2

Dariusz Kulma Witold Pająk

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Wyrażenia algebraiczne

ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autorzy: **Dariusz Kulma, Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.fotolia.com:
© agsandrew - id. 42076089; © evgenyatamanenko - id. 55578965; © Jose Ignacio Soto - id. 36778284; © Pavel Ignatov - id. 48172735;© larisabozhikova - id. 49989103; © Maksim Kabakou - id. 41908523; © singkham - id. 61443980; © Friedberg - id. 40502604; © mills21 - id. 11761333; © Maksim Kabakou -id. 60613008; © PixBox - id. 31636550; © WavebreakmediaMicro - id. 68673495; © WavebreakmediaMicro - id. 68673960; © Ivan Kireiev - id. 49984561; © piai - id. 59206454; © Andrey Kudrin - id. 20936587; © Marek -id. 19616488; © valdis torms - id. 66702797; © ArchMen - id. 19400633; © ag visuell - id. 53584856; © arsdigital - id. 56402903; © cutimage - id. 61114710

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2014. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-08-1

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

2

Wyrażenia algebraiczne

Nikt z nas nie wyobraża sobie matematyki bez liczb. To, co od razu przychodzi nam do głowy, gdy słyszymy słowo „matematyka”, to cyfry, liczby i działania na nich. Jednak często nie doceniamy roli liter w matematyce. Są one dla królowej nauk równie ważne jak liczby. To dzięki nim pole prostokąta możemy uogólnić do iloczynu liczb a i b, gdzie a oznacza dowolną długość, a b dowolną szerokość. Połączenie liczb, znaków działań i liter w zapisie matematycznym nazywamy wyrażeniami algebraicznymi. Możemy nimi opisywać świat — jego strukturę oraz relacje zachodzące między jego elementami. Najsłynniejszą literą w matematyce jest litera x, którą zazwyczaj oznaczamy niewiadome. Matematycy powszechnie używają tego symbolu od XVII wieku w zapisach w algebrze, geometrii czy analizie matematycznej. Dlaczego x, a nie np. litera a lub b? Przyczyna mogła być prozaiczna. Zecerzy w drukarniach nie chcieli do oznaczeń matematycznych stosować liter, które w tekstach pojawiały się najczęściej. Na przykład w języku polskim najczęściej występującą literą jest a, natomiast litera x występuje rzadziej od niej aż 445 razy. Zecerzy obawiali się, że jeśli do składania zapisów matematycznych wykorzystają zbyt wiele czcionek na przykład z literą a, to czcionek tych zabraknie podczas składania zwykłych tekstów. Litera x była rzadko używana w zwykłych tekstach, więc do oznaczeń matematycznych najchętniej stosowali właśnie ją.

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE.	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE.	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

2.A ▶ Podstawowe wiadomości o wyrażeniach algebraicznych

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Wyrażenie, które składa się z liter oraz liczb połączonych działaniami arytmetycznymi i/lub nawiasami, nazywamy wyrażeniem algebraicznym.	$2xy, a^2+b^2, \frac{x-y}{x+y}, 5(8c+\sqrt{2}d)$
Pojedyncze zmienne, liczby lub iloczyny zmiennych i liczb nazywamy jednomianami.	$4x, 6, 2x^2, 5xy^2$
Liczbę występującą w jednomianie nazywamy współczynnikiem jednomianu.	$4x, 5xy^2$
Skończoną sumę jednomianów nazywamy sumą algebraiczną lub wielomianem.	$a+b, 5x^2+6x+1, 4xy+x^2-y-1$
Poszczególne jednomiany w sumie algebraicznej nazywamy wyrazami.	
Jeśli jednomiany różnią się od siebie jedynie współczynnikiem liczbowym, to nazywamy je wyrazami podobnymi.	$4xy^2, xy^2, 12xy^2, -xy^2$
Wyrazy podobne można dodawać lub odejmować. Czynność taką nazywamy redukcją wyrazów podobnych.	$4x^2-5x^2+3x^2=2x^2$

▶ Redukcja wyrazów podobnych

PRZYKŁAD 1 — P.2.A.1

Zredukuj wyrazy podobne w wyrażeniu: $3x^2-5y+4x^2-8y+x^2+6y$.

Dodając lub odejmując wyrazy podobne, należy dodać lub odjąć współczynniki liczbowe, a litery pozostawić bez zmian.

$3x^2-5y+4x^2-8y+x^2+6y=8x^2-7y$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zredukuj wyrazy podobne:

PRZYKŁAD 2. $2a^3-5b^4c+4a^3-8b^4c-a^3+7b^4c$

PRZYKŁAD 3. $-yz^3-3abc+3yz^3+10abc-9yz^3-5abc$

► Zapis słowny wyrażeń algebraicznych

P.2.A.2

PRZYKŁADY

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

PRZYKŁAD 1	sumę liczby a i kwadratu liczby b	$a+b^2$
PRZYKŁAD 2	kwadrat różnicy liczb a i b	$(a-b)^2$
PRZYKŁAD 3	podwojoną sumę liczb x i y	$2(x+y)$
PRZYKŁAD 4	iloczyn liczby a i sześcianu liczby b	$a \cdot b^3$
PRZYKŁAD 5	iloraz sumy liczb c i d przez różnicę liczb a i b	$\frac{c+d}{a-b}$
PRZYKŁAD 6	iloczyn ilorazu liczby a przez b oraz połowy liczby c	$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2}c$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.A.1. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych:

- **a.** sumę różnicy liczb x i y oraz iloczynu liczb p i q,
- **b.** pierwiastek kwadratowy ilorazu liczb a i b,
- **c.** kwadrat sumy sześcianu liczby x i potrojonej liczby y,
- **d.** sześcian iloczynu kwadratu liczby c i trzeciej części liczby d.

► Mnożenie sum algebraicznych

PRZYKŁAD 1

P.2.A.3

Wykonaj mnożenie: $(a+2)(b-3)$.

Aby wykonać mnożenie należy pomnożyć każdy wyraz pierwszego czynnika przez każdy wyraz drugiego czynnika.

$$(a+2)(b-3) = ab - 3a + 2b - 6$$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wykonaj mnożenie: $(x+y)(x-4)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.A.2. Wykonaj mnożenie:

a. $(x+5)(y-3)$
b. $3(a+2)(b-4)$
c. $(a+b+c)(d-e)$
d. $(1+x+y)(-2+z)$
e. $(2a-3b)(4c-5d+e)$
f. $2(x^2-y)(3x+5y)$

2.A.3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne:

a. $2(x+y)-3(2x-5y)+8(x-2y)$
b. $3(x^2+x-1)+4(x^2+2x-3)-(3x^2-4x+5)$
c. $(a+2)(a-1)+(a+3)(a-4)$
d. $3(x^2+2)(x-3)+2(x+1)(x^2-5)$
e. $(2y^3+y^2)(5y-3y^2+6)$
f. $4a(a+b-2c)-5a(2a-3b+c)$
g. $2(x+y)(x-2y)-3(x-4y)(2x-y)$
h. $(a+a^2+a^3+a^4)(a-1)$

► Obliczanie wartości liczbowej wyrażeń algebraicznych

PRZYKŁAD 1

P.2.A.4

Oblicz wartość liczbową wyrażenia $2x^2y^3$ dla $x=-2$, $y=3$.

$2x^2y^3 = 2\cdot(-2)^2\cdot 3^3 = 2\cdot 4\cdot 27 = 216$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\sqrt{\dfrac{5a-b^2}{3b+a^2-1}}$ dla $a=4$, $b=-2$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\dfrac{c+2d^3}{4e^2}$ dla $c=-2$, $d=-1$, $e=3$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.A.4. Oblicz wartość liczbową wyrażenia dla $x=4$ i $y=-3$.

a. $\sqrt[3]{\dfrac{2x^3-3}{3y^2}}$
b. $\left(\dfrac{5x-2y}{4x+y}\right)^{-1}$
c. $2xy+3xy^2-4x^2y$
d. $-\dfrac{x^2y^3}{\sqrt{xy^2}}$

► Wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias

PRZYKŁAD

P.2.A.5

W wyrażeniu $20x^2y^3+15x^3y^4-30x^4y^5$ wyłącz wspólny czynnik poza nawias.

największy dzielnik liczb 20, 15, 30 to 5

największy dzielnik wyrażeń x^2, x^3, x^4 to x^2

największy dzielnik wyrażeń y^3, y^4, y^5 to y^3

$$20x^2y^3+15x^3y^4-30x^4y^5=5x^2y^3\cdot(4+3xy-6x^2y^2)$$

$\boxed{20x^2y^3:5x^2y^3}$

$\boxed{15x^3y^4:5x^2y^3}$

$\boxed{-30x^4y^5:5x^2y^3}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.A.5. Wyłącz wspólny czynnik poza nawias.

a. $2a^2bc^3-4ab^2c^2+6a^3b^3c$

b. $16x^4+24x^3-32x^2+40x$

c. $15x^2y^3z^5-45x^3y^5z^4+75x^4y^4z^3$

d. $121cde+88abcd-110defg$

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.2.A

2.A.6. Dane są wyrażenia $a=2x+5$ i $b=3x^2-x$. Iloczyn liczb a i b jest równy:

A. $3x^2+x+5$ **B.** $6x^2+3x-5$ **C.** $6x^3+13x^2-5x$ **D.** $\frac{2x+5}{3x^2-x}$

2.A.7. Wyrażenie x^2y-y^2x dla $x=-2$ i $y=-3$ ma wartość równą:

A. -6 **B.** -3 **C.** 12 **D.** 6

2.A.8. Wyrażenie $8a^2b^4-12a^3b^2+16a^4b^5$ jest równe:

A. $4ab(2ab^2-3ab^2+4a^3b^4)$

B. $a^2b^2(8-3a+4ab^3)$

C. $4a^2b^2(2-3a+4a^2b^3)$

D. $4a^2b^2(2b^2-3a+4a^2b^3)$

2.A.9. Kwadrat sumy ilorazu liczby a przez b oraz liczby c to:

A. $\left(\frac{a}{b}\right)^2+c^2$ **B.** $\left(\frac{a}{b}+c\right)^2$ **C.** $\frac{a^2}{b}+c$ **D.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2+c$

2.A.10. Dany jest wielomian $W(x)=x^2+2x$ oraz $G(x)=3x^3+5x^2$. Wyrażenie $2W(x)-G(x)$ ma postać:

A. $6x^3+10x^2-4x$ **B.** $-3x^3+7x^2+4x$ **C.** $-3x^3-3x^2+4x$ **D.** $3x^3+7x^2+4x$

2.1 ▶ Wzory skróconego mnożenia

▶ Wprowadzenie

P.2.1.1

Rozważmy następujące wyrażenie: $(a+b)^2$. Wykonajmy działania i przedstawmy to wyrażenie w innej postaci:

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$

Zatem otrzymujemy: $a^2+2ab+b^2$, czyli $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

PRZYKŁAD 1

$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

PRZYKŁAD 2

$(4x+5y)^2 = (4x)^2 + 2\cdot 4x\cdot 5y + (5y)^2 = 16x^2 + 40xy + 25y^2$

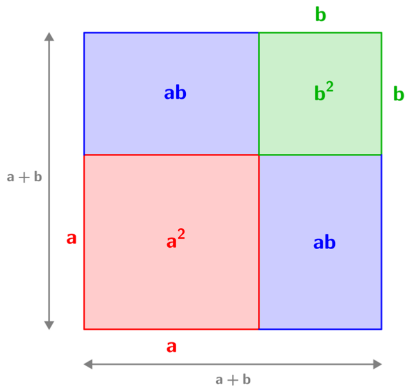
PRZYKŁAD 3

$(\frac{2}{5}x+4y)^2 = (\frac{2}{5}x)^2 + 2\cdot \frac{2}{5}x\cdot 4y + (4y)^2 = \frac{4}{25}x^2 + \frac{16}{5}xy + 16y^2$

WZÓR	TWIERDZENIE
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	Kwadrat sumy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń powiększonej o ich podwojony iloczyn.

DOWÓD GEOMETRYCZNY KWADRATU SUMY

P.2.1.2



Pole kwadratu możemy zapisać jako:
$P=(a+b)^2$ — pole kwadratu o boku długości $a+b$.

$P=a^2+b^2+ab+ab$ — suma pól dwóch kwadratów (jednego o boku długości a i drugiego o boku długości b) oraz dwóch prostokątów o bokach długości a i b.

Zatem $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.1.1. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci: Z.2.1.1

a. $(2a+3b)^2$ **d.** $(10x+5y)^2$ **g.** $(5a+6l)^2$

b. $(c+4d)^2$ **e.** $(20t+11u)^2$ **h.** $(15c+2u)^2$

c. $(7k+2l)^2$ **f.** $(4x+3b)^2$ **i.** $(3a+8y)^2$

Rozważmy teraz wyrażenie $(a-b)^2$. Wykonajmy działania i przedstawmy to wyrażenie w innej postaci:

P.2.1.3

$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b-b\cdot a+b\cdot b=a^2-2ab+b^2$

Zatem otrzymujemy: $a^2-2ab+b^2$, czyli $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

PRZYKŁAD 1

$(6x-y)^2=(6x)^2-2\cdot 6x\cdot y+y^2=36x^2-12xy+y^2$

PRZYKŁAD 2

$(2x-7y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 7y+(7y)^2=4x^2-28xy+49y^2$

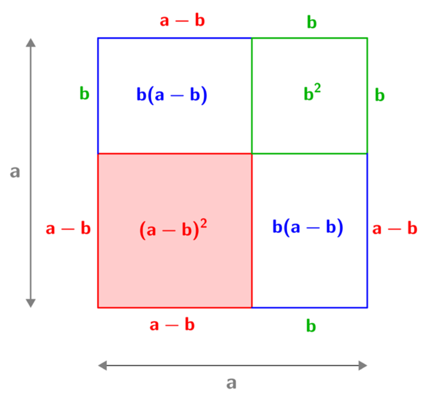
PRZYKŁAD 3

$(0,2p-10)^2=(0,2p)^2-2\cdot 0,2p\cdot 10+10^2=0,04p^2-4p+100$

WZÓR	TWIERDZENIE
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń pomniejszonej o ich podwojony iloczyn.

DOWÓD GEOMETRYCZNY KWADRATU RÓŻNICY

P.2.1.4



Zapisujemy zależność, żeby wyliczyć pole kwadratu o boku o długości $a-b$:

$(a-b)^2=a^2-b(a-b)-b(a-b)-b^2$

— od pola kwadratu o długości a odejmujemy dwa pola prostokątów o bokach długości b i $a-b$ oraz pole kwadratu o boku długości b.

Po przekształceniu otrzymujemy:

$(a-b)^2=a^2-2b(a-b)-b^2=a^2-2ab+2b^2-b^2=$

$=a^2-2ab+b^2$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.1.2. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci. **Z.2.1.2**

a. $(6c-b)^2$
b. $(2a-3d)^2$
c. $(8x-3l)^2$
d. $(11a-4y)^2$
e. $(5t-12u)^2$
f. $(4x-13b)^2$
g. $(2x-10y)^2$
h. $(13c-2b)^2$
i. $(3a-7y)^2$

Rozważmy teraz wyrażenie $(a-b)\cdot(a+b)$. Wykonajmy działania i przedstawmy to wyrażenie w innej postaci: **P.2.1.5**

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2+\cancel{ab}-\cancel{ab}-b^2=a^2-b^2$
Zatem otrzymujemy: a^2-b^2, czyli $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

PRZYKŁAD 1

$(x-8y)\cdot(x+8y)=(x)^2-(8y)^2=x^2-64y^2$

PRZYKŁAD 2

$(2x-6y)\cdot(2x+6y)=(2x)^2-(6y)^2=4x^2-36y^2$

PRZYKŁAD 3

$\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\right)=\left(\frac{2}{3}x\right)^2-\left(\frac{1}{4}y\right)^2=\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{16}y^2$

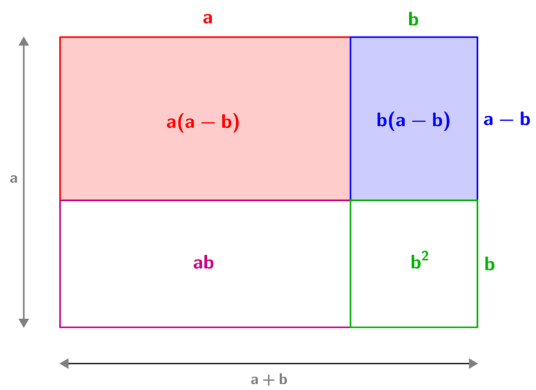
WZÓR

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

TWIERDZENIE

Iloczyn sumy przez różnicę dwóch wyrażeń jest równy różnicy kwadratów tych wyrażeń.

DOWÓD GEOMETRYCZNY RÓŻNICY KWADRATÓW **P.2.1.6**



Zapisujemy zależność, żeby wyznaczyć pole prostokąta o bokach $a+b$ i $a-b$:
$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$ — dodajemy do siebie pola dwóch prostokątów — jednego o bokach długości a i $a-b$ oraz drugiego o bokach długości b i $a-b$.

Po przekształceniu otrzymujemy:
$(a+b)(a-b)=a^2-\cancel{ab}+\cancel{ab}-b^2=a^2-b^2$.

Zatem $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

2.1.3. Doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci: **Z.2.1.3**

a. $(2a+5b)\cdot(2a-5b)$

b. $(c+6d)\cdot(c-6d)$

c. $(9x+2l)\cdot(9x-2l)$

d. $(10t+3y)\cdot(10t-3y)$

e. $(15x+8u)\cdot(15x-8u)$

f. $(4k+3b)\cdot(4k-3b)$

g. $(3a+10y)\cdot(3a-10y)$

h. $(14c+20b)\cdot(14c-20b)$

i. $(16a+17l)\cdot(16a-17l)$

► Wzory skróconego mnożenia — dodatkowe zastosowania **P.2.1.7**

Wzory skróconego mnożenia możemy wykorzystać również do bardziej skomplikowanych obliczeń rachunkowych. Gdy nie mamy kalkulatora, jest to metoda szybsza niż mnożenie pod kreskę.

PRZYKŁAD 1

Oblicz wartość 32^2 z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia.

$32^2=(30+2)^2=30^2+2\cdot30\cdot2+2^2=900+120+4=1024$

PRZYKŁAD 2

Oblicz wartość 47^2 z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia.

$47^2=(50-3)^2=50^2-2\cdot50\cdot3+3^2=2500-300+9=2209$

PRZYKŁAD 3

Oblicz wartość iloczynu $29\cdot31$ z wykorzystaniem wzoru skróconego mnożenia.

$29\cdot31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=900-1=899$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia: **P.2.1.7**

PRZYKŁAD 4. 71^2

PRZYKŁAD 5. 28^2

PRZYKŁAD 6. $38\cdot42$

PRZYKŁAD 7. 53^2

PRZYKŁAD 8. 69^2

PRZYKŁAD 9. $89\cdot91$

► Wzory skróconego mnożenia — upraszczanie wyrażeń algebraicznych

PRZYKŁAD 1 — P.2.1.8

Uprość wyrażenie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(x+3y)^2-2(4x-2y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2-2((4x)^2-2\cdot 4x\cdot 2y+(2y)^2)=$$
$$=x^2+6xy+9y^2-2(16x^2-16xy+4y^2)=x^2+6xy+9y^2-32x^2+32xy-8y^2=$$
$$=-31x^2+38xy+y^2$$

PRZYKŁAD 2 — P.2.1.8

Uprość wyrażenie, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

$$(2a+5)^2-(8a-\sqrt{2})(8a+\sqrt{2})=4a^2+2\cdot 2a\cdot 5+25-(64a^2-2)=$$
$$=4a^2+20a+25-64a^2+2=-60a^2+20a+27$$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.1.4. Przekształć wyrażenia, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a. $(5xy+1)^2$

b. $(a^2x+3)^2$

c. $\left(\frac{1}{3}a^2-3\right)^2$

d. $(\sqrt{5}x+\sqrt{2})^2$

e. $\left(\frac{\sqrt{5}}{7}-x\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{7}+x\right)$

f. $(k^3-2l)(k^3+2l)$

g. $(abc-ef)^2$

h. $\left(zy^5-\frac{1}{2}\right)\left(zy^5+\frac{1}{2}\right)$

i. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$

j. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}a^5)(\sqrt{2}+\sqrt{3}a^5)$

k. $(x^{10}+x^5)^2$

l. $(1-0{,}01p^3)^2$

2.1.5. Uprość wyrażenia, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

a. $(4x+2)^2+(3-2x)^2$

b. $(5x+1)^2+(7-3x)(7+3x)$

c. $2(5a-b)^2-3(a+2b)^2$

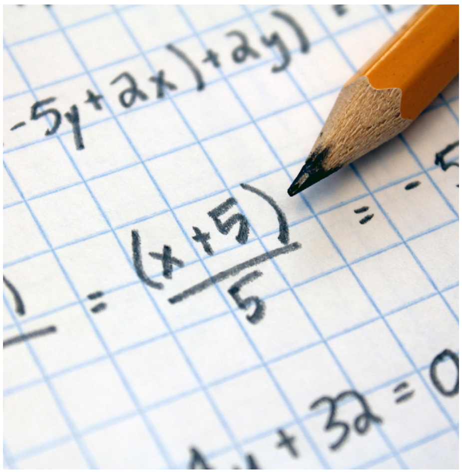
d. $3(a+3)(a-3)-(a-5)^2$

e. $(y^2-2)^2+2(1+y^2)^2$

f. $(10a-2)(10a+2)+3(a-5)^2$

g. $2(a+c)^2+3(c-2a)^2-4(2a-3c)(2a+3c)$

h. $(10-\sqrt{x})(10+\sqrt{x})(100+x)(10\,000+x^2)$



2.1.6. Zapisz w postaci iloczynu.

a. $4x^2 - y^2$

b. $9a^2 - 25b^2$

c. $81 - 16p^4$

d. $100c^2 - 121k^6$

e. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{49}y^2$

f. $0{,}04a^2 - 1{,}69y^4$

g. $\frac{144}{169}p^4 - \frac{1}{9}c^6$

h. $0{,}04a^{10} - 0{,}0025b^8$

i. $96 - 5x^2$

2.1.7. Zapisz w postaci kwadratu sumy lub kwadratu różnicy.

a. $4x^2 + 12xy + 9y^2$

b. $25a^2 - 40ab + 16b^2$

c. $81k^2 + 36kl + 4l^2$

d. $1 - 8x + 16x^2$

e. $100x^2 + 20x + 1$

f. $16a^4 - 40a^2 + 25$

g. $\frac{1}{4}a^2 + a + 1$

h. $0{,}36x^2 - 12x + 100$

2.1.8. Uprość, a następnie oblicz wartość wyrażenia dla $x = \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{3}$.

a. $2(x+y)(x-y) + (2x+y)^2$

b. $(4x-2)(4x+2) + 3(y-5)^2$

c. $(x+3y)(x-3y) - 2(x+y)^2 + 3(4x-y)^2$

d. $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$

► Usuwanie niewymierności z mianownika ułamka

P.2.1.9

PRZYKŁAD 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

W celu usunięcia niewymierności z mianownika, który jest sumą (różnicą) dwóch liczb, należy licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę (sumę) tych liczb, tak aby w mianowniku otrzymać wzór na różnicę kwadratów.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\sqrt{5}+2}{5-1} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4}$$

PRZYKŁAD 2

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+1}$.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+1} \cdot \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{5}}{7-1} = \frac{\sqrt{35}-\sqrt{5}}{6}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

PRZYKŁAD 3. $\frac{1}{3-\sqrt{3}}$

PRZYKŁAD 4. $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.1.9. Usuń niewymierność z mianownika ułamka.

a. $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

b. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

c. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$

d. $\frac{15}{3-\sqrt{2}}$

e. $\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{14}}$

f. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

g. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

h. $\frac{12}{\sqrt{13}+1}$

2.1.10. Oblicz:

a. $(\sqrt{5}+2)^2-3(1-\sqrt{5})^2$

b. $(3\sqrt{2}-1)^2+(4\sqrt{2}+2)(4\sqrt{2}-2)$

c. $(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})-2(\sqrt{7}-1)^2+4(2+\sqrt{7})$

d. $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)-3(4-3\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$

e. $\frac{8\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}+\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

f. $\frac{4}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

2.1.11. Wykaż, że liczba $\frac{4^8-1}{2^8+1}$ jest liczbą całkowitą. **Z.2.1.11**

2.1.12. Wykaż, że liczba $\frac{1974^2-899^2}{1075}$ jest liczbą całkowitą. **Z.2.1.12**

2.1.13. Wykaż, że liczba $a=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ jest liczbą całkowitą. **Z.2.1.13**

2.1.14. Wykaż, że liczba $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$ jest liczbą całkowitą. **Z.2.1.14**

Czy wiesz, że...

P.2.1.10

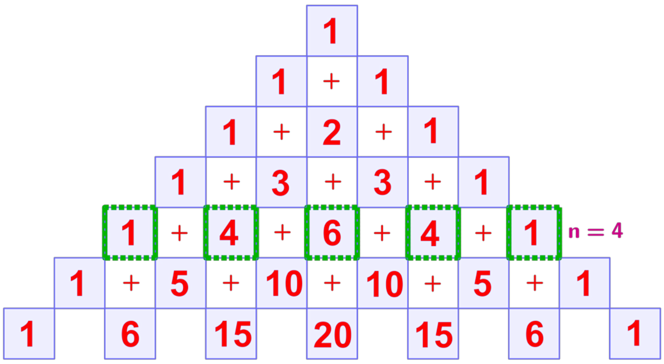
Trójkąt Pascala to trójkątna tablica, w której w pierwszym wierszu znajduje się liczba 1, a każdy następny wiersz powstaje w ten sposób, że pod każdymi dwoma sąsiednimi liczbami poprzedniego wiersza wpisuje się ich sumę. Na początku i na końcu każdego wiersza dopisuje się jedynki.

Pierwszy wiersz oznaczamy jako $n = 0$, a liczby widniejące w każdym kolejnym n-tym wierszu trójkąta są współczynnikami rozwinięcia n-tej potęgi dwumianu.

PRZYKŁAD

Rozwiń wyrażenie $(a+b)^4$.

1° Rysujemy trójkąt Pascala (pierwszy wiersz dla $n = 0$).



2° W wierszu $n = 4$ współczynniki 1, 4, 6, 4, 1 są kolejnymi współczynnikami rozwinięcia.

3° Suma wykładników potęg w każdym wyrażeniu musi być równa n czyli 4.

4° Kolejne wykładniki w potędze z podstawą a maleją o 1, począwszy od 4, a kolejne wykładniki w potędze z podstawą b rosną o 1, począwszy od 0.

5° Jeśli w nawiasie jest znak „+”, to wszystkie wyrażenia są dodatnie.

6° Rozwinięcie wyrażenia to: $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

P.2.1.11

Rozwiń wyrażenie $(x-y)^7$.

2.1.15. Wielomian $16x^2 - 121$ jest równy:

A. $(4x-11)^2$
B. $(4x-11)(4x+11)$
C. $(4x+11)^2$
D. $16(x-11)(x+11)$

2.1.16. Kwadrat liczby $5+2\sqrt{2}$ jest równy:

A. 33
B. $33+10\sqrt{2}$
C. $33+20\sqrt{2}$
D. 433

2.1.17. Wyrażenie $4x^2-12x+9$ jest równe:

A. $(2x-3)(2x+3)$
B. $(2x-3)^2$
C. $(2x+3)^2$
D. $4x(x+3)+9$

2.1.18. Liczba $\dfrac{16}{\sqrt{17}-1}$ jest równa:

A. $\dfrac{16}{\sqrt{17}+1}$
B. $\dfrac{4}{\sqrt{17}+1}$
C. $\sqrt{17}-1$
D. $\sqrt{17}+1$

2.1.19. Wartość wyrażenia $(x+2y)^2+(x-y)$ dla $x=2$ i $y=-1$ wynosi:

A. 0
B. 3
C. -2
D. 1

2.1.20. Wyrażenie $(2a+3b)^2$ jest równe:

A. $4a^2+9b^2$
B. $2a^2+6ab+9b^2$
C. $4a^2-12ab+9b^2$
D. $4a^2+12ab+9b^2$

2.1.21. Jeżeli dla pewnych liczb c i d zachodzą równości $c^2-d^2=120$ i $c+d=15$, to dla tych liczb c i d wartość wyrażenia $c-d$ jest równa:

A. 8
B. 15
C. 12
D. 20

2.1.22. Liczba $(3+\sqrt{2})^2$ jest równa:

A. 7
B. 11
C. $11-6\sqrt{2}$
D. $11+6\sqrt{2}$

2.1.23. Liczba $(1-\sqrt{3})^2+2(3+\sqrt{3})$ jest równa:

A. $8+4\sqrt{3}$
B. $10-2\sqrt{3}$
C. $7+2\sqrt{3}$
D. 10

2.1.24. Wyrażenie $\frac{c}{d}+\frac{d}{c}$ dla $c\in\mathbb{R}_+$ i $d\in\mathbb{R}_+$ może być równe:

A. 1
B. $1\frac{1}{2}$
C. 0
D. $2\frac{1}{2}$

2.B ► Twierdzenie i jego struktura. Przykłady dowodów

Poznawanie matematyki polega na przeprowadzaniu rozumowań, czyli na formułowaniu i dowodzeniu twierdzeń. Wówczas dopiero stają się one matematycznie użyteczne. Musisz wiedzieć, że dowód jest w matematyce konieczny — jest nieodzownym elementem uprawiania matematyki. Wcale nie musisz umieć dowodzić wszystkich twierdzeń, z którymi stykasz się w szkole. Ważne, abyś rozumiał, że dowody istnieją. Niektóre z nich możesz przeprowadzić samodzielnie, inne możesz obejrzeć, a jeszcze inne zrozumiesz dopiero na kolejnych etapach kształcenia.

W tym rozdziale poznasz kilka dowodów dotyczących własności liczb i wyrażeń algebraicznych.

► Twierdzenia

TWIERDZENIE	PRZYKŁAD
Twierdzenie w matematyce to pewien sąd o obiektach matematycznych. Podstawowa forma twierdzenia to: „Jeśli..., to...” . Wszystko, co znajduje się pomiędzy słowami „jeśli” i „to”, nosi nazwę założenia twierdzenia, natomiast wszystko, co znajduje się po słowie „to”, nosi nazwę tezy twierdzenia.	Rozważmy twierdzenie: „W każdym rombie przekątne przecinają się pod kątem prostym”. To twierdzenie nie jest podane w formie podstawowej, ale na taką formę można je przekształcić: „Jeśli czworokąt jest rombem, to jego przekątne przecinają się pod kątem prostym”. Założenie: „Czworokąt jest rombem”. Teza: „W czworokącie przekątne przecinają się pod kątem prostym”.
O prawdziwości twierdzenia decyduje dowód matematyczny. Wystarczy, że taki dowód istnieje.	Rozważmy twierdzenie: „Każda liczba podzielna przez 4 jest również podzielna przez 2”. To twierdzenie również nie jest podane w formie podstawowej, ale można je na taką formę przekształcić: „Jeśli liczba a jest podzielna przez 4, to liczba ta jest podzielna przez 2”. Założenie: „Liczba a jest podzielna przez 4”. Teza: „Liczba a jest podzielna przez 2”.

► Dowody związane z podzielnością liczb

Wiele dowodów na wykazywanie dotyczy podzielności przez jakąś liczbę lub, że dana liczba jest wielokrotnością jakiejś liczby.

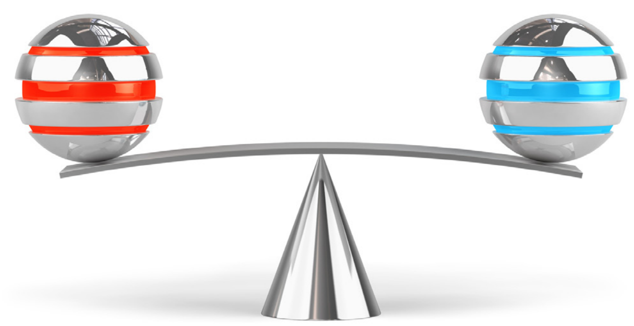
PRZYKŁAD P.2.B.1

Jeśli chcemy wykazać, że wyrażenie jest podzielne przez 7, to należy to wyrażenie przedstawić jako iloczyn liczby 7 i liczby całkowitej.

$14 = 2 \cdot 7$ liczba jest podzielna przez 7

$70 = 10 \cdot 7$ liczba jest podzielna przez 7

$1638 = 234 \cdot 7$ liczba jest podzielna przez 7



Zauważmy, że każdą liczbę podzielną przez 7 możemy rozłożyć na iloczyn liczb 7 i określonej liczby całkowitej, której wartość nie jest dla nas istotna. W dowodach wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, zastępujemy dowolną literą, np:

$7 \cdot k$ gdzie $k \in C$

Zapis ten oznacza, że wyrażenie $7k$ jest wielokrotnością liczby 7 i liczby całkowitej k, czyli jest liczbą podzielną przez 7.

PRZYKŁAD P.2.B.2

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.

1° Oznaczamy kolejne liczby. Każda liczba jest większa od poprzedniej o 1.

n — pierwsza liczba całkowita
$n + 1$ — druga liczba całkowita
$n + 2$ — trzecia liczba całkowita

2° Zapisujemy sumę liczb i redukujemy.

$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 =$

3° Wyłączamy liczbę 3 przed nawias.

$= 3 \cdot (n + 1) =$

4° Liczba w nawiasie jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy nawias literą k z zapisem do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 3 \cdot \underbrace{(n + 1)}_{k \in C} = 3 \cdot k$

5° Sumę trzech kolejnych liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 3 i liczby całkowitej, więc suma ta jest podzielna przez 3.

PRZYKŁAD 1

P.2.B.3

Wykaż, że suma $2014 + 2014^2 + 2014^3 + 2014^4 + 2014^5 + 2014^6$ jest podzielna przez 5.

1° Z każdej pary dwóch kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$2014 + 2014^2 + 2014^3 + 2014^4 + 2014^5 + 2014^6 =$$
$$= 2014(1 + 2014) + 2014^3(1 + 2014) + 2014^5(1 + 2014) =$$

2° Wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 2014)$ przed nawias.

$$= (1 + 2014)(2014 + 2014^3 + 2014^5) =$$

3° Wykonujemy działanie w pierwszym nawiasie.

$$= 2015(2014 + 2014^3 + 2014^5) =$$

4° Zapisujemy liczbę 2015 jako iloczyn liczby 5 i liczby 403.

$$= 5 \cdot 403(2014 + 2014^3 + 2014^5) =$$

5° Wyrażenie $403(2014 + 2014^3 + 2014^5)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$$= 5 \cdot \underbrace{403(2014 + 2014^3 + 2014^5)}_{k \in C} = 5 \cdot k$$

5° Wyrażenie przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 5 i liczby całkowitej, więc jest ono podzielne przez 5.

PRZYKŁAD 2

P.2.B.3

Wykaż, że liczba $7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998}$ jest podzielna przez 17.

1° Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$7^{1000} - 5 \cdot 7^{999} + 3 \cdot 7^{998} = 7^{998}(7^2 - 5 \cdot 7 + 3) =$$

2° Wykonujemy działania w nawiasie.

$$= 7^{998}(49 - 35 + 3) = 7^{998} \cdot 17 =$$

3° Liczba 7^{998} jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy ją literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$$= \underbrace{7^{998}}_{k \in C} \cdot 17 = 17 \cdot k$$

4° Liczbę przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 17 i liczby całkowitej, więc jest ona podzielna przez 17.

PRZYKŁAD 3

P.2.B.3

Wykaż, że suma $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \ldots + 5^{98} + 5^{99}$ jest podzielna przez 31.

1° Z każdych trzech kolejnych liczb wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + \ldots + 5^{97} + 5^{98} + 5^{99} =$$
$$= 5 \cdot (1 + 5 + 5^2) + 5^4 \cdot (1 + 5 + 5^2) + \ldots + 5^{97} \cdot (1 + 5 + 5^2) =$$

2° Wyłączamy wspólny czynnik $(1 + 5 + 5^2)$ przed nawias.

$$= (1 + 5 + 5^2) \cdot (5 + 5^4 + \ldots + 5^{97}) =$$

3° Wykonujemy działanie w pierwszym nawiasie.

$= (1+5+25)\cdot(5+5^4+\ldots+5^{97}) = 31\cdot(5+5^4+\ldots+5^{97}) =$

5° Wyrażenie $(5+5^4+\ldots+5^{97})$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 31\cdot\underbrace{(5+5^4+\ldots+5^{97})}_{k\in C} = 31\cdot k$

5° Sumę liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 31 i liczby całkowitej, więc jest ona podzielna przez 31.

PRZYKŁAD 4

P.2.B.3

Wiedząc, że liczby A i B są cyframi, udowodnij, że suma $ABA + BAB$ jest podzielna przez 37.

WSKAZÓWKA: Np. liczbę 325 można zapisać jako $3\cdot100+2\cdot10+5$

1° Rozkładamy liczby na sumy wielokrotności poszczególnych cyfr.

$ABA + BAB = 100A + 10B + A + 100B + 10A + B =$

2° Redukujemy wyrazy podobne.

$= 111A + 111B =$

3° Wyłączamy wspólny czynnik (111) przed nawias.

$= 111\cdot(A+B) =$

4° Zapisujemy liczbę 111 jako iloczyn 37 i 3.

$= 37\cdot3\cdot(A+B) =$

5° Wyrażenie $3\cdot(A+B)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 37\cdot\underbrace{3\cdot(A+B)}_{k\in C} = 37\cdot k$

5° Sumę liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 37 i liczby całkowitej, więc jest ona podzielna przez 37.

PRZYKŁAD 5

P.2.B.3

Wykaż, że iloczyn $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot11\cdot12$ jest podzielny przez 2^{10}.

1° Rozkładamy liczby 4, 9, 10 i 12 jako iloczyny potęg liczby 2.

$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12 =$
$= 2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot9\cdot2\cdot5\cdot11\cdot2^2\cdot3 =$

2° Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias, korzystając ze wzoru $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$.

$= 2^1\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2^1\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot9\cdot2^1\cdot5\cdot11\cdot2^2\cdot3 =$
$= 2^{1+2+1+3+1+2}\cdot3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3 =$

3° Wykonujemy dodawanie.

$= 2^{10}\cdot3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3 =$

4° Iloczyn $3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy go literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 2^{10}\cdot\underbrace{3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3}_{k\in C} = 2^{10}\cdot k$

5° Iloczyn liczb przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 2^{10} i liczby całkowitej, więc jest on podzielny przez 2^{10}.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.B.1. Udowodnij, że suma $4+4^2+4^3+\ldots+4^{80}$ jest podzielna przez 20. Z.2.B.1

2.B.2. Uzasadnij, że dla każdej liczby dodatniej całkowitej n liczba $4^{n+2}+3\cdot 5^{n+1}-4^n$ jest wielokrotnością liczby 15. Z.2.B.2

2.B.3. Udowodnij, że suma $7+7^2+7^3+\ldots+7^{60}$ jest podzielna przez 57. Z.2.B.3

2.B.4. Wykaż, że liczba $ABC+CAB+BCA$ jest podzielna przez 111, wiedząc, że A, B, C oznaczają dowolne cyfry. Z.2.B.4

2.B.5. Wykaż, że iloczyn $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 19\cdot 20$ jest podzielny przez 10 000. Z.2.B.5

► Dowody z wykorzystaniem podzielności i wzorów skróconego mnożenia

PRZYKŁAD 1

P.2.B.4

Udowodnij, że wyrażenie $(4n+1)^2-(4m-1)^2$ jest podzielne przez 8, jeśli m, n należą do liczb naturalnych.

1° Do obu nawiasów stosujemy wzory skróconego mnożenia.

$$(4n+1)^2-(4m-1)^2=$$
$$=(4n)^2+2\cdot 4n+1^2-[(4m)^2-2\cdot 4m+1^2]=$$
$$=16n^2+8n+1-(16m^2-8m+1)=$$
$$=16n^2+8n+1-16m^2+8m-1=$$

2° Redukujemy wyrazy podobne.

$$=16n^2+8n+\cancel{1}-16m^2+8m-\cancel{1}=$$
$$=16n^2+8n-16m^2+8m=$$

3° Wszystkie wyrażenia dzielą się przez 8, więc możemy 8 wyłączyć przed nawias.

$$=8\cdot(2n^2+n-2m^2+m)=$$

4° Liczba $(2n^2+n-2m^2+m)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy ją literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$$=8\cdot\underbrace{(2n^2+n-2m^2+m)}_{k\in C}=8\cdot k$$

5° Wyrażenie przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 8 i liczby całkowitej, więc jest ono podzielne przez 8.

PRZYKŁAD 2

P.2.B.4

Wykaż, że wyrażenie 11^8-9^8 jest podzielne przez 40.

1° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, pamiętając, że $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

$$11^8-9^8=(11^4-9^4)\cdot(11^4+9^4)=$$

2° Powtarzamy przekształcenia w stosunku do wyrażenia z pierwszego nawiasu.

$= (11^2 - 9^2) \cdot (11^2 + 9^2) \cdot (11^4 + 9^4) =$

3° Wykonujemy działania w pierwszym nawiasie.

$= (121 - 81) \cdot (11^2 + 9^2) \cdot (11^4 + 9^4) =$

4° Wyrażenie $(11^2 + 9^2) \cdot (11^4 + 9^4)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 40 \cdot \underbrace{(11^2 + 9^2) \cdot (11^4 + 9^4)}_{k \in \boldsymbol{C}} = 40 \cdot k$

5° Wyrażenie przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 40 i liczby całkowitej, więc jest ono podzielne przez 40.

PRZYKŁAD 3

P.2.B.4

Udowodnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 4.

1° Oznaczamy dwie kolejne liczby parzyste.

$2n$ — pierwsza liczba parzysta
$2n + 2$ — druga liczba parzysta

2° Zapisujemy sumę kwadratów tych liczb.

$(2n)^2 + (2n + 2)^2 =$

3° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$= 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 =$

4° Redukujemy wyrazy podobne.

$= 8n^2 + 8n + 4 =$

5° Wyłączamy wspólny czynnik (4) przed nawias.

$= 4 \cdot (2n^2 + 2n + 1) =$

6° Wyrażenie $(2n^2 + 2n + 1)$ jest liczbą całkowitą, więc zastępujemy je literą k z zapisem informującym o tym, do jakiego zbioru liczba ta należy.

$= 4 \cdot \underbrace{(2n^2 + 2n + 1)}_{k \in \boldsymbol{C}} = 4 \cdot k$

7° Sumę przedstawiliśmy jako iloczyn liczby 4 i liczby całkowitej, więc jest ona podzielna przez 4.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.B.6. Udowodnij, że wyrażenie $(n + 4)^2 + (3n - 4)(3n + 4) + 2n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$ jest podzielne przez: Z.2.B.6

a. 10

b.* 20

2.B.7. Wykaż, że liczba $3^{32} - 2^{32}$ jest podzielna przez 13. Z.2.B.7

2.B.8. Uzasadnij, że różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych różniących się o dwa jest podzielna przez 4. Z.2.B.8

► Dowody z wykorzystaniem twierdzenia, że kwadrat sumy lub różnicy liczb rzeczywistych jest liczbą nieujemną

Zauważmy, że:

$5^2 \geq 0$, ponieważ $25 \geq 0$

$(-3)^2 \geq 0$, ponieważ $9 \geq 0$

$(\sqrt{2})^2 \geq 0$, ponieważ $2 \geq 0$

$0^2 \geq 0$, ponieważ $0 \geq 0$

$(2-\sqrt{2})^2 \geq 0$, ponieważ $(2-\sqrt{2})^2 \approx 0{,}35 \geq 0$

Oznacza to, że kwadrat sumy lub różnicy dowolnych liczb rzeczywistych jest wyrażeniem nieujemnym.

$(x+y)^2 \geq 0 \quad (x-y)^2 \geq 0 \quad x, y \in \boldsymbol{R}$

Wiele dowodów opiera się na tej zależności.

PRZYKŁAD 1

P.2.B.5

Wykaż, że dla każdego $x \in \boldsymbol{R}_+$ prawdziwa jest nierówność $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1° Obie strony nierówności mnożymy przez x ($x \in \boldsymbol{R}_+$, więc znak nierówności się nie zmienia).

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad |\cdot x$$
$$x^2 + 1 \geq 2x$$

2° Przenosimy wyrazy na lewą stronę nierówności.

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

3° Otrzymane wyrażenie możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia (kwadratu różnicy).

$$(x-1)^2 \geq 0$$

4° Kwadrat różnicy liczb jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego $x \in \boldsymbol{R}_+$.

PRZYKŁAD 2

P.2.B.5

Wykaż, że dla każdego $x > 0$ i $y > 0$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

1° Obie strony nierówności mnożymy przez xy ($x > 0$ i $y > 0$, więc znak nierówności się nie zmienia).

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad |\cdot xy$$
$$\frac{x\cancel{y} \cdot x}{\cancel{y}} + \frac{\cancel{x}y \cdot y}{\cancel{x}} \geq 2xy$$
$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

2° Przenosimy wyrazy na lewą stronę nierówności.

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

3° Otrzymane wyrażenie możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia (kwadratu różnicy).

$(x-y)^2 \geq 0$

4° Kwadrat różnicy liczb jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego $x > 0$ i $y > 0$.

PRZYKŁAD 3

P.2.B.5

Wykaż, że dla każdego a należącego do liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność $a(a+2) \geq 4a-1$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$a(a+2) \geq 4a-1$
$a^2+2a \geq 4a-1$

2° Przenosimy wyrazy na lewą stronę nierówności i redukujemy.

$a^2+2a-4a+1 \geq 0$
$a^2-2a+1 \geq 0$

3° Otrzymane wyrażenie możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia (kwadratu różnicy).

$(a-1)^2 \geq 0$

4° Kwadrat różnicy liczb jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego $a \in \mathbf{R}$.

PRZYKŁAD 4

P.2.B.5

Wykaż, że dla każdego p należącego do liczb rzeczywistych prawdziwa jest nierówność $p^2 \leq \frac{p^4+1}{2}$.

1° Obie strony nierówności mnożymy przez 2.

$p^2 \leq \frac{p^4+1}{2} \quad |\cdot 2$
$2p^2 \leq p^4+1$

2° Przenosimy wyrazy na prawą stronę nierówności.

$0 \leq p^4-2p^2+1$

3° Otrzymane wyrażenie możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia (kwadratu różnicy).

$0 \leq (p^2-1)^2$

4° Kwadrat różnicy liczb jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego $p \in \mathbf{R}$.

PRZYKŁAD 5

P.2.B.5

Udowodnij, że dla każdego a i b wyrażenie $a^4 \geq b(2a^2-b)$ jest prawdziwe.

1° Wykonujemy mnożenie.

$a^4 \geq 2a^2b-b^2$

2° Przenosimy wyrazy na lewą stronę nierówności.

$a^4-2a^2b+b^2 \geq 0$

3° Otrzymane wyrażenie możemy zapisać w postaci wzoru skróconego mnożenia (kwadratu różnicy).

$(a^2-b)^2 \geq 0$

4° Kwadrat różnicy liczb jest zawsze nieujemny, więc nierówność jest prawdziwa dla każdego a i $b \in \mathbf{R}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

2.B.9. Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+2}{a+1} \geq \frac{2a+2}{3}$.

Z.2.B.9

2.B.10. Wykaż, że wyrażenie $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ jest prawdziwe dla każdego $a > 0$ i $b > 0$.

Z.2.B.10

2.B.11. Wykaż, że wyrażenie $\frac{k^2+6k+25}{k+3} \geq 8$ jest prawdziwe dla każdego $k \in \mathbf{R}_+$.

Z.2.B.11

MATURA — ZADANIA.

2.B.12. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + 3^{n+3}$ jest podzielna przez 120.

2.B.13. Wykaż, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 5.

2.B.14. Wykaż, że liczba $7^{16} - 1$ jest podzielna przez 100.

2.B.15. Wykaż, że suma $11^6 + 11^7 + 11^8 + 11^9 + 11^{10} + 11^{11}$ jest podzielna przez 12.

2.B.16. Wykaż, że iloczyn $2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 22 \cdot 28 \cdot 32 \cdot 38$ jest podzielny przez 2^{16}.

2.B.17. Wykaż, że liczba $AAAA + AAA + AA$ jest podzielna przez 9, wiedząc, że A oznacza dowolną cyfrę.

2.B.18. Wykaż, że wyrażenie $p^2(p^2+6) + 15 \geq 6$ jest prawdziwe dla $p \in \mathbf{R}$.

2.B.19. Wykaż, że wyrażenie $2x + \frac{4}{x+5} \geq x - 1$ jest prawdziwe dla każdego $x \in \mathbf{R}_+$.

2.B.20. Wykaż, że jeśli $x > 0$ i $y > 0$, to $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

2.B.21.* Wykaż, że dla każdej liczby $k \in \mathbf{R}_+$ prawdziwa jest nierówność $\frac{k}{\sqrt{k}} + k\sqrt{k} \geqslant 2k$.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

P.2.A.1 PRZYKŁAD 2. $5a^3-6b^4c$ PRZYKŁAD 3. $-7yz^3+2abc$

2.A.1. **a.** $(x-y)+pg$ **b.** $\sqrt{\frac{a}{b}}$ **c.** $(x^3+3y)^2$ **d.** $\left(c^2\cdot\frac{1}{3}d\right)^3$

P.2.A.3 PRZYKŁAD 2. $x^2-4x+xy-4y$

2.A.2. **a.** $xy-3x+5y-15$ **b.** $3ab-12a+6b-24$ **c.** $ad+bd+cd-ae-be-ce$ **d.** $-2-2x-2y+z+xz+yz$ **e.** $8ac-10ad+2ae-12bc+15bd-3be$ **f.** $6x^3+10x^2y-6xy-10y^2$

2.A.3. **a.** $4x+y$ **b.** $4x^2+15x-20$ **c.** $2a^2-14$ **d.** $5x^3-7x^2-4x-28$ **e.** $-6y^5+7y^4+17y^3+6y^2$ **f.** $-6a^2+19ab-13ac$ **g.** $-4x^2+25xy-16y^2$ **h.** a^5-a

P.2.A.4 PRZYKŁAD 2. $1\frac{1}{3}$ PRZYKŁAD 3. $-\frac{1}{9}$

2.A.4. **a.** $\frac{5}{3}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** 276 **d.** -72

2.A.5. **a.** $2abc(ac^2-2bc+3a^2b^2)$ **b.** $8x(2x^3+3x^2-4x+5)$ **c.** $15x^2y^3z^3(z^2-3xy^2z+5x^2y)$ **d.** $11d(11ce+8abc-10efg)$

2.A.6. C **2.A.7.** D **2.A.8.** D **2.A.9.** B **2.A.10.** C

2.1.1. **a.** $4a^2+12ab+9b^2$ **b.** $c^2+8cd+16d^2$ **c.** $49k^2+28kl+4l^2$ **d.** $100x^2+100xy+25y^2$ **e.** $400t^2+440tu+121u^2$ **f.** $16x^2+24xb+9b^2$ **g.** $25a^2+60al+36l^2$ **h.** $225c^2+60cu+4u^2$ **i.** $9a^2+48ay+64y^2$

2.1.2. **a.** $36c^2-12cb+b^2$ **b.** $4a^2-12ad+9d^2$ **c.** $64x^2-48xl+9l^2$ **d.** $121a^2-88ay+16y^2$ **e.** $25t^2-120tu+144u^2$ **f.** $16x^2-104xb+169b^2$ **g.** $4x^2-40xy+100y^2$ **h.** $169c^2-52cb+4b^2$ **i.** $9a^2-42ay+49y^2$

2.1.3. **a.** $4a^2-25b^2$ **b.** c^2-36d^2 **c.** $81x^2-4l^2$ **d.** $100t^2-9y^2$ **e.** $225x^2-64u^2$ **f.** $16k^2-9b^2$ **g.** $9a^2-100y^2$ **h.** $196c^2-400b^2$ **i.** $256a^2-289l^2$

P.2.1.7 PRZYKŁAD 4. 5041 PRZYKŁAD 5. 784 PRZYKŁAD 6. 1596 PRZYKŁAD 7. 2809 PRZYKŁAD 8. 4761 PRZYKŁAD 9. 8099

2.1.4. **a.** $25x^2y^2+10xy+1$ **b.** $a^4x^2+6a^2x+9$ **c.** $\frac{1}{9}a^4-2a^2+9$ **d.** $5x^2+2\sqrt{10}\,x+2$ **e.** $\frac{5}{49}-x^2$ **f.** k^6-4l^2 **g.** $a^2b^2c^2-2abcef+e^2f^2$ **h.** $z^2y^{10}-\frac{1}{4}$ **i.** $\frac{2}{3}x^2-\frac{2\sqrt{5}}{3}x+\frac{5}{6}$ **j.** $2-3a^{10}$ **k.** $x^{20}+2x^{15}+x^{10}$ **l.** $1-0{,}02p^3+0{,}0001p^6$

2.1.5. **a.** $20x^2+4x+13$ **b.** $16x^2+10x+50$ **c.** $47a^2-32ab-10b^2$ **d.** $2a^2+10a-52$ **e.** $3y^4+6$ **f.** $103a^2-30a+71$ **g.** $-2a^2+41c^2-8ac$ **h.** $100\,000\,000-x^4$

2.1.6. **a.** $(2x+y)(2x-y)$ **b.** $(3a+5b)(3a-5b)$ **c.** $(9+4p^2)(9-4p^2)$ **d.** $(10c+11k^3)(10c-11k^3)$ **e.** $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}y\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{7}y\right)$ **f.** $(0{,}2a+1{,}3y^2)(0{,}2a-1{,}3y^2)$ **g.** $\left(\frac{12}{13}p^2+\frac{1}{3}c^3\right)\left(\frac{12}{13}p^2-\frac{1}{3}c^3\right)$ **h.** $(0{,}2a^5+0{,}05b^4)(0{,}2a^5-0{,}05b^4)$ **i.** $(4\sqrt{6}+\sqrt{5}x)(4\sqrt{6}-\sqrt{5}x)$

2.1.7. **a.** $(2x+3y)^2$ **c.** $(9k+2l)^2$ **e.** $(10x+1)^2$ **g.** $\left(\frac{1}{2}a+1\right)^2$ **b.** $(5a-4b)^2$ **d.** $(4x-1)^2$ **f.** $(4a^2-5)^2$ **h.** $(0{,}6x-10)^2$

2.1.8. **a.** $9+4\sqrt{6}$ **b.** $112-30\sqrt{3}$ **c.** $70-28\sqrt{6}$ **d.** -10

P.2.1.9 PRZYKŁAD 3. $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ PRZYKŁAD 4. $\frac{4-\sqrt{10}}{3}$

2.1.9. **a.** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ **b.** $2-\sqrt{3}$ **c.** $\sqrt{15}+2\sqrt{3}$ **d.** $\frac{45+15\sqrt{3}}{7}$ **e.** $4\sqrt{15}-4\sqrt{14}$ **f.** $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{-2}$ **g.** $\sqrt{30}+3\sqrt{2}$ **h.** $\sqrt{13}-1$

2.1.10. **a.** $10\sqrt{5}-9$ **b.** $47-6\sqrt{2}$ **c.** $10+8\sqrt{7}$ **d.** $74\sqrt{2}-103$ **e.** $\frac{19}{2}$ **f.** $3\sqrt{3}$

2.1.11. $$\frac{4^8-1}{2^8+1}=\frac{(2^2)^8-1}{2^8+1}=\frac{(2^8)^2-1}{2^8+1}=\frac{(2^8-1)\cancel{(2^8+1)}}{\cancel{2^8+1}}=2^8-1=255\in C$$

2.1.12. $$\frac{1974^2-899^2}{1075}=\frac{(1974-899)(1974+899)}{1075}=\frac{\cancel{1075}\cdot 2873}{\cancel{1075}}=2873\in C$$

2.1.13. $$a=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{6})^2}{7-6}=\frac{7+\cancel{2\sqrt{42}}+6+7-\cancel{2\sqrt{42}}+6}{1}=26\in C$$

2.1.14. $$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{\sqrt{7}-\sqrt{9}}=$$
$$=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{7-9}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{-2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{-2}=$$
$$=\frac{1-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{7}}+\cancel{\sqrt{7}}-3}{-2}=\frac{1-3}{-2}=1\in C$$

2.1.15. B **2.1.16.** C **2.1.17.** B **2.1.18.** D **2.1.19.** B
2.1.20. D **2.1.21.** A **2.1.22.** D **2.1.23.** D **2.1.24.** D

2.B.1. $$4+4^2+4^3+4^4+\ldots+4^{79}+4^{80}=4(1+4)+4^3(1+4)+\ldots+4^{79}(1+4)=$$
$$=(1+4)(4+4^3+\ldots+4^{79})=5\cdot 4\underbrace{(1+4^2+\ldots+4^{78})}_{k\in C}=20\cdot k$$ Wyrażenie jest podzielne przez 20.

2.B.2. $$4^{n+2}+3\cdot 5^{n+1}-4^n=4^n\cdot 4^2+3\cdot 5^n\cdot 5^1-4^n=16\cdot 4^n+15\cdot 5^n-4^n=$$
$$=15\cdot 4^n+15\cdot 5^n=15\cdot\underbrace{(4^n+5^n)}_{k\in C}=15\cdot k$$ Liczba jest wielokrotnością 15.

2.B.3. $7+7^2+7^3+7^4+7^5+7^6+\ldots+7^{58}+7^{59}+7^{60}=$

$=7\cdot(1+7+7^2)+7^4\cdot(1+7+7^2)+\ldots+7^{58}\cdot(1+7+7^2)=(1+7+7^2)\cdot(7+7^4+\ldots+7^{58})=$

$=57\cdot\underbrace{(7+7^4+\ldots+7^{58})}_{k\in\boldsymbol{C}}=57\cdot k$ Suma jest podzielna przez 57.

2.B.4. $ABC+CAB+BCA=100A+10B+C+100C+10A+B+100B+10C+A=111A+111B+111C=$

$=111\cdot\underbrace{(A+B+C)}_{k\in\boldsymbol{C}}=111\cdot k$ Liczba jest podzielna przez 111.

2.B.5. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20=$

$=2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot3\cdot5\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20=$

$=\underbrace{2\cdot5\cdot10\cdot5\cdot20}_{10\,000}\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot3\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19=$

$=10\,000\cdot\underbrace{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot3\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19}_{k\in\boldsymbol{C}}=10\,000\cdot k$ Iloczyn jest podzielny przez 10 000

2.B.6. **a.** $(n+4)^2+(3n-4)(3n+4)+2n=n^2+8n+\cancel{16}+9n^2-\cancel{16}+2n=10n^2+10n=10\underbrace{(n^2+n)}_{k\in\boldsymbol{C}}=10\cdot k$

Wyrażenie jest podzielne przez 10.

b.* $(n+4)^2+(3n-4)(3n+4)+2n=n^2+8n+\cancel{16}+9n^2-\cancel{16}+2n=10n^2+10n=10n(n+1)$

Wyrażenie $n(n+1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych, który jest na pewno podzielny przez 2, ponieważ jeden z czynników tego iloczynu jest liczbą parzystą. Zatem: $10\underbrace{n(n+1)}_{2k,\ k\in C}=20\cdot k$, więc wyrażenie jest podzielne przez 20.

2.B.7. $3^{32}-2^{32}=(3^{16}-2^{16})(3^{16}+2^{16})=(3^8-2^8)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=(3^4-2^4)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=$

$=(3^2-2^2)\underbrace{(3^2+2^2)}_{13}(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})=13\cdot\underbrace{(3^2-2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})}_{k\in\boldsymbol{C}}=13\cdot k$

Liczba jest podzielna przez 13.

2.B.8 $(n+2)^2-n^2=n^2+2\cdot2\cdot n+2^2-n^2=4n+4=4\cdot\underbrace{(n+1)}_{k\in\boldsymbol{C}}=4\cdot k$ Wyrażenie jest podzielne przez 4.

2.B.9. $\dfrac{a^2+2}{a+1}\geq\dfrac{2a+2}{3}\quad\Big|\cdot3(a+1)$

$3(a^2+2)\geq(2a+2)(a+1)$

$3a^2+6\geq2a^2+2a+2a+2$

$a^2-4a+4\geq0$

$(a-2)^2\geq0$

Dla każdego $a>0$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.10. $a+b\geq2\sqrt{ab}\quad|^2$

$(a+b)^2\geq4ab$

$a^2+2ab+b^2\geq4ab$

$a^2+2ab+b^2-4ab\geq0$

$a^2-2ab+b^2\geq0$

$(a-b)^2\geq0$

Dla każdego $a>0$, $b>0$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.11. $\dfrac{k^2+6k+25}{k+3}\geq8\quad\Big|\cdot(k+3)$

$k^2+6k+25\geq8(k+3)$

$k^2+6k+25\geq8k+24$

$k^2-2k+1\geq0$

$(k-1)^2\geq0$

Dla każdego $k\in\boldsymbol{R}_+$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.12. $3^n+3^n\cdot 3^1+3^n\cdot 3^2+3^n\cdot 3^3=3^n+3\cdot 3^n+9\cdot 3^n+27\cdot 3^4=40\cdot 3^n=40\cdot 3^1\cdot 3^{n-1}=120\cdot \underbrace{3^{n-1}}_{k\in \boldsymbol{C}}=120\cdot k$

Liczba jest podzielna przez 120.

2.B.13. n — pierwsza liczba całkowita, $n+1$ — druga liczba całkowita, $n+2$ — trzecia liczba całkowita, $n+3$ — czwarta liczba całkowita, $n+4$ — piąta liczba całkowita.

$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2=n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9+n^2+8n+16=$
$=5n^2+20n+30=5\cdot \underbrace{(n^2+4n+6)}_{k\in \boldsymbol{C}}=5\cdot k$ Suma jest podzielna przez 5.

2.B.14. $7^{16}-1=(7^8-1)(7^8+1)=(7^4-1)\cdot(7^4+1)\cdot(7^8+1)=$
$=(7^2-1)\cdot(7^2+1)\cdot(7^4+1)\cdot(7^8+1)=48\cdot 50\cdot(7^4+1)\cdot(7^8+1)=$
$=2\cdot 24\cdot 50\cdot(7^4+1)\cdot(7^8+1)=100\cdot \underbrace{24\cdot(7^4+1)\cdot(7^8+1)}_{k\in \boldsymbol{C}}=100\cdot k$ Liczba jest podzielna przez 100

2.B.15. $11^6+11^7+11^8+11^9+11^{10}+11^{11}=11^6(1+11)+11^8(1+11)+11^{10}(1+11)=$
$=12\cdot 11^6+12\cdot 11^8+12\cdot 11^{10}=12\cdot \underbrace{(11^6+11^8+11^{10})}_{k\in \boldsymbol{C}}=12\cdot k$

Liczba jest podzielna przez 12.

2.B.16. $2\cdot 8\cdot 12\cdot 18\cdot 22\cdot 28\cdot 32\cdot 38=2\cdot 2^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3^2\cdot 2\cdot 11\cdot 2^2\cdot 7\cdot 2^5\cdot 2\cdot 19=2^{16}\cdot \underbrace{3^3\cdot 11\cdot 7\cdot 19}_{k\in \boldsymbol{C}}=12^{16}\cdot k$

Liczba jest podzielna przez 2^{16}.

2.B.17. $AAAA+AAA+AA=1000A+100A+10A+A+100A+10A+A+10A+A=1233A=9\cdot \underbrace{137A}_{k\in \boldsymbol{C}}=9\cdot k$

Liczba jest podzielna przez 9.

2.B.18.
$p^2(p^2+6)+15\geq 6$
$p^4+6p^2+15-6\geq 0$
$p^4+6p^2+9\geq 0$
$(p^2+3)^2\geq 0$

Dla każdego $p\in \boldsymbol{R}$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.19.
$2x+\frac{4}{x+5}\geq x-1 \quad \big|\cdot(x+5)$
$2x(x+5)+4\geq (x-1)(x+5)$
$2x^2+10x+4\geq x^2+5x-x-5$
$x^2+6x+9\geq 0$
$(x+3)^2\geq 0$

Dla każdego $x\in \boldsymbol{R}_+$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.20.
$\frac{x+y}{2}\geq \sqrt{xy} \quad \big|\cdot 2$
$x+y\geq 2\sqrt{xy} \quad |^2$
$(x+y)^2\geq 4xy$
$x^2+2xy+y^2-4xy\geq 0$
$x^2-2xy+y^2\geq 0$
$(x-y)^2\geq 0$

Dla każdego $x>0$ i $y>0$ wyrażenie jest nieujemne, więc nierówność jest prawdziwa.

2.B.21.*
$\frac{k}{\sqrt{k}}+k\sqrt{k}\geq 2k \quad \big|\cdot\sqrt{k}$
$k+k^2\geq 2k\sqrt{k}$
$k^2-2k\sqrt{k}+k\geq 0$
$k(k-2\sqrt{k}+1)\geq 0$
$k(\sqrt{k}-1)^2\geq 0$

Otrzymane wyrażenie jest iloczynem dodatniej liczby k oraz kwadratu wyrażenia $\sqrt{k}-1$, który jest zawsze nieujemny. Wynika z tego, że wyrażenie jest zawsze nieujemne.

ISBN: 978-83-63975-09-8

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY