt{1000} + 2\sqrt{100} - \sqrt{10})$

e. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}$

f. $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}}$

1.3.7. Usuń niewymierność z mianownika.

a. $\frac{8}{\sqrt{2}}$

b. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

c. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

d. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

e. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

f. $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

1.3.8. Liczba $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{9^3}$ jest równa:

A. 3 **B.** 9 **C.** 27 **D.** $3\sqrt{3}$

1.3.9. Liczba $5\sqrt{32} - 2\sqrt{128}$ jest równa:

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $3\sqrt{96}$ **C.** $-\sqrt{2}$ **D.** $4\sqrt{2}$

1.3.10. Liczba $9\sqrt{3}$ jest równa:

A. $\sqrt{27}$ **B.** $\sqrt{12}$ **C.** $\sqrt{243}$ **D.** $3\sqrt{81}$

1.3.11. Jeśli $a\sqrt{b} + c = 4\sqrt{2}(3 - \sqrt{2})$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{C}$, to:

A. $a > b > c$ **B.** $b > a \geq c$ **C.** $b < c < a$ **D.** $c \leq a \leq b$

1.3.12. Dane są liczby $a = \sqrt[3]{512}$ i $b = 2\sqrt[4]{256}$. Prawdą jest, że:

A. $a > b$ **B.** $a < b$ **C.** $a = b$ **D.** $a = 2b$

1.3.13. Liczba $\sqrt{240}$ jest równa:

A. $16\sqrt{5}$ **B.** $-4\sqrt{60}$ **C.** $4\sqrt{15}$ **D.** $2\sqrt{30}$

1.3.14. Liczba $\frac{2}{\sqrt{8}}$ jest równa:

A. $\frac{\sqrt{8}}{8}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{8}}{16}$

1.3.15. Liczba $(\sqrt{2} - 2)(2 + 2\sqrt{2})$ jest równa:

A. -4 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** $-2\sqrt{2}$

1.3.16. Iloraz $\frac{\sqrt[3]{28} + 4}{\sqrt[3]{13} - 9}$ jest równy:

A. 2 **B.** $\sqrt[3]{2}$ **C.** $\sqrt[3]{28}$ **D.** 8

1.3.17. Dane są liczby $a = \sqrt{\sqrt{16}}$, $b = \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$, $c = \sqrt[5]{32}$. Wynika z tego, że:

A. $a > b > c$ **B.** $a < b < c$ **C.** $a = b = c$ **D.** $b > c \geq a$

1.4 ▶ Potęgi o wykładnikach wymiernych. Prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych

▶ Potęga o wykładniku całkowitym

wykładnik potęgi

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

podstawa potęgi

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Dla każdej liczby $a \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$ i $n > 1$ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$	$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
$a^0 = 1$ dla $a \neq 0$	$7^0 = 1$
$a^1 = a$ dla $a \in \boldsymbol{R}$	$3^1 = 3$

DEFINICJA

Dla dowolnej liczby naturalnej k i $a \neq 0$ zachodzi związek: $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, co można zapisać jako $a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$.

PRZYKŁAD 1 — P.1.4.1

Oblicz: 2^{-3}.

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. 3^{-2}

PRZYKŁAD 3. $0{,}1^{-3}$

PRZYKŁAD 4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

PRZYKŁAD 5. $\left(5\frac{1}{2}\right)^{-2}$

PRZYKŁAD 6. $(-3)^{-3}$

PRZYKŁAD 7. $0{,}25^{-3}$

PRZYKŁAD 8. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

PRZYKŁAD 9. $1{,}1^{-1}$

► Twierdzenia dotyczące własności potęg o tej samej podstawie

P.1.4.2

Niech a będzie dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, ponadto n i m niech będą dowolnymi liczbami wymiernymi. Wówczas zachodzą następujące związki:

TWIERDZENIE 1	PRZYKŁAD 1
$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2}$

PRZYKŁAD 3. $4^3 \cdot 4^2 \cdot 4$

TWIERDZENIE 2	PRZYKŁAD 1
$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $4^{-12} : 4^{-15}$

PRZYKŁAD 3. $(-5)^2 : (-5)^{-2}$

TWIERDZENIE 3	PRZYKŁAD 1
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $((3^2)^4)^2$

PRZYKŁAD 3. $(5^{-3})^{-2}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.4.1. Zapisz wyrażenia w najprostszej postaci:

a. $(2^5)^{-2}\cdot(2^3)^{-2}$

b. $\dfrac{(3^4)^2 : (3^5)^3}{(3^2)^{-7}}$

c. $((10^9)^2)^4 : ((10^7)^2)^3$

d. $(5^2 : 5^3\cdot 5^4 : 5^5 : 5^6)^2\cdot(5^{-1})^{-3}$

e. $\dfrac{(((-2)^3)^{-2})^4 : (-2)^{-10}}{2^6\cdot((-2)^5)^2}$

f. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^5 : \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

► Twierdzenia dotyczące własności potęg o tym samym wykładniku

P.1.4.3

Niech a i b będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, ponadto n niech będzie dowolną liczbą wymierną. Wówczas zachodzą następujące związki:

TWIERDZENIE 1	PRZYKŁAD 1
$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$2^3\cdot 4^3=(2\cdot 4)^3=8^3=512$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $2{,}5^4\cdot 2^4$

PRZYKŁAD 3. $\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^3$

TWIERDZENIE 2	PRZYKŁAD 1
$a^n : b^n=\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$6^5 : 2^5=(6 : 2)^5=3^5=243$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $7{,}5^2 : 1{,}5^2$

PRZYKŁAD 3. $2{,}1^2 : 3^2$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.4.2. Zapisz w najprostszej postaci:

a. $\dfrac{(2^4)^2\cdot 6^8}{(4^2)^4}$

b. $\dfrac{(-4)^{12}\cdot\left(\left(\frac{1}{12}\right)^3\right)^4}{\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\right)^{-6}}$

c. $(11^3)^5 : \left(5\frac{1}{2}\right)^{15}\cdot(3^{-5})^{-3}$

d. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{-16}\cdot(4^4)^4 : \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^8}{((0{,}5^{-1})^4)^{-4}}$

► Potęga o wykładniku wymiernym

DEFINICJA	PRZYKŁAD
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dla dowolnej nieujemnej liczby a i liczby naturalnej $n \geq 2$.	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

DEFINICJA	PRZYKŁADY 1 i 2 **P.1.4.4**
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[m]{a})^n$ dla dowolnej nieujemnej liczby a oraz $m, n \in \mathbf{N}_+$ i $n \geq 2$.	$16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$ $9^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{9})^{-3} = 3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 3. $0{,}01^{\frac{5}{2}}$

PRZYKŁAD 4. $8^{\frac{2}{3}}$

PRZYKŁAD 5. $27^{\frac{4}{3}}$

PRZYKŁAD 6. $(0{,}216)^{\frac{2}{3}}$

PRZYKŁAD 7. $(0{,}25)^{\frac{3}{2}}$

PRZYKŁAD 8. $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$

PRZYKŁAD 9. $32^{\frac{3}{5}}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.4.3. Oblicz, wykorzystując odpowiednie twierdzenia:

a. $\sqrt[3]{8^{-1}} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$

b. $16^{-6} : (0{,}125)^4$

c. $32^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-6}$

d. $8^{-4} \cdot 0{,}5^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^4$

e. $27^{\frac{2}{3}} : (\sqrt{243} \cdot 3\sqrt{3})$

f. $(0{,}25^{-2}) \cdot (\sqrt{32})^{-2} : 8$

g. $\dfrac{\sqrt{7} \cdot 7^{\frac{5}{2}}}{49^3}$

h. $\dfrac{\left(\frac{1}{27}\right)^{-2} : 81^2}{(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3})^{-4}}$

i. $\dfrac{\sqrt{36^{-1}} \cdot \sqrt[3]{216^2}}{6\sqrt{6} : \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}}$

j. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{625} \cdot 5^{\frac{2}{3}}\right) \cdot 25^{-1}}{\sqrt{25} \cdot 125^{-2} : 5^0}$

k. $\dfrac{\sqrt[4]{16^{-2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}}{64^{\frac{2}{3}} : (2\sqrt{2})^4}$

l. $\dfrac{0{,}001^{-3} \cdot ((0{,}01)^2)^4}{100^{-2} : \sqrt[3]{1\,000\,000}}$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

1.4.4. Wyrażenie $5^6 \cdot 25^2 : 125^3$ można zapisać jako:

A. 5 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** 5^{15} **D.** 5^2

1.4.5. Liczba $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{3^{-2} \cdot 2^{-1}}\right)^{-1}$ jest równa:

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 3

1.4.6. Iloczyn $25^3 \cdot 125^2$ jest równy:

A. 5^{36} **B.** 5^{12} **C.** 5^{10} **D.** 5^{25}

1.4.7. Iloczyn $81^4 \cdot 9^2$ jest równy:

A. 9^{20} **B.** 3^{12} **C.** 3^{16} **D.** 3^{20}

1.4.8. Iloraz $32^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ jest równy:

A. 2^9 **B.** 2^{-21} **C.** 2^{21} **D.** 2^{14}

1.4.9. Iloczyn $8^{-4} \cdot 4^5$ jest równy:

A. 2^{-3} **B.** 4^{-2} **C.** 4^{-1} **D.** 2^2

1.4.10. Liczba $2^3 \cdot 4^2 \cdot 8^{-1}$ jest równa:

A. 8 **B.** 16 **C.** -4 **D.** $\frac{1}{16}$

1.4.11. Liczba $2,5^4 \cdot 2^4$ jest równa:

A. 5^8 **B.** 5^4 **C.** $4,5^4$ **D.** 5^{16}

1.4.12. Liczba $4^{15} + 4^{15} + 4^{15} + 4^{15}$ jest równa:

A. 16^{15} **B.** 256^{15} **C.** 4^{16} **D.** 4^{60}

1.4.13. Liczba $5^7 : 5^3 \cdot 5^4$ jest równa:

A. 1 **B.** 0 **C.** 5^6 **D.** 5^8

1.5 ▶ Wykorzystanie podstawowych własności potęg w innych dziedzinach wiedzy

▶ Notacja wykładnicza

Notacją wykładniczą najczęściej posługujemy się przy zapisywaniu bardzo dużych lub bardzo małych liczb.

DEFINICJA

Liczbę dodatnią możemy przedstawić w postaci iloczynu: $a \cdot 10^k$, gdzie $1 \leq a < 10$ oraz $k \in C$. Taki zapis nazywamy notacją wykładniczą.

PRZYKŁAD 1

P.1.5.1

Zapisz liczbę 32 000 w notacji wykładniczej.

$32\,000 = 3{,}2 \cdot 10^4$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zapisz liczby w notacji wykładniczej.

PRZYKŁAD 2. 70 000

PRZYKŁAD 3. 0,00023

PRZYKŁAD 4. 0,004

PRZYKŁAD 5. 345 000

PRZYKŁAD 6. 0,0034

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.5.1. Zapisz liczby w notacji wykładniczej.

a. 825 000
b. 9 000 000 000 000
c. 12 000 000 000
d. 0,00025
e. 0,000000007
f. 0,000000000143

1.5.2. Zapisz liczby w postaci dziesiętnej.

a. $6{,}24 \cdot 10^5$
b. $1{,}3 \cdot 10^6$
c. $9{,}99 \cdot 10^4$
d. $8{,}02 \cdot 10^{-3}$
e. $3 \cdot 10^{-6}$
f. $7{,}2 \cdot 10^{-5}$

1.5.3. Oblicz, wykorzystując notację wykładniczą.

a. $25\,000 \cdot 1\,200\,000$
b. $6\,400 : 0{,}0032$
c. $0{,}00121 : 1\,100$
d. $0{,}0008 \cdot 140\,000\,000$
e. $102\,400\,000\,000 : 0{,}000512$
f. $0{,}00081 : 2\,700\,000$

PRZYKŁAD 1

P.1.5.2

Oblicz i podaj wynik w notacji wykładniczej.

$(5,2\cdot 10^4)\cdot(2\cdot 10^7)=5,2\cdot 2\cdot 10^4\cdot 10^7=10,4\cdot 10^{4+7}=10,4\cdot 10^{11}=1,04\cdot 10^{12}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz i podaj wynik w notacji wykładniczej.

PRZYKŁAD 2. $(6\cdot 10^8)\cdot(5\cdot 10^{-4})$

PRZYKŁAD 3. $(3,5\cdot 10^{11}):(0,7\cdot 10^9)$

PRZYKŁAD 4. $(2,4\cdot 10^{25}):(0,05\cdot 10^{-20})$

PRZYKŁAD 5. $(1,05\cdot 10^{-5})\cdot(3,2\cdot 10^9)\cdot 4$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.5.4. Uzupełnij tabelę z jednostkami układu SI.

Wartość liczbowa	Wartość po zmianie jednostek	Wartość w notacji wykładniczej
1 m	1 000 mm	10^3 mm
1 km	.... cm	.... cm
100 ha	.... m^2	.... m^2
1 dm	.... km	10^{-4} km
15 mm	.... m	.... m
.... km^2	.... m^2	10^6 m^2
1200 m	.... mm	.... mm
.... t	.... dag	10^7 dag
700 t	.... g	$7\cdot 10^8$ g
2,5 mm	.... km	.... km

1.5.5. Odległość, którą światło przebywa w ciągu roku (365 dni), nazywamy rokiem świetlnym. Prędkość światła to ok. $3\cdot 10^8\ \frac{m}{s}$. Gwiazda Syriusz oddalona jest od Ziemi o 8,6 lat świetlnych. Oblicz odległość w kilometrach między Ziemią a Syriuszem. Wynik podaj w notacji wykładniczej.

1.5.6. Powierzchnia administracyjna Polski to ok. 312 600 km^2. Wyraź tę wielkość w metrach i zapisz ją w notacji wykładniczej.

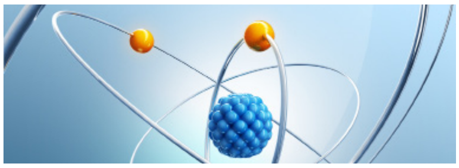
1.5.7. Wiedząc, że masa protonu wynosi $1,67\cdot 10^{-27}$ kg, a masa elektronu $9,11\cdot 10^{-28}$ g, określ, która z cząstek ma większą masę i ile razy. Wynik podaj w przybliżeniu do całości.

1.5.8. Mol drobin (atomów, cząsteczek) to $6,02 \cdot 10^{23}$ drobin (liczba Avogadra). Oblicz, ile to moli:

a. $2,4381 \cdot 10^{24}$ cząsteczek tlenu,

b. $0,98126 \cdot 10^{25}$ cząsteczek wodoru,

c. $180,6 \cdot 10^{21}$ atomów żelaza.



1.5.9. Ślimak winniczek porusza się z prędkością $3 \cdot 10^{-3}\ \frac{km}{h}$, a najszybszy drapieżnik — sokół wędrowny — z prędkością $3,9 \cdot 10^{5}\ \frac{m}{h}$. Oblicz, ile razy prędkość sokoła jest większa od prędkości ślimaka.

1.5.10. Masa Ziemi wynosi $5,97219 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Jowisza $1,8986 \cdot 10^{27}$ kg. Oblicz, ile razy masa Jowisza jest większa od masy Ziemi.

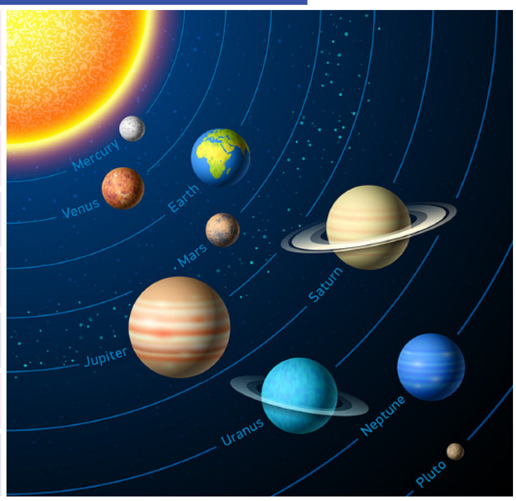
1.5.11. Uzupełnij tabelkę liczbami.

objętość Słońca	$1\,412\,000\,000\,000\,000\,000\ km^3$	$1,412 \cdot 10^{18}\ km^3$
masa Marsa	$641\,850\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg	
powierzchnia Azji		$4,46 \cdot 10^{7}\ km^2$
długość Wielkiego Muru Chińskiego	$8\,851\,000$ m	
masa protonu	$0,00000000000000000000000000167262$ kg	
prędkość światła	$1\,079\,250\,000\,000\ \frac{km}{h}$	
wielkość wirusa grypy		10^{-7} m

1.5.12. Uzupełnij tabelkę liczbami.

Z.1.5.12

Planeta	Odległość planety od Słońca	Odległość w notacji wykładniczej
Merkury	58 000 000 km	
Wenus	108 000 000 km	
Ziemia	150 000 000 km	
Mars	228 000 000 km	
Jowisz	778 000 000 km	
Saturn	1 427 000 000 km	
Uran	2 871 000 000 km	
Neptun	4 498 000 000 km	



MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.1.5

1.5.13. Liczba $7{,}2 \cdot 10^{-3}$ jest równa:

A. 0,072 **B.** 7200 **C.** 7000 **D.** 0,0072

1.5.14. Liczba $5 \cdot 10^{7} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ jest równa:

A. $5{,}2 \cdot 10^{4}$ **B.** 10^{4} **C.** 10^{-4} **D.** 10^{-21}

1.5.15. Jedna doba równa jest:

A. $8{,}64 \cdot 10^{5}$ sekund **B.** $8{,}64 \cdot 10^{4}$ sekund **C.** $3{,}6 \cdot 10^{3}$ sekund **D.** $8{,}64 \cdot 10^{3}$ sekund

1.5.16. Liczba 0,00000037 zapisana w notacji wykładniczej to:

A. $37 \cdot 10^{-8}$ **B.** $3{,}7 \cdot 10^{-7}$ **C.** $0{,}37 \cdot 10^{-8}$ **D.** $37 \cdot 10^{8}$

1.5.17. 1 kilometr kwadratowy $(1\ \mathrm{km}^2)$ jest równy:

A. $10^{8}\ \mathrm{cm}^2$ **B.** $10^{9}\ \mathrm{cm}^2$ **C.** $10^{10}\ \mathrm{cm}^2$ **D.** $10^{12}\ \mathrm{cm}^2$

1.5.18. Masa Księżyca wynosi około $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, a masa Ziemi wynosi około $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg. Ziemia jest cięższa od Księżyca:

A. 8 razy **B.** 9 razy **C.** 90 razy **D.** 81 razy

1.5.19. Dane są liczby $x = 0{,}001 \cdot 10^{9}$, $y = 0{,}0001 \cdot 10^{7}$ i $z = 0{,}01 \cdot 10^{10}$. Prawdziwą zależność przedstawia równanie:

A. $10x = y$ **B.** $10y = z$ **C.** $x^2 = y$ **D.** $y^2 = x$

1.5.20. Liczbę $2 \cdot 10^{5} + 3 \cdot 10^{4} - 5 \cdot 10^{3}$ można zapisać następująco:

A. $2{,}25 \cdot 10^{6}$ **B.** $2{,}25 \cdot 10^{4}$ **C.** $22\,510^{4}$ **D.** $2{,}25 \cdot 10^{5}$

1.5.21. Liczba $(6{,}3 \cdot 10^{12}) : (0{,}07 \cdot 10^{7})$ należy do przedziału:

A. $(10^{4}; 10^{5})$ **B.** $(10^{5}; 10^{6})$ **C.** $(10^{6}; 10^{7})$ **D.** $(10^{7}; 10^{8})$

1.5.22. Jeśli $a = 0{,}00024$ i $c = 0{,}0000016$, to:

A. $a \cdot c = 3{,}84 \cdot 10^{-9}$ **B.** $\frac{a}{c} = 1{,}5 \cdot 10^{3}$ **C.** $a \cdot c = 3{,}84 \cdot 10^{-10}$ **D.** $\frac{a}{c} = 0{,}15 \cdot 10^{5}$

1.6 ▶ Logarytmy. Wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym

▶ Definicja logarytmu

P.1.6.1

liczba logarytmowana

$\log_a b$

podstawa logarytmu

DEFINICJA

Logarytmem o podstawie $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz liczbie logarytmowanej $b > 0$ nazywamy taką liczbę c, że $a^c = b$. Zapisujemy to w następujący sposób: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$. Oznaczenie „log” odgrywa rolę nazwy działania, nie jest zmienną.

$\log b$ oznacza logarytm dziesiętny, czyli $\log b = \log_{10} b$

PRZYKŁAD 1	PRZYKŁAD 2
$\log_2 8 = 3$, gdyż $2^3 = 8$	$\log_3 81 = 4$, gdyż $3^4 = 81$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 3. $\log 1000$

PRZYKŁAD 4. $\log_5 \frac{1}{25}$

PRZYKŁAD 5. $\log_{\sqrt{2}} 16$

PRZYKŁAD 6. $\log_{0,2} 125$

PRZYKŁAD 7. $\log_{\frac{1}{6}} 1296$

PRZYKŁAD 8. $\log_{16} 4$

PRZYKŁAD 9. $\log_{0,1} 10\,000$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.6.1. Oblicz:

a. $\log_3 27$

b. $\log_4 \frac{1}{16}$

c. $\log_2 0,25$

d. $\log_5 1$

e. $\log 0,01$

f. $\log_6 \sqrt{6}$

g. $\log_{2,3} 2,3$

h. $\log_{\sqrt{7}} 7\sqrt{7}$

i. $\log_4 256$

j. $\log_8 512$

k. $\log_{34} 1156$

l. $\log_{\sqrt{3}} 81$

► Twierdzenia dotyczące logarytmów

P.1.6.2

Niech $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $p \in \boldsymbol{R}$.

TWIERDZENIE 1	PRZYKŁAD 1
$\log_a 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\log_5 1$

PRZYKŁAD 3. $\log 1$

TWIERDZENIE 2	PRZYKŁAD 1
$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\log_5 5$

PRZYKŁAD 3. $\log_{0,7} 0,7$

TWIERDZENIE 3	PRZYKŁAD 1
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$	$\log_3 2 + \log_3 4,5 = \log_3 (2 \cdot 4,5) = \log_3 9 = 2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\log_6 3 + \log_6 72$

PRZYKŁAD 3. $\log_5 2 + \log_5 20 + \log_5 15\frac{5}{8}$

TWIERDZENIE 4	PRZYKŁAD 1
$\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$	$\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 (12 : 3) = \log_2 4 = 2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\log_7 196 - \log_7 4$

PRZYKŁAD 3. $\log 5500 - \log 55$

TWIERDZENIE 5	PRZYKŁAD 1
$p\log_a b = \log_a b^p$	$2\log_{25} 5 = \log_{25} 5^2 = \log_{25} 25 = 1$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $3\log_2 \sqrt[3]{8}$

PRZYKŁAD 3. $2\log_2 \sqrt{32}$

► Twierdzenia uzupełniające

TWIERDZENIE 6	PRZYKŁAD 1
$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ *założenie:* $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$	$\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $\log_{27} 9$

PRZYKŁAD 3. $\log_{64} 32$

TWIERDZENIE 7	PRZYKŁAD 1
$a^{\log_a b} = b$ *założenie:* $a > 0, b > 0, a \neq 1$	$5^{\log_5 7} = 7$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $10^{\log 1000}$

PRZYKŁAD 3. $16^{\log_4 5}$

TWIERDZENIE 8	PRZYKŁAD 1
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ *założenie:* $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$	$81^{\log_9 4} = 4^{\log_9 81} = 4^2 = 16$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz:

PRZYKŁAD 2. $8^{\log_2 5}$

PRZYKŁAD 3. $11^{\log_{121} 4}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.6.2. Oblicz, używając odpowiednich wzorów:

a. $\log_3 2 + \log_3 13\frac{1}{2}$

b. $4\log_4 \sqrt{2}$

c. $\log_3 54 + \log_3 2 - \log_3 12$

d. $6\log 1 - 2\log 10 + 2\log\sqrt{10}$

e. $\log_7 2 + \log_7 35 - \log_7 10$

f. $\log_5 200 - \log_5 8$

g. $\log_2 4,8 + \log_2 6\frac{2}{3}$

h. $\log_3(\log 1000)$

i. $\log_5 6,25 + \log_5 20$

j. $2\log_3\sqrt{6} + \log_3 4,5$

k. $3\log\sqrt[3]{50} - \log 0,5$

l. $\log_3(\log_8 512) - \log_4(\log_2 16)$

m. $\log_2 3 - \log_2 24$

n. $3\log 2 - 3\log 5 + \log 15\frac{5}{8}$

1.6.3. Oblicz:

a. $4^{\log_2 9}$

b. $25^{\log_5 3}$

c. $3^{\log_9 16}$

d. $9^{\log_3 6}$

e. $100^{\log 2}$

f. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 25}$

► Obliczenia logarytmiczne

Rozważmy teraz następujący przykład, w którym trudno obliczyć w pamięci wartość logarytmu, dlatego dokonajmy obliczeń w sposób inny niż w poprzednich przykładach.

PRZYKŁAD 1 — P.1.6.3

Oblicz $\log_8 16$.

1° Niech $\log_8 16 = x$.

2° Układamy równanie z definicji logarytmu: $8^x = 16$

3° Zamieniamy liczby 8 i 16 na potęgi liczby 2: $(2^3)^x = 2^4$

4° Przekształcamy: $2^{3x} = 2^4$

5° Skoro liczby są równe, a podstawy potęgi są takie same, to wykładniki tych potęg także są równe, więc:

$3x = 4 \quad |:3$

$x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.6.4. Oblicz:

Z.1.6.4

a. $\log_9 27$

b. $\log_{125} 25$

c. $\log_{100} 1000$

d. $\log_{8\sqrt{2}} 4$

e. $\log_{36} \frac{1}{6}$

f. $\log_{0,2} 625$

g. $\log_{128} 16$

h. $\log_{\frac{8}{27}} \frac{4}{9}$

i. $\log_{81} 3\sqrt{3}$

► Obliczanie liczby logarytmowanej i podstawy logarytmu

	PRZYKŁADY
Rozważając definicję logarytmu, można również obliczać: ► liczbę logarytmowaną, ► podstawę logarytmu.	$\log_2 x = 4$ to $x = 16$, gdyż $2^4 = 16$ $\log_x 64 = 3$ to $x = 4$, gdyż $4^3 = 64$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

1.6.5. Oblicz wartość a:

a. $\log_a 25 = 2$

b. $\log_4 a = -3$

c. $\log_a 0,04 = -2$

d. $\log_{11} a = 3$

e. $\log_a 8\sqrt{2} = 7$

f. $\log_{36} a = \frac{3}{2}$

g. $\log_a 16 = \frac{1}{4}$

h. $\log_{25} a = -\frac{1}{2}$

i. $\log_{5\sqrt{5}} a = \frac{4}{3}$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

1.6.6. Liczba $\log_3 4{,}5 + \log_3 2$ jest równa:

A. $\log_3 6{,}5$ **B.** 3 **C.** 2 **D.** $\log_3 2\frac{1}{4}$

1.6.7. Liczba $\log_2 10 + \log_2 3{,}2$ jest równa:

A. $\log_2 13{,}2$ **B.** $\log_2\left(10 + 3\frac{1}{5}\right)$ **C.** $\log_2 16$ **D.** 5

1.6.8. Iloczyn $6\log_{\frac{1}{2}} 64$ jest równy:

A. 12 **B.** 8 **C.** -12 **D.** -36

1.6.9. Liczba $\log_4 \frac{1}{16}$ jest równa:

A. 2 **B.** 4 **C.** -4 **D.** -2

1.6.10. Różnica $\log_2 8 - 3\log_2 1$ jest równa:

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** -1

1.6.11. Liczba $2\log_5 1 + 5\log_5 5$ jest równa:

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10

1.6.12. Wyrażenie $\log_5(x+8) = 2$ jest prawdziwe dla:

A. $x = 2$ **B.** $x = 17$ **C.** $x = 33$ **D.** $x = 5$

1.6.13. Liczba $\log_5 4 + \log_5 1{,}25$ jest równa:

A. 0 **B.** 1 **C.** $\log_5 5{,}25$ **D.** -1

1.6.14. Jeśli wyrażenie $\log_3(x+10) = 2$, to:

A. $x = 0$ **B.** $x = -1$ **C.** $x = 3$ **D.** $x = 2$

1.6.15. Liczba $\log_{36} 216$ jest równa:

A. 6 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{2}{3}$

1.D ► Wartość bezwzględna

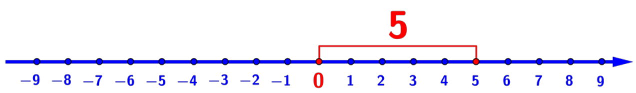
DEFINICJA

Wartość bezwzględna oznacza odległość dowolnego punktu na osi liczbowej od punktu oznaczającego wartość zero. Skoro więc jest to odległość, to wyrażamy ją tylko wartościami nieujemnymi.

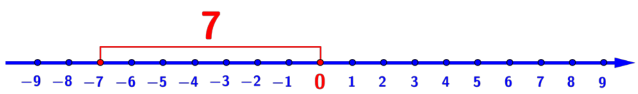
Wartość bezwzględną z liczby a oznaczamy $|a|$. Czasami używamy również określenia moduł.

PRZYKŁADY — P.1.D.1

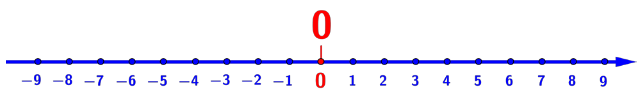
$|5| = 5$



$|-7| = 7$



$|0| = 0$

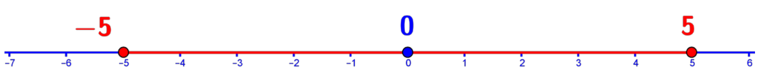


► Równania z wartością bezwzględną

PRZYKŁAD — P.1.D.2

Rozwiąż równanie: $|x| = 5$.

Aby rozwiązać równanie, należy znaleźć takie liczby x, których odległość od 0 wynosi 5.



Są dwie liczby, 5 i -5, które leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej, więc mają tę samą wartość bezwzględną równą 5.

$|-5| = 5$ i $|5| = 5$

Równanie ma więc dwa rozwiązania: $x_1 = 5$ i $x_2 = -5$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.D.1. Oblicz wartości:

a. $|-9|+|5|-|-3|$

b. $\left|8\frac{1}{2}\right|+\left|-6\frac{1}{2}\right|$

c. $|2-3\sqrt{2}|+|2\sqrt{2}-1|$

d. $|\sqrt{3}-4|+|2\sqrt{3}-3|$

e. $|2-5|+|4-8|$

f. $|6-2|-|5-7|+|4-11|$

1.D.2. Wyznacz liczby spełniające równanie.

a. $|x|=2$

b. $|x|=25$

c. $|x|=0$

d. $|x|=-3$

e. $|x|=\sqrt{2}-1$

f. $|x|=3\sqrt{3}-7$

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.1.D

1.D.3. Liczba $|4-5|-2|1-3|$ jest równa:

A. -3 B. 3 C. 5 D. -2

1.D.4. Liczba $|1-\sqrt{2}|-|2\sqrt{2}-3|$ jest równa:

A. $2\sqrt{2}-3$ B. $3\sqrt{2}-4$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $2\sqrt{2}+2$

1.D.5. Liczbą spełniającą równanie $|x|=2\sqrt{2}-1$ jest:

A. $2\sqrt{2}+1$ B. $1-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1.D.6. Liczba $||2-3|-4|$ jest równa:

A. 3 B. -3 C. -5 D. 5

1.D.7. Jeśli $|x|=-\sqrt{3}$, to:

A. $x=\sqrt{3}$ B. $x=-\sqrt{3}$ C. $x\in \boldsymbol{R}$ D. $x\in\varnothing$

1.7 ▶ Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

▶ Przybliżenia

P.1.7.1

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Zaokrąglanie liczby polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby zgodnie z zasadą, według której ostatnią z zachowanych cyfr liczby:	
▶ pozostawiamy bez zmian, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3 lub 4 (przybliżenie z niedomiarem),	$25{,}748539 \approx 25{,}7485$ (przybliżenie do czterech miejsc po przecinku)
▶ zwiększamy o jeden, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8 lub 9 (przybliżenie z nadmiarem).	$25{,}748539 \approx 25{,}75$ (przybliżenie do dwóch miejsc po przecinku)

PRZYKŁAD 1

P.1.7.2

Zaokrąglij liczbę 5,0926327 do trzech miejsc po przecinku.

5,092⁝6327 $\approx$ 5,093

PRZYKŁAD 2

Zaokrąglij liczbę 0,4285915 do jednego miejsca po przecinku.

0,4⁝285915 $\approx$ 0,4

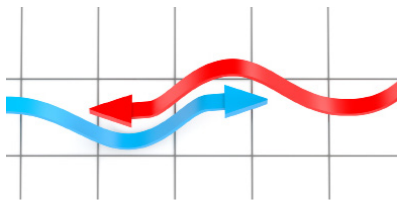
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Zaokrąglij liczbę 7,0872433 do czterech miejsc po przecinku.

PRZYKŁAD 4. Zaokrąglij liczbę 6,01808805 do sześciu miejsc po przecinku.

PRZYKŁAD 5. Zaokrąglij liczbę 6,00903957 do dwóch miejsc po przecinku.

PRZYKŁAD 6. Zaokrąglij liczbę 4,5803458 do pięciu miejsc po przecinku.



▶ Błąd bezwzględny przybliżenia

DEFINICJA

a — przybliżenie liczby x

Błąd bezwzględny przybliżenia liczby to wartość bezwzględna różnicy tej liczby i jej przybliżenia a, czyli $|x - a|$.

PRZYKŁAD 1

P.1.7.3

Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby 45,2 liczbą 45.

$|x-a| = |45{,}2-45| = |0{,}2| = 0{,}2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby 12,5 liczbą 13.

PRZYKŁAD 3. Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby 4,9 liczbą 5.

PRZYKŁAD 4. Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby 99,6 liczbą 99.

► Błąd względny przybliżenia

DEFINICJA

a — przybliżenie liczby x

Błąd względny przybliżenia liczby to stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x, czyli $\frac{|x-a|}{|x|}$.
Błąd ten jest najczęściej wyrażany w procentach.

PRZYKŁAD 1

P.1.7.4

Oblicz błąd względny przybliżenia liczby 5,2 liczbą 6.

$$\frac{|x-a|}{|x|} = \frac{|5{,}2-6|}{|5{,}2|} = \frac{|-0{,}8|}{|5{,}2|} = \frac{0{,}8}{5{,}2} \approx 0{,}154$$

Błąd względny wyrażony w procentach:

$0{,}154 \cdot 100\% \approx 15{,}4\%$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz błąd względny przybliżenia liczby 10,7 liczbą 11.

PRZYKŁAD 3. Oblicz błąd względny przybliżenia liczby 3,8 liczbą 4.

PRZYKŁAD 4. Oblicz błąd względny przybliżenia liczby 99,6 liczbą 100.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.7.1. Uzupełnij tabelę, zaokrąglając liczby według wskazań.

Liczba	Zaokrąglenie do:			
	jednego miejsca po przecinku	dwóch miejsc po przecinku	trzech miejsc po przecinku	całości
6,90513				
0,34981				
5,8267				
16,0519				
200,00205				
13,(45)				

1.7.2. Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby x liczbą a.

a. $x = 4{,}95$; $a = 5$

b. $x = 18{,}73$; $a = 18{,}7$

c. $x = 8{,}431$; $a = 8{,}4$

d. $x = 2014$; $a = 2000$

1.7.3. Oblicz błąd względny z dokładnością do 0,01%, który popełniono, przybliżając liczbę x do liczby a.

a. $x = 25{,}74$; $a = 26$

b. $x = 28{,}84$; $a = 29$

c. $x = 2{,}06$; $a = 2{,}1$

d. $x = 10{,}345$; $a = 3$

1.7.4. Pan Tomasz oszacował, że remont pokoju będzie go kosztował 4500 zł. Jednak wydał na ten remont 4800 zł. Oblicz błąd względny procentowy poniesionych wydatków w stosunku do planowanych.

1.7.5. Małgosia założyła, że przejedzie rowerem w maju 165 kilometrów. Udało się jej przejechać odległość 150 kilometrów. Oblicz błąd względny procentowy pokonanej odległości w stosunku do założeń.

1.7.6. Uczniowie Tomek, Janek i Kuba mierzyli obwody okrągłych przedmiotów. Wyniki pomiarów dzielili przez średnicę tych przedmiotów, aby otrzymać w miarę dokładne przybliżenie liczby π. Oblicz błąd bezwzględny oraz błąd względny procentowy i uzupełnij tabelę, wiedząc, że $\pi \approx 3{,}1415$.

	Pomiar	Błąd bezwzględny	Błąd względny procentowy
Tomek	3,16		
Janek	3,128		
Kuba	3,157		

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

1.7.7. Liczbę π przybliżono liczbą 3. Błąd względny przybliżenia jest:

A. mniejszy niż 5%
B. większy niż 5%
C. mniejszy niż 3%
D. większy niż 5,5%

1.7.8. Przybliżeniem liczby 18,7048 do części setnych jest liczba:

A. 18,7 **B.** 18,70 **C.** 18,71 **D.** 18,705

1.7.9. Liczbę 13,0954 przybliżono do liczby 13,1. Błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi:

A. $-0{,}0046$ **B.** 0,0046 **C.** 0,0953 **D.** 0,1054

1.7.10. Przybliżenie liczby z nadmiarem to:

A. $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ **B.** $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ **C.** $\sqrt{10} \approx 3{,}2$ **D.** $\sqrt{11} \approx 3{,}3$

1.7.11. Liczbę 10,47025 przybliżono do liczby 10. Błąd względny tego przybliżenia wynosi około:

A. 0,45% **B.** 4,5% **C.** 4% **D.** 5%

1.7.12. Przybliżenie liczby 85 627 845 z dokładnością do miliona wynosi:

A. 856 mln **B.** 85,6 mln **C.** 86 mln **D.** 85 mln

1.7.13. Liczbę $\frac{1}{800}$ przybliżono liczbą z dokładnością do 10^{-3}. Błąd względny przybliżenia wynosi:

A. 20% **B.** 2,5% **C.** 4% **D.** 25%

1.7.14. Przybliżenie dziesiętne liczby $\sqrt{15}$ z dokładnością do całości jest równe 4. Liczba, która nie jest błędem względnym przybliżenia tej liczby, to:

A. $-\frac{\sqrt{15}-4}{\sqrt{15}}$ **B.** $\frac{4-\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$ **C.** $\frac{4\sqrt{15}-15}{15}$ **D.** $\frac{15-4\sqrt{15}}{15}$

1.7.15. Wartość $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ jest równoważna liczbie:

A. $0{,}042 \cdot 10^{-3}$ **B.** $0{,}042 \cdot 10^{-7}$ **C.** $0{,}0042 \cdot 10^{8}$ **D.** $0{,}0042 \cdot 10^{-8}$

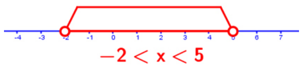
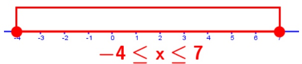
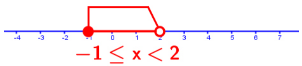
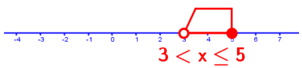
1.7.16. Liczba 10 jest przybliżeniem liczby 9,5. Błąd względny należy do przedziału:

A. $(0{,}05; 0{,}06)$ **B.** $(0{,}06; 0{,}07)$ **C.** $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{9}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{7}\right)$

1.8 ▶ Przedziały liczbowe

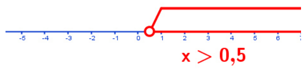
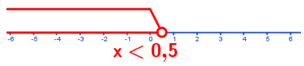
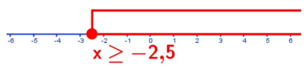
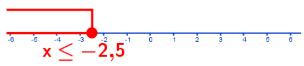
▶ Przedziały ograniczone

P.1.8.1

NAZWA	OZNACZENIE	PRZEDZIAŁY	PRZYKŁAD
Przedział otwarty	$(a; b)$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x < b$	$x \in (-2; 5)$ 
Przedział domknięty	$\langle a; b\rangle$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x \leq b$	$x \in \langle -4; 7\rangle$ 
Przedział lewostronnie domknięty	$\langle a; b)$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a \leq x < b$	$x \in \langle -1; 2)$ 
Przedział prawostronnie domknięty	$(a; b\rangle$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających podwójną nierówność $a < x \leq b$	$x \in (3; 5\rangle$ 

▶ Przedziały nieograniczone

P.1.8.2

NAZWA	OZNACZENIE	PRZEDZIAŁY	PRZYKŁAD
Przedział otwarty nieograniczony	$(a; +\infty)$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x > a$	$x \in (0{,}5; \infty)$ 
	$(-\infty; a)$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x < a$	$x \in (-\infty; 0{,}5)$ 
Przedział domknięty nieograniczony	$\langle a; +\infty)$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \geq a$	$x \in \langle -2{,}5; \infty)$ 
	$(-\infty; a\rangle$	zbiór liczb rzeczywistych x spełniających nierówność $x \leq a$	$x \in (-\infty; -2{,}5\rangle$ 

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.8.1. Zaznacz przedział na osi liczbowej.

a. $(-\infty; 8)$

b. $\langle -2\sqrt{3}; 9\rangle$

c. $\left(7\frac{1}{3}; +\infty\right)$

d. $(-2; 10\rangle$

e. $(\sqrt{2}; +\infty)$

f. $\langle 1; 3)$

1.8.2. Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających daną nierówność i zaznacz ten przedział na osi liczbowej.

a. $x \le 18$

b. $\frac{1}{3} \le x < 8$

c. $x > -\frac{1}{2}$

d. $-9 \le x \le -1$

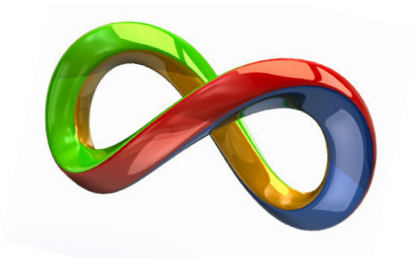
e. $-3 < x < \frac{1}{3}$

f. $x \ge \frac{12}{5}$

g. $-\sqrt{2} < x \le \sqrt{2}$

h. $x < 5$

► Działania na przedziałach

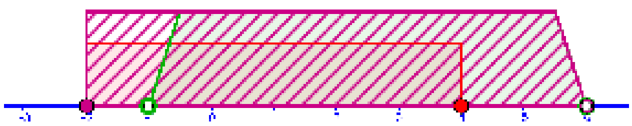


Przedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, dlatego możemy wykonywać na nich działania jak na zbiorach, tzn. wyznaczać sumę, iloczyn (część wspólną) i różnicę przedziałów.

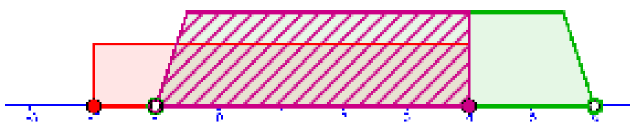
PRZYKŁAD 1

P.1.8.3

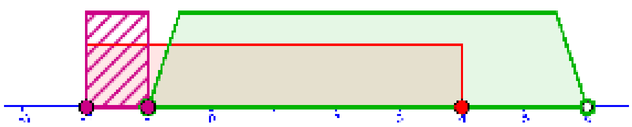
Niech $A = \langle -2; 4\rangle$ i $B = (-1; 6)$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



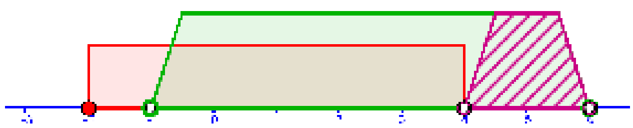
$A \cup B = \langle -2; 6)$



$A \cap B = (-1; 4\rangle$



$A \setminus B = \langle -2; -1\rangle$



$B \setminus A = (4; 6)$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla podanych przedziałów.

PRZYKŁAD 2. $A = \langle -2; 3\frac{1}{2})$ i $B = (3; 6\rangle$

PRZYKŁAD 3. $A = (-1; 5\rangle$ i $B = (0; 3\rangle$

PRZYKŁAD 4. $A = (-2; \infty)$ i $B = \langle -3; 1\rangle$

PRZYKŁAD 5. $A = \langle 1; 5)$ i $B = (-\infty; 6)$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.8.3. Wyznacz zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a. $A = \langle -2; 5)$, $B = (0; 3\rangle$

b. $A = (-4; 6)$, $B = \langle -2\frac{1}{2}; 3\rangle$

c. $A = (-\infty; 3\rangle$, $B = \langle -1; 3)$

d. $A = (-\infty; 4)$, $B = \langle -2; \infty)$

e. $A = (-3; 4\rangle$, $B = \langle 4; 6)$

f. $A = (-\infty; -2)$, $B = \langle -2; 5\rangle$

1.8.4. Wyznacz zbiór.

a. $R \setminus (-3; 4\rangle$

b. $R \setminus \langle \sqrt{3}; 8)$

c. $R \setminus (-2; \infty)$

d. $R \setminus \langle -\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\rangle$

1.8.5. Ile elementów należy do zbioru A?

a. $A = \langle -4; 3\rangle \cap \boldsymbol{N}$

b. $A = (0; 8) \cap \boldsymbol{N}$

c. $A = \langle -2; 4\rangle \cap \boldsymbol{C}$

d. $A = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cap \boldsymbol{C}$

1.8.6. Dane są zbiory $A = (-\infty; 3\rangle \cup (5; 8\rangle$ i $B = (1; 7\rangle$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.1.8

1.8.7. Na rysunku zaznaczono przedział:

Zbiór ten można zapisać następująco:

A. $\langle -5; 6\rangle$ **B.** $(-5; 6)$ **C.** $\langle -5; 6)$ **D.** $(-5; 6\rangle$

1.8.8. Liczb całkowitych należących do przedziału $\left(-4\frac{1}{3}; 5\right\rangle$ jest:

A. 10 **B.** 9 **C.** 11 **D.** 8

1.8.9. Dane są zbiory $A = \langle -2; 3\rangle$ i $B = \langle -1; 4)$. Wynika z tego, że:

A. $A \cap B = (-1; 3\rangle$ **B.** $A \cap B = \langle -1; 3\rangle$ **C.** $A \cap B = \langle -2; 4)$ **D.** $A \cap B = \langle -1; 3)$

1.8.10. Jeśli zbiór $A = \langle -8; 13\rangle$ i $B = (-1; 8)$, to $A \setminus B$ równe jest przedziałowi:

A. $\langle -8; -1) \cup (8; 13\rangle$ **B.** $\langle -8; -1\rangle \cup \langle 8; 13\rangle$ **C.** $\langle -1; 8\rangle$ **D.** $(-1; 8)$

1.8.11. Liczba elementów zbioru $N \cap \langle -1; 6)$ wynosi:

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

1.8.12. Jeśli zbiór $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i zbiór $B = \{3, 4, 5, 6\}$, to zbiór $A \setminus B$ liczy:

A. dwa elementy, **B.** trzy elementy, **C.** cztery elementy, **D.** sześć elementów.

1.8.13. Zbiór $R \setminus \langle 2; 5)$ równy jest:

A. $(-\infty; 2\rangle \cup (5; \infty)$ **B.** $(-\infty; 2) \cup (5; \infty)$ **C.** $(-\infty; 2\rangle \cup \langle 5; \infty)$ **D.** $(-\infty; 2) \cup \langle 5; \infty)$

1.8.14. Prawdziwa zależność między zbiorami liczb naturalnych $(\boldsymbol{N})$, całkowitych $(\boldsymbol{C})$, wymiernych $(\boldsymbol{W})$ oraz rzeczywistych $(\boldsymbol{R})$ to:

A. $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}$ **B.** $\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{W}$ **C.** $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}$ **D.** $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}$

1.8.15. Jeśli $A \setminus B = \{5\}$ i $B \setminus A = \{2; 4\}$, to zbiór $A \cup B$ może liczyć:

A. jeden element,
B. dwa elementy,
C. trzy elementy,
D. co najmniej trzy elementy.

1.8.16. Jeśli $A = (-\infty; -1\rangle$ i $B = \langle 2; \infty)$, to zbiór $\boldsymbol{R} \setminus (A \cup B)$ jest równy:

A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ **B.** $(-1; 2\rangle$ **C.** $\langle -1; 2\rangle$ **D.** $(-1; 2)$

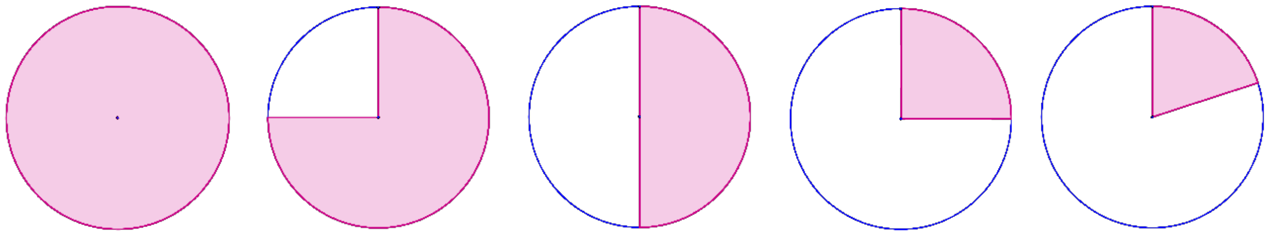
1.9 ▶ Obliczenia procentowe

DEFINICJA

P.1.9.1

Wyraz procent pochodzi od łacińskiego „pro centum”, czyli „na sto”. 1% danej liczby a to 0,01 z tej liczby, co obliczamy w następujący sposób: $0{,}01 \cdot a$.

PRZYKŁADY



$100\% = 1$	$75\% = \frac{3}{4}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$25\% = \frac{1}{4}$	$20\% = \frac{1}{5}$

DEFINICJA

Promil (1‰) danej liczby a to 0,001 tej liczby, co obliczamy w następujący sposób: $0{,}001 \cdot a$.

▶ Wykorzystanie proporcji prostych przy obliczeniach procentowych

Bardzo wygodnym sposobem rozwiązywania zadań z obliczeniami procentowymi jest stosowanie proporcji prostych.

P.1.9.2

PRZYKŁAD 1

30% uczniów klasy IB uczęszcza na kurs języka angielskiego, co stanowi 9 osób.
Ilu uczniów jest w tej klasie?

$$30\% \rightarrow 9 \text{ osób}$$
$$100\% \rightarrow x \text{ osób}$$
$$30x = 9 \cdot 100$$
$$30x = 900 \quad |:30$$
$$x = 30$$

PRZYKŁAD 2

Jakim procentem liczby 120 jest liczba 48?

$$100\% \rightarrow 120$$
$$x\% \rightarrow 48$$
$$120x = 100 \cdot 48$$
$$120x = 4800 \quad |:120$$
$$x = 40\%$$

► Rodzaje obliczeń procentowych

P.1.9.3

RODZAJ 1 — OBLICZANIE PROCENTU Z LICZBY

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Oblicz 27% z liczby 500.	$0{,}27 \cdot 500 = 135$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz 34% z liczby 350.

PRZYKŁAD 3. Oblicz 72% z liczby 50.

RODZAJ 2 — OBLICZANIE LICZBY, GDY DANY JEST JEJ PROCENT

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Pierwsza rata spłaty pożyczki za samochód stanowi 9% wartości samochodu, co daje kwotę 2880 zł. Oblicz całkowity koszt samochodu.	$9\% \rightarrow 2880$ zł $100\% \rightarrow x$ $9x = 100 \cdot 2880$ $9x = 288\,000$ zł $\quad \vert :9$ $x = 32\,000$ zł

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. 14 osób, które zdały egzamin, stanowi 3,5% liczby wszystkich uczniów szkoły. Oblicz, ilu uczniów liczy ta szkoła.

PRZYKŁAD 3. Państwo Liczyńscy wydają 45% swoich miesięcznych dochodów na utrzymanie, co stanowi kwotę 2790 zł. Oblicz, jakie są miesięczne dochody państwa Liczyńskich.

RODZAJ 3 — JAKIM PROCENTEM JEDNEJ LICZBY JEST DRUGA LICZBA

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Jakim procentem liczby 150 jest liczba 48?	$100\% \rightarrow 150$ $x\% \rightarrow 48$ $150x = 48 \cdot 100$ $150x = 4800 \quad \vert :150$ $x = 32\%$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Jakim procentem liczby 250 jest liczba 70?

PRZYKŁAD 3. Na parkingu stoi 40 samochodów, z których 7 jest koloru czerwonego. Jaki procent wszystkich samochodów stanowią samochody czerwone?

RODZAJ 4 — WIELOKROTNA ZMIANA WARTOŚCI (NP. CEN)

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Cenę pewnego towaru obniżono o 20%, a następnie jeszcze o 30%. O ile procent została obniżona cena towaru?	Cena w procentach po pierwszej obniżce: $100\% - 20\% = 80\%$ ceny początkowej. Cena w procentach po drugiej obniżce: $100\% - 30\% = 70\%$ nowej ceny. Po dwóch obniżkach otrzymujemy 70% z 80% ceny początkowej, czyli: $70\% \cdot 80\% = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56 = 56\%$ ceny początkowej. Cenę towaru obniżono o $100\% - 56\% = 44\%$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Cenę spodni obniżono o 30%, a następnie jeszcze o 40%. O ile procent została obniżona cena spodni?

PRZYKŁAD 3. Sprzedawca podniósł cenę komputera o 10%, a następnie obniżył ją o 20%. O ile procent zmieniła się cena komputera?

RODZAJ 5 — OBLICZANIE PODATKU VAT

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Rower kosztuje 1353 zł brutto. Oblicz cenę netto roweru, jeśli podatek VAT wynosi 23%.	$123\% \rightarrow 1353$ zł $100\% \rightarrow x$ $123x = 1353 \cdot 100$ $123x = 135\,300$ zł $\quad \vert :123$ $x = 1100$ zł

WSKAZÓWKA: Cena brutto = 100% + stawka podatku VAT.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Tablet kosztuje 1476 zł brutto. Oblicz cenę netto tabletu, jeśli stawka podatku VAT wynosi 23%.

PRZYKŁAD 3. 23-procentowa stawka podatku VAT zawarta w cenie telefonu wynosi 184 zł. Oblicz cenę brutto telefonu.

RODZAJ 6 — OBLICZENIA DOTYCZĄCE LOKAT I FUNDUSZY

PRZYKŁAD 1

12 000 zł wpłacono na lokatę dwuletnią o oprocentowaniu rocznym 6% i półrocznej kapitalizacji. Oblicz zysk z tej lokaty.

OBLICZENIA — METODA 1

1° Oprocentowanie na pół roku:
$6\% : 2 = 3\%$

2° Po pierwszym okresie kapitalizacji zgromadzony kapitał to 100% kwoty początkowej oraz 3% odsetek uzyskanych za pierwsze półrocze, czyli łącznie:
$100\% + 3\% = 103\%$

3° Po każdym kolejnym okresie kapitalizacji zgromadzony kapitał to 103% wartości kapitału przed tym okresem.

4° W czasie trwania lokaty są 4 okresy kapitalizacji odsetek, więc kapitał końcowy wynosi
$103\% \cdot 103\% \cdot 103\% \cdot 103\% \cdot 12\,000$, czyli:
$(103\%)^4 \cdot 12\,000 = 1{,}03^4 \cdot 12\,000 \approx 13\,506{,}11$ zł

ZYSK: 13 506,11 zł − 12 000 zł = 1506,11 zł

OBLICZENIA — METODA 2

Korzystamy ze wzoru na procent składany:
$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

1° Oprocentowanie na pół roku:
$6\% : 2 = 3\% \rightarrow p = 3$

2° Liczba okresów kapitalizacji w czasie trwania lokaty:
$n = 4$

3° Kwota początkowa: $K = 12\,000$.

$K_n = 12\,000\left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 12\,000 \cdot 1{,}03^4 \approx 13\,506{,}11$ zł

ZYSK: 13 506,11 zł − 12 000 zł = 1506,11 zł

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz, ile pieniędzy zostanie wypłaconych inwestorowi po 5 latach, jeśli zainwestuje on 100 tysięcy złotych w fundusz inwestycyjny o oprocentowaniu rocznym 10% oraz rocznej kapitalizacji.

PRZYKŁAD 3. Pan Tomasz wpłacił 5000 zł na lokatę roczną o oprocentowaniu 8% i kwartalnej kapitalizacji. Oblicz, ile pieniędzy pan Tomasz odbierze z banku po zakończeniu lokaty.

RODZAJ 7 — O ILE PROCENT WIĘCEJ, O ILE PROCENT MNIEJ

PRZYKŁAD 1	OBLICZENIA
Partia *XYZ* ma 30-procentowe, a partia *QD* 20-procentowe poparcie wyborcze.	
1. O ile procent większe poparcie ma partia *XYZ* od poparcia dla partii *QD*?	$20\% \rightarrow 100\%$ $30\% \rightarrow x\%$ $20x = 30 \cdot 100$ $20x = 3000 \quad \vert : 20$ $x = 150\%$ Poparcie wyborcze dla partii *XYZ* jest większe o 50% od poparcia dla partii *QD*.

WSKAZÓWKA: O ile % więcej → mniejsza wartość = 100%. O ile % mniej → większa wartość = 100%.

2. O ile punktów procentowych mniejsze poparcie ma partia *QD*?	$30\% - 20\% = 10$ punktów procentowych Poparcie wyborcze dla partii *QD* jest mniejsze o 10 punktów procentowych od poparcia dla partii *XYZ*.

WSKAZÓWKA: Punkty procentowe to różnica dwóch wartości procentowych.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Cena kilograma truskawek w Warszawie wynosi 8 zł, a w Łowiczu 5 zł. O ile procent truskawki w Łowiczu są tańsze od truskawek w Warszawie?

PRZYKŁAD 3. Kolekcja płyt Tomka liczy 120 egzemplarzy, a kolekcja Agaty 150 egzemplarzy. O ile procent kolekcja Agaty jest większa od kolekcji Tomka?

ZADANIA UTRWALAJĄCE

1.9.1. Oblicz:

a. 6% liczby 120, **b.** 15% liczby 300, **c.** 110% liczby 40, **d.** $33\frac{1}{3}\%$ liczby 81.

1.9.2. Wyznacz liczbę:

a. o 10% większą od 800,

b. o 20% mniejszą od 50,

c. o 3% większą od 1200,

d. o 11% mniejszą od 200.

1.9.3. Łączna powierzchnia Tatr wynosi 785 km^2, z tego około 22, 3% leży w granicach Polski. Oblicz powierzchnię Tatr poza granicami Polski.

1.9.4. Bezrobocie w jednym z państw wynosi 12%, co stanowi 2 430 000 osób. Jaka jest liczba ludności tego państwa?

1.9.5. Kurtka po obniżce o 15% kosztuje 476 zł. Oblicz cenę początkową kurtki.

1.9.6. Do liceum uczęszcza 115 chłopców i 135 dziewcząt. Oblicz, jakim procentem wszystkich uczniów liceum jest liczba dziewcząt.

1.9.7. Sprzedawca podniósł cenę pewnego towaru o 20%. Kolejnego dnia jednak obniżył cenę tego towaru o 10%, a jeszcze następnego dnia o kolejne 10%. Oblicz początkową cenę towaru, jeśli ostatecznie po tych zmianach cena wynosiła 1458 zł.

1.9.8. Stawka podatku VAT na pewien towar zmieniła się z 8% na 23%. Oblicz nową cenę tego towaru, jeśli z niższą stawką VAT jego cena brutto wynosiła 1728 zł.

1.9.9. Oblicz zysk z lokaty 18-miesięcznej o oprocentowaniu rocznym 6%, jeśli wiadomo, że kapitalizacja odsetek jest półroczna, a ulokowana kwota wynosi 20 000 zł.

1.9.10. Kwotę 10 000 złotych ulokowano w funduszu, którego oprocentowanie roczne wynosi 10%. Oblicz, po ilu latach zainwestowana kwota podwoi się, jeśli wiadomo, że kapitalizacja odsetek następuje co roku.

1.9.11. Liczba a jest o 25% większa od liczby b. O ile procent liczba b jest mniejsza od liczby a?

1.9.12. Wysokość Babiej Góry to 1725 m n.p.m., a wysokość Baraniej Góry to 1220 m n.p.m. Oblicz, o ile procent Babia Góra jest wyższa od Baraniej Góry.

1.9.13. Ludność województwa mazowieckiego liczy 5 301 760 osób (według Głównego Urzędu Statystycznego w 2013 r.). W Warszawie mieszka 1 715 517 osób. Oblicz, jaki procent ludności województwa mazowieckiego stanowi liczba mieszkańców Warszawy. Wynik zaokrąglij do 0,01%.

1.9.14. Zwycięskie ugrupowanie zdobyło w wyborach 35% wszystkich głosów, a partia, która zajęła drugie miejsce, 25% wszystkich głosów.

- **a.** O ile procent głosów więcej zdobyło zwycięskie ugrupowanie?
- **b.** O ile punktów procentowych mniej uzyskała partia, która zajęła drugie miejsce?
- **c.** O ile procent głosów mniej uzyskała partia, która zajęła drugie miejsce?

1.9.15. Odra jest dłuższa od Warty o mniej więcej 5,8%. Oblicz długość Odry, jeśli długość Warty wynosi 808 km.

1.9.16. Paulina wpłaciła do banku 6000 zł na dwuletnią lokatę o rocznej kapitalizacji odsetek. Po zakończeniu lokaty kwota do wypłaty wynosi 6615 zł. Oblicz roczne oprocentowanie lokaty.

1.9.17. Cena czekolady w sklepie A wynosi 3 zł, a w sklepie B 3,60 zł. W sklepie B cena czekolady jest wyższa od ceny w sklepie A o:

A. 60% **B.** 20% **C.** $16\frac{2}{3}\%$ **D.** 30%

1.9.18. Podatek VAT w wysokości 23% zawarty w cenie tabletu wynosi 414 zł. Cena netto tabletu wynosi:

A. 1800 zł **B.** 2214 zł **C.** 1386 zł **D.** 1704,78 zł

1.9.19. Samochód po obniżce o 15% kosztuje 35 700 zł. Cena początkowa samochodu wynosiła:

A. 41 055 zł **B.** 42 000 zł **C.** 30 345 zł **D.** 40 000 zł

1.9.20. Pierwsza rata za samochód wynosząca 1800 zł stanowi 5% całkowitej ceny samochodu, który kosztuje:

A. 18 000 zł **B.** 36 000 zł **C.** 32 000 zł **D.** 28 000 zł

1.9.21. Komputer kosztował 3500 zł. Sprzedawca obniżył cenę najpierw o 10%, a potem jeszcze o 30%. Komputer kosztuje teraz:

A. 2100 zł **B.** 2555 zł **C.** 2625 zł **D.** 2205 zł

1.9.22. Cenę zegarka obniżono najpierw o 10%, a potem o 30%. Wynika z tego, że cenę zegarka obniżono o:

A. 63% **B.** 37% **C.** 40% **D.** 60%

1.9.23. Po obniżce o 10% telefon kosztuje 675 zł. Cena początkowa telefonu wynosiła:

A. 742,50 zł **B.** 607,50 zł **C.** 700 zł **D.** 750 zł

1.9.24. Na wycieczkę klasową pojechało 18 uczniów, co stanowi 72% uczniów całej klasy. Klasa ta liczy:

A. 30 uczniów, **B.** 32 uczniów, **C.** 28 uczniów, **D.** 25 uczniów.

1.9.25. Na dwuletnią lokatę o oprocentowaniu rocznym 8% wpłacono 20 000 zł. Po tym czasie wartość lokaty wraz z odsetkami wyniosła:

A. 3328 zł **B.** 23 328 zł **C.** 23 200 zł **D.** 3200 zł

1.9.26. Cena towaru bez podatku VAT jest równa 120 zł. Towar ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 23% kosztuje:

A. 143 zł **B.** 147,60 zł **C.** 93 zł **D.** 120,23 zł

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

1.A.1. **a.** $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11\}$ **c.** $A \setminus B = \{0; 1; 2; 4; 6\}$

b. $A \cap B = \{3; 5; 7\}$ **d.** $B \setminus A = \{9; 11\}$

1.A.2. **a.** $A \cup B = \{a; b; c; 1; 2; 3; 4\}$ **c.** $A \setminus B = \{a; 2; 3\}$

b. $A \cap B = \{b; c; 1; 4\}$ **d.** $B \setminus A = \varnothing$

1.A.3. **a.** $K = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$ **e.** $K \cap L \cap M = \{6; 12\}$

b. $L = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; \ldots\}$ **f.** $M \setminus L = \{1; 2; 4\}$

c. $M = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ **g.** $(K \cup M) \setminus L = \{1; 2; 4; 8; 10; 14\}$

d. $(K \cup L) \cap M = \{2; 3; 4; 6; 12\}$ **h.** $(L \cap M) \setminus L = \varnothing$

1.A.4. **a.** $A = \{10; 11; 12; 13; \ldots; 19; 20\}$

b. $B = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90\}$

c. $C = \{8; 15; 22; 29; 36; 43; 50; 57; 64; 71; 78; 85\}$

d. $A \cup (B \cap C) = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 50\}$

e. $C \setminus (A \cap B) = C = \{8; 15; 22; 29; 36; 43; 50; 57; 64; 71; 78; 85\}$

f. $A \cap B \cap C = \varnothing$

g. $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = \{10; 20\}$

h. $(B \setminus C) \setminus A = \{30; 40; 60; 70; 80; 90\}$

1.A.5. B **1.A.6.** B **1.A.7.** C **1.A.8.** A **1.A.9.** B

1.B.1. **a.** $\{0; 2^3; \sqrt{81}; 13\}$ **c.** $\{0; 2^3; \sqrt{81}; 13; -7; -1; -2\frac{1}{2}; 0,(3); 9\frac{1}{3}\}$

b. $\{0; 2^3; \sqrt{81}; 13; -7; -1\}$ **d.** $\{\sqrt{3}; \pi; 2\sqrt{5}\}$

1.B.2. **a.** $\{\frac{\pi}{\pi}; 5^0; 0; (\sqrt{3})^2\}$ **c.** $\{\frac{\pi}{\pi}; 5^0; 0; (\sqrt{3})^2; -2; -\frac{2}{11}; 3{,}75; 10{,}(6)\}$

b. $\{\frac{\pi}{\pi}; 5^0; 0; (\sqrt{3})^2; -2\}$ **d.** $\{-3\sqrt{2}\}$

1.B.3.

a	3	4	2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-1{,}3$	$-\sqrt{5}$	5	$-\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$
$-a$	-3	-4	-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	$1{,}3$	$\sqrt{5}$	-5	$\frac{1}{4}$	$-1\frac{1}{5}$
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-8	$1\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$0{,}2$	-4	$\frac{5}{6}$
$-\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	8	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-0{,}2$	4	$-\frac{5}{6}$

1.B.4. C **1.B.5.** D **1.B.6.** C **1.B.7.** B **1.B.8.** D

P.1.C.1 PRZYKŁAD 2. 2 – NIE, 3 – TAK, 5 – TAK, 9 – NIE

PRZYKŁAD 3. 2 – TAK, 3 – TAK, 5 – TAK, 9 – TAK

PRZYKŁAD 4. 2 – TAK, 3 – TAK, 5 – NIE, 9 – NIE

PRZYKŁAD 5. 2 – NIE, 3 – TAK, 5 – TAK, 9 – NIE

PRZYKŁAD 6. 2 – TAK, 3 – NIE, 5 – NIE, 9 – NIE

PRZYKŁAD 7. 2 – NIE, 3 – TAK, 5 – NIE, 9 – NIE

PRZYKŁAD 8. 2 – TAK, 3 – TAK, 5 – NIE, 9 – NIE

PRZYKŁAD 9. 2 – NIE, 3 – TAK, 5 – TAK, 9 – TAK

1.C.1.

Liczba	Podzielność przez:						
	2	3	4	5	6	9	10
24	✓	✓	✓		✓		
225		✓		✓		✓	
30	✓	✓		✓	✓		✓
48	✓	✓	✓		✓		
174	✓	✓			✓		
1200	✓	✓	✓	✓	✓		✓
190	✓			✓			✓
216	✓	✓	✓		✓	✓	

P.1.C.3 PRZYKŁAD 2. $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ PRZYKŁAD 4. $196 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7^2$

PRZYKŁAD 3. $136 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^3 \cdot 17$

P.1.C.4 PRZYKŁAD 2. $NWD(132, 242) = 2 \cdot 11 = 22$ PRZYKŁAD 3. $NWD(108, 162) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$

1.C.2. **a.** $NWD(180; 225) = 45$ **b.** $NWD(198; 242) = 22$ **c.** $NWD(170; 408) = 34$

P.1.C.5 PRZYKŁAD 2. $NWW(132, 242) = 2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 1452$

PRZYKŁAD 3. $NWW(108, 162) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 324$

1.C.3. **a.** $NWW(36; 48) = 144$ **b.** $NWW(56; 168) = 168$ **c.** $NWW(102; 136) = 408$

1.C.4. **a.** $NWW(52; 78) = 156$ $NWD(52; 78) = 26$ **c.** $NWW(36; 96) = 288$ $NWD(36; 96) = 12$

b. $NWW(56; 140) = 280$ $NWD(56; 140) = 28$ **d.** $NWW(65; 143) = 715$ $NWD(65; 143) = 13$

1.C.5. C **1.C.6.** D **1.C.7.** B **1.C.8.** A **1.C.9.** C

P.1.1.1 PRZYKŁAD 2. $\frac{3}{4}$ PRZYKŁAD 4. $\frac{13}{19}$ PRZYKŁAD 6. $\frac{8}{11}$ PRZYKŁAD 8. $\frac{1}{6}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{5}{7}$ PRZYKŁAD 5. $\frac{8}{9}$ PRZYKŁAD 7. $\frac{1}{3}$ PRZYKŁAD 9. $\frac{2}{5}$

P.1.1.2 PRZYKŁAD 2. $\frac{42}{51}$ PRZYKŁAD 4. $\frac{60}{115}$ PRZYKŁAD 6. $\frac{125}{135}$ PRZYKŁAD 8. $\frac{30}{135}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{24}{66}$ PRZYKŁAD 5. $\frac{34}{98}$ PRZYKŁAD 7. $\frac{84}{48}$ PRZYKŁAD 9. $\frac{77}{121}$

P.1.1.3 PRZYKŁAD 2. $\frac{76}{7}$ PRZYKŁAD 4. $\frac{56}{3}$ PRZYKŁAD 6. $\frac{59}{5}$ PRZYKŁAD 8. $\frac{302}{3}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{221}{11}$ PRZYKŁAD 5. $\frac{274}{9}$ PRZYKŁAD 7. $\frac{78}{11}$ PRZYKŁAD 9. $\frac{491}{40}$

P.1.1.4 PRZYKŁAD 2. $8\frac{4}{7}$ PRZYKŁAD 4. $6\frac{7}{12}$ PRZYKŁAD 6. $10\frac{3}{11}$ PRZYKŁAD 8. $6\frac{4}{7}$

PRZYKŁAD 3. $8\frac{16}{23}$ PRZYKŁAD 5. $16\frac{7}{9}$ PRZYKŁAD 7. $12\frac{2}{5}$ PRZYKŁAD 9. $2\frac{39}{40}$

P.1.1.5 PRZYKŁAD 2. $\frac{8}{25}$ PRZYKŁAD 4. $\frac{89}{250}$ PRZYKŁAD 6. $\frac{41}{5}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{1}{80}$ PRZYKŁAD 5. $\frac{7}{200}$ PRZYKŁAD 7. $\frac{1}{200}$

P.1.1.6 PRZYKŁAD 3. $1,(36)$ PRZYKŁAD 4. $0,(4)$

1.1.1. **a.** $0,(7)=\frac{7}{9}$ **c.** $2,(5)=\frac{23}{9}$ **e.** $0,(209)=\frac{209}{999}$

b. $0,(49)=\frac{49}{99}$ **d.** $0,3(4)=\frac{31}{90}$ **f.** $0,2(11)=\frac{19}{90}$

1.1.2.	C	**1.1.3.**	B	**1.1.4.**	C	**1.1.5.**	D	**1.1.6.**	B
1.1.7.	D	**1.1.8.**	C	**1.1.9.**	D	**1.1.10**	B	**1.1.11.**	C

P.1.2.1 PRZYKŁAD 2. 243

P.1.2.2 PRZYKŁAD 2. $\frac{31}{33}, \frac{13}{33}, \frac{2}{11}, 2\frac{4}{9}$ PRZYKŁAD 4. $1\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{25}, 1\frac{3}{4}$

PRZYKŁAD 3. $\frac{53}{60}, \frac{43}{60}, \frac{1}{15}, 9\frac{3}{5}$

P.1.2.3 PRZYKŁAD 2. $7\frac{1}{3}$ PRZYKŁAD 3. $-11\frac{1}{2}$

P.1.2.4 PRZYKŁAD 2. $6\frac{11}{12}$ PRZYKŁAD 4. $5\frac{5}{8}$ PRZYKŁAD 6. 8 PRZYKŁAD 8. $2\frac{1}{2}$

PRZYKŁAD 3. $-4\frac{1}{30}$ PRZYKŁAD 5. $6\frac{2}{5}$ PRZYKŁAD 7. 40

1.2.1. **a.** 4 **b.** $\frac{9}{32}$ **c.** $-118,4$ **d.** $\frac{3}{5}$ **e.** 4 **f.** 23

P.1.2.5 PRZYKŁAD 3. 3016 PRZYKŁAD 5. 4225 PRZYKŁAD 7. 7209

PRZYKŁAD 4. 5621 PRZYKŁAD 6. 2021 PRZYKŁAD 8. 1224

1.2.2.	B	**1.2.3.**	A	**1.2.4.**	B	**1.2.5.**	C	**1.2.6.**	B
1.2.7.	A	**1.2.8.**	D	**1.2.9.**	C	**1.2.10.**	B	**1.2.11.**	C

1.3.1. **a.** $\frac{9}{11}$ **d.** $\frac{35}{10}$ **g.** $\frac{4}{3}$ **j.** 20 **m.** 260 **p.** $-\frac{2}{3}$ **t.** $\frac{11}{3}$ **z.** $\frac{7}{4}$

b. $\frac{7}{8}$ **e.** $\frac{27}{100}$ **h.** $\frac{5}{4}$ **k.** $\frac{2}{10}$ **n.** -70 **r.** 10 000 **u.** $\frac{11}{5}$

c. $\frac{5}{2}$ **f.** $\frac{24}{10}$ **i.** $\frac{6}{10}$ **l.** $\frac{1}{3}$ **o.** $\frac{23}{24}$ **s.** $\frac{34}{29}$ **w.** 0,01

P.1.3.2 PRZYKŁAD 2. $7\sqrt{2}$ PRZYKŁAD 4. $2\sqrt{11}$ PRZYKŁAD 6. $9\sqrt{2}$ PRZYKŁAD 8. $5\sqrt{6}$

PRZYKŁAD 3. $8\sqrt{10}$ PRZYKŁAD 5. $6\sqrt{3}$ PRZYKŁAD 7. $4\sqrt{15}$ PRZYKŁAD 9. $5\sqrt{11}$

P.1.3.3 PRZYKŁAD 2. $7\sqrt[3]{2}$ PRZYKŁAD 4. $2\sqrt[3]{11}$ PRZYKŁAD 6. $9\sqrt[3]{10}$ PRZYKŁAD 8. $5\sqrt[3]{3}$

PRZYKŁAD 3. $8\sqrt[3]{10}$ PRZYKŁAD 5. $6\sqrt[3]{2}$ PRZYKŁAD 7. $4\sqrt[3]{3}$ PRZYKŁAD 9. $3\sqrt[3]{5}$

1.3.2. **a.** $3\sqrt{2}$ **b.** $5\sqrt{2}$ **c.** $3\sqrt{3}$ **d.** $11\sqrt{2}$ **e.** $2\sqrt[3]{5}$ **f.** $4\sqrt[3]{2}$ **g.** $2\sqrt[4]{3}$ **h.** $2\sqrt[5]{10}$

P.1.3.4 PRZYKŁAD 2. $\sqrt{98}$ PRZYKŁAD 4. $\sqrt{44}$ PRZYKŁAD 6. $\sqrt{162}$ PRZYKŁAD 8. $\sqrt{320}$

PRZYKŁAD 3. $\sqrt{90}$ PRZYKŁAD 5. $\sqrt{108}$ PRZYKŁAD 7. $\sqrt{160}$ PRZYKŁAD 9. $\sqrt{500}$

P.1.3.5 PRZYKŁAD 2. $\sqrt[3]{1029}$ PRZYKŁAD 4. $\sqrt[3]{297}$ PRZYKŁAD 6. $\sqrt[3]{1024}$ PRZYKŁAD 8. $\sqrt[3]{3645}$
PRZYKŁAD 3. $\sqrt[3]{1512}$ PRZYKŁAD 5. $\sqrt[3]{375}$ PRZYKŁAD 7. $\sqrt[3]{2160}$ PRZYKŁAD 9. $\sqrt[3]{1875}$

1.3.3. **a.** $\sqrt{32}$ **b.** $\sqrt{75}$ **c.** $\sqrt{63}$ **d.** $\sqrt{1100}$ **e.** $\sqrt[3]{48}$ **f.** $\sqrt[3]{128}$ **g.** $\sqrt[4]{1250}$ **h.** $\sqrt[5]{700\,000}$

1.3.4. **a.** $6\sqrt{5}$ **b.** $2\sqrt{3}$ **c.** $17\sqrt{7}$ **d.** $4\sqrt{2}$ **e.** $37\sqrt{2}$ **f.** $-\sqrt{5}$ **g.** $\sqrt[3]{3}$ **h.** $17\sqrt{2}$

P.1.3.6 TWIERDZENIE 1 PRZYKŁAD 2. 10 PRZYKŁAD 3. 6
TWIERDZENIE 2 PRZYKŁAD 2. 2 PRZYKŁAD 3. 2
TWIERDZENIE 3 PRZYKŁAD 2. 11 PRZYKŁAD 3. 99
TWIERDZENIE 4 PRZYKŁAD 2. 2 PRZYKŁAD 3. $\sqrt[12]{100}$

1.3.5. **a.** 32 **d.** 1 **g.** 30 **j.** 34 **m.** 2 **p.** $\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$ **t.** 1
b. -5 **e.** 6 **h.** 6 **k.** 15 **n.** 2 **r.** 7
c. 15 **f.** 25 **i.** 42 **l.** 8 **o.** $-\frac{2}{5}$ **s.** 14

1.3.6. **a.** $-4\sqrt{2}+5$ **c.** $-9\sqrt{3}-9$ **e.** $\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{3}$
b. $-2\sqrt{5}+96$ **d.** $-56\sqrt{10}-100$ **f.** $\frac{3}{5}\sqrt{5}+\frac{7}{5}$

1.3.7. **a.** $4\sqrt{2}$ **b.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **c.** $\frac{\sqrt{35}}{7}$ **d.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$ **e.** $\sqrt{3}$ **f.** $\frac{\sqrt{21}}{6}$

1.3.8. B **1.3.9.** D **1.3.10.** C **1.3.11.** A **1.3.12.** C
1.3.13. C **1.3.14.** B **1.3.15.** D **1.3.16** A **1.3.17.** C

P.1.4.1 PRZYKŁAD 2. $\frac{1}{9}$ PRZYKŁAD 4. 16 PRZYKŁAD 6. $-\frac{1}{27}$ PRZYKŁAD 8. $1\frac{9}{16}$
PRZYKŁAD 3. 1000 PRZYKŁAD 5. $\frac{4}{121}$ PRZYKŁAD 7. 64 PRZYKŁAD 9. $\frac{10}{11}$

P.1.4.2 TWIERDZENIE 1 PRZYKŁAD 2. 100 000 PRZYKŁAD 3. 4096
TWIERDZENIE 2 PRZYKŁAD 2. 64 PRZYKŁAD 3. 625
TWIERDZENIE 3 PRZYKŁAD 2. 3^{16} PRZYKŁAD 3. 15 625

1.4.1. **a.** 2^{-16} **b.** 3^7 **c.** 10^{30} **d.** 5^{-13} **e.** 2^{-30} **f.** 2

P.1.4.3 TWIERDZENIE 1 PRZYKŁAD 2. 625 PRZYKŁAD 3. $\frac{64}{27}$
TWIERDZENIE 2 PRZYKŁAD 2. 25 PRZYKŁAD 3. 0,49

1.4.2. **a.** 3^8 **b.** $\left(-\frac{2}{5}\right)^{12}$ **c.** 6^{15} **d.** $\left(\frac{32}{9}\right)^{16}$

P.1.4.4 PRZYKŁAD 3. 0,00001 PRZYKŁAD 5. 81 PRZYKŁAD 7. 0,125 PRZYKŁAD 9. 8
PRZYKŁAD 4. 4 PRZYKŁAD 6. 0,36 PRZYKŁAD 8. $\frac{9}{16}$

1.4.3. **a.** 4 **d.** $\frac{1}{128}$ **g.** $\frac{1}{343}$ **j.** 3125
b. $\frac{1}{4096}$ **e.** $\frac{1}{9}$ **h.** 729 **k.** 64
c. $\frac{1}{4}$ **f.** $\frac{1}{16}$ **i.** $6\sqrt{6}$ **l.** $\frac{1}{10}$

1.4.4. A **1.4.5.** C **1.4.6.** B **1.4.7.** D **1.4.8.** A
1.4.9. C **1.4.10.** B **1.4.11.** B **1.4.12.** C **1.4.13.** D

P.1.5.1 PRZYKŁAD 2. $7 \cdot 10^4$ PRZYKŁAD 4. $4 \cdot 10^{-3}$ PRZYKŁAD 6. $3{,}4 \cdot 10^{-3}$

PRZYKŁAD 3. $2{,}3 \cdot 10^{-4}$ PRZYKŁAD 5. $3{,}45 \cdot 10^5$

1.5.1. **a.** $8{,}25 \cdot 10^5$ **c.** $1{,}2 \cdot 10^{10}$ **e.** $7 \cdot 10^{-9}$

b. $9 \cdot 10^{12}$ **d.** $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ **f.** $1{,}43 \cdot 10^{-10}$

1.5.2. **a.** 624 000 **c.** 99 900 **e.** 0,000003

b. 1 300 000 **d.** 0,00802 **f.** 0,000072

1.5.3. **a.** $3 \cdot 10^{10}$ **c.** $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ **e.** $2 \cdot 10^{14}$

b. $2 \cdot 10^6$ **d.** $1{,}12 \cdot 10^5$ **f.** $3 \cdot 10^{-10}$

P.1.5.2 PRZYKŁAD 2. $3 \cdot 10^5$ PRZYKŁAD 4. $4{,}8 \cdot 10^{46}$

PRZYKŁAD 3. $5 \cdot 10^2$ PRZYKŁAD 5. $1{,}344 \cdot 10^6$

1.5.4.

Wartość liczbowa	Wartość po zmianie jednostek	Wartość w notacji wykładniczej
1 m	1 000 mm	10^3 mm
1 km	100 000 cm	10^5 cm
100 ha	1 000 000 m^2	10^6 m^2
1 dm	0,0001 km	10^{-4} km
15 mm	0,015 m	$1{,}5 \cdot 10^{-2}$ m
1 km^2	1 000 000 m^2	10^6 m^2
1200 m	1 200 000 mm	$1{,}2 \cdot 10^6$ mm
100 t	10 000 000 dag	10^7 dag
700 t	700 000 000 g	$7 \cdot 10^8$ g
2,5 mm	0,0000025 km	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$ km

1.5.5. $8{,}136288 \cdot 10^{13}$ km

1.5.6. $3{,}126 \cdot 10^{11}$ m^2

1.5.7. Masa protonu jest większa o około 1833 razy.

1.5.8. **a.** 4,05 **b.** 16,3 **c.** 0,3

1.5.9. $1{,}3 \cdot 10^5$

1.5.10. ok. 317,9

1.5.11.

objętość Słońca	1 412 000 000 000 000 000 km^3	$1{,}412 \cdot 10^{18}$ km^3
masa Marsa	641 850 000 000 000 000 000 000 kg	$6{,}4185 \cdot 10^{23}$ kg
powierzchnia Azji	44 600 000 km^2	$4{,}46 \cdot 10^7$ km^2
długość Wielkiego Muru Chińskiego	8 851 000 m	$8{,}851 \cdot 10^6$ m
masa protonu	0,00000000000000000000000000167262 kg	$1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg
prędkość światła	1 079 250 000 000 $\frac{km}{h}$	$1{,}07925 \cdot 10^{12}$ $\frac{km}{h}$
wielkość wirusa grypy	0,0000001 m	10^{-7} m

1.5.12.

Planeta	Odległość planety od Słońca	Odległość w notacji wykładniczej
Merkury	58 000 000 km	$5{,}8 \cdot 10^7$ km
Wenus	108 000 000 km	$1{,}08 \cdot 10^8$ km
Ziemia	150 000 000 km	$1{,}5 \cdot 10^8$ km
Mars	228 000 000 km	$2{,}28 \cdot 10^8$ km
Jowisz	778 000 000 km	$7{,}78 \cdot 10^8$ km
Saturn	1 427 000 000 km	$1{,}427 \cdot 10^9$ km
Uran	2 871 000 000 km	$2{,}871 \cdot 10^9$ km
Neptun	4 498 000 000 km	$4{,}498 \cdot 10^9$ km

1.5.13. D **1.5.14.** B **1.5.15.** B **1.5.16.** B **1.5.17.** C
1.5.18. D **1.5.19.** D **1.5.20.** D **1.5.21.** C **1.5.22.** C

P.1.6.1 PRZYKŁAD 3. 3 PRZYKŁAD 5. 8 PRZYKŁAD 7. -4 PRZYKŁAD 9. -4
PRZYKŁAD 4. -2 PRZYKŁAD 6. -3 PRZYKŁAD 8. $\frac{1}{2}$

1.6.1. **a.** 3 **c.** -2 **e.** -2 **g.** 1 **i.** 4 **k.** 2
b. -2 **d.** 0 **f.** $\frac{1}{2}$ **h.** 3 **j.** 3 **l.** 8

P.1.6.2
TWIERDZENIE 1 PRZYKŁAD 2. 0 PRZYKŁAD 3. 0
TWIERDZENIE 2 PRZYKŁAD 2. 1 PRZYKŁAD 3. 1
TWIERDZENIE 3 PRZYKŁAD 2. 3 PRZYKŁAD 3. 4
TWIERDZENIE 4 PRZYKŁAD 2. 2 PRZYKŁAD 3. 2
TWIERDZENIE 5 PRZYKŁAD 2. 3 PRZYKŁAD 3. 5
TWIERDZENIE 6 PRZYKŁAD 2. $\frac{2}{3}$ PRZYKŁAD 3. $\frac{5}{6}$
TWIERDZENIE 7 PRZYKŁAD 2. 1000 PRZYKŁAD 3. 25
TWIERDZENIE 8 PRZYKŁAD 2. 125 PRZYKŁAD 3. 2

1.6.2. **a.** 3 **c.** 2 **e.** 1 **g.** 5 **i.** 3 **k.** 2 **m.** -3
b. 1 **d.** -1 **f.** 2 **h.** 1 **j.** 3 **l.** 0 **n.** 0

1.6.3. **a.** 81 **b.** 9 **c.** 4 **d.** 36 **e.** 4 **f.** $\frac{1}{25}$

1.6.4. **a.** $\frac{3}{2}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **e.** $-\frac{1}{2}$ **g.** $\frac{4}{7}$ **i.** $\frac{3}{8}$
b. $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{4}{7}$ **f.** -4 **h.** $\frac{2}{3}$

1.6.5. **a.** $a = 5$ **d.** $a=1331$ **g.** $a = 65\,536$
b. $a = \frac{1}{64}$ **e.** $a = \sqrt{2}$ **h.** $a = \frac{1}{5}$
c. $a = 5$ **f.** $a = 216$ **i.** $a = 25$

1.6.6. C **1.6.7.** D **1.6.8.** D **1.6.9.** D **1.6.10.** B
1.6.11. A **1.6.12.** B **1.6.13.** B **1.6.14.** B **1.6.15.** C

1.D.1. **a.** 11 **c.** $5\sqrt{2}-3$ **e.** 7
b. 15 **d.** $\sqrt{3}+1$ **f.** 9

1.D.2. **a.** $x_1=-2, x_2=2$ **c.** $x=0$ **e.** $x_1=\sqrt{2}-1, x_2=1-\sqrt{2}$
b. $x_1=-25, x_2=25$ **d.** nie istnieje **f.** nie istnieje

1.D.3. A **1.D.4.** B **1.D.5.** B **1.D.6.** A **1.D.7.** D

P.1.7.2 PRZYKŁAD 3. 7,0872 PRZYKŁAD 4. 6,018088 PRZYKŁAD 5. 6,01 PRZYKŁAD 6. 4,58035

P.1.7.3 PRZYKŁAD 2. 0,5 PRZYKŁAD 3. 0,1 PRZYKŁAD 4. 0,6

P.1.7.4 PRZYKŁAD 2. 0,028 2,8% PRZYKŁAD 4. 0,004 0,4%
PRZYKŁAD 3. 0,053 5,3%

1.7.1.

Liczba	Zaokrąglenie do:			
	jednego miejsca po przecinku	dwóch miejsc po przecinku	trzech miejsc po przecinku	całości
6,90513	6,9	6,91	6,905	7
0,34981	0,3	0,35	0,350	0
5,8267	5,8	5,83	5,827	6
16,0519	16,1	16,05	16,052	16
200,00205	200,0	200,00	200,002	200
13,(45)	13,5	13,45	13,455	13

1.7.2. **a.** 0,05 **b.** 0,03 **c.** 0,031 **d.** 14

1.7.3. **a.** 1,01% **b.** 0,55% **c.** 1,94% **d.** 71,00%

1.7.4. 6,25%

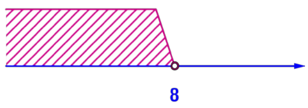
1.7.5. 10%

1.7.6.

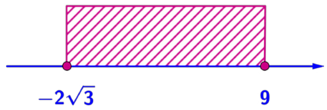
	Pomiar	Błąd bezwzględny	Błąd względny procentowy
Tomek	3,16	0,0185	0,59%
Janek	3,128	0,0135	0,43%
Kuba	3,157	0,0155	0,49%

1.7.7. A **1.7.8.** B **1.7.9.** B **1.7.10.** C **1.7.11.** B
1.7.12. C **1.7.13.** A **1.7.14.** D **1.7.15.** A **1.7.16.** A

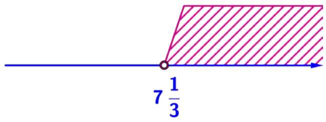
1.8.1. **a.** $(-\infty; 8)$



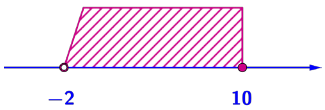
b. $\langle -2\sqrt{3}; 9\rangle$



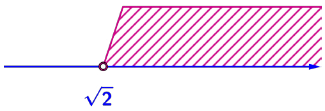
c. $\left(7\frac{1}{3}; +\infty\right)$



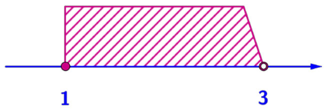
d. $(-2; 10\rangle$



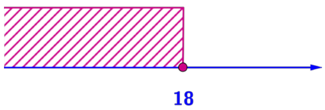
e. $(\sqrt{2}; +\infty)$



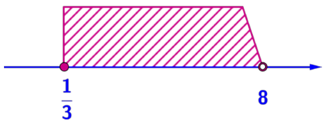
f. $\langle 1; 3)$



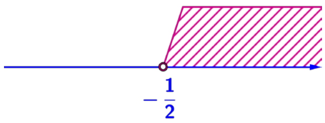
1.8.2. **a.** $x \in (-\infty; 18\rangle$



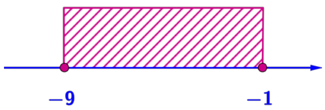
b. $x \in \left\langle \frac{1}{3}; 8\right)$



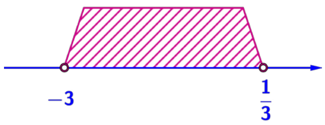
c. $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$



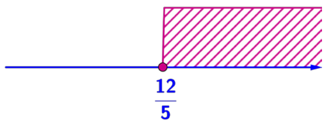
d. $x \in \langle -9; -1\rangle$



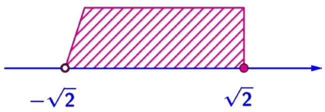
e. $x \in \left(-3; \frac{1}{3}\right)$



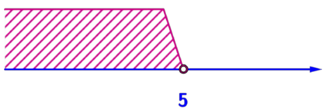
f. $x \in \left\langle \frac{12}{5}; +\infty\right)$



g. $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}\rangle$



h. $x \in (-\infty; 5)$



P.1.8.3 PRZYKŁAD 2. $A \cup B = \langle -2; 6\rangle$, $A \cap B = \left(3; 3\frac{1}{2}\right)$, $A \setminus B = \langle -2; 3\rangle$, $B \setminus A = \left\langle 3\frac{1}{2}; 6\right\rangle$

PRZYKŁAD 3. $A \cup B = (-1; 5\rangle$, $A \cap B = (0; 3\rangle$, $A \setminus B = (-1; 0\rangle \cup (3; 5\rangle$, $B \setminus A = \varnothing$

PRZYKŁAD 4. $A \cup B = \langle -3; \infty)$, $A \cap B = (-2; 1\rangle$, $A \setminus B = (1; \infty)$, $B \setminus A = \langle -3; -2\rangle$

PRZYKŁAD 5. $A \cup B = (-\infty; 6)$, $A \cap B = \langle 1; 5)$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = (-\infty; 1) \cup \langle 5; 6)$

1.8.3. **a.** $A \cup B = \langle -2; 5)$, $A \cap B = (0; 3\rangle$, $A \setminus B = \langle -2; 0\rangle \cup (3; 5)$, $B \setminus A = \varnothing$

b. $A \cup B = (-4; 6)$, $A \cap B = \langle -2{,}5; 3\rangle$, $A \setminus B = (-4; 2{,}5) \cup (3; 6)$, $B \setminus A = \varnothing$

c. $A \cup B = (-\infty; 3\rangle$, $A \cap B = \langle -1; 3)$, $A \setminus B = (-\infty; -1) \cup \{3\}$, $B \setminus A = \varnothing$

d. $A \cup B = (-\infty; +\infty)$, $A \cap B = \langle -2; 4)$, $A \setminus B = (-\infty; -2)$, $B \setminus A = \langle 4; +\infty)$

e. $A \cup B = (-3; 6)$, $A \cap B = \{4\}$, $A \setminus B = (-3; 4)$, $B \setminus A = (4; 6)$

f. $A \cup B = (-\infty; 5\rangle$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = (-\infty; -2)$, $B \setminus A = \langle -2; 5\rangle$

1.8.4. **a.** $x \in (-\infty; -3\rangle \cup (4; +\infty)$ **c.** $x \in (-\infty; -2\rangle$

b. $x \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup \langle 8; +\infty)$ **d.** $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

1.8.5. **a.** 4 **b.** 7 **c.** 7 **d.** 3

1.8.6. $A \cup B = (-\infty; 8\rangle$, $A \cap B = (1; 3\rangle \cup (5; 7\rangle$, $A \setminus B = (-\infty; 1\rangle \cup (7; 8\rangle$, $B \setminus A = (3; 5\rangle$

1.8.7.	C	**1.8.8.**	A	**1.8.9.**	B	**1.8.10.**	B	**1.8.11.**	B
1.8.12.	A	**1.8.13.**	D	**1.8.14.**	C	**1.8.15.**	D	**1.8.16.**	D

P.1.9.3	RODZAJ 1	PRZYKŁAD 2. 119	PRZYKŁAD 3. 36
	RODZAJ 2	PRZYKŁAD 2 400 osób	PRZYKŁAD 3. 6200 zł
	RODZAJ 3	PRZYKŁAD 2. 28%	PRZYKŁAD 3. 17,5%
	RODZAJ 4	PRZYKŁAD 2. 58%	PRZYKŁAD 3. 12%
	RODZAJ 5	PRZYKŁAD 2. 1200 zł	PRZYKŁAD 3. 984 zł
	RODZAJ 6	PRZYKŁAD 2. 161 051 zł	PRZYKŁAD 3. ok. 5412,16 zł
	RODZAJ 7	PRZYKŁAD 2. 37,5%	PRZYKŁAD 3. 25%

1.9.1. **a.** 7,2 **b.** 45 **c.** 44 **d.** 27

1.9.2. **a.** 880 **b.** 40 **c.** 1236 **d.** 178

1.9.3. 609,945 km^2

1.9.4. 20 250 000

1.9.5. 560 zł

1.9.6. 54%

1.9.7. 1500 zł

1.9.8. 1968 zł

1.9.9. 1 854,54 zł

1.9.10. po 8 latach

1.9.11. o 20%

1.9.12. o ok. 41,39%

1.9.13. 32,36%

1.9.14. **a.** o 40% **b.** o 10 punktów procentowych **c.** o ok. 28,57%

1.9.15. 854,864 km

1.9.16. 5%

1.9.17.	B	**1.9.18.**	A	**1.9.19.**	B	**1.9.20.**	B	**1.9.21.**	D
1.9.22.	B	**1.9.23.**	D	**1.9.24.**	D	**1.9.25.**	B	**1.9.26.**	B

ISBN: 978-83-63975-08-1

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY