3

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

e-laboratorium matematyczne

Równania i nierówności

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
StartupStockPhotos - id. 593378/ CC0 Public Domain; PublicDomainPictures - id. 17808/ CC0 Public Domain; Hermann - id. 683901/ CC0 Public Domain; Hebi65 - id. 676116/ CC0 Public Domain; Mampu - id. 435584/ CC0 Public Domain; wongpear - id. 398736/ CC0 Public Domain; Hermann - id. 441866/ CC0 Public Domain; JESHOOTS - id. 569066/ CC0 Public Domain; Huskyherz - id. 672079/ CC0 Public Domain; jarmoluk - id. 428540/ CC0 Public Domain; PrographerMan - id. 336100/ CC0 Public Domain; geralt - id. 67320/ CC0 Public Domain; PublicDomainPictures - id. 2269/ CC0 Public Domain; skeeze - id. 520775/ CC0 Public Domain; PDPics - id. 390054/ CC0 Public Domain

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-11-1

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

Równania i nierówności

Jedna z bardziej znanych łamigłówek pochodzących ze starożytnych Chin brzmi: „W ogrodzie mandaryna biegały bażanty i króliki. Miały one razem 35 głów, a nóg 94. Ile tam było bażantów, a ile królików?”. Nad zadaniem głowiło się wielu, uważając je za trudne i spędzając nad nim mnóstwo czasu. Udawało się nielicznym. I rzeczywiście nie jest łatwo rozwiązać to zadanie w pamięci. Okazuje się jednak, że korzystając z układów równań czy nawet równania, można to zadanie rozwiązać w minutę czy dwie. Nie trzeba przy tym być wybitnym matematykiem. Wystarczy poznać proste algorytmy rozwiązywania równań bądź układów równań, by radzić sobie z dużo bardziej złożonymi problemami niż nawet te, którymi kiedyś zajmowali się tylko mędrcy. Równaniami jako pierwszy zajął się Diofantos, który żył w III n.e. w Aleksandrii. Oczywiście działania na liczbach i arytmetyka były znane Grekom, którzy jednak wcześniej łączyli wszystkie te obliczenia ściśle z geometrią. W głównym swoim dziele, pt. „Arytmetyka”, Diofantos przedstawił 189 równań z pełnymi rozwiązaniami i wprowadził zaczątki języka algebraicznego. Oznaczał niewiadome oddzielnymi symbolami, jako pierwszy zastosował znak odejmowania, jednak nie używał znaków dodawania, mnożenia i dzielenia. Znak równości, liczby i inne działania oznaczał skrótami słów. Co ciekawe, Diofantos rozwiązywał równania nieoznaczone, czyli posiadające nieskończenie wiele rozwiązań, ale nie uznawał rozwiązań w liczbach ujemnych, uważając je za absurdalne. Jednak jako pierwszy grecki matematyk stawiał ułamki na równi z liczbami całkowitymi i zapisywał je podobnie, jak zapisuje się je dziś, ale bez kreski ułamkowej.

W XIV wieku grecki mnich Maksym Planudes napisał wiersz na cześć Diofantosa „Epitafium Diofanta”. Jego treść jest hołdem zawartym w zadaniu tekstowym.

Pod tym nagrobkiem spoczywa Diofant — a dzięki przedziwnej
Sztuce zmarłego i wiek zdradzi ci ten głaz:
Chłopcem przez szóstą część życia pozostać Bóg mu pozwolił,
Lica pokwitły mu zaś, kiedy dwunasta znów część
Życia minęła; a znowu żywota, gdy przebył część siódmą,
Młodą małżonkę w dom dobry wprowadził mu Bóg,
Która gdy pięć lat minęło, małego powiła mu synka,
Ale okrutny chciał los, że kiedy syn ledwie wiek
Ojca w połowie osiągnął, ponury zabrał go Hades.
Kojąc ogromny swój ból, szukał Diofant wśród liczb
Jeszcze przez cztery lata pociechy, aż rozstał się z życiem.

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA — ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

3.1 ► Sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania lub nierówności

DEFINICJA

Liczba x_0 jest rozwiązaniem równania lub nierówności, jeśli wstawiając ją w miejsce niewiadomej, otrzymamy zdanie prawdziwe.

Wszystkie liczby, które są rozwiązaniem określonego równania (lub nierówności), tworzą zbiór rozwiązań równania (lub nierówności).

► Sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania

P.3.1.1

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy liczba 2 jest rozwiązaniem równania $4x^2 - 3x + 2 = x + 10$.

Aby sprawdzić, czy liczba 2 jest rozwiązaniem równania, należy wstawić ją w miejsce niewiadomej x i zobaczyć, czy lewa strona równa jest prawej stronie równania.

$$4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 \stackrel{?}{=} 2 + 10$$
$$4 \cdot 4 - 6 + 2 \stackrel{?}{=} 2 + 10$$
$$16 - 6 + 2 \stackrel{?}{=} 12$$
$$12 \stackrel{?}{=} 12$$
$$L = P$$

Liczba 2 jest rozwiązaniem równania.

PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy liczba -3 jest rozwiązaniem równania $x^3 - 4x = x^2 - 9$.

Aby sprawdzić, czy liczba -3 jest rozwiązaniem równania, należy wstawić ją w miejsce niewiadomej x i zobaczyć, czy lewa strona równa jest prawej stronie równania.

$$(-3)^3 - 4 \cdot (-3) \stackrel{?}{=} (-3)^2 - 9$$
$$-27 + 12 \stackrel{?}{=} 9 - 9$$
$$-15 \stackrel{?}{=} 0$$
$$L \neq P$$

Liczba -3 nie jest rozwiązaniem równania.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Sprawdź, czy liczba 4 jest rozwiązaniem równania $\frac{x+2}{3} = \frac{3x-4}{4}$.

PRZYKŁAD 4. Sprawdź, czy liczba -6 jest rozwiązaniem równania $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.1.1. Uzupełnij tabelę według wzoru.

Równanie	Czy liczba spełnia równanie?					
	-1	2	5	-5	3	0
$x^2-25=0$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*
$x(x+1)(x-2)=0$						
$x^2-5x+6=0$						
$x^3-7x^2+10x=0$						
$x^3-27=0$						
$\frac{x+5}{2}=x^2-5$						

► Sprawdzanie, czy dana liczba jest rozwiązaniem nierówności

P.3.1.2

PRZYKŁAD 1

Sprawdź, czy liczba 2 jest rozwiązaniem nierówności $x^3+8x>-6x^2+1$.

Aby sprawdzić, czy liczba 2 jest rozwiązaniem nierówności, należy wstawić ją w miejsce niewiadomej x i zobaczyć, czy nierówność jest prawdziwa.

$$2^3+8\cdot 2 \overset{?}{>} -6\cdot 2^2+1$$

$$8+16 \overset{?}{>} -6\cdot 4+1$$

$$24 \overset{?}{>} -24+1$$

$$24 \overset{?}{>} -23$$

Nierówność jest prawdziwa, więc liczba 2 jest rozwiązaniem nierówności.

PRZYKŁAD 2

Sprawdź, czy liczba -1 jest rozwiązaniem nierówności $8(x+2)\leq x^2-5$.

Aby sprawdzić, czy liczba -1 jest rozwiązaniem nierówności, należy wstawić ją w miejsce niewiadomej x i zobaczyć, czy nierówność jest prawdziwa.

$$8(-1+2) \overset{?}{\leq} (-1)^2-5$$

$$8\cdot 1 \overset{?}{\leq} 1-5$$

$$8 \overset{?}{\leq} -4$$

Nierówność nie jest prawdziwa, więc liczba -1 nie jest rozwiązaniem nierówności.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Sprawdź, czy liczba -4 jest rozwiązaniem nierówności $\frac{x+5}{2} \geq \frac{2x-3}{4} - x$.

PRZYKŁAD 4. Sprawdź, czy liczba 10 jest rozwiązaniem nierówności $\frac{(x-1)(x+1)}{5} < \frac{x^2-5}{3}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.1.2. Uzupełnij tabelę według wzoru.

Nierówność	Czy liczba spełnia nierówność?				
	$\sqrt{2}$	0	-2	3	π
$x^2 > 5$	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*TAK*
$x^3 - 5x \leq 6$					
$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 10$					
$(x+2)(x-1) > x - \sqrt{2}$					
$\frac{x+x^2}{2} \geq 2x - 1$					

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.1

3.1.3. Rozwiązaniem równania $x^2 + 5x - 3 = 11$ jest liczba:

A. 11 **B.** 1 **C.** -2 **D.** 2

3.1.4. Liczba 4 jest rozwiązaniem równania $2x + a = 6$. Wtedy:

A. $a = 2$ **B.** $a = 1$ **C.** $a = -2$ **D.** $a = 4$

3.1.5. Dany jest zbiór $A = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$ oraz nierówność $\frac{x-5}{2} \leq \frac{x+1}{3}$. Liczb należących do zbioru A spełniających nierówność jest:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

3.1.6. Liczbą spełniającą nierówność $x^3 - 4x < 0$ jest:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 10

3.1.7. Liczba $3^2 - 2^2$ jest rozwiązaniem równania:

A. $x^2 = 5$ **B.** $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$ **C.** $x^3 - 25 = 0$ **D.** $\frac{x+2}{7} = 5$

3.A ▶ Równania liniowe z jedną niewiadomą

DEFINICJA

Równaniem liniowym z jedną niewiadomą nazywamy równanie postaci: $ax + b = 0$. Litery a i b to parametry (współczynniki liczbowe), natomiast litera x oznacza zmienną. Ponieważ tylko jedna litera oznacza zmienną, dlatego jest to równanie z jedną niewiadomą. Ponadto zmienna ta występuje w pierwszej potędze (czyli $x = x^1$) — stąd mówimy, że jest to równanie pierwszego stopnia lub równanie liniowe.

PRZYKŁADY

$2x - 3 = 0$, gdzie parametr $a = 2$, parametr $b = -3$.

$-6x + 1 = 0$, gdzie $a = -6$, $b = 1$.

$\sqrt{2}\,x + \frac{1}{3} = 0$, gdzie $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{3}$.

Równanie z niewiadomą x postaci $ax + b = 0$, gdzie $b \in R$ nazywamy:

- ▶ równaniem pierwszego stopnia, gdy $a \neq 0$.
- ▶ równaniem liniowym, gdy $a \in R$.

Równania pierwszego stopnia zaliczamy do równań liniowych.

▶ Działania na równaniach

P.3.A.1

TWIERDZENIA

W celu rozwiązania (czyli znalezienia wszystkich pierwiastków) równania posługujemy się następującymi twierdzeniami:

1° Do obu stron równania można dodać tę samą liczbę.

2° Od obu stron równania można odjąć tę samą liczbę.

3° Obie strony równania można pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera.

4° Obie strony równania można podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Powyższe twierdzenia nie zmieniają zbioru rozwiązań określonego równania. Po ich zastosowaniu otrzymujemy równania równoważne, czyli posiadające ten sam zbiór rozwiązań.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż równanie $4x - 3 = 0$.

1° Do obu stron równania dodajemy liczbę 3.

$$4x - 3 = 0 \quad |+3$$
$$4x - 3 + 3 = 0 + 3$$
$$4x = 3$$

2° Obie strony równania dzielimy przez 4.

$$4x = 3 \quad |:4$$
$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{3}{4}$$
$$x = \frac{3}{4}$$

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $\frac{1}{5}x + 2 = 0$.

1° Od obu stron równania odejmujemy liczbę 2.

$$\frac{1}{5}x + 2 = 0 \quad \Big| -2$$
$$\frac{1}{5}x + 2 - 2 = 0 - 2$$
$$\frac{1}{5}x = -2$$

2° Obie strony równania mnożymy przez 5.

$$\frac{1}{5}x = -2 \quad \Big| \cdot 5$$
$$\cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}x = 5 \cdot (-2)$$
$$x = -10$$

► Rodzaje równań liniowych

P.3.A.2

Równania oznaczone

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż równanie $3(5x + 2) = 3(x + 1) + 4$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$3(5x + 2) = 3(x + 1) + 4$$
$$15x + 6 = 3x + 3 + 4$$

2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę równania, a wiadome na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$15x - 3x = 3 + 4 - 6$$
$$12x = 1 \quad \Big| : 12$$

3° Obie strony równania dzielimy przez 12.

$$x = \frac{1}{12}$$

Równanie oznaczone — jedno rozwiązanie.

Równania nieoznaczone

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $2(3x + 1) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$2(3x + 1) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$$
$$6x + 2 = 6x + 2$$

2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę równania, a wiadome na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$6x - 6x = 2 - 2$$
$$0 = 0 \qquad \text{równość prawdziwa}$$

Równanie nieoznaczone — nieskończenie wiele rozwiązań.

Równania sprzeczne

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $3(4x-3)=6(2x+1)$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$3(4x-3)=6(2x+1)$$
$$12x-9=12x+6$$

2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę równania, a wiadome na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$12x-12x=6+9$$
$$0=15 \quad \text{równość fałszywa}$$

Równanie sprzeczne — brak rozwiązań.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.A.1. Rozwiąż równanie:

a. $2(x+3)=5x-1$

b. $4(x-1)-(x+2)=6(2x-3)-4x$

c. $\frac{x+2}{2}=\frac{5x-1}{3}$

d. $\frac{4-2x}{3}=\frac{5x-1}{7}$

3.A.2. Rozwiąż równanie: Z.3.A.2

a. $(3x-4)x+1=(3x+1)(x-3)$

b. $\frac{(x-3)(x+5)}{2}-\frac{x^2}{3}=\frac{x(x+6)}{6}$

c. $x-\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{3}+3x-\frac{1}{4}=6\left(x-\frac{7}{24}\right)+\frac{2}{3}$

3.A.3. Rozwiąż równanie:

a. $(x-1)(x+2)=(x-3)(x+4)$

b. $(2x-1)(4x+2)=(x+1)(8x-3)$

c. $(x-1)(x+1)=(x+2)^2+2x$

d. $3(x+3)^2+(x-5)^2=(2x-3)^2+3$

e. $\frac{(x-3)(x+3)}{2}=\frac{x(x-4)}{3}+\frac{x^2}{6}$

f. $\frac{(2x-1)(5x+2)}{5}=\frac{(4x-1)(5x+3)}{10}$

3.A.4. Rozwiąż równanie:

a. $5x-10=\sqrt{5}\,x+15$

b. $2(x+\sqrt{2})=4+\sqrt{2}\,x$

c. $\sqrt{3}\,x+6=3x+9$

d. $4+x(\sqrt{2}+2)=8-4x$

► Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań liniowych

ETAPY ROZWIĄZYWANIA ZADANIA TEKSTOWEGO

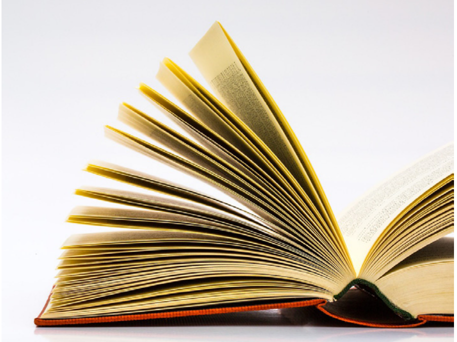
1° Analiza zadania — określenie niewiadomych i zależności wynikających z treści zadania.

2° Ułożenie równania.

3° Rozwiązanie równania.

4° Ewentualne pozostałe obliczenia i sprawdzenie otrzymanego rozwiązania, szczególnie w przypadku, gdy otrzymujemy wiele rozwiązań.

5° Sformułowanie odpowiedzi.



PRZYKŁAD 1

P.3.A.3

Suma dwóch liczb wynosi 150. Znajdź te liczby, wiedząc, że jedna liczba jest o 50% większa od drugiej.

1° Określamy niewiadome i zależności wynikające z treści zadania.

x — I liczba
$x + 50\%x = 150\%x = 1{,}5x$ — II liczba

2° Układamy równanie.

$x + 1{,}5x = 150$

3° Rozwiązujemy równanie liniowe.

3.1° Obie strony równania mnożymy przez 2.

3.2° Obie strony równania dzielimy przez 5.

$$x + 1{,}5x = 150 \quad | \cdot 2$$
$$2x + 3x = 300$$
$$5x = 300 \quad | : 5$$
$$x = 60$$

4° Obliczamy wartość drugiej liczby.

$1{,}5x = 1{,}5 \cdot 60 = 90$

5° Formułujemy odpowiedź.

Szukane liczby to 60 i 90.

PRZYKŁAD 2

P.3.A.4

Turysta w ciągu trzech dni wędrówki pokonał trasę o długości 56 km. Drugiego dnia przeszedł dwa razy dłuższą trasę niż pierwszego dnia, a trzeciego dnia przeszedł o 4 km mniej niż drugiego dnia. Oblicz, ile kilometrów pokonał ten turysta każdego dnia.

1° Określamy niewiadome i zależności wynikające z treści zadania.

x — liczba kilometrów pokonanych I dnia
$2x$ — liczba kilometrów pokonanych II dnia
$2x - 4$ — liczba kilometrów pokonanych III dnia

2° Układamy równanie.

$x + 2x + 2x - 4 = 56$

3° Rozwiązujemy równanie liniowe.

3.1° Wiadome przenosimy na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

3.2° Obie strony równania dzielimy przez 5.

$$x + 2x + 2x = 56 + 4$$
$$5x = 60 \quad | : 5$$
$$x = 12$$

4° Obliczamy liczbę kilometrów pokonanych drugiego i trzeciego dnia.

$2x = 2 \cdot 12 = 24$

$2x - 4 = 2 \cdot 12 - 4 = 24 - 4 = 20$

5° Formułujemy odpowiedź.

Turysta pierwszego dnia pokonał 12 km, drugiego 24 km, a trzeciego 20 km.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.A.5. W klasie IA połowa uczniów otrzymała ze sprawdzianu czwórki, czwarta część uczniów — trójki, siódma część uczniów — piątki, a trzy osoby otrzymały szóstki. Oblicz, ilu uczniów liczy ta klasa.

3.A.6. Stosunek kątów w czworokącie wynosi $1 : 2 : 3 : 4$. Oblicz miary kątów tego czworokąta.

3.A.7. Obwód prostokąta wynosi 78. Oblicz długości boków tego prostokąta, wiedząc, że jeden bok jest o 15 dłuższy od drugiego.

3.A.8. Różnica kwadratów dwóch liczb różniących się o 5 wynosi 55. Znajdź te liczby.

3.A.9. Trzecia część połowy pewnej liczby jest większa od połowy siódmej części tej liczby o 8. Znajdź tę liczbę.

3.A.10. Miasta A i B leżą na różnej wysokości. Autobus, jadąc z miasta A do B pod górę, pokonuje tę trasę ze średnią prędkością $30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a gdy jedzie z miasta B do A z góry, jego średnia prędkość wynosi $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Czas przejazdu autobusu z miasta A do B i z powrotem wynosi dwie godziny. Oblicz odległość między miastami A i B.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. **T.3.A**

3.A.11. Rozwiązaniem równania $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=13$ jest liczba:

A. 12 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 6

3.A.12. Suma trzech liczb wynosi 76. Druga liczba jest trzy razy większa od pierwszej, a trzecia liczba jest o 6 większa od pierwszej liczby. Największa z liczb jest więc równa:

A. 14 **B.** 42 **C.** 20 **D.** 26

3.A.13. Rozwiązaniem równania $2\sqrt{2}x-\sqrt{8}=2\sqrt{8}x-4\sqrt{2}$ jest liczba:

A. pierwsza, **B.** parzysta, **C.** niewymierna, **D.** dodatnia.

3.A.14. Rozwiązaniem równania $\frac{(x-2)(x+2)}{2}=x(x-1)-\frac{x^2}{2}$ jest liczba:

A. 3 **B.** -2 **C.** 2 **D.** 1

3.A.15. Równanie $5(x-3)=2x+3(x-1)$ jest równaniem:

A. nieoznaczonym, **B.** oznaczonym, **C.** sprzecznym, **D.** tożsamościowym.

3.A.16. Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{2}=\frac{x-3}{3}+1$ jest liczba:

A. pierwsza, **B.** parzysta, **C.** nieparzysta, **D.** podzielna przez 4.

3.A.17. Rozwiązaniem równania $x(x+2)-6x+4=x^2-2(x-1)$ jest:

A. -1 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -2

3.A.18. Rozwiązanie równania $x(x+3)-56=x(x-5)$ należy do przedziału:

A. $(-\infty;3)$ **B.** $(10;\infty)$ **C.** $(-5;-1)$ **D.** $(2;\infty)$

3.A.19. Rozwiązaniem równania $x(x-3)=2(x+1)-4+x^2$ jest liczba:

A. $-\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** 2,5 **D.** $-2\frac{1}{2}$

3.A.20. Stosunek długości boków prostokąta wynosi $3:5$, a jego obwód jest równy 112. Krótszy bok tego prostokąta ma długość:

A. 42 **B.** 21 **C.** 70 **D.** 35

3.2 ▶ Interpretacja geometryczna układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

DEFINICJA

Układem równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nazywamy następujący układ:

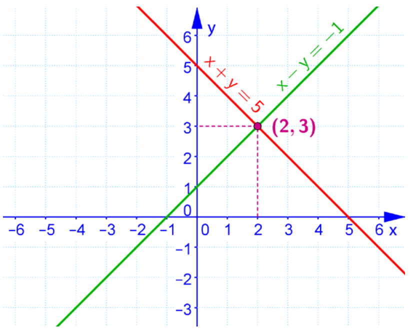
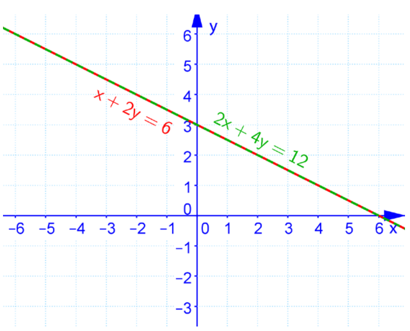
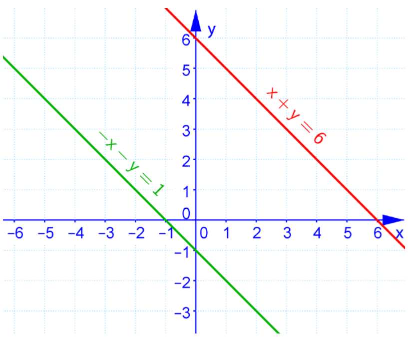
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, gdzie $a_1^2 + b_1^2 > 0$ i $a_2^2 + b_2^2 > 0$ (co oznacza, że w żadnym z równań nie mogą jednocześnie zniknąć zmienne x i y).

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — parametry (współczynniki liczbowe), czyli dowolne liczby rzeczywiste

x, y — zmienne

▶ Rodzaje układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi P.3.2.1

Wykresem każdego równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta.
W zależności od położenia dwóch prostych w układzie współrzędnych można wyróżnić 3 rodzaje układów równań.

ILUSTRACJA GRAFICZNA	LICZBA ROZWIĄZAŃ	PRZYKŁAD	WNIOSEK
	Jedno rozwiązanie Układ oznaczony	$+\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $2x = 4 \quad \mid :2$ Rozwiązanie: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$	Proste przecinają się w punkcie $(2; 3)$.
	Nieskończenie wiele rozwiązań Układ nieoznaczony	$\begin{cases} x + 2y = 6 \quad \mid \cdot(-2) \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$ $+\begin{cases} -2x - 4y = -12 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$ $0 = 0$ Równość prawdziwa. Istnieje nieskończenie wiele rozwiązań.	Proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. Każdy punkt znajdujący się na prostej spełnia układ równań.
	Brak rozwiązań Układ sprzeczny	$+\begin{cases} x + y = 6 \\ -x - y = 1 \end{cases}$ $0 = 7$ Równość fałszywa. Brak rozwiązania.	Proste nie mają punktów wspólnych, więc układ nie ma rozwiązania.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.2.1. Rozwiąż graficznie układ równań: Z.3.2.1

a. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3x + 3 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = 2x \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -1 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

3.2.2. Rozwiąż graficznie układ równań:

a. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

3.2.3. Oblicz, dla jakiego parametru a układ równań $\begin{cases} y = ax + 3 \\ -y + 2x = -3 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3.2.4. Oblicz, dla jakiego parametru k układ równań $\begin{cases} 2y = 3x - 4 \\ kx + 2 = y \end{cases}$ jest sprzeczny.

Czy wiesz, że...

P.3.2.2

Istnieje wiele innych metod rozwiązywania układów równań. Jedną z ciekawych metod jest metoda wyznaczników.

Dany jest układ równań $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, gdzie $a^2 + b^2 > 0$ i $d^2 + e^2 > 0$.

Liczbę $W = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$ nazywamy wyznacznikiem głównym układu.

Jeśli $W \neq 0$, to $x = \frac{W_x}{W}$, $y = \frac{W_y}{W}$, gdzie $W_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$, $W_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc$.

PRZYKŁAD

P.3.2.3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ 5x - 7y = -38 \end{cases}$ metodą wyznaczników.

Obliczamy wyznaczniki.

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - 5 \cdot 3 = -28 - 15 = -43$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -38 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-7) - (-38) \cdot 3 = -28 + 114 = 86$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -38 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-38) - 5 \cdot 4 = -152 - 20 = -172$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{86}{-43} = -2, \qquad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-172}{-43} = 4$$

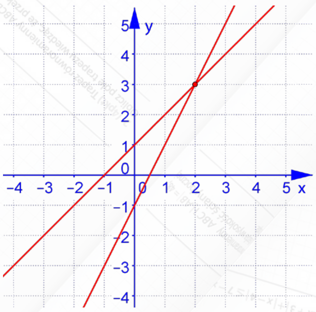
Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$.

3.2.5. Układ równań $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ -x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$:

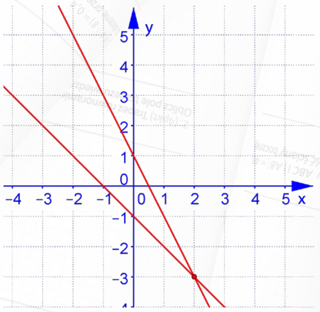
A. ma jedno rozwiązanie,
B. ma nieskończenie wiele rozwiązań,
C. nie ma rozwiązań,
D. ma dwa rozwiązania.

3.2.6. Rozwiązanie graficzne układu równań $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ przedstawiono na rysunku:

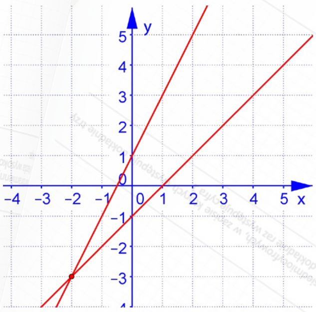
A.



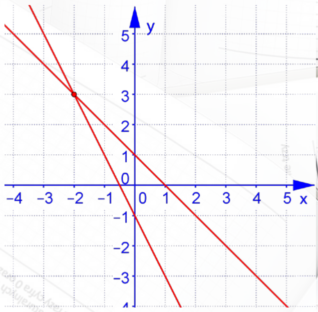
B.



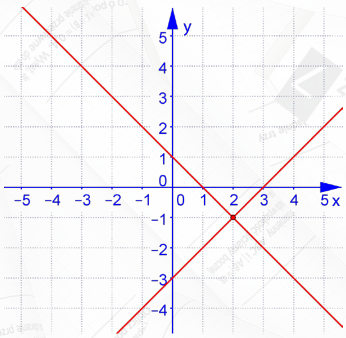
C.



D.



3.2.7. Na rysunku przedstawiono graficznie rozwiązanie układu równań.



Układ ten ma postać:

A. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x - 3 \end{cases}$
C. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$
D. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x - 3 \end{cases}$

3.2.8. Dane są proste $k: y = 2x - 3$ i $l: y = -x + 27$. Proste te przecinają się w punkcie o współrzędnych:

A. $(10; 17)$ **B.** $(-10; 17)$ **C.** $(10; -27)$ **D.** $(10; 27)$

3.2.9. Układ równań $\begin{cases} y = ax + b \\ y = -x + 3 \end{cases}$ będzie sprzeczny dla:

A. $a = 1$ i $b = 1$ **B.** $a = -1$ i $b = 3$ **C.** $a = 1$ i $b = -1$ **D.** $a = -1$ i $b = -3$

3.3 ▶ Nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

DEFINICJA

Nierównością liniową z jedną niewiadomą nazywamy jedną z nierówności: $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$. Litery a i b to parametry (współczynniki liczbowe), natomiast litera x oznacza zmienną. Ponieważ tylkojedna litera oznacza zmienną, dlatego są to nierówności z jedną niewiadomą. Ponadto zmienna ta występuje w pierwszej potędze (czyli $x=x^1$) — stąd mówimy, że są to nierówności pierwszego stopnia lub nierówności liniowe.

	PRZYKŁADY
▶ nierówności $<$ i $>$ nazywamy nierównościami ostrymi (silnymi).	$x-4<0$ $-6x+1>5$
▶ nierówności $\leq$ i $\geq$ nazywamy nierównościami nieostrymi (słabymi).	$\sqrt{5}\,x-\frac{1}{3}\leq 3$ $2x-5\geq\frac{1}{2}$

Rozwiązać nierówność oznacza znaleźć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, które spełniają nierówność, lub stwierdzić, że takie liczby nie istnieją.

Zbiór wszystkich liczb spełniających nierówność nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.

Dwie nierówności nazywamy równoważnymi, jeśli mają one takie same zbiory rozwiązań.

▶ Działania na nierównościach

P.3.3.1

TWIERDZENIA

W celu rozwiązania nierówności posługujemy się następującymi twierdzeniami:

1° Do obu stron nierówności można dodać tę samą liczbę.

2° Od obu stron nierówności można odjąć tę samą liczbę.

3° Obie strony nierówności można pomnożyć przez tę samą liczbę różną od zera,
ale jeśli liczba jest ujemna, należy zmienić znak nierówności na przeciwny.

4° Obie strony nierówności można podzielić przez tę samą liczbę różną od zera,
ale jeśli liczba jest ujemna, należy zmienić znak nierówności na przeciwny.

Powyższe twierdzenia nie zmieniają zbioru rozwiązań określonej nierówności. Po ich zastosowaniu otrzymujemy nierówności równoważne, czyli posiadające, ten sam zbiór rozwiązań.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż nierówność $10x - 3 \geq 17$.

1° Do obu stron nierówności dodajemy liczbę 3.

$$10x - 3 \geq 17 \quad |+3$$
$$10x - 3 + 3 \geq 17 + 3$$
$$10x \geq 20 \quad |:10$$

2° Obie strony nierówności dzielimy przez 10.

$$\frac{\cancel{10}^{1}x}{\cancel{10}_{1}} \geq \frac{\cancel{20}^{2}}{\cancel{10}_{1}}$$
$$x \geq 2$$

3° Zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Nierówność jest spełniona dla $x \in \langle 2; \infty)$.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{5}x + 45 < 0$.

1° Od obu stron nierówności odejmujemy liczbę 45.

$$-\frac{1}{5}x + 45 < 0 \quad |-45$$
$$-\frac{1}{5}x + 45 - 45 < 0 - 45$$
$$-\frac{1}{5}x < -45 \quad |\cdot(-5)$$

2° Obie strony nierówności mnożymy przez -5, zmieniając znak nierówności na przeciwny.

$$-\cancel{5} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{5}}x\right) > -5 \cdot (-45)$$
$$x > 225$$

3° Zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.

Nierówność jest spełniona dla $x \in (225; \infty)$.

▶ Rodzaje nierówności liniowych

P.3.3.2

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż równanie $3(5x - 2) > 2(x + 1) + 5$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$3(5x - 2) > 2(x + 1) + 5$$
$$15x - 6 > 2x + 2 + 5$$

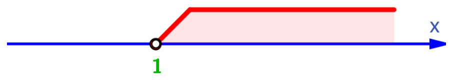
2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a wiadome na prawą stronę nierówności, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$15x - 2x > 2 + 5 + 6$$
$$13x > 13 \quad |:13$$

3° Obie strony równania dzielimy przez 13.

$$x > 1$$

4° Zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.



Rozwiązaniem nierówności jest przedział $x \in (1; \infty)$.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż nierówność $5(4x+2) \le 20\left(x+\frac{1}{4}\right)$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$5(4x+2) \le 20\left(x+\frac{1}{4}\right)$$
$$20x+10 \le 20x+5$$

2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a wiadome na prawą stronę nierówności, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$20x-20x \le 5-10$$
$$0 \le -5$$

Nierówność fałszywa — brak rozwiązań, czyli $x \in \varnothing$.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż nierówność $3(4x+7) > 6(2x-1)$.

1° Wykonujemy mnożenie.

$$3(4x+7) > 6(2x-1)$$
$$12x+21 > 12x-6$$

2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a wiadome na prawą stronę nierówności, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$12x-12x > -6-21$$
$$0 > -27$$

Nierówność prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych, czyli $x \in R$.

► Obliczanie najmniejszej lub największej liczby spełniającej nierówność P.3.3.3

PRZYKŁAD 1

Oblicz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{7}{8}+\frac{5x}{6} \le \frac{x}{12}+1$.

1° Mnożymy obie strony nierówności przez 24.

$$\frac{7}{8}+\frac{5x}{6} \le \frac{x}{12}+1 \quad | \cdot 24$$
$$\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \frac{7}{\underset{1}{\cancel{8}}} + \overset{4}{\cancel{24}} \cdot \frac{5x}{\underset{1}{\cancel{6}}} \le \overset{2}{\cancel{24}} \cdot \frac{x}{\underset{1}{\cancel{12}}} + 24$$
$$21+20x \le 2x+24$$

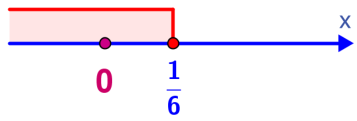
2° Przenosimy niewiadome na lewą stronę nierówności, a wiadome na prawą stronę nierówności, pamiętając o zmianie znaków na przeciwne.

$$20x-2x \le 24-21$$

3° Redukujemy wyrazy podobne i wyznaczamy x.

$$18x \leq 3 \quad \Big| : 18$$
$$x \leq \frac{3}{18}$$
$$x \leq \frac{1}{6}$$

4° Zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej.



5° Odczytujemy największą liczbę całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności.

Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność jest 0.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.3.1. Rozwiąż nierówność:

a. $10x-12 \leq 2x+8$

b. $6(2x-1) < 21+3x$

c. $2(x+3)-(x-1) > 3(2-x)+x-7$

d. $3(2x-3) \leq 2x-3-4(1-x)$

e. $\frac{x+2}{3}-\frac{x}{6} \geq \frac{1}{2}x-4$

f. $\frac{5x-2}{3}+\frac{x}{6} < \frac{x+2}{10}$

g. $\frac{x+5}{2} \geq \frac{6x+5}{3}+x$

h. $\frac{2x-3}{7}+\frac{1}{28} < \frac{x+4}{4}-1$

3.3.2. Rozwiąż nierówność:

a. $(x-1)(x+1) > (x+3)^2-4x$

b. $6(x^2-5)+x < (2x-1)(3x+2)$

c. $\frac{(x+1)(x-3)}{2} \geq \frac{(3x+2)x}{6}-\frac{4}{3}x$

d. $\frac{(x+2)(x-2)}{4} < \frac{x(4x-3)}{16}$

e. $\frac{(x+3)^2}{5} \geq \frac{(2x+3)(2x-3)}{20}+\frac{3}{10}$

3.3.3. Znajdź największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{(4x-1)^2}{8} \geq \frac{(2x+1)^2}{3}+\frac{(2x-1)(2x+1)}{6}$.

3.3.4. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $\frac{(x+3)^2}{5} > \frac{(2x+6)(2x-6)}{20}$.

3.3.5. Rozwiąż nierówność:

a. $\sqrt{2}\,x-8 > 4$

b. $\sqrt{3}\,x+2\sqrt{3} > 6$

c. $\sqrt{5}\,x+10 \leq 15-5x$

d. $2\sqrt{2}\,x-6 \geq 2x-2\sqrt{2}$

3.3.6. Do zbioru rozwiązań nierówności $(3x-4)x+5 \le (3x+1)(x-3)$ należy liczba:

A. 1 **B.** 2 **C.** -3 **D.** -1

3.3.7. Zbiorem rozwiązań nierówności $5x(x-1)-8x < (x-3)(5x+2)$ jest przedział:

A. $x \in \varnothing$ **B.** $x \in (-6; \infty)$ **C.** $x \in R$ **D.** $x \in (-\infty; -6\rangle$

3.3.8. Nierówność $x-\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{3} > 3\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{7}{6}$:

A. nie ma rozwiązań,

B. ma jedno rozwiązanie,

C. ma tylko rozwiązania dodatnie,

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3.3.9. Najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \le \frac{2}{3}x$ jest:

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** -2

3.3.10. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2-x}{3}-\frac{2x+1}{2} \le \frac{x}{6}$ jest przedział:

A. $\left(\frac{1}{9}; \infty\right)$ **B.** $\left(-\infty; -\frac{1}{9}\right\rangle$ **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$ **D.** $\left\langle\frac{1}{9}; \infty\right)$

3.3.11. Największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $\frac{x}{2}+\frac{3}{4} \le \frac{2x}{5}+1$ jest:

A. 3 **B.** 2 **C.** -2 **D.** -3

3.3.12. Przedział $(-\infty; 2)$ jest zbiorem rozwiązań nierówności:

A. $\frac{x}{2} < 2x$ **B.** $\frac{x+2}{2} > -2$ **C.** $\frac{x}{2} < \frac{x+2}{4}$ **D.** $2(x+2) \ge x-2$

3.3.13. Liczba -5 nie spełnia nierówności:

A. $\frac{x+5}{2} < 3$ **B.** $(x+5)^2 \le 1$ **C.** $\frac{2x-5}{3} > -2$ **D.** $x+3 < 3(x+5)$

3.3.14. Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4} \le 13$ jest przedział:

A. $x \in (13; \infty)$ **B.** $x \in (156; \infty)$ **C.** $x \in (-\infty; 12\rangle$ **D.** $x \in \langle 12; \infty)$

3.3.15. Zbiorem rozwiązań nierówności $\sqrt{5}\,x+x < 4$ jest przedział:

A. $x \in (-\infty; \sqrt{5})$ **B.** $x \in (\sqrt{5}-1; \infty)$ **C.** $x \in (\sqrt{5}+1; \infty)$ **D.** $x \in (-\infty; \sqrt{5}-1)$

3.B ► Sposoby rozwiązywania układów równań liniowych

DEFINICJA

Rozwiązaniem układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy każdą parę liczb $(x; y)$, która spełnia jednocześnie oba równania układu.

Aby rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, należy wyznaczyć wszystkie jego rozwiązania lub stwierdzić, że zbiór rozwiązań jest pusty.

► Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda podstawiania

P.3.B.1

Polega na wyliczeniu jednej ze zmiennych z dowolnego równania wchodzącego w skład układu, a następnie na zastąpieniu tej zmiennej w drugim równaniu. Wówczas otrzymamy równanie liniowe z jedną niewiadomą. Rozwiązujemy je, uzyskując wartość jednej zmiennej. Potem obliczamy drugą zmienną.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$ metodą podstawiania.

1° Z pierwszego równania wyznaczamy y.

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 8 - 3x \quad | \cdot (-1) \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -8 + 3x \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$

2° Wyznaczoną wartość y podstawiamy do drugiego równania, otrzymując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} y = -8 + 3x \\ -x + 2(-8 + 3x) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -8 + 3x \\ -x - 16 + 6x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -8 + 3x \\ -x + 6x = -1 + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -8 + 3x \\ 5x = 15 \quad | : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -8 + 3x \end{cases}$$

3° Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania.

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -8 + 3 \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

4° Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(3; 1)$. Układ jest oznaczony.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} -2x + 2y - 12 = 0 \\ x - y = -6 \end{cases}$ metodą podstawiania.

1° Z pierwszego równania wyznaczamy y.

$$\begin{cases} -2x + 2y - 12 = 0 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 2x + 12 \quad |:2 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ x - y = -6 \end{cases}$$

2° Wyznaczoną wartość y podstawiamy do drugiego równania, otrzymując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ x - (x + 6) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ x - x - 6 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

3° $0 = 0$ jest to równość prawdziwa, więc rozwiązaniem układu równań jest nieskończenie wiele liczb postaci $(x; x + 6)$. Układ jest nieoznaczony.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ -4\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}y = -10 \end{cases}$ metodą podstawiania.

1° Z pierwszego równania wyznaczamy y.

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ -4\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ -4\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}y = -10 \end{cases}$$

2° Wyznaczoną wartość y podstawiamy do drugiego równania, otrzymując równanie liniowe z jedną niewiadomą.

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ -4\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}(-3x + 8) = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ -4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}x - 12 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 8 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

3° $0 = 2$ jest to równość fałszywa dla każdej liczby rzeczywistej, więc układ równań nie ma rozwiązania. Układ jest sprzeczny.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.B.1. Rozwiąż układy równań metodą podstawiania:

a. $\begin{cases} \frac{y}{2} + x = 6 \\ x = \frac{y}{4} - 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 4 \\ 3x - y = 12 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2(x-y) = 16 \\ x - 2y = 12 \end{cases}$

d. $\begin{cases} (x+2)(y-3) = x^2 - 7 \\ y = x \end{cases}$

Metoda przeciwnych współczynników

P.3.B.2

Polega na takim uporządkowaniu równań w układzie, aby po dodaniu równań stronami jedna ze zmiennych się zredukowała. Wymaga to, aby współczynniki przy określonej zmiennej były liczbami przeciwnymi. Po dodaniu stronami pozostanie nam równanie liniowe z jedną niewiadomą. Rozwiązujemy je, uzyskując wartość jednej zmiennej. Potem obliczamy drugą zmienną.

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ 6x - 7y = -8 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

1° Pierwsze równanie mnożymy stronami przez 6, a drugie przez -5, aby współczynniki liczbowe przy zmiennej x były liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} 5x + 8y = 21 & |\cdot 6 \\ 6x - 7y = -8 & |\cdot(-5) \end{cases}$$

2° Dodajemy równania stronami, czyli prawe strony równań dodajemy do siebie i lewe strony równań dodajemy do siebie, redukując zmienną x i otrzymując w ten sposób równanie liniowe z jedną niewiadomą.

$$+\begin{cases} \cancel{30x} + 48y = 126 \\ -\cancel{30x} + 35y = 40 \end{cases}$$

$$83y = 166 \quad |:83$$

3° Dzielimy obie strony równania przez 83, otrzymując wartość y.

$$y = 2$$

4° Tworzymy nowy układ równań, którego jednym z równań jest wartość obliczonej niewiadomej y, a drugim dowolne równanie układu początkowego.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 5x + 8y = 21 \end{cases}$$

5° Podstawiamy wartość y do drugiego równania i obliczamy wartość x.

$$\begin{cases} y = 2 \\ 5x + 8 \cdot 2 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 5x + 16 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 5x = 21 - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ 5x = 5 \quad \big| : 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

6° Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(1; 2)$. Układ jest oznaczony.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -3x + 1\frac{1}{2}y = -9 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

1° Pierwsze równanie mnożymy stronami przez 3, a drugie przez 2, aby współczynniki liczbowe przy zmiennej x były liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 & \big| \cdot 3 \\ -3x + 1\frac{1}{2}y = -9 & \big| \cdot 2 \end{cases}$$

2° Dodajemy równania stronami, czyli prawe strony równania dodajemy do siebie i lewe strony równania dodajemy do siebie.

$$+\begin{cases} 6x - 3y = 18 \\ -6x + 3y = -18 \end{cases}$$
$$0 = 0$$

3° Wyznaczamy y z pierwszego równania.

$$y = 2x - 6$$

4° $0 = 0$ jest to równość prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej, więc rozwiązaniem układu równań jest nieskończenie wiele par liczb postaci $(x; 2x - 6)$. Układ jest nieoznaczony.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ x - \frac{5}{4}y = 4 \end{cases}$ metodą przeciwnych współczynników.

1° Drugie równanie mnożymy przez -4, aby współczynniki liczbowe przy zmiennej x były liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ x - \frac{5}{4}y = 4 & \big| \cdot (-4) \end{cases}$$

2° Dodajemy równania stronami, czyli prawe strony równania dodajemy do siebie i lewe strony równania dodajemy do siebie.

$$+\begin{cases} 4x - 5y = 12 \\ -4x + 5y = -16 \end{cases}$$
$$0 = -4$$

3° $0 = -4$ jest to równość fałszywa dla każdej liczby rzeczywistej, więc układ równań nie ma rozwiązania. Układ jest sprzeczny.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.B.2. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników:

a. $\begin{cases} x+2y=102 \\ -3x+4y=-296 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 7x+8y=15 \\ -9x+5y=-4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{3x+4y}{2}=6 \\ \dfrac{5x-y}{3}=-1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2(x+1)=3(y+2) \\ 6x=7y-4 \end{cases}$

► Układy równań z parametrem

PRZYKŁAD 1

Oblicz wartość a, dla której układ równań $\begin{cases} ax+5y=10 \\ 4x-15y=-30 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

1° Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 3, aby współczynniki liczbowe przy zmiennej y i wyrazy wolne były liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} ax+5y=10 & \vert\cdot 3 \\ 4x-15y=-30 \end{cases}$$

2° Po dodaniu równań stronami powinniśmy otrzymać równość $0=0$, aby układ był nieoznaczony, czyli posiadał nieskończenie wiele rozwiązań.

$$+\begin{cases} 3ax+\cancel{15y}=\cancel{30} \\ 4x-\cancel{15y}=-\cancel{30} \end{cases}$$

$$0\overset{?}{=}0$$

3° Współczynniki liczbowe przy zmiennej y i wyrazy wolne się skracają, więc, aby otrzymać równość $0=0$, suma współczynników przy zmiennej x musi być również równa zero.

$$3a+4=0$$
$$3a=-4 \quad \vert : 3$$
$$a=-\frac{4}{3}$$

4° Dla $a=-\frac{4}{3}$ układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

PRZYKŁAD 2

Oblicz wartość a, dla której układ równań $\begin{cases} ax+y=8 \\ 6x-2y=-10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań.

1° Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 2, aby współczynniki liczbowe przy zmiennej y były liczbami przeciwnymi.

$$\begin{cases} ax+y=8 & \vert\cdot 2 \\ 6x-2y=-10 \end{cases}$$

2° Po dodaniu równań stronami powinniśmy otrzymać równość fałszywą, aby układ był sprzeczny, czyli nie miał rozwiązań.

$$+\begin{cases} 2ax+2y=16 \\ 6x-2y=-10 \end{cases}$$

$$0\overset{?}{=}6$$

3° Aby otrzymać równość $0=6$, suma współczynników przy zmiennej x powinna wynosić zero.

$$2a+6=0$$
$$2a=-6 \quad \vert : 2$$
$$a=-3$$

4° Dla $a=-3$ układ równań nie ma rozwiązań.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.B.3. Określ, dla jakiego parametru k układ równań $\begin{cases} kx+5y=6 \\ (2k+1)x-3y=7 \end{cases}$ jest sprzeczny.

3.B.4. Określ, dla jakiego parametru a układ równań $\begin{cases} 3x+2ay=-1 \\ -3x+(a+3)y=1 \end{cases}$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

3.B.5. Rozwiąż układ równań:

a. $\begin{cases} (x-2)^2+y=(x-3)(x+3) \\ y-x=-7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (x+2)(x-3)=(x+3)^2-y-2 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$

3.B.6. Do równania $x-4y=5$ dopisz drugie równanie, tak aby otrzymać układ równań:

a. oznaczony,

b. nieoznaczony,

c. sprzeczny.

3.B.7. Dany jest układ równań $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2 \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{2}=-1 \end{cases}$. Sprawdź, czy rozwiązaniem układu jest para liczb:

a. $(-4;3)$

b. $(2;3)$

3.B.8. Rozwiąż dowolną metodą układ równań:

a. $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ -x+3y-z=2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ x-y-3z=0 \\ -x+y+z=-2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a+b=c \\ 2(a+b)=c+5 \\ a-b+c=4 \end{cases}$

d.* $\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ 2a+b-c+d=2 \\ a-b+c-d=-2 \\ a+2b+c+d=7 \end{cases}$

► Zadania tekstowe z wykorzystaniem układów równań liniowych

PRZYKŁAD 1

P.3.B.3

Suma dwóch liczb jest równa 80, a różnica podwojonej drugiej liczby i połowy pierwszej liczby jest równa 85. Znajdź te liczby.

1° Określamy niewiadome i zależności wynikające z treści zadania.

x — I liczba
y — II liczba

$x+y=80$

$2y-\frac{1}{2}x=85$

2° Układamy układ równań.

$$\begin{cases} x+y=80 \\ 2y-\frac{1}{2}x=85 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

3° Rozwiązujemy układ równań metodą przeciwnych współczynników.

3.1° Drugie równanie mnożymy obustronnie przez 2.

3.2° Dodajemy równania stronami.

$$+\begin{cases} \cancel{x}+y=80 \\ -\cancel{x}+4y=170 \end{cases}$$
$$5y=250 \quad |:5$$
$$y=50$$

3.3° Tworzymy nowy układ równań i obliczamy wartość x.

$$\begin{cases} y=50 \\ x+y=80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=50 \\ x+50=80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=50 \\ x=80-50=30 \end{cases}$$

4° Formułujemy odpowiedź.

Szukane liczby to 30 i 50.

PRZYKŁAD 2

P.3.B.4

Ojciec i syn mają razem 45 lat. 5 lat temu ojciec był sześć razy starszy od syna. Oblicz, ile lat ma obecnie każdy z nich.

1° Określamy niewiadome i zależności wynikające z treści zadania.

x — wiek ojca obecnie
y — wiek syna obecnie
$x-5$ — wiek ojca 5 lat temu
$y-5$ — wiek syna 5 lat temu

$x+y=45$
$x-5=6(y-5)$

2° Układamy układ równań.

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-5=6(y-5) \end{cases}$$

3° Rozwiązujemy układ równań metodą przeciwnych współczynników.

3.1° Wykonujemy mnożenie i przekształcamy drugie równanie.

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-5=6y-30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=45 \\ x-6y=-25 \quad |\cdot(-1) \end{cases}$$

3.2° Dodajemy równania stronami.

$$+\begin{cases} \cancel{x}+y=45 \\ -\cancel{x}+6y=25 \end{cases}$$
$$7y=70 \quad |:7$$
$$y=10$$

3.3° Tworzymy nowy układ równań i obliczamy wartość x.

$$\begin{cases} y = 10 \\ x + y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ x + 10 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 45 - 10 = 35 \end{cases}$$

4° Formułujemy odpowiedź.

Ojciec ma obecnie 35 lat, a syn 10 lat.

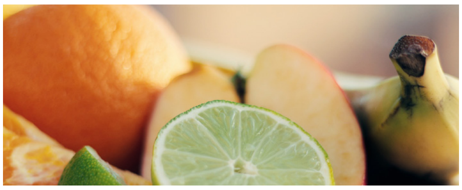
ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.B.9. Różnica dwóch liczb wynosi 20. Jeżeli pierwszą liczbę zmniejszymy o 20%, a drugą zwiększymy o 20%, to suma tych liczb będzie równa 56. Znajdź te liczby.

3.B.10. Obwód prostokąta wynosi 80. Jeżeli dłuższy bok zmniejszymy dwa razy, a krótszy zwiększymy o 11, to obwód tego prostokąta nie zmieni się. Oblicz długości boków prostokąta.

3.B.11. Matka i córka mają razem 54 lata. Za 9 lat matka będzie dwa razy starsza od córki. Oblicz, ile lat ma obecnie każda z nich.

3.B.12. Kamil na swoje przyjęcie urodzinowe kupił 8 kg pomarańczy i bananów za łączną kwotę 34 zł. Cena jednego kilograma pomarańczy wynosiła 5 zł, a jednego kilograma bananów 3 zł. Oblicz, ile kilogramów owoców każdego rodzaju kupił Kamil.



ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.B

3.B.13. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $x = -1$ i $y = 5$

B. $x = -1$ i $y = -5$

C. $x = 1$ i $y = 5$

D. $x = 1$ i $y = -5$

3.B.14. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ jest para liczb (x, y) takich, że:

A. $x < 0$ i $y < 0$

B. $x < 0$ i $y > 0$

C. $x > 0$ i $y < 0$

D. $x > 0$ i $y > 0$

3.B.15. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5x + 3y = 44 \\ 8x - 6y = 56 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $x = -8$ i $y = 1\frac{1}{3}$

B. $x = 8$ i $y = -1\frac{1}{3}$

C. $x = 8$ i $y = 1\frac{1}{3}$

D. $x = -8$ i $y = -1\frac{1}{3}$

3.B.16. Układ równań $\begin{cases} 4x - 2y = -9 \\ -x + \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$:

A. nie ma rozwiązań,

B. ma jedno rozwiązanie,

C. ma nieskończenie wiele rozwiązań,

D. ma dokładnie dwa rozwiązania.

3.B.17. Układ równań $\begin{cases} ax + 4y = 7 \\ 6x - 12y = -21 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli wartość a jest równa:

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** -2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

3.B.18. Dane jest równanie $2x + 3y - 6 = 0$. Równanie, z którym tworzy ono układ nieoznaczony, to:

A. $-7x - 10\frac{1}{2}y + 21 = 0$

B. $-14x + 21y - 42 = 0$

C. $6y - 4x + 12 = 0$

D. $-x + 1\frac{1}{2}y = 3$

3.B.19. Suma dwóch liczb wynosi 44, a ich różnica 22. Te liczby to:

A. 32 i 12 **B.** 44 i 22 **C.** 33 i 11 **D.** 30 i 14

3.B.20. W sklepie wystawiono komputer z drukarką w cenie 3200 zł za komplet. W promocji obniżono cenę komputera o 20%, a drukarki o 30%. Cena pakietu po obniżkach wynosiła 2480 zł. Cena początkowa drukarki to:

A. 720 zł **B.** 1200 zł **C.** 600 zł **D.** 800 zł

3.B.21. Klasa IIIB liczy 30 osób. Na wycieczkę klasową pojechało 80% dziewcząt i 90% chłopców tej klasy — łącznie 25 osób. Jeśli x — oznacza liczbę dziewcząt, a y — liczbę chłopców, to przedstawioną sytuację można opisać układem równań postaci:

A. $\begin{cases} x + y = 25 \\ 80x + 90y = 30 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 80x + 90y = 25 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 25 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 25 \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 30 - 25 \end{cases}$

3.B.22. Dany jest układ równań $\begin{cases} k + l = 23 \\ 2k - 5l = 25 \end{cases}$. Wynika z tego, że:

A. $k > l$ **B.** $l \geq k$ **C.** $k - 13 = 2l$ **D.** $l - k + 5 = 18$

3.4 ▶ Równania kwadratowe z jedną niewiadomą

DEFINICJA

Równaniem kwadratowym (równaniem stopnia drugiego) z jedną niewiadomą nazywamy równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, gdzie litery a, b, c oznaczają parametry (współczynniki liczbowe), a litera x oznacza zmienną.

WYJAŚNIENIA

Aby rozwiązać równanie z niewiadomą x, należy wyznaczyć wszystkie wartości x, dla których równanie jest spełnione. Zbiór wszystkich x nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Rozwiązania równania nazywamy również pierwiastkami równania.

Do rozwiązania równania kwadratowego korzystamy z własności funkcji kwadratowej. Przypomnijmy, że funkcja kwadratowa może mieć jedno miejsce zerowe, dwa miejsca zerowe lub w ogóle może ich nie mieć.

Liczba miejsc zerowych zależy od wyróżnika Δ (delty).

Wyznaczając miejsca zerowe funkcji kwadratowej, wyznaczamy tym samym rozwiązania równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$.

Wyróżnik Δ (deltę) obliczamy ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

TWIERDZENIA

Dla równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ zachodzi:

$\Delta < 0$	równanie nie ma rozwiązania	—
$\Delta = 0$	równanie ma jedno rozwiązanie	$x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta > 0$	równanie ma dwa rozwiązania	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

PRZYKŁAD 1

P.3.4.1

Rozwiąż równanie $x^2 - 3x - 4 = 0$.

1° Obliczamy wyróżnik Δ ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

2° $\Delta = 25 > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

3° Obliczamy rozwiązania równania ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{3-5}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{3+5}{2\cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $x^2 - 6x - 7 = 0$.

1° Obliczamy wyróżnik Δ ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(-7) = 36 + 28 = 64$

2° $\Delta = 64 > 0$, więc równanie ma dwa rozwiązania.

3° Obliczamy rozwiązania równania ze wzorów: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

$x_1 = \frac{6-8}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{6+8}{2\cdot 1} = \frac{14}{2} = 7$

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $x^2 + 4x + 4 = 0$.

1° Obliczamy wyróżnik Δ ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 16 - 16 = 0$

2° $\Delta = 0$, więc równanie ma jedno rozwiązanie.

3° Obliczamy rozwiązanie równania ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

$x_0 = \frac{-4}{2\cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż równanie $8x^2 - 5x + 1 = 0$.

1° Obliczamy wyróżnik Δ ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 8\cdot 1 = 25 - 32 = -7$

2° $\Delta < 0$, więc równanie nie ma rozwiązania.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 5. Rozwiąż równanie $-x^2 + 4x + 7 = 0$.

PRZYKŁAD 6. Rozwiąż równanie $-5x^2 + 2x + 3 = 0$.

PRZYKŁAD 7. Rozwiąż równanie $-x^2 + x + 4 = 0$.

PRZYKŁAD 8. Rozwiąż równanie $4x^2 + 7x - 2 = 0$.

PRZYKŁAD 9. Rozwiąż równanie $-8x^2 + 5x - 1 = 0$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.4.1. Rozwiąż równanie:

a. $2x^2 - x - 3 = 0$

b. $12x^2 - x - 1 = 0$

c. $-x^2 - 4x + 77 = 0$

d. $x^2 - x - 3 = 0$

e. $3x^2 + 5x = 0$

f. $x^2 + 64 = 0$

► Rodzaje równań kwadratowych

Można zauważyć, że istnieją równania kwadratowe, w których mogą nie występować wszystkie trzy współczynniki liczbowe, tzn. współczynnik b lub c jest równy zero.

RÓWNANIE KWADRATOWE	POSTAĆ	PRZYKŁAD
zupełne	$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$	$2x^2 + 4x - 3 = 0$
niezupełne	$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ i $(b = 0$ lub $c = 0)$	$4x^2 = 0$ $5x^2 + 3x = 0$ $2x^2 - 6 = 0$

Biorąc pod uwagę współczynniki liczbowe a, b, c, można wyróżnić 5 możliwych postaci równań kwadratowych po uproszczeniu. W przypadku równań niezupełnych możemy obliczyć rozwiązania, posługując się krótszymi metodami niż z wykorzystaniem wyróżnika Δ.

Rodzaje równań kwadratowych — możliwe postaci po uproszczeniu

P.3.4.2

RODZAJ 1			PRZYKŁAD
Postać ogólna	$ax^2 + bx + c = 0,$ $a \neq 0$	W takim przypadku liczymy deltę i rozwiązania równania ze wzorów.	$x^2 + 3x - 4 = 0$ $\Delta = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$ $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$ $x_1 = -4 \quad x_2 = 1$

RODZAJ 2			PRZYKŁAD
Postać, w której $c = 0$	$ax^2 + bx = 0,$ $a \neq 0$	W takim przypadku wyłączamy x przed nawias. Jednym z rozwiązań zawsze będzie zero.	$x^2 + 5x = 0$ $x(x+5) = 0$ $x_1 = 0 \quad x_2 = -5$

RODZAJ 3			PRZYKŁAD
Postać, w której $b = 0$ oraz $a > 0$ i $c > 0$	$ax^2 - c = 0,\ a \neq 0$ lub $-ax^2 + c = 0,\ a \neq 0$	W takim przypadku stosujemy wzór skróconego mnożenia.	$x^2 - 9 = 0$ $(x-3)(x+3) = 0$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -3$
RODZAJ 4			**PRZYKŁAD**
Postać, w której $b = 0$ oraz $a > 0$ i $c > 0$	$ax^2 + c = 0,\ a \neq 0$ lub $-ax^2 - c = 0,\ a \neq 0$	W takim przypadku równania nie mają pierwiastków, czyli rozwiązań.	$x^2 + 9 = 0$ $-2x^2 - 7 = 0$ Takie równania nie mają rozwiązań, czyli $x \in \varnothing$
RODZAJ 5			**PRZYKŁAD**
Postać iloczynowa	$a(x - x_1)(x - x_2) = 0,$ $a \neq 0$	W takim przypadku rozwiązaniami równania są rozwiązania poszczególnych czynników (nawiasów).	$(x-3)(x+8) = 0$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -8$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.4.2. Rozwiąż równanie:

a. $x^2 + 11x = 0$

b. $4x^2 - 25 = 0$

c. $-x^2 - 121 = 0$

d. $(4x - 2)(x + 1) = 0$

e. $x^2 - 7x = 0$

f. $64 - 9x^2 = 0$

g. $(x - 7)(3x - 9) = 0$

h. $2x^2 + 16 = 0$

3.4.3. Rozwiąż równanie:

a. $x(x + 7) = 2(x - 2)$

b. $(x - 3)^2 = (2x + 1)^2 + 11$

c. $\frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{7}\,x}{3}$

d. $4(1 - x) = (x + 2)^2$

e. $(x - 3)(x + 2) = (2x - 3)(x + 1)$

f. $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = x^2 + 4$

► Zadania tekstowe z wykorzystaniem równań kwadratowych

PRZYKŁAD P.3.4.3

Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne takie, że suma kwadratów tych liczb jest równa 86.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

n — I liczba całkowita, $n \in N$
$n + 1$ — II liczba całkowita

$n+2$ — III liczba całkowita
$n+3$ — IV liczba całkowita

2° Układamy równanie, zapisując sumę kwadratów czterech kolejnych liczb i przyrównując ją do 86.

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=86$$

3° Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ i porządkujemy równanie.

$$n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4+n^2+6n+9=86$$
$$4n^2+12n-72=0 \quad \big|:4$$
$$n^2+3n-18=0$$

4° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

4.1° Obliczamy deltę ze wzoru: $\Delta=b^2-4ac$.

$$\Delta=3^2-4\cdot1\cdot(-18)=9+72=81$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{81}=9$$

4.2° Obliczamy pierwiastki równania ze wzoru: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$n_{1,2}=\frac{-3\pm9}{2\cdot1}=\begin{cases}-6\notin N\\ 3\end{cases}$$

5° Skoro $n=3$, to wyznaczamy pozostałe liczby.

$$n=3$$
$$n+1=3+1=4$$
$$n+2=3+2=5$$
$$n+3=3+3=6$$

6° Szukane liczby to 3, 4, 5, 6.

PRZYKŁAD P.3.4.4

Pewien turysta pokonał trasę 90 km, przechodząc co dzień tę samą liczbę kilometrów. Gdyby każdego dnia szedł o 3 km więcej, to czas wędrówki byłby krótszy o jeden dzień. Ile kilometrów pokonywał turysta każdego dnia?

1° Wprowadzamy oznaczenia.

x — liczba kilometrów pokonanych każdego dnia
y — liczba dni wędrówki

2° Układamy pierwsze równanie.

$$x\cdot y=90$$

3° Drugie równanie układamy analogicznie. Skoro turysta każdego dnia pokonywałby o 3 km więcej, to przeszedłby całą trasę 90 km w czasie o 1 dzień krótszym.

$$(x+3)(y-1)=90$$

4° Rozwiązujemy powstały układ równań.

$$\begin{cases}xy=90\\(x+3)(y-1)=90\end{cases}$$

5° Zajmijmy się najpierw drugim równaniem, wykonując mnożenie.

$$xy-x+3y-3=90$$

6° Korzystając z zależności z pierwszego równania, możemy te same wartości skrócić w drugim równaniu.

$$\cancel{xy}-x+3y-3=\cancel{90}$$

7° Wyznaczamy x.

$$-x=-3y+3 \quad \big|\cdot(-1)$$
$$x=3y-3$$

8° Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania.

$(3y-3)y=90$

9° Wykonujemy mnożenie i rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$3y^2-3y-90=0 \quad |:3$$
$$y^2-y-30=0$$

$$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-30)=121$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{121}=11$$
$$y_1=\frac{1-11}{2\cdot1}=\frac{-10}{2}=-5\notin R_+$$
$$y_2=\frac{1+11}{2\cdot1}=\frac{12}{2}=6 \text{ dni}$$

10° Podstawiamy wynik za y do równania z wyznaczoną wartością x.

$x=3y-3=3\cdot6-3=18-3=15$ km

11° Turysta pokonywał każdego dnia 15 kilometrów.

PRZYKŁAD

P.3.4.5

Samochód pokonał trasę z miasta A do miasta B (480 km) w pewnym czasie. Gdyby jechał o 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ szybciej, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał samochód.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

v — średnia szybkość samochodu
t — czas przejazdu samochodu

2° Układamy pierwsze równanie, pamiętając, że droga $s=v\cdot t$.

$v\cdot t=480$

3° Drugie równanie układamy analogicznie. Gdyby samochód jechał średnio o 20 km szybciej, to pokonałby tę samą trasę w czasie o 2 godziny krótszym.

$(v+20)(t-2)=480$

4° Tworzymy układ równań, który rozwiązujemy.

$$\begin{cases} v\cdot t=480 \\ (v+20)(t-2)=480 \end{cases}$$

5° Zajmijmy się najpierw drugim równaniem, wykonując mnożenie.

$vt-2v+20t-40=480$

6° Korzystając z zależności z pierwszego równania, możemy te same wartości skrócić w drugim równaniu.

$\cancel{vt}-2v+20t-40=\cancel{480}$

7° Wyznaczamy v.

$$-2v=-20t+40 \quad |:(-2)$$
$$v=10t-20$$

8° Wyznaczoną wartość v podstawiamy do pierwszego równania.

$$v\cdot t=480$$
$$(10t-20)t=480$$

9° Wykonujemy mnożenie i rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$10t^2-20t-480=0 \quad |:10$$
$$t^2-2t-48=0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 4 + 192 = 196$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$
$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-14}{2} = -6 \notin R_+$$
$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+14}{2} = 8 \text{ godzin}$$

10° Powracamy do równania $v = 10t - 20$ i podstawiamy za t wyznaczoną wartość.

$$v = 10t - 20$$
$$v = 10 \cdot 8 - 20 = 80 - 20 = 60$$

11° Średnia prędkość samochodu wynosiła 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

PRZYKŁAD

P.3.4.6

Odległość między miastami X i Y wynosi 900 km. Pociąg ekspresowy wyjeżdża z miasta X w kierunku miasta Y, a pociąg osobowy z miasta Y do miasta X. Pociąg osobowy wyruszył w trasę o cztery godziny wcześniej niż pociąg ekspresowy i jechał ze średnią prędkością o 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejszą niż drugi pociąg. Oblicz średnie prędkości obu pociągów, jeżeli wiadomo, że pociągi te minęły się w połowie drogi.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

v — średnia prędkość pociągu osobowego
t — czas przejazdu pociągu osobowego do momentu mijania
$v + 40$ — średnia prędkość pociągu ekspresowego
$t - 4$ — czas przejazdu pociągu ekspresowego do momentu mijania

2° Układamy pierwsze równanie, odnoszące się do pociągu osobowego, pamiętając, że droga $s = v \cdot t$, a pociągi minęły się w połowie drogi, czyli po 450 km.

$$v \cdot t = 450$$

3° Układamy drugie równanie, odnoszące się do pociągu ekspresowego w analogiczny sposób.

$$(v+40)(t-4) = 450$$

4° Tworzymy układ równań, który rozwiązujemy.

$$\begin{cases} v \cdot t = 450 \\ (v+40)(t-4) = 450 \end{cases}$$

5° Zajmijmy się najpierw drugim równaniem, wykonując mnożenie.

$$vt - 4v + 40t - 160 = 450$$

6° Korzystając z zależności z pierwszego równania, możemy te same wartości skrócić w drugim równaniu.

$$\cancel{vt} - 4v + 40t - 160 = \cancel{450}$$

7° Wyznaczamy v.

$$-4v = -40t + 160 \quad |:(-4)$$
$$v = 10t - 40$$

8° Wyznaczoną wartość v podstawiamy do pierwszego równania.

$$v \cdot t = 450$$
$$(10t - 40)t = 450$$

9° Wykonujemy mnożenie i rozwiązujemy równanie kwadratowe.

$$10t^2 - 40t - 450 = 0 \quad |:10$$
$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$$
$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 14}{2} = -5 \notin R_+$$
$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 14}{2} = 9 \text{ godzin}$$

10° Obliczamy prędkość pociągu osobowego, podstawiając za $t = 9$ do wzoru: $v = 10t - 40$.

$$v = 10 \cdot 9 - 40 = 90 - 40 = 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

11° Obliczamy prędkość pociągu ekspresowego, korzystając z zależności, że jego prędkość jest o $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa od prędkości pociągu osobowego.

$$v + 40 = 50 + 40 = 90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

12° Średnia prędkość pociągu osobowego wynosiła $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a ekspresowego $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.4.4. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych wynosi 116. Wyznacz te liczby.

3.4.5. Prostokątna działka ma powierzchnię 420 m^2. Jeśli zwiększono by każdy wymiar działki o 2 m, to jej powierzchnia wzrosłaby o 92 m^2. Oblicz wymiary tej działki.

Z.3.4.5

3.4.6. Samochód pokonał trasę z Mińska Mazowieckiego do Zakopanego (450 km) w pewnym czasie. Gdyby jechał średnio o 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ szybciej, to pokonałby tę trasę w czasie o 2,5 godziny krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał samochód.

Z.3.4.6

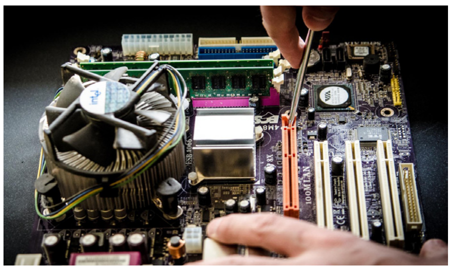
3.4.7. Dwa pociągi wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 720 km. Pociąg jadący z miasta A do B wyjechał o dwie godziny wcześniej niż jadący z miasta B do A, a jego średnia prędkość była o 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od średniej prędkości drugiego pociągu. Pociągi minęły się w połowie drogi. Oblicz średnie prędkości obu pociągów.

Z.3.4.7

3.4.8. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest o 7 dłuższa od drugiej przyprostokątnej, a przeciwprostokątna ma długość 17. Oblicz długości przyprostokątnych tego trójkąta.

3.4.9. Kwadrat liczby powiększony o 3 jest równy podwojonej sumie tej liczby oraz liczby 9. Znajdź tę liczbę.

3.4.10. Pan Jan składa komputery. W ciągu kilku dni złożył ich 24. Gdyby codziennie składał o 2 komputery więcej, to pracowałby o dzień krócej. Ile dni pracował pan Jan?



3.4.11. Rozwiązaniem równania $x(x-3)=17x$ są liczby:

A. 0 i 20 **B.** -20 i 20 **C.** $-2\sqrt{5}$ i $2\sqrt{5}$ **D.** -20 i 0

3.4.12. Równanie $3x^2-7x+8=2x-3$:

A. ma dwa rozwiązania,

B. ma jedno rozwiązanie,

C. nie ma rozwiązań,

D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

3.4.13. Pierwiastkami równania $6x^2-9=0$ są:

A. dwie liczby wymierne,

B. dwie liczby niewymierne,

C. liczby, z których jedna jest całkowita,

D. liczby, z których jedna jest wymierna.

3.4.14. Suma pierwiastków równania $x^2-7x-8=0$ wynosi:

A. $-3\frac{1}{2}$ **B.** $3\frac{1}{2}$ **C.** 7 **D.** -7

3.4.15. Równanie $x^2+bx+4=0$ ma jedno rozwiązanie. Jest to możliwe dla:

A. $b=2$ **B.** $b=3$ **C.** $b=4$ **D.** $b=-2$

3.4.16. Rozwiązanie równania $x(x-3)=2x^2+x+4$ należy do przedziału:

A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(2;\infty)$ **C.** $\langle 2;\infty)$ **D.** $(-\infty;-2\rangle$

3.4.17. Kwadrat liczby naturalnej jest równy sumie tej liczby oraz liczby 6. Liczba ta jest równa:

A. 3 **B.** 6 **C.** -3 **D.** -2

3.4.18. Pierwiastki x_1, x_2 równania $2(x+5)(x-4)=0$ spełniają warunek:

A. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$

C. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{20}$

D. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{9}{20}$

3.4.19. Równanie $\pi x^2+\sqrt{2}=0$:

A. ma dwa rozwiązania,

B. ma jedno rozwiązanie,

C. nie ma rozwiązań,

D. ma dwa rozwiązania, w tym jedno ujemne.

3.4.20. Liczby 5 i -4 są rozwiązaniami równania:

A. $x^2-x-20=0$

B. $2(x+5)(x-4)=0$

C. $x^2-20=0$

D. $x^2+9x+20=0$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

3.4.21. Rozwiąż równanie $x(x-1)=3(x+7)$. **2 pkt**

3.4.22. Jeden bok prostokąta jest o 2 dłuższy od drugiego boku. Oblicz długości boków tego prostokąta, wiedząc, że jego pole wynosi 63. **2 pkt**

3.4.23. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych wynosi 113. Znajdź te liczby. **2 pkt**

3.4.24. Biegacz pokonuje trasę z punktu A do punktu B o długości 24 km w pewnym czasie. Gdyby biegł o 4 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ szybciej, to przebiegłby ten sam dystans w czasie o 1 godzinę krótszym. Oblicz średnią prędkość biegacza. **5 pkt**

3.4.25. Trawnik w kształcie prostokąta miał powierzchnię 120 m^2. Gdyby zmniejszyć długość trawnika o 2 m, a szerokość zwiększyć o 2 m, to okazałoby się, że pole powierzchni tego trawnika nie zmieniło się. Oblicz wymiary trawnika. **5 pkt**

3.4.26. Miasta A i B oddalone są od siebie o 600 km. Z miasta A wyjechał pociąg osobowy, a z miasta B pociąg ekspresowy. Pociągi minęły się w połowie drogi. Oblicz średnie prędkości obu pociągów, wiedząc, że pociąg osobowy wyjechał o dwie godziny wcześniej, i że jego średnia prędkość jest o 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza niż średnia prędkość pociągu ekspresowego. **5 pkt**

3.5 ▶ Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą

DEFINICJA

Nierównością kwadratową z jedną niewiadomą nazywamy nierówność postaci $ax^2+bx+c<0$ lub $ax^2+bx+c>0$, lub $ax^2+bx+c\leq 0$, lub $ax^2+bx+c\geq 0$, gdzie $a\neq 0$. Litery a, b, c oznaczają parametry (współczynniki liczbowe), a litera x oznacza zmienną.

PRZYKŁADY

$-2x^2+6x+\frac{4}{5}<0$

$\sqrt{2}x^2+8\geq 0$

$-\frac{2}{5}x^2+x\leq 0$

WYJAŚNIENIA

Aby rozwiązać nierówność z niewiadomą x, należy wyznaczyć te wartości x, dla których nierówność jest spełniona. Zbiór wszystkich x nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.

Znając wykres funkcji kwadratowej i jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań danej nierówności.

Wykres funkcji kwadratowej pozwala na odczytanie zbioru argumentów, dla których wartości funkcji są dodatnie lub ujemne, a tym samym na określenie, co jest zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $ax^2+bx+c>0$ lub $ax^2+bx+c<0$.

Zauważmy, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu funkcji, ponieważ współrzędne wierzchołka paraboli czy punkt przecięcia wykresu z osią OY nie mają wpływu na zbiór rozwiązań nierówności. Wystarczy nam znajomość miejsc zerowych funkcji i informacja o tym, jak skierowane są ramiona paraboli.

PRZYKŁAD 1

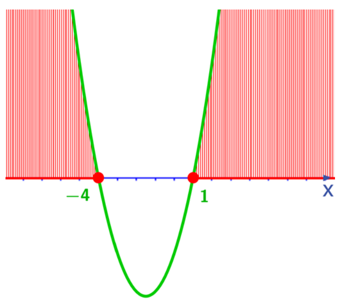
P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $x^2+3x-4\geq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $x^2+3x-4\geq 0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=x^2+3x-4$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)\geq 0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe bądź równe zero.

W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsca zerowe funkcji $f(x)$ (czyli -4 i 1) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=1$, więc ramiona skierowane są do góry).

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe zero dla $x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle 1;\infty)$.



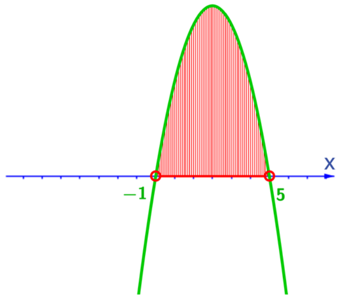
$x\in(-\infty;-4\rangle\cup\langle 1;\infty)$

PRZYKŁAD 2

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $-x^2+4x+5>0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $-x^2+4x+5>0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=-x^2+4x+5$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)>0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od zera.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsca zerowe funkcji $f(x)$ (czyli -1 i 5) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=-1$, więc ramiona skierowane są do dołu).

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości większe od zera dla $x\in(-1;5)$.

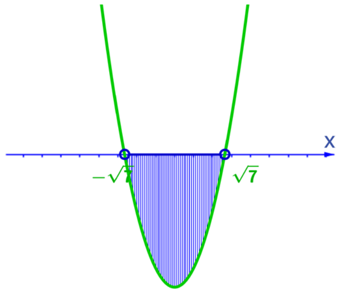
$x\in(-1;5)$

PRZYKŁAD 3

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $x^2-7<0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $x^2-7<0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=x^2-7$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)<0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od zera.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsca zerowe funkcji $f(x)$ (czyli $-\sqrt{7}$ i $\sqrt{7}$) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=1$, więc ramiona skierowane są do góry).

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze od zera dla $x\in(-\sqrt{7};\sqrt{7})$.

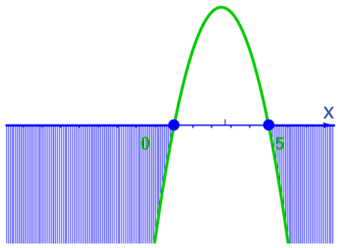
$x\in(-\sqrt{7};\sqrt{7})$

PRZYKŁAD 4

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $-x^2+5x\leq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $-x^2+5x\leq 0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=-x^2+5x$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)\leq 0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze bądź równe zero.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsca zerowe funkcji $f(x)$ (czyli 0 i 5) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=-1$, więc ramiona skierowane są do dołu).

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze bądź równe zero dla $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 5;\infty)$.

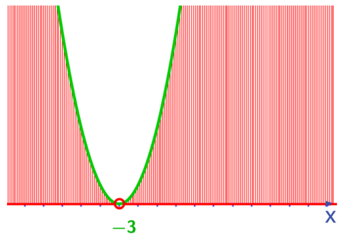
$x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 5;\infty)$

PRZYKŁAD 5

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $x^2+6x+9>0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $x^2+6x+9>0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=x^2+6x+9$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)>0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od zera.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsce zerowe funkcji $f(x)$ (czyli -3) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=1$, więc ramiona skierowane są do góry).

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości większe od zera dla wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczby -3.

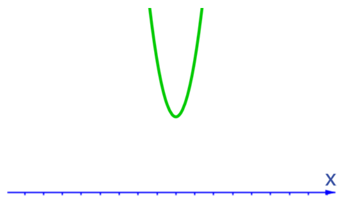
$x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-3\}$

PRZYKŁAD 6

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $3x^2+4\leq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $3x^2+4\leq 0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=3x^2+4$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)\leq 0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze bądź równe zero.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli. Funkcja $f(x)$ nie ma miejsc zerowych i współczynnik $a=1$, więc ramiona skierowane są do góry. Oznacza to, że nierówność nie ma rozwiązań, ponieważ funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych bądź równych zero.

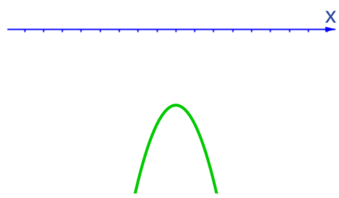
$x\in\varnothing$

PRZYKŁAD 7

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $-x^2-4>0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $-x^2-4>0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=-x^2-4$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)>0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od zera.



W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli. Funkcja $f(x)$ nie ma miejsc zerowych i współczynnik $a=-1$, więc ramiona skierowane są do dołu. Oznacza to, że nierówność nie ma rozwiązań, ponieważ funkcja nie przyjmuje wartości większych od zera.

$x\in\varnothing$

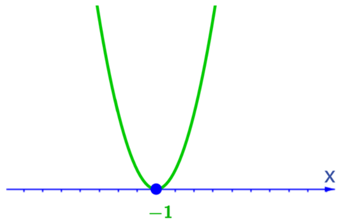
PRZYKŁAD 8

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $x^2+2x+1\leq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $x^2+2x+1\leq 0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=x^2+2x+1$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)\leq 0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze bądź równe zero.

W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsce zerowe funkcji $f(x)$ (czyli -1) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=1$, więc ramiona skierowane są do góry).



$x=-1$

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości mniejsze bądź równe zero tylko dla argumentu $x=-1$.

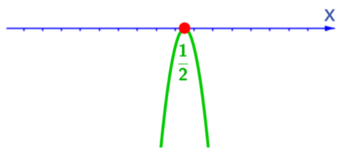
PRZYKŁAD 9

P.3.5.1

Rozwiąż nierówność $-4x^2+4x-1\geq 0$.

Rozwiązanie nierówności kwadratowej postaci $-4x^2+4x-1\geq 0$ jest tym samym co odczytanie z wykresu funkcji $f(x)=-4x^2+4x-1$ zbioru rozwiązań nierówności $f(x)\geq 0$, czyli zbioru argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości większe bądź równe zero.

W tym celu należy naszkicować przybliżony wykres paraboli, zaznaczając miejsce zerowe funkcji $f(x)$ (czyli $\frac{1}{2}$) oraz określając, jak skierowane są ramiona paraboli ($a=-4$, więc ramiona skierowane są do dołu).

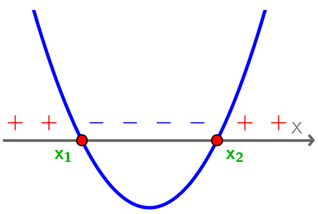


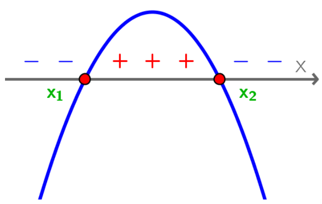
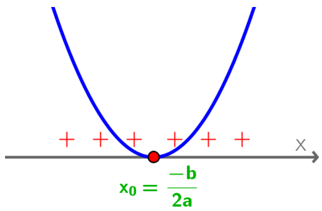
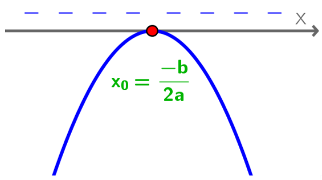
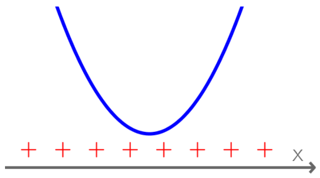
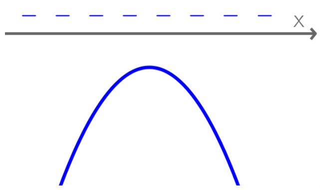
$x=\frac{1}{2}$

Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartości większe bądź równe zero tylko dla argumentu $x=\frac{1}{2}$.

► Rodzaje nierówności kwadratowych

Rozpatrując liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej (o czym decyduje wartość delty Δ) oraz jak skierowane są ramiona paraboli (o czym decyduje współczynnik a), można wyróżnić następujące przypadki nierówności kwadratowych.

NIERÓWNOŚĆ	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
WYKRES	ZBIÓR ROZWIĄZAŃ NIERÓWNOŚCI			
$\Delta>0, a>0$ 	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$	$(-\infty;x_1\rangle\cup\langle x_2;\infty)$	$(x_1;x_2)$	$\langle x_1;x_2\rangle$

$\Delta > 0, a < 0$ 	$(x_1; x_2)$	$\langle x_1; x_2 \rangle$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$	$(-\infty; x_1\rangle \cup \langle x_2; \infty)$
$\Delta = 0, a > 0$ 	$R \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	R	$\varnothing$	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta = 0, a < 0$ 	$\varnothing$	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	$R \setminus \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	R
$\Delta < 0, a > 0$ 	R	R	$\varnothing$	$\varnothing$
$\Delta < 0, a < 0$ 	$\varnothing$	$\varnothing$	R	R

Znaki „$+$” wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Znaki „$-$” wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

► Rozwiązywanie nierówności kwadratowych

P.3.5.2

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż nierówność $x^2 - 5x + 4 \geq 0$.

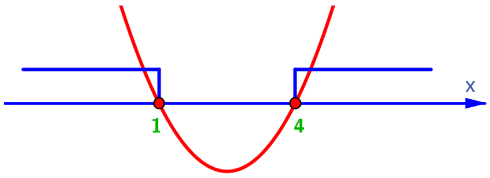
1° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$$

2° Wyznaczamy miejsca zerowe ze wzorów:
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$
$$x_1 = \frac{5-3}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{5+3}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

3° Szkicujemy przybliżony wykres paraboli. Zaznaczamy na osi liczbowej miejsca zerowe i rysujemy parabolę z ramionami skierowanymi do góry, ponieważ współczynnik $a = 1$.



4° Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności, czyli argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości większe bądź równe zero.

$$x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$$

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 9 > 0$.

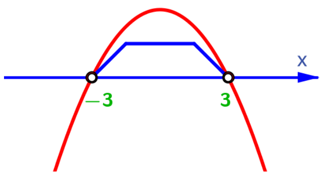
1° Przekształcamy lewą stronę nierówności i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$-x^2 + 9 > 0$$
$$9 - x^2 > 0$$
$$(3-x)(3+x) > 0$$

2° Wyznaczamy miejsca zerowe, czyli rozwiązania poszczególnych czynników.

$$3 - x = 0 \qquad 3 + x = 0$$
$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$$

3° Szkicujemy przybliżony wykres paraboli. Zaznaczamy na osi liczbowej miejsca zerowe i rysujemy parabolę z ramionami skierowanymi do dołu, ponieważ współczynnik $a = -1$.



4° Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności, czyli argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości większe od zera.

$$x \in (-3; 3)$$

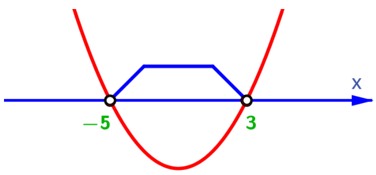
PRZYKŁAD 3

Rozwiąż nierówność $(x+5)(x-3) < 0$.

1° Jest to postać iloczynowa, więc wyznaczamy miejsca zerowe, czyli rozwiązania poszczególnych czynników.

$$(x+5)(x-3) < 0$$
$$x + 5 = 0 \qquad x - 3 = 0$$
$$x_1 = -5 \qquad x_2 = 3$$

2° Szkicujemy przybliżony wykres paraboli. Zaznaczamy na osi liczbowej miejsca zerowe i rysujemy parabolę z ramionami skierowanymi do góry, ponieważ współczynnik $a = 1$.



3° Odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności, czyli argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości mniejsze od zera.

$$x \in (-5; 3)$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 4. Rozwiąż nierówność $-x^2+6x\leq 0$.

PRZYKŁAD 5. Rozwiąż nierówność $x^2-9x+14<0$.

PRZYKŁAD 6. Rozwiąż nierówność $2x^2+3>0$.

PRZYKŁAD 7. Rozwiąż nierówność $x^2-5x+10<0$.

PRZYKŁAD 8. Rozwiąż nierówność $25x^2-10x+1\leq 0$.

PRZYKŁAD 9. Rozwiąż nierówność $9x^2+6x+1>0$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.5.1. Rozwiąż nierówność:

a. $6x^2\geq 1-x$

b. $(x-1)(x+1)<7$

c. $x(x-2)>15$

d. $(x+4)(x-2)\geq 4(2-x)$

e. $\frac{x^2-3x}{2}\leq 2$

f. $\frac{x(x+1)}{2}>\frac{(x-3)(x+3)}{3}$

3.5.2. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$

b. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+10x}}$

c. $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-3x+2}$

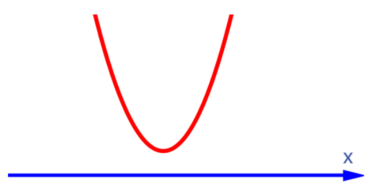
► Nierówności kwadratowe z parametrem

P.3.5.3

PRZYKŁAD 1

O nierówności $x^2+bx+4>0$ wiemy, że jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej. Oblicz wartość współczynnika b.

1° Szkicujemy, w jakiej sytuacji nierówność będzie spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.



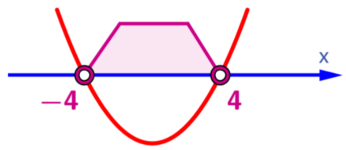
2° Wynika z tego, że musi być spełniony warunek $\Delta<0$.

3° Obliczamy Δ.

$$\Delta=b^2-4\cdot 1\cdot 4=b^2-16$$

4° Zapisujemy warunek i rozwiązujemy nierówność kwadratową.

$$b^2 - 16 < 0$$
$$(b-4)(b+4) < 0$$
$$b_1 = 4,\ b_2 = -4$$



$$b \in (-4; 4)$$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.5.3. Nierówność $2x^2 + 3x + c \le 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Oblicz wartość współczynnika c.

3.5.4. Nierówność $-x^2 + bx - 6 > 0$ nie ma rozwiązań. Oblicz wartość współczynnika b.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.5

3.5.5. Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 + 6x > 0$ jest:

A. $(-6; 0)$
B. $(0; 6)$
C. $(-\infty; -6) \cup (0; \infty)$
D. $(-\infty; 0) \cup (6; \infty)$

3.5.6. Nierówność $2x^2 + 6 > 0$ jest spełniona:

A. dla każdej liczby rzeczywistej,
B. tylko dla liczb dodatnich,
C. tylko dla liczb ujemnych,
D. tylko dla liczb naturalnych.

3.5.7. Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+5) < 0$ należy liczba:

A. -5
B. 2
C. 3
D. -4

3.5.8. Przedział $(-\infty; 0\rangle \cup \langle 3; \infty)$ jest rozwiązaniem nierówności:

A. $x^2 > 0$
B. $x(x-3) > 0$
C. $x(x+3) \le 0$
D. $x^2 - 3x \ge 0$

3.5.9. Nierówność $2x^2 + k > 0$ jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, jeśli:

A. $k = 0$
B. $k > 0$
C. $k < 0$
D. $k \le 0$

3.5.10. Nierówność $3x^2 - kx + 4 < 0$ nie ma rozwiązań, jeśli:

A. $k \in (-4\sqrt{3}; 4\sqrt{3})$

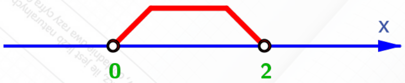
B. $k \in \langle -4\sqrt{3}; 4\sqrt{3} \rangle$

C. $k \in \langle -2\sqrt{3}; 2\sqrt{3} \rangle$

D. $k \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$

3.5.11. Dana jest nierówność $x^2 - 2x < 0$. Rozwiązanie nierówności przedstawia zbiór:

A.



B.

C.

D.

3.5.12. Dana jest nierówność $-x^2 + 8 \geq 0$. Do zbioru rozwiązań tej nierówności nie należy liczba:

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $-2\sqrt{2}$ **C.** -3 **D.** $2\frac{1}{2}$

3.5.13. Dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ jest przedział:

A. $(0; 1)$ **B.** $\langle 0; 1 \rangle$ **C.** $\langle -1; 0 \rangle$ **D.** $(-1; 0)$

3.5.14. Liczb naturalnych, które spełniają nierówność $-x^2 + 6x - 5 > 0$ jest dokładnie:

A. dwie, **B.** trzy, **C.** cztery, **D.** pięć.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

3.5.15. Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 < 0$. **2 pkt**

3.5.16. Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 10x - 3 \leq 0$. **2 pkt**

3.5.17. Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x^2 + 4x \leq 0$. **2 pkt**

3.5.18. Wyznacz dziedzinę funkcji $y = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$. **4 pkt**

3.6 ▶ Wykorzystanie definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$

WPROWADZENIE

Rozwiąż równanie $x^3 = -8$.

Aby znaleźć rozwiązanie tego równania, wykorzystamy wiadomości o pierwiastku stopnia trzeciego.

1° Pierwiastkujemy równanie stronami, czyli zapisujemy równanie, które jest równoważne wyjściowemu, (ma taki sam zbiór rozwiązań).

$x^3 = -8$ jest równoważne równaniu $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8}$

2° Korzystamy z własności pierwiastków nieparzystego stopnia: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$.

$\sqrt[3]{x^3} = x$ oraz $\sqrt[3]{-8} = -2$

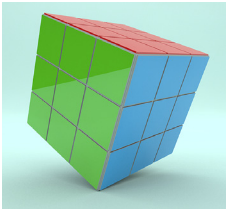
3° Zatem jedynym rozwiązaniem równania $x^3 = -8$ jest $x = -2$.

▶ Sześciany wybranych liczb naturalnych

Przypomnijmy sześciany niektórych liczb naturalnych. Ich znajomość jest bardzo przydatna przy rozwiązywaniu równań trzeciego stopnia.

Sześciany wybranych liczb naturalnych

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728



▶ Rozwiązywanie równań

PRZYKŁAD 1

P.3.6.1

Rozwiąż równanie $x^3 = 27$ i uzasadnij rozwiązanie.

1° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne. $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{27}$

2° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$. $x = 3$

3° Wykonujemy sprawdzenie. $3^3 = 27$

PRZYKŁAD 2

P.3.6.1

Rozwiąż równanie $x^3 = -343$ i uzasadnij rozwiązanie.

1° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne. $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-343}$

2° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$. $x = -7$

3° Wykonujemy sprawdzenie. $(-7)^3 = -343$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Rozwiąż równanie $x^3 = -1000$ i uzasadnij rozwiązanie.

PRZYKŁAD 4. Rozwiąż równanie $x^3 = 1331$ i uzasadnij rozwiązanie.

PRZYKŁAD 1

P.3.6.2

Rozwiąż równanie $x^3 + 64 = 0$.

1° Przenosimy liczbę 64 na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaku na przeciwny.

$$x^3 + 64 = 0$$
$$x^3 = -64$$

2° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne.

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-64}$$

3° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia.

$$x = \sqrt[3]{-64}$$
$$x = -4$$

PRZYKŁAD 2

P.3.6.2

Rozwiąż równanie $2x^3 + 54 = 0$.

1° Przenosimy liczbę 54 na prawą stronę równania, pamiętając o zmianie znaku na przeciwny.

$$2x^3 + 54 = 0$$
$$2x^3 = -54$$

2° Obie strony równania dzielimy przez 2.

$$2x^3 = -54 \quad \big| : 2$$
$$x^3 = -27$$

3° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne.

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-27}$$

4° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia.

$$x = \sqrt[3]{-27}$$
$$x = -3$$

PRZYKŁAD 3

P.3.6.2

Rozwiąż równanie $125 + x = x(x^2 + 1)$.

1° Wykonujemy mnożenie i redukujemy wyrazy podobne.

$$125 + x = x(x^2 + 1)$$
$$125 + \cancel{x} = x^3 + \cancel{x}$$

2° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne.

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{125}$$

3° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia.

$$x = \sqrt[3]{125}$$
$$x = 5$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 4. Rozwiąż równanie $5x^3 - 625 = 0$.

PRZYKŁAD 5. Rozwiąż równanie $x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 216 - 2x$.

PRZYKŁAD 6. Rozwiąż równanie $\frac{x(x^2+4)}{2} = 2x - 256$.

PRZYKŁAD 1

P.3.6.3

Rozwiąż równanie $(4x+1)^3 - 729 = 0$.

1° Przenosimy -729 na drugą stronę równania, pamiętając o zmianie znaku na przeciwny.

$$(4x+1)^3 = 729$$

2° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne.

$$\sqrt[3]{(4x+1)^3} = \sqrt[3]{729}$$

3° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia.

$$4x+1 = 9$$

4° Otrzymaliśmy równanie liniowe z jedną niewiadomą. Obliczamy wartość x.

$$4x = 9 - 1$$
$$4x = 8 \quad |:4$$
$$x = 2$$

PRZYKŁAD 2

P.3.6.3

Rozwiąż równanie $(x^2-1)^3 = 8$.

1° Pierwiastkujemy równanie stronami, otrzymując równanie równoważne.

$$\sqrt[3]{(x^2-1)^3} = \sqrt[3]{8}$$

2° Korzystamy z własności pierwiastka nieparzystego stopnia.

$$x^2 - 1 = 2$$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z jedną niewiadomą. Obliczamy wartość x.

$$x^2 - 1 - 2 = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$
$$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$$
$$x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Rozwiąż równanie $(2-x)^3 = 512$.

PRZYKŁAD 4. Rozwiąż równanie $(4-3x)^3 + 216 = 0$.

PRZYKŁAD 5. Rozwiąż równanie $(10-x^2)^3 = 1000$.

PRZYKŁAD 6. Rozwiąż równanie $(\sqrt{x}-1)^3 - 27 = 0$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.6.1. Rozwiąż równanie:

a. $\frac{x(x-2)(x+2)}{4}=16-x$

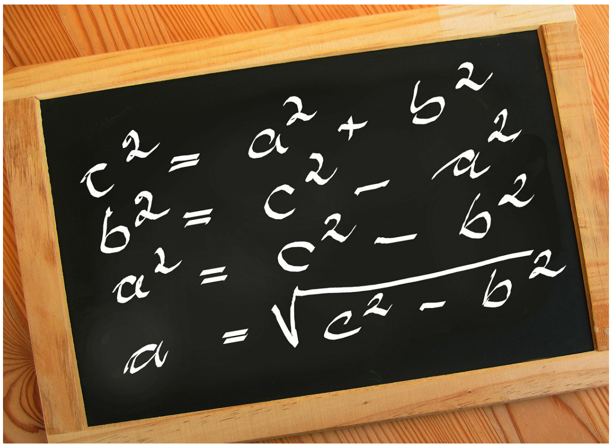
b. $\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{3}=-36$

c. $(x-3)(x+2)(x-2)=39-4x-3x^2$

d. $\left(3-\frac{x}{2}\right)^3=1728$

e. $0{,}125=\left(2x-\frac{1}{4}\right)^3$

f. $\frac{729}{125}=(x-3)^3$



MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.6

3.6.2. Rozwiązaniem równania $x^3-\frac{125}{216}=0$ jest liczba:

A. $\frac{6}{5}$ B. $-\frac{5}{6}$ C. $-\frac{6}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

3.6.3. Rozwiązaniem równania $(x^2-1)^3=-1$ jest liczba:

A. -1 B. 1 C. 2 D. 0

3.6.4. Liczba 2 jest rozwiązaniem równania:

A. $6x^3-48=0$

B. $3x^3+24=0$

C. $\frac{x^3}{2}-8=0$

D. $80-x^3=10$

3.6.5. Jeśli $x^3=1331$, to:

A. $x=-11$ B. $x=121$ C. $x=-121$ D. $x=11$

3.6.6. Rozwiązaniem równania $\frac{x^3}{2}+\frac{36}{125}=\frac{x^3}{3}$ jest liczba:

A. naturalna,

B. całkowita,

C. wymierna,

D. niewymierna.

3.7 ▶ Wykorzystanie własności iloczynu do rozwiązywania równań

WPROWADZENIE

Rozważmy równanie $R(x)=0$, gdzie lewa strona jest zapisana w postaci iloczynu kilku czynników, czyli: $W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x)=0$.

Aby rozwiązać równanie takiego typu, zauważmy, że iloczyn kilku czynników jest równy zero, gdy przynajmniej jeden z tych czynników będzie wynosił zero.

Wynika z tego, że $W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x)=0$, gdy $W(x)=0$ lub $P(x)=0$ lub $Q(x)=0$.

PRZYKŁAD 1

P.3.7.1

Rozwiąż równanie $(x-2)(x^2-25)(x^3-27)=0$.

1° Aby równanie było równe zero, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy zero.

$x-2=0$ lub $x^2-25=0$ lub $x^3-27=0$

2° Wyznaczamy rozwiązania poszczególnych równań.

$x_1=2$ lub $(x-5)(x+5)=0$ lub $x^3=27$

$x_2=5$ lub $x_3=-5$

$x=\sqrt[3]{27}$

$x_4=3$

3° Rozwiązania równania to:

$x_1=2,\ x_2=5,\ x_3=-5,\ x_4=3$

PRZYKŁAD 2

P.3.7.1

Rozwiąż równanie $(x+7)(x^2-16)(x^3+8)=0$.

1° Aby równanie było równe zero, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy zero.

$x+7=0$ lub $x^2-16=0$ lub $x^3+8=0$

2° Wyznaczamy rozwiązania poszczególnych równań.

$x_1=-7$ lub $(x-4)(x+4)=0$ lub $x^3=-8$

$x_2=4$ lub $x_3=-4$

$x=\sqrt[3]{-8}$

$x_4=-2$

3° Rozwiązania równania to:

$x_1=-7,\ x_2=4,\ x_3=-4,\ x_4=-2$

PRZYKŁAD 3

P.3.7.1

Rozwiąż równanie $x(2x+1)(x^2+3)=0$.

1° Aby równanie było równe zero, to przynajmniej jeden z czynników musi być równy zero.

$x=0$ lub $2x+1=0$ lub $x^2+3=0$

2° Wyznaczamy rozwiązania poszczególnych równań.

$x_1 = 0$ lub $2x = -1 \quad |:2$ lub $x^2 = -3$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ $\qquad x \in \varnothing$

3° Rozwiązania równania to: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{1}{2}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

Z.3.7.1

3.7.1. Rozwiąż równanie:

a. $(x+9)(x^2-49)(x^3-1)=0$

b. $(x-3)(x^2-5)(x^3+64)=0$

c. $x(3x-12)(x^2+7)=0$

d. $x^2(8x-1)(5-x)^2=0$

3.7.2. Rozwiąż równanie:

a. $x^3(x^2+1)(2x+4)=0$

b. $(2-3x)(x+4)(x-11)^2=0$

c. $(3x+9)(x^2-7)(x+1)=0$

d. $x(x-10)^2(x^2+4)=0$

e. $x^2(2x+11)(12-6x)=0$

f. $(x+2)^2(x-3)^3(x+4)^4=0$

3.7.3. Rozwiąż równanie:

a. $x^3+4x^2-12x=0$

b. $-x^3+4x=0$

c. $x^3+8x^2=0$

d. $x^4-5x^3+6x^2=0$

e. $2x^3+7x^2-4x=0$

f. $x^5+x^4+x^3=0$

► Grupowanie wyrazów

P.3.7.2

PRZYKŁAD 1

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-4x-8=0$

Aby rozwiązać równanie, należy przekształcić je do postaci iloczynowej. W tym celu będziemy chcieli wyłączyć wspólny czynnik przed nawias. Zanim jednak to zrobimy, należy pogrupować wyrazy i z każdej pary wyłączyć wspólny czynnik. Jest to tzw. metoda grupowania wyrazów.

1° Z pierwszej pary wyrazów wyłączamy wspólny czynnik, czyli x^2.

$$x^3+2x^2-4x-8=0$$
$$x^2(x+2)-4x-8=0$$

2° Drugą parę wyrazów należy rozłożyć na czynniki w taki sposób, by jeden z czynników był taki sam jak w pierwszej parze $(x+2)$.

$$x^2(x+2)-4(x+2)=0$$

3° Wyłączamy wspólny czynnik, czyli $(x+2)$.

$$(x+2)(x^2-4)=0$$

4° Do rozłożenia drugiego nawiasu na czynniki stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$(x+2)(x-2)(x+2)=0$$

5° Wyznaczamy rozwiązania równania.

$x+2=0$ lub $x-2=0$ lub $x+2=0$
$x_1=-2$ $\quad x_2=2$ $\quad x_3=-2$

6° Rozwiązania równania to $x_1=-2$, $x_2=2$.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $x^3+x^2-9x-9=0$

1° Z pierwszej pary wyrazów wyłączamy wspólny czynnik, czyli x^2.

$$x^3+x^2-9x-9=0$$
$$x^2(x+1)-9x-9=0$$

2° Drugą parę wyrazów należy rozłożyć na czynniki w taki sposób, by jeden z czynników był taki sam jak w pierwszej parze $(x+1)$.

$$x^2(x+1)-9(x+1)=0$$

3° Wyłączamy wspólny czynnik, czyli $(x+1)$.

$$(x+1)(x^2-9)=0$$

4° Do rozłożenia drugiego nawiasu na czynniki stosujemy wzór skróconego mnożenia.

$$(x+1)(x-3)(x+3)=0$$

5° Wyznaczamy rozwiązania równania.

$x+1=0$ lub $x-3=0$ lub $x+3=0$
$x_1=-1$ $\quad x_2=3$ $\quad x_3=-3$

6° Rozwiązania równania to $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-3$.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $x^3-4x^2+3x-12=0$

1° Z pierwszej pary wyrazów wyłączamy wspólny czynnik, czyli x^2.

$$x^3-4x^2+3x-12=0$$
$$x^2(x-4)+3x-12=0$$

2° Drugą parę wyrazów należy rozłożyć na czynniki w taki sposób, by jeden z czynników był taki sam jak w pierwszej parze $(x-4)$.

$$x^2(x-4)+3(x-4)=0$$

3° Wyłączamy wspólny czynnik, czyli $(x-4)$.

$$(x-4)(x^2+3)=0$$

4° Wyznaczamy rozwiązania równania.

$x-4=0$ lub $x^2+3=0$
$x_1=4$ $\quad x^2=-3$
$x\in\varnothing$

5° Rozwiązanie równania to $x=4$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 4. Rozwiąż równanie $x^3+4x^2-25x-100=0$.

PRZYKŁAD 5. Rozwiąż równanie $2x^3-x^2+6x-3=0$.

PRZYKŁAD 6. Rozwiąż równanie $3x^3+4x^2-9x-12=0$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.7.4. Rozwiąż równanie:

a. $x^3+2x^2-36x-72=0$

b. $x^3-2x^2-49x+98=0$

c. $x^3+4x^2+7x+28=0$

d. $4x^3+5x^2-40x-50=0$

e. $2x^3+5x^2-18x-45=0$

f. $-x^3+4x^2+11x-44=0$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.7

3.7.5. Rozwiązaniami równania $x(2x-3)(x-2)=0$ są liczby:

A. $1, 0, 2$ B. $1, 2, 3$ C. $0, 3, 2$ D. $0, \frac{3}{2}, 2$

3.7.6. Równanie $x^3+2x=0$:

A. ma jedno rozwiązanie,

B. ma dwa rozwiązania,

C. ma trzy rozwiązania,

D. nie ma rozwiązań.

3.7.7. Liczby $\{-1; 3; 5\}$ są rozwiązaniami równania:

A. $(x-1)(x+3)(x+5)=0$

B. $5(x^2-1)(x+3)=0$

C. $(x+1)(x-3)(x-5)=0$

D. $(x+1)(x^2+3)(x-5)=0$

3.7.8. Równanie $x^3+5x^2-4x-20=0$:

A. ma trzy rozwiązania,

B. ma dwa rozwiązania,

C. ma jedno rozwiązanie,

D. nie ma rozwiązań.

3.7.9. Suma pierwiastków równania $x^3+3x^2+2x=0$ wynosi:

A. 3 B. 0 C. -3 D. 1

3.7.10. Rozwiązaniami równania $x(x^3-27)(x+5)(2x+4)=0$ są liczby:

A. $0, 3, -5, 4$

B. $3, -5, -2$

C. $0, 3, -5, -2$

D. $0, 27, -5, -4$

3.7.11. Równanie $(x^3-4)(x^2-9)(x^2+7)=0$ ma:

A. cztery rozwiązania,

B. trzy rozwiązania,

C. pięć rozwiązań,

D. siedem rozwiązań.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

3.7.12. Rozwiąż równanie $x^3+6x^2=0$. **2 pkt**

3.7.13. Rozwiąż równanie $(2x-8)(x^2-20)=0$. **2 pkt**

3.7.14. Rozwiąż równanie $x^4-16x^2=0$. **2 pkt**

3.7.15. Rozwiąż równanie $-x^3+11x^2-18x=0$. **2 pkt**

3.7.16. Rozwiąż równanie $x^3+9x^2-36x-324=0$. **4 pkt**

3.7.17. Rozwiąż równanie $(x^2-4x)(x^2-2x-3)(x^3-1000)=0$. **4 pkt**

3.C ► Działania na wyrażeniach wymiernych

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie zapisane w postaci ułamka $\frac{L(x)}{M(x)}$, którego licznikiem jest wielomian $L(x)$, a mianownikiem wielomian $M(x)$ i $M(x) \neq 0$.	$\frac{-x^3+1}{x-3}$, $\frac{-x^2+1}{x^2+4}$

Wyrażenia w liczniku ($L(x)$) i mianowniku ($M(x)$) przybierają postać liniową (np. $-x+\frac{2}{3}$), kwadratową (np. $-x^2+x+2$) lub wyrażenia trzeciego stopnia (np. $-x^3+1$) itp.

► Wyznaczanie dziedziny wyrażenia wymiernego

Rozważając wyrażenie wymierne, należy ustalić dziedzinę, czyli wskazać wszystkie możliwe liczby, które można wstawić w miejsce niewiadomych, tak aby wyrażenie miało sens liczbowy. Należy pamiętać, aby wykluczyć z dziedziny te liczby, dla których mianownik przyjmowałby wartość zero.

PRZYKŁAD 1

Ustal dziedzinę wyrażenia $\frac{-x^3+1}{x-3}$.

1° W mianowniku nie może występować zero, więc:

$$x-3 \neq 0$$
$$x \neq 3$$

2° Zatem dziedzina tego wyrażenia to $D = R \setminus \{3\}$.

PRZYKŁAD 2

Ustal dziedzinę wyrażenia $\frac{-x^2+1}{x^2-4}$.

1° W mianowniku nie może występować zero, więc:

$$x^2-4 \neq 0$$
$$(x-2)(x+2) \neq 0$$
$$x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

2° Zatem dziedzina tego wyrażenia to $D = R \setminus \{-2; 2\}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.C.1. Wyznacz dziedzinę wyrażenia:

a. $\frac{2x+5}{x^2+3x}$ **b.** $\frac{x-3}{6x+5}$ **c.** $\frac{x}{(x+2)(x-4)}$ **d.** $\frac{1}{2x^2+5}$

► Skracanie i rozszerzanie wyrażeń wymiernych

Wykonując działania na wyrażeniach wymiernych, postępujemy tak samo jak w przypadku ułamków zwykłych.

Skracanie wyrażeń wymiernych	Wielomiany występujące w liczniku i mianowniku przedstawiamy w postaci iloczynowej (o ile to możliwe). Czynniki iloczynu powinny być jak najniższego stopnia. Następnie licznik i mianownik dzielimy przez ich wspólne czynniki.

PRZYKŁAD 1

P.3.C.1

Skróć ułamek algebraiczny $\frac{x^2-4}{2x+4}$.

1° Aby rozłożyć licznik do postaci iloczynowej, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Aby rozłożyć mianownik do postaci iloczynowej, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$\frac{x^2-4}{2x+4}=\frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)}=$$

2° Wyznaczamy dziedzinę ułamka.

$$2(x+2)\neq 0 \quad |:2$$
$$x+2\neq 0$$
$$x\neq -2, \text{ więc } D=R\setminus\{-2\}$$

3° Skracamy wspólny czynnik występujący w mianowniku i liczniku.

$$=\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{2\cancel{(x+2)}}=\frac{x-2}{2}$$

PRZYKŁAD 2

P.3.C.1

Skróć ułamek algebraiczny $\frac{2x^2+6x}{x^2-9}$.

1° Aby rozłożyć licznik do postaci iloczynowej, wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

Aby rozłożyć mianownik do postaci iloczynowej, korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\frac{2x^2+6x}{x^2-9}=\frac{2x(x+3)}{(x-3)(x+3)}=$$

2° Wyznaczamy dziedzinę ułamka.

$$(x-3)(x+3)\neq 0$$
$$x-3\neq 0 \quad \text{i} \quad x+3\neq 0$$
$$x\neq 3 \quad \text{i} \quad x\neq -3$$
$$D=R\setminus\{-3;3\}$$

3° Skracamy wspólny czynnik występujący w mianowniku i liczniku.

$$=\frac{2x\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}}=\frac{2x}{x-3}$$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.C.2. Skróć ułamek algebraiczny:

a. $\frac{4x^2-25}{4x-10}$

b. $\frac{2x^4+6x^3}{4x^2}$

c. $\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

d. $\frac{x^2+5x}{3x+15}$

Rozszerzanie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} \cdot \frac{R(x)}{R(x)} = \frac{W(x) \cdot R(x)}{P(x) \cdot R(x)}, R(x) \neq 0$$

Licznik i mianownik ułamka mnożymy przez niezerowy wielomian i zakładamy, że nie przyjmuje on wartości równej zero.

PRZYKŁAD 1

P.3.C.2

Rozszerz ułamek algebraiczny do wskazanego licznika: $\frac{x^2}{x+2} = \frac{?}{3x^2+6x}$.

Skoro mianownik $x+2$ został rozszerzony do postaci $3x^2+6x$, to należy wyznaczyć, przez jakie wyrażenie został pomnożony, aby otrzymać taką postać i przez to samo wyrażenie pomnożyć licznik.

$$3x^2+6x = 3x(x+2)$$

$$\frac{x^2}{x+2} = \frac{x^2 \cdot 3x}{3x^2+6x} =$$

$$= \frac{3x^3}{3x^2+6x}$$

PRZYKŁAD 2

P.3.C.2

Rozszerz ułamek algebraiczny do wskazanego mianownika: $\frac{x-4}{5x} = \frac{x^2-16}{?}$.

Skoro licznik $x-4$ został rozszerzony do postaci x^2-16, to należy wyznaczyć, przez jakie wyrażenie został pomnożony, aby otrzymać taką postać i przez to samo wyrażenie pomnożyć mianownik.

$$x^2-16 = (x+4)(x-4)$$

$$\frac{x-4}{5x} = \frac{x^2-16}{5x \cdot (x+4)} = \frac{x^2-16}{5x^2+20x}$$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.C.3. Rozszerz ułamek tak, aby miał wskazany mianownik:

a. $\frac{3}{x} = \frac{}{2x^2}$

b. $\frac{4}{x+1} = \frac{}{x^2-1}$

c. $\frac{x+2}{x-3} = \frac{}{x^2-9}$

d. $\frac{4x}{x+2} = \frac{}{2x^2+4x}$

► Działania na wyrażeniach wymiernych

P.3.C.3

PRZYKŁAD

Dane są wyrażenia wymierne: $w_1 = \frac{-x+1}{x-3}, D_1 = R \setminus \{3\}$ oraz $w_2 = \frac{2x-3}{x+2}, D_2 = R \setminus \{-2\}$.

Wyznacz $w_1 \cdot w_2$.

Mnożenie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} \cdot \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby pomnożyć dwa wyrażenia wymierne, należy pomnożyć przez siebie liczniki i mianowniki.

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{-x+1}{x-3} \cdot \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{-2x^2+5x-3}{(x-3)\cdot(x+2)}, D = R \setminus \{3; -2\}$$

Wyznacz $\frac{w_1}{w_2}$.

Dzielenie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} : \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x)}{P(x)} \cdot \frac{M(x)}{L(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot L(x)}$$

Aby podzielić dwa wyrażenia wymierne, należy pomnożyć pierwsze wyrażenie przez odwrotność drugiego.

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{-x+1}{x-3} : \frac{2x-3}{x+2} = \frac{-x+1}{x-3} \cdot \frac{x+2}{2x-3} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(2x-3)} = \frac{-x^2-x+2}{(x-3)\cdot(2x-3)}, D = R \setminus \left\{-2; \frac{3}{2}; 3\right\}$$

Wyznacz $w_1 + w_2$.

Dodawanie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} + \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot M(x)} + \frac{P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x) + P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby dodać dwa wyrażenia wymierne, należy najpierw sprowadzić oba wyrażenia do wspólnego mianownika, a potem dodać ich liczniki.

$$w_1 + w_2 = \frac{-x+1}{x-3} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)} + \frac{(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} =$$
$$= \frac{(-x+1)\cdot(x+2)+(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{x^2-10x+11}{(x-3)\cdot(x+2)}, D = R \setminus \{-2; 3\}$$

Wyznacz $w_1 - w_2$.

Odejmowanie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} - \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot M(x)} - \frac{P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x) - P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby odjąć dwa wyrażenia wymierne, należy najpierw sprowadzić oba wyrażenia do wspólnego mianownika, a potem odjąć ich liczniki.

$$w_1 - w_2 = \frac{-x+1}{x-3} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)} - \frac{(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} =$$
$$= \frac{(-x+1)\cdot(x+2)-(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{-3x^2+8x-7}{(x-3)\cdot(x+2)}, D = R \setminus \{-2; 3\}$$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

3.C.4. Wykonaj dodawanie ułamków. Podaj założenia.

a. $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-4}$ **b.** $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$ **c.** $\frac{2x}{x+3}+\frac{x+2}{x-5}$ **d.** $\frac{x+5}{x-7}+\frac{x+2}{x-3}$

3.C.5. Wykonaj odejmowanie ułamków. Podaj założenia.

a. $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x}$ **b.** $\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x}{x+3}$ **c.** $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+5}{x-2}$ **d.** $\frac{x+4}{x+5}-\frac{x}{4x-1}$

3.C.6. Wykonaj mnożenie ułamków. Podaj założenia.

a. $\frac{6x}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x-7}$ **b.** $\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x+4}{2x+2}$ **c.** $\frac{x+3}{2x+1}\cdot\frac{6x}{x^2-9}$ **d.** $\frac{x^2}{x^2+5x}\cdot\frac{x^2-25}{2x}$

3.C.7. Wykonaj dzielenie ułamków. Podaj założenia.

a. $\frac{2x+1}{x-4}:\frac{x+8}{x-7}$

b. $\frac{x}{2x+5}:\frac{x^2}{x+3}$

c. $\frac{x^2-25}{x+2}:\frac{2x+10}{x+1}$

d. $\frac{4x^2-9}{2x+4}:\frac{2x-3}{2x^2+4x}$

3.C.8. Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci.

a. $\frac{x}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2}+\frac{5x+10}{x-1}:\frac{5}{x^2-1}$

b. $\frac{x^2}{4-x}\cdot\frac{16-x^2}{x}-\frac{3x}{x-7}:\frac{3x^2+3x}{2x^2-98}$

► Zadania tekstowe z wykorzystaniem wyrażeń wymiernych

PRZYKŁAD 1

P.3.C.4

Droga Wojtka z domu do szkoły biegnie pod górę. Wojtek, idąc do szkoły, pokonuje ją z prędkością $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gdy wraca ze szkoły do domu, to idzie o $2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ szybciej. Oblicz, jaka jest średnia prędkość Wojtka na trasie z domu do szkoły i z powrotem.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

s — droga Wojtka z domu do szkoły
t_1 — czas przejścia Wojtka z domu do szkoły
t_2 — czas przejścia Wojtka ze szkoły do domu

2° Korzystając ze wzoru: $t=\frac{s}{v}$, układamy dwa równania, wyznaczając czasy przejścia Wojtka.

$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{s}{4}$

$t_2=\frac{s}{v_2}=\frac{s}{6}$, ponieważ $v_2=v_1+2=4+2=6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

3° Skoro wiemy, że wartość średniej prędkości to iloraz drogi i czasu, to możemy ułożyć równanie.

$v_{śr}=\frac{s}{t}=\frac{2s}{t_1+t_2}=$

4° Podstawiamy wyznaczone wcześniej wartości t_1 oraz t_2 i obliczamy wartość średniej prędkości.

$$=\frac{2s}{\frac{s}{4}+\frac{s}{6}}=\frac{2s}{\frac{3s+2s}{12}}=\frac{2s}{\frac{5s}{12}}=\frac{2\cancel{s}}{1}\cdot\frac{12}{5\cancel{s}}=4{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

5° Średnia prędkość Wojtka na trasie z domu do szkoły i z powrotem wynosi $4{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.C.9. Załadowany towarem samochód ciężarowy przemierza odległość z miasta X do miasta Y z prędkością $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a w drodze powrotnej, jadąc bez ładunku, porusza się z prędkością $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz, jaka jest średnia prędkość samochodu na trasie tam i z powrotem.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.3.C

3.C.10. Wyrażenie $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}$, gdzie $x\neq 0$ i $x\neq -1$, jest równe wyrażeniu:

A. 0 **B.** 2 **C.** $\frac{2}{x}$ **D.** $\frac{2}{x(x+1)}$

3.C.11. Wyrażenie $\frac{x^2-64}{2x+16}$, gdzie $x\neq -8$, jest równe wyrażeniu:

A. $\frac{1}{2}x-4$ **B.** $\frac{x+8}{2}$ **C.** $\frac{x^2-32}{x+8}$ **D.** $\frac{x}{2}+4$

3.C.12. Jeśli $\frac{x}{x+1}=\frac{a}{x^2-1}$, gdzie $x\neq -1$ i $x\neq 1$, to prawdą jest, że:

A. $a=x+1$ **B.** $a=x-1$ **C.** $a=x$ **D.** $a=x^2-x$

3.C.13. Dziedziną wyrażenia $\frac{x+1}{x^2-4x}$ jest zbiór:

A. $x\in R\setminus\{0\}$ **B.** $x\in R\setminus\{-4;0\}$ **C.** $x\in R\setminus\{0;4\}$ **D.** $x\in R\setminus\{-2;2\}$

3.C.14. Wyrażenie $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, gdzie $x\neq\{-1;0;1\}$, jest równe wyrażeniu:

A. $\frac{1}{x}$ **B.** $\frac{3x^2+1}{x^3+x}$ **C.** $\frac{3}{x}$ **D.** $\frac{3x^2-1}{x^3-x}$

ZADANIE OTWARTE

3.C.15. Autobus przejechał trasę z miasta A do miasta C, jadąc przez miasto B. Odległość z miasta A do miasta B jest dwa razy dłuższa niż z miasta B do miasta C. Dłuższy odcinek autobus przejechał ze średnią prędkością $80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a krótszy ze średnią prędkością $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Oblicz średnią prędkość autobusu na tej trasie.

4 pkt

3.8 ▶ Proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych

DEFINICJA

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie postaci $\frac{L(x)}{M(x)} = 0$, gdzie $L(x)$ i $M(x)$ są wielomianami i $M(x) \neq 0$ lub takie, które można przekształcić równoważnie do tej postaci.

WYJAŚNIENIA

Każde równanie zbudowane tylko z ułamków algebraicznych można przekształcić do postaci $\frac{L(x)}{M(x)} = 0$.

Wyznaczając dziedzinę takiego wyrażenia, należy pamiętać, że jest to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczb, które są pierwiastkami wielomianów występujących w mianownikach poszczególnych ułamków.

▶ Równania wymierne równe zero

Wyrażenie wymierne $\frac{L(x)}{M(x)}$ przyjmuje wartość równą zero, gdy wielomian w liczniku $L(x)$ przyjmuje wartość zero ($L(x) = 0$), a wielomian w mianowniku $M(x)$ jest różny od zera ($M(x) \neq 0$).

PRZYKŁAD 1

P.3.8.1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2 - 36}{2x - 12} = 0$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$2x - 12 \neq 0$$
$$2x \neq 12 \quad |:2$$
$$x \neq 6$$
$$D = R \setminus \{6\}$$

2° Przyrównujemy do zera tylko licznik.

$$x^2 - 36 = 0$$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Rozkładamy lewą stronę równania do postaci iloczynowej, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

4° Wyznaczamy pierwiastki równania, sprawdzając, czy należą one do dziedziny.

$$x = 6 \notin D,\ x_1 = -6$$

5° Rozwiązaniem równania jest $x = -6$.

PRZYKŁAD 2

P.3.8.1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}=0$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$x^2-1\neq 0$
$(x-1)(x+1)\neq 0$
$x\neq 1,\ x\neq -1$
$D=R\setminus\{-1;1\}$

2° Przyrównujemy do zera tylko licznik.

$x^2-3x-4=0$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

3.1° Obliczamy wyróżnik Δ ze wzoru: $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25$

3.2° Obliczamy pierwiastki ze wzoru: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ i sprawdzamy, czy należą do dziedziny.

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$

$x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2}=$ 4, $-1\notin D$

4° Rozwiązaniem równania jest $x=4$.

PRZYKŁAD 3

P.3.8.1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2+100}{x-10}=0$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$x-10\neq 0$
$x\neq 10$
$D=R\setminus\{10\}$

2° Przyrównujemy do zera tylko licznik.

$x^2+100=0$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

$x^2=-100$

4° Równanie to nie ma rozwiązań, więc wyjściowe równanie również nie ma rozwiązań.

$x\in\varnothing$

PRZYKŁAD 4

P.3.8.1

Rozwiąż równanie $\frac{x^2+4x}{x-1}=0$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$x-1\neq 0$
$x\neq 1$
$D=R\setminus\{1\}$

2° Przyrównujemy do zera tylko licznik.

$x^2+4x=0$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe. Rozkładamy lewą stronę równania do postaci iloczynowej, wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

$x(x+4)=0$

4° Wyznaczamy pierwiastki równania, sprawdzając, czy należą one do dziedziny. $x_1 = 0,\ x_2 = -4$

5° Rozwiązaniem równania jest $x_1 = 0,\ x_2 = -4$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.8.1. Rozwiąż równanie:

a. $\frac{x^2-25}{x+10} = 0$

b. $\frac{2x^2+5x}{2-x} = 0$

c. $\frac{2x^2+3x}{4x^2-9} = 0$

d. $\frac{x^2+7x-8}{x^2-1} = 0$

e. $\frac{x^3+x^2}{2x^2+x} = 0$

f. $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-2x-8} = 0$

g. $\frac{x^2-3x-10}{x^2-25} = 0$

h. $\frac{6x^2+5x+1}{(3x+1)(2x-1)} = 0$

► Równania wymierne równe innej liczbie niż zero

WPROWADZENIE

Równanie $\frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x)}{P(x)}$ ma postać proporcji, w której wyróżniamy wyrazy środkowe: $M(x)$ i $W(x)$ oraz wyrazy skrajne: $L(x)$ i $P(x)$. Równanie to, po wyznaczeniu dziedziny, rozwiązujemy korzystając z własności proporcji, która mówi: „iloczyn wyrazów środkowych jest równy iloczynowi wyrazów skrajnych”. Zatem nasze równanie jest równoważne innemu równaniu: $L(x)\cdot P(x) = M(x)\cdot W(x)$.

PRZYKŁAD 1

P.3.8.2

Rozwiąż równanie $\frac{x+1}{2} = \frac{1}{x}$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$x \neq 0$$
$$D = R \setminus \{0\}$$

2° Korzystamy z własności proporcji.

$$\frac{x+1}{2} = \frac{1}{x}$$
$$x(x+1) = 2$$
$$x^2 + x = 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$

3° Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe i sprawdzamy, czy rozwiązania należą do dziedziny równania.

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$
$$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{matrix}\nearrow -2\\ \searrow 1\end{matrix}$$

4° Rozwiązania równania to: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

PRZYKŁAD 2

Rozwiąż równanie $\frac{2x+3}{x-5} = \frac{2x-12}{x-7}$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$x-5 \neq 0, \quad x-7 \neq 0$$
$$x \neq 5, \qquad x \neq 7$$
$$D = R \setminus \{5; 7\}$$

2° Korzystamy z własności proporcji.

$$\frac{2x+3}{x-5} = \frac{2x-12}{x-7}$$
$$(2x+3)(x-7) = (x-5)(2x-12)$$
$$\cancel{2x^2} - 14x + 3x - 21 = \cancel{2x^2} - 12x - 10x + 60$$

3° Otrzymaliśmy równanie liniowe, które rozwiązujemy.

$$-14x + 3x + 12x + 10x = 60 + 21$$
$$11x = 81 \quad | : 11$$
$$x = \frac{81}{11} = 7\frac{4}{11}$$

4° Rozwiązaniem równania jest $x = 7\frac{4}{11}$.

PRZYKŁAD 3

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{x-1} = 4x-3$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$x-1 \neq 0$$
$$x \neq 1$$
$$D = R \setminus \{1\}$$

2° Równanie zapisujemy w takiej postaci, by prawa strona była również ułamkiem, i korzystamy z własności proporcji.

$$\frac{2x+1}{x-1} = 4x-3$$
$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{4x-3}{1}$$
$$2x+1 = (x-1)(4x-3)$$
$$2x+1 = 4x^2 - 3x - 4x + 3$$
$$2x + 1 - 4x^2 + 3x + 4x - 3 = 0$$
$$-4x^2 + 9x - 2 = 0$$

3° Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe i sprawdzamy, czy rozwiązania należą do dziedziny równania.

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-2) = 81 - 32 = 49$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$$
$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 7}{-8} = \begin{cases} \nearrow \frac{1}{4} \\ \searrow 2 \end{cases}$$

4° Rozwiązania równania to: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$.

PRZYKŁAD 4

Rozwiąż równanie $\frac{2}{x} + \frac{6}{x+1} = \frac{3}{x-1}$.

1° Wyznaczamy dziedzinę równania.

$$x \neq 0, \quad x+1 \neq 0, \quad x-1 \neq 0$$
$$x \neq -1, \quad x \neq 1$$

$$D = R \setminus \{-1; 0; 1\}$$

2° Obie strony równania mnożymy przez wspólny mianownik, czyli iloczyn wszystkich mianowników.

$$\frac{2}{x} + \frac{6}{x+1} = \frac{3}{x-1} \quad \Big| \cdot x(x+1)(x-1)$$
$$2(x+1)(x-1) + 6x(x-1) = 3x(x+1)$$
$$2(x^2-1) + 6x^2 - 6x = 3x^2 + 3x$$
$$2x^2 - 2 + 6x^2 - 6x - 3x^2 - 3x = 0$$
$$5x^2 - 9x - 2 = 0$$

3° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 81 + 40 = 121$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11$$
$$x_{1,2} = \frac{9 \pm 11}{10} = \begin{cases} -\frac{1}{5} \\ 2 \end{cases}$$

4° Rozwiązania równania to: $x_1 = -\frac{1}{5}$, $x_2 = 2$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.8.2. Rozwiąż równanie:

a. $\frac{x}{x+1} = \frac{5}{6}$

b. $\frac{x}{x-2} = \frac{x+7}{x+3}$

c. $\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{7}{4}$

d. $\frac{2-x}{x+4} = x+2$

e. $\frac{20}{x-1} = \frac{2x-2}{3x-23}$

f. $\frac{4x+1}{x-1} = \frac{2x+3}{3}$

g. $\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

h. $\frac{4}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{11}{x^2-4}$

PRZYKŁAD **P.3.8.3**

Kolarz pokonał trasę 105 km, jadąc z Warszawy do Radomia, i taką samą odległość z Radomia do Warszawy. Drogę powrotną pokonał ze średnią prędkością o 6 $\frac{km}{h}$ mniejszą niż drogę w poprzednią stronę. Oblicz średnią prędkość, z jaką kolarz jechał z Warszawy do Radomia, jeżeli wiadomo, że łączny czas przejazdu tam i z powrotem wyniósł 12 godzin.

1° Wprowadzamy oznaczenia.

105 km — odległość między Warszawą a Radomiem
v — prędkość kolarza na trasie z Warszawy do Radomia
$v - 6$ — prędkość kolarza na trasie z Radomia do Warszawy
t_1 — czas przejazdu kolarza z Warszawy do Radomia
t_2 — czas przejazdu kolarza z Radomia do Warszawy

2° Korzystając ze wzoru: $t = \frac{s}{v}$, układamy dwa równania, wyznaczając czas przejazdu.

$$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{105}{v}$$
$$t_2 = \frac{s}{v-6} = \frac{105}{v-6}$$

3° Skoro wiemy, że łączny czas przejazdu to 12 godzin, to możemy ułożyć równanie.

$$t_1 + t_2 = 12 \text{ h}$$

4° Podstawiamy za t_1 i t_2 wyznaczone wartości i rozwiązujemy równanie.

$$\frac{105}{v} + \frac{105}{v-6} = 12 \quad | \cdot v(v-6)$$
$$105(v-6) + 105v = 12v(v-6)$$
$$105v - 630 + 105v = 12v^2 - 72v$$
$$210v - 630 - 12v^2 + 72v = 0$$
$$-12v^2 + 282v - 630 = 0 \quad | : (-6)$$
$$2v^2 - 47v + 105 = 0$$

$$\Delta = 47^2 - 4 \cdot 2 \cdot 105 = 2209 - 840 = 1369$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1369} = 37$$

$$v_1 = \frac{47-37}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_2 = \frac{47+37}{2 \cdot 2} = \frac{84}{4} = 21\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Prędkość $2{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ odrzucamy, ponieważ w drodze powrotnej kolarz jechał o $6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ wolniej, więc jego prędkość musiałaby być ujemna, co jest niemożliwe.

5° Średnia prędkość kolarza z Warszawy do Radomia wynosiła $21\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

3.8.3. Ogrodnik zebrał 12 skrzynek jabłek przed południem, a po południu jeszcze 15 takich samych skrzynek. Po południu zbierał o jedną skrzynkę mniej w ciągu godziny pracy niż przed południem. Łącznie pracował 8 godzin. Oblicz, ile czasu zajęło ogrodnikowi zebranie jednej skrzynki przed południem.

3.8.4. Turysta wybrał się na dwudniową pieszą wędrówkę. Pierwszego dnia pokonał 32 km, a drugiego o 8 km więcej. Łączny czas wędrówki wynosił 16 godzin. Oblicz, z jaką średnią prędkością szedł turysta pierwszego dnia, jeżeli wiadomo, że drugiego dnia jego prędkość była o $1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa od prędkości w poprzednim dniu.

3.8.5. Rozwiązaniem równania $\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x^2+1}$ jest liczba:

A. naturalna, **B.** niewymierna, **C.** całkowita, **D.** wymierna.

3.8.6. Równanie $\frac{x^2+5x}{x-5}=0$:

A. ma dwa rozwiązania,
B. ma trzy rozwiązania,
C. ma jedno rozwiązanie,
D. ma dwa rozwiązania, w tym jedno dodatnie.

3.8.7. Rozwiązaniami równania $\frac{(x+2)(x^2-9)}{x+3}=0$ są liczby:

A. $-3;-2;3$ **B.** $-3;2;3$ **C.** $-3;2$ **D.** $-2;3$

3.8.8. Rozwiązaniem równania $\frac{a}{x+2}=\frac{x}{3}$ jest liczba 3. Wtedy:

A. $a=1$ **B.** $a=2$ **C.** $a=5$ **D.** $a=-5$

3.8.9. Równanie $\frac{x(x+4)}{x^2-a}=0$ ma jedno rozwiązanie, gdy:

A. $a=4$ **B.** $a=-4$ **C.** $a=16$ **D.** $a=-16$

3.8.10. Równanie $\frac{x^2+64}{x-8}=0$:

A. nie ma rozwiązań,
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
C. ma dokładnie dwa rozwiązania,
D. ma dokładnie trzy rozwiązania.

3.8.11. Równanie $\frac{(x+5)(x-4)}{(x-5)(x+4)}=0$ ma:

A. dokładnie jedno rozwiązanie,
B. dokładnie dwa rozwiązania,
C. dokładnie trzy rozwiązania,
D. dokładnie cztery rozwiązania.

3.8.12. Rozwiązaniem równania $\frac{x+5}{x+3}=\frac{4}{3}$ jest liczba:

A. 3 **B.** -4 **C.** 4 **D.** -3

3.8.13. Równanie $\frac{x^2-4x}{(x-4)(x+4)}=0$:

A. nie ma rozwiązań,
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
C. ma dokładnie dwa rozwiązania,
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

3.8.14. Równanie $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=0$ w zależności od parametrów a i b, gdzie $a>0$ i $b>0$:

A. nie ma rozwiązań,

B. ma jedno rozwiązanie,

C. ma dwa rozwiązania,

D. ma cztery rozwiązania.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

3.8.15. Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{x-8}=x-22$, dla $x\neq 8$. **2 pkt**

3.8.16. Rozwiąż równanie $\frac{2x-10}{x}=\frac{x-8}{2}$. **2 pkt**

3.8.17. Rozwiąż równanie $\frac{x^3-2x}{x-\sqrt{2}}=0$. **2 pkt**

3.8.18. Turysta wspinał się na pewien szczyt górski. Trasa, którą miał do pokonania, wynosiła w jedną stronę 7,5 kilometra. Prędkość, z jaką turysta schodził ze szczytu, była o 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa od prędkości, z jaką wchodził na szczyt. Oblicz prędkość wchodzenia, jeżeli wiadomo, że całkowity czas wędrówki wynosił 8 godzin. **5 pkt**

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

P.3.1.1 PRZYKŁAD 3. Liczba 4 jest rozwiązaniem równania.

PRZYKŁAD 4. Liczba -6 nie jest rozwiązaniem równania.

3.1.1.

Równanie	Czy liczba spełnia równanie?					
	-1	2	5	-5	3	0
$x^2-25=0$	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*
$x(x+1)(x-2)=0$	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*
$x^2-5x+6=0$	*NIE*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*
$x^3-7x^2+10x=0$	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*	*TAK*
$x^3-27=0$	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*
$\frac{x+5}{2}=x^2-5$	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*NIE*

P.3.1.2 PRZYKŁAD 3. Liczba -4 nie jest rozwiązaniem nierówności.

PRZYKŁAD 4. Liczba 10 jest rozwiązaniem nierówności.

3.1.2.

Nierówność	Czy liczba spełnia nierówność?				
	$\sqrt{2}$	0	-2	3	π
$x^2>5$	*NIE*	*NIE*	*NIE*	*TAK*	*TAK*
$x^3-5x\le 6$	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*NIE*	*NIE*
$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}<10$	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
$(x+2)(x-1)>x-\sqrt{2}$	*TAK*	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*TAK*
$\frac{x+x^2}{2}\ge 2x-1$	*NIE*	*TAK*	*TAK*	*TAK*	*TAK*

3.1.3. D **3.1.4.** C **3.1.5.** D **3.1.6.** B **3.1.7.** B

3.A.1. **a.** $x=2\frac{1}{3}$ **b.** $x=2\frac{2}{5}$ **c.** $x=1\frac{1}{7}$ **d.** $x=1\frac{2}{29}$

3.A.2. **a.** $x=-1$ **c.** nieskończenie wiele rozwiązań

b. brak rozwiązania

3.A.3. **a.** brak rozwiązania **d.** $x=-2$

b. $x=\frac{1}{5}$ **e.** $x=3\frac{3}{8}$

c. $x=-\frac{5}{6}$ **f.** $x=-\frac{1}{9}$

3.A.4. **a.** $x=\frac{5(5+\sqrt{5})}{4}$ **b.** $x=2$ **c.** $x=-\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ **d.** $x=-\frac{2(\sqrt{2}-6)}{17}$

3.A.5. Klasa liczy 28 uczniów.

3.A.6. Szukane miary kątów czworokąta to $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$.

3.A.7. Szukane długości boków prostokąta to 12 i 27.

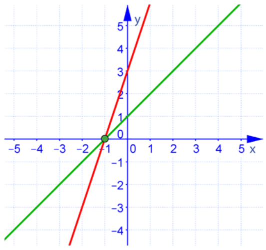
3.A.8. Szukane liczby to 8 i 3.

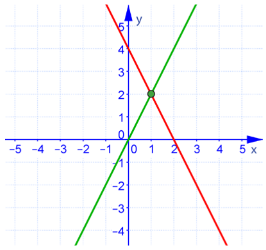
3.A.9. Szukana liczba to 84.

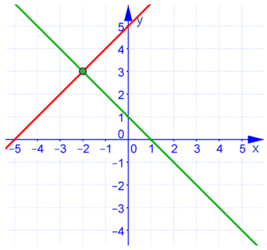
3.A.10. Odległość między miastami wynosi 36 km.

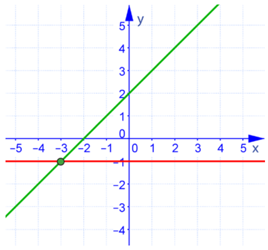
3.A.11. A **3.A.12.** B **3.A.13.** D **3.A.14.** C **3.A.15.** C
3.A.16. C **3.A.17.** C **3.A.18.** D **3.A.19.** B **3.A.20.** B

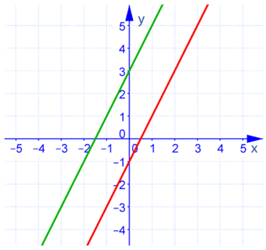
3.2.1.

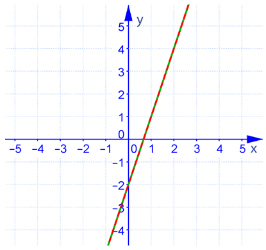
a.

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

b.

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

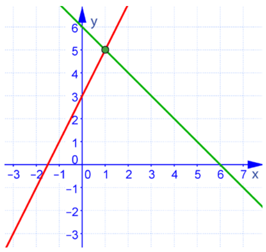
c.

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

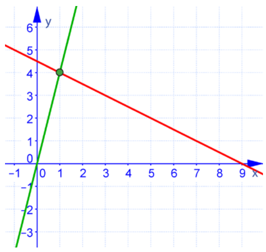
d.

$\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

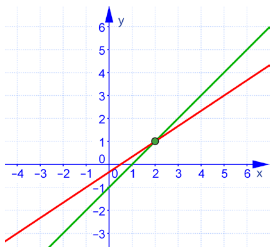
e.

brak rozwiązania

f.

nieskończenie wiele rozwiązań

3.2.2.

a.

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$

b.

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

c.

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

3.2.3. $a = 2$

3.2.4. $k = 1\frac{1}{2}$

3.2.5. C **3.2.6.** A **3.2.7.** B **3.2.8.** A **3.2.9.** D

3.3.1.

a. $x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right\rangle$

b. $x \in (-\infty; 3)$

c. $x \in \left(-2\frac{2}{3}; \infty\right)$

d. nieskończenie wiele rozwiązań

e. $x \in (-\infty; 14\rangle$

f. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

g. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle$

h. $x \in (-\infty; 11)$

3.3.2.

a. $x \in (-\infty; -5)$

b. nieskończenie wiele rozwiązań

c. brak rozwiązań

d. $x \in \left(-\infty; 5\frac{1}{3}\right)$

e. $x \in \left\langle -1\frac{5}{8}; \infty\right)$

3.3.3. Największa liczba całkowita spełniająca nierówność to $x = -1$.

3.3.4. Najmniejsza liczba całkowita spełniająca nierówność to $x=-2$.

3.3.5. **a.** $x\in(6\sqrt{2};\infty)$ **b.** $x\in(2\sqrt{3}-2;\infty)$ **c.** $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right\rangle$ **d.** $x\in\langle 2\sqrt{2}+1;\infty)$

3.3.6. C **3.3.7.** A **3.3.8.** A **3.3.9.** C **3.3.10.** D
3.3.11. B **3.3.12.** C **3.3.13.** C **3.3.14.** C **3.3.15.** D

3.B.1. **a.** $\begin{cases}x=0\\y=12\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x=4\\y=-4\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

3.B.2. **a.** $\begin{cases}x=100\\y=1\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$ **d.** $\begin{cases}x=-10\\y=-8\end{cases}$

3.B.3. $k=-\frac{5}{13}$

3.B.4. $a=-1$

3.B.5. **a.** $\begin{cases}x=2\\y=-5\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=-1\\y=6\end{cases}$

3.B.6. **a.** np. $3x-2y=10$ **b.** np. $2x-8y=10$ **c.** np. $x-4y=20$

3.B.7. **a.** Punkt $(-4;3)$ nie jest rozwiązaniem układu. **b.** Punkt $(2;3)$ jest rozwiązaniem układu.

3.B.8. **a.** $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}x=2\\y=-1\\z=1\end{cases}$ **c.** $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=5\end{cases}$ **d.*** $\begin{cases}a=0\\b=1\\c=2\\d=3\end{cases}$

3.B.9. Szukane liczby to 40 i 20.

3.B.10. Szukane długości boków prostokąta to 22 i 18.

3.B.11. Obecnie matka ma 39 lat, a córka 15 lat.

3.B.12. Kamil kupił 5 kg pomarańczy i 3 kg bananów.

3.B.13. C **3.B.14.** D **3.B.15.** C **3.B.16.** A **3.B.17.** B
3.B.18. A **3.B.19.** C **3.B.20.** D **3.B.21.** C **3.B.22 .** A

P.3.4.1 PRZYKŁAD 5. $x_1=2-\sqrt{11}$, $x_2=2+\sqrt{11}$

PRZYKŁAD 6. $x_1=-\frac{3}{5}$, $x_2=1$

PRZYKŁAD 7. $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$

PRZYKŁAD 8. $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{4}$

PRZYKŁAD 9. brak rozwiązań

3.4.1. **a.** $x_1=-1$, $x_2=1\frac{1}{2}$

b. $x_1=-\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{3}$

c. $x_1=-11$, $x_2=7$

d. $x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

e. $x_1=-1\frac{2}{3}$, $x_2=0$

f. brak rozwiązań

3.4.2. **a.** $x_1=-11$, $x_2=0$

b. $x_1=-2\frac{1}{2}$, $x_2=2\frac{1}{2}$

c. brak rozwiązań

d. $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$

e. $x_1=0$, $x_2=7$

f. $x_1=-2\frac{2}{3}$, $x_2=2\frac{2}{3}$

g. $x_1=3$, $x_2=7$

h. brak rozwiązań

3.4.3.
a. $x_1 = -4, x_2 = -1$
b. $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{3}$
c. $x_1 = 0, x_2 = \frac{2\sqrt{7}}{3}$
d. $x_1 = -8, x_2 = 0$
e. brak rozwiązań
f. $x_1 = 3 - \sqrt{2}, x_2 = 3 + \sqrt{2}$

3.4.4. Szukane liczby to 4, 6, 8.

3.4.5. Wymiary działki to 14 m x 30 m.

3.4.6. Samochód jechał ze średnią prędkością 60 $\frac{km}{h}$.

3.4.7. Średnia prędkość pierwszego pociągu to 60 $\frac{km}{h}$, a drugiego pociągu to 90 $\frac{km}{h}$.

3.4.8. Szukane długości przyprostokątnych to 8 i 15.

3.4.9. Szukana liczba to -3 lub 5.

3.4.10. Pan Jan pracował 4 dni.

3.4.11. A **3.4.12.** C **3.4.13.** B **3.4.14.** C **3.4.15.** C
3.4.16. D **3.4.17.** A **3.4.18.** C **3.4.19.** C **3.4.20.** A

3.4.21. $x_1 = -3, x_2 = 7$

3.4.22. Szukane długości boków to 7 i 9.

3.4.23. Szukane liczby to 7 i 8.

3.4.24. 8 $\frac{km}{h}$

3.4.25. Wymiary trawnika to 10 m x 12 m.

3.4.26. Prędkość pociągu osobowego wynosi 60 $\frac{km}{h}$, a ekspresowego 100 $\frac{km}{h}$.

P.3.5.2
PRZYKŁAD 4. $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 6; \infty)$
PRZYKŁAD 5. $x \in (2; 7)$
PRZYKŁAD 6. $x \in R$
PRZYKŁAD 7. $x \in \varnothing$
PRZYKŁAD 8. $x = \frac{1}{5}$
PRZYKŁAD 9. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$

3.5.1.
a. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{3}; \infty\right)$
b. $x \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$
c. $x \in (-\infty; -3) \cup (5; \infty)$
d. $x \in (-\infty; -8\rangle \cup \langle 2; \infty)$
e. $x \in \langle -1; 4\rangle$
f. $x \in R$

3.5.2. a. $x \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 4; \infty)$ b. $x \in (-\infty; -10) \cup (0; \infty)$ c. $x \in \langle -3; 1\rangle \cup \langle 2; 3\rangle$

3.5.3. $c = 1\frac{1}{8}$

3.5.4. $b \in (-2\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$

3.5.5. C **3.5.6.** A **3.5.7.** D **3.5.8.** D **3.5.9.** B
3.5.10. A **3.5.11.** A **3.5.12.** C **3.5.13.** B **3.5.14.** B

3.5.15. $x \in (-1; 2)$

3.5.16. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 3; \infty)$

3.5.17. $x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 12; \infty)$

3.5.18. $x \in \langle -5; 5\rangle$

P.3.6.1
PRZYKŁAD 3. $x = -10$, bo $(-10)^3 = -1000$
PRZYKŁAD 4. $x = 11$, bo $11^3 = 1331$

P.3.6.2
PRZYKŁAD 4. $x = 5$
PRZYKŁAD 5. $x = 6$
PRZYKŁAD 6. $x = -8$

P.3.6.3
PRZYKŁAD 3. $x = -6$
PRZYKŁAD 4. $x = 3\frac{1}{3}$
PRZYKŁAD 5. $x = 0$
PRZYKŁAD 6. $x = 16$

3.6.1. a. $x=4$ b. $x=-6$ c. $x=3$ d. $x=-18$ e. $x=\frac{3}{8}$ f. $x=4\frac{4}{5}$

3.6.2. D **3.6.3.** D **3.6.4.** A **3.6.5.** D **3.6.6.** C

3.7.1. a. $x_1=-9, x_2=-7, x_3=7, x_4=1$ b. $x_1=-4, x_2=-\sqrt{5}, x_3=\sqrt{5}, x_4=3$ c. $x_1=0, x_2=4$ d. $x_1=0, x_2=\frac{1}{8}, x_3=5$

3.7.2. a. $x_1=-2, x_2=0$ b. $x_1=-4, x_2=\frac{2}{3}, x_3=11$ c. $x_1=-3, x_2=-\sqrt{7}, x_3=-1, x_4=\sqrt{7}$ d. $x_1=0, x_2=10$ e. $x_1=-5\frac{1}{2}, x_2=0, x_3=2$ f. $x_1=-4, x_2=-2, x_3=3$

3.7.3. a. $x_1=-6, x_2=0, x_3=2$ b. $x_1=-2, x_2=0, x_3=2$ c. $x_1=-8, x_2=0$ d. $x_1=0, x_2=2, x_3=3$ e. $x_1=-4, x_2=0, x_3=\frac{1}{2}$ f. $x_1=0$

P.3.7.2 PRZYKŁAD 4. $x_1=-5, x_2=-4, x_3=5$ PRZYKŁAD 5. $x_1=\frac{1}{2}$ PRZYKŁAD 6. $x_1=-\sqrt{3}, x_2=-1\frac{1}{3}, x_3=\sqrt{3}$

3.7.4. a. $x_1=-6, x_2=-2, x_3=6$ b. $x_1=-7, x_2=2, x_3=7$ c. $x_1=-4$ d. $x_1=-\sqrt{10}, x_2=-1\frac{1}{4}, x_3=\sqrt{10}$ e. $x_1=-3, x_2=-2\frac{1}{2}, x_3=3$ f. $x_1=-\sqrt{11}, x_2=\sqrt{11}\ x_3=4$

3.7.5. D **3.7.6.** A **3.7.7.** C **3.7.8.** A **3.7.9.** C
3.7.10. C **3.7.11.** B

3.7.12. $x_1=-6, x_2=0$

3.7.13. $x_1=-2\sqrt{5}, x_2=4, x_3=2\sqrt{5}$

3.7.14. $x_1=-4, x_2=0, x_3=4$

3.7.15. $x_1=0, x_2=2, x_3=9$

3.7.16. $x_1=-9, x_2=-6, x_3=6$

3.7.17. $x_1=-1, x_2=0, x_3=3, x_4=4, x_5=10$

3.C.1. a. $D=R\setminus\{-3;0\}$ b. $D=R\setminus\left\{-\frac{5}{6}\right\}$ c. $D=R\setminus\{-2;4\}$ d. $D=R$

3.C.2. a. $\frac{2x+5}{2}$ b. $\frac{x^2+3x}{2}$ c. $\frac{x-3}{x}$ d. $\frac{x}{3}$

3.C.3. a. $\frac{6x}{2x^2}$ b. $\frac{4x-4}{x^2-1}$ c. $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ d. $\frac{8x^2}{2x^2+4x}$

3.C.4. a. $\frac{5x-2}{(x+2)(x-4)}, D=R\setminus\{-2;4\}$ b. $\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}, D=R\setminus\{-1;0\}$ c. $\frac{3x^2-5x+6}{(x+3)(x-5)}, D=R\setminus\{-3;5\}$ d. $\frac{2x^2-3x-29}{(x-7)(x-3)}, D=R\setminus\{3;7\}$

3.C.5. a. $\frac{x-6}{x(x+2)}, D=R\setminus\{-2;0\}$ b. $\frac{-x^2+6x+3}{(x-1)(x+3)}, D=R\setminus\{-3;1\}$ c. $\frac{x^2-12x-8}{(x+2)(x-2)}, D=R\setminus\{-2;2\}$ d. $\frac{3x^2+10x-4}{(x+5)(4x-1)}, D=R\setminus\left\{-5;\frac{1}{4}\right\}$

3.C.6.
a. $\frac{6x^2+12x}{(x-1)(x-7)}, D=R\setminus\{1;7\}$
b. $\frac{x^2+6x+8}{(x-1)(2x+2)}, D=R\setminus\{-1;1\}$
c. $\frac{6x}{(2x+1)(x-3)}, D=R\setminus\left\{-3;-\frac{1}{2};3\right\}$
d. $\frac{x-5}{2}, D=R\setminus\{-5;0\}$

3.C.7.
a. $\frac{2x^2-13x-7}{(x-4)(x+8)}, D=R\setminus\{-8;4;7\}$
b. $\frac{x+3}{x(2x+5)}, D=R\setminus\left\{-3;-\frac{5}{2};0\right\}$
c. $\frac{x^2-4x-5}{2(x+2)}, D=R\setminus\{-5;-2;-1\}$
d. $2x^2+3x, D=R\setminus\left\{-2;0;\frac{3}{2}\right\}$

3.C.8.
a. $\frac{x^3+3x^2+3x-3}{x}$
b. $\frac{x^3+5x^2+2x-14}{x+1}$

3.C.9. Średnia prędkość samochodu na trasie tam i z powrotem wynosi $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3.C.10. D **3.C.11.** A **3.C.12.** D **3.C.13.** C **3.C.14.** D

3.C.15. Średnia prędkość autobusu na trasie to $72\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3.8.1.
a. $x_1=-5, x_2=5$
b. $x_1=-2\frac{1}{2}, x_2=0$
c. $x=0$
d. $x=-8$
e. $x=-1$
f. $x=3$
g. $x=-2$
h. $x=-\frac{1}{2}$

3.8.2.
a. $x=5$
b. $x=7$
c. $x_1=-4, x_2=\frac{1}{2}$
d. $x_1=-6, x_2=-1$
e. $x_1=11, x_2=21$
f. $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=6$
g. brak rozwiązań
h. $x_1=-3, x_2=1$

3.8.3. Zebranie jednej skrzynki przed południem zajęło ogrodnikowi 15 minut.

3.8.4. Turysta pierwszego dnia szedł ze średnią prędkością $4\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3.8.5. D **3.8.6.** A **3.8.7.** D **3.8.8.** C **3.8.9.** C
3.8.10. A **3.8.11.** B **3.8.12.** A **3.8.13.** B **3.8.14.** C

3.8.15. $x_1=7, x_2=25$ **3.8.16.** $x_1=2, x_2=10$

3.8.17. $x_1=0, x_2=-\sqrt{2}$ **3.8.18.** $1{,}5\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

ISBN: 978-83-63975-11-1

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium
matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY