4

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Funkcje

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.fotolia.com:
© agsandrew - id. 68928702; © laufer - id. 51915174; © Petr Ciz - id. 62076812; © Givaga - id. 62312389; © mills21 - id. 11761333; © PixBox - id. 31636550; © 103tnn - id. 68673495 65111099; © Dreaming Andy - id. 62704436; © Nomad_Soul - id. 47076856; © Mariusz Blach - id. 58863873; © mRGB - id. 61540461; © Michel Bazin - id. 7624701; © Marek - id. 68124775;© sborisov - id. 57764128; © markrubens - id. 66739005; © Boggy - id. 66313617; © tcsaba - id. 73255140; © Gudellaphoto - id. 64841561; © Andrey Kudrin - id. 20936587; © arsdigital - id. 56402903; © yodiyim - id. 73378392; © erectus - id. 69338227

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2014. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-10-4

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

Funkcje

Słowo „funkcja” w oczywisty sposób łączy się z matematyką. „Zalążki tego pojęcia, choć nieświadomego i nie wyodrębnionego, spotkamy w matematyce i przyrodoznawstwie Greków. Już w próbach ustalenia najprostszych praw akustyki, przypisywanych pitagorejczykom, znalazło wyraz poszukiwanie wzajemnych zależności ilościowych między różnymi wielkościami fizycznymi, jak długość i grubość struny i wysokość dźwięku”*. Jednak na tle historii obejmującej tysiące lat jest to pojęcie dość nowe, które na stałe weszło do języka matematycznego dopiero na początku XVIII w. Definicję funkcji po raz pierwszy podał Jan Bernoulli w jednym z artykułów w 1718 roku. Określił on funkcję jako „ilości zestawione w jakikolwiek sposób” ze zmiennymi i stałymi — co niewiele odbiega od słowa „przyporządkowanie”, które we współczesnej matematyce jest kluczowym elementem tej definicji. Na początku funkcję z argumentem x oznaczono symbolem φx. Nawiasy i symbol f, czyli formę, w jakiej zapisujemy funkcje współcześnie, wprowadził Leonhard Euler w 1734 roku. Dzięki funkcjom możemy opisywać praktycznie wszelkie zjawiska zachodzące w przyrodzie. Wykorzystując zależności funkcji wykładniczej, możemy obliczyć, w jakim tempie zachodzą niekorzystne dla świata zmiany w ekosystemie, i zapobiegać wyginięciu określonych gatunków zwierząt. Za pomocą funkcji kwadratowej możemy w przedsiębiorstwach optymalizować koszty produkcji czy zyski. Przykłady można mnożyć, co potwierdza, że współczesny świat bez funkcji nie mógłby się rozwijać.

---

*A.P. Juszkiewicz (red.), — *Historia matematyki od czasów najdawniejszych do początku XIX stulecia*, Warszawa 1975, t. 2, s. 152 .

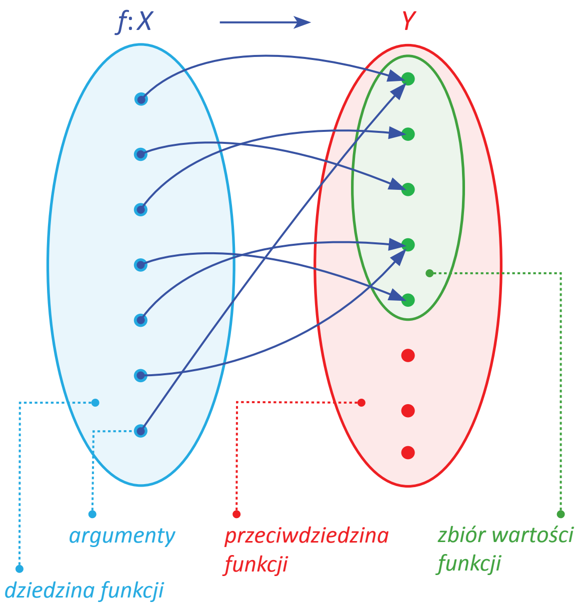
Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
⚡ **P.1.A.1**	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
⚡ **Z.1.A.1**	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA — ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
☑ **T.1.A**	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej

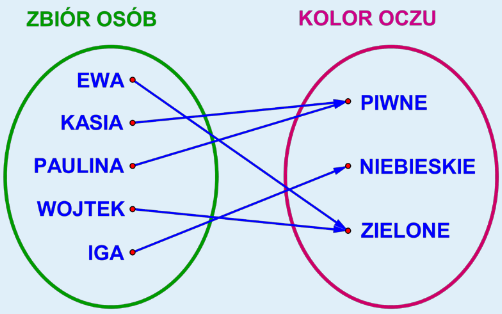
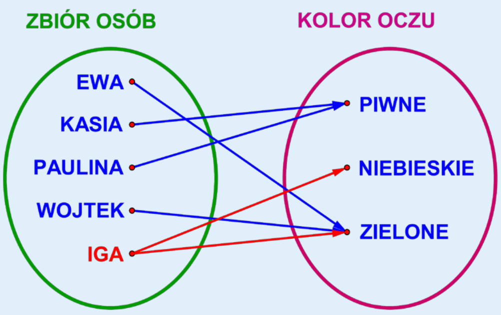
4.1 ▶ Sposoby określania funkcji

▶ Podstawowe wiadomości o funkcjach

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Funkcja ze zbioru X w zbiór Y to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X (dziedziny) dokładnie jednego elementu zbioru Y (przeciwdziedziny funkcji).	
Elementy dziedziny nazywamy argumentami.	
Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy wartościami funkcji. Tworzą one zbiór wartości funkcji.	
Aby określić funkcję, należy podać zbiór X i Y oraz regułę, według której argumentom ze zbioru X przyporządkowujemy wartości funkcji.	
Funkcje zazwyczaj oznaczamy małymi literami, np.: f, g, h.	

▶ Opis funkcji za pomocą grafu

P.4.1.1

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Graf		 To nie jest funkcja, ponieważ jednemu elementowi pierwszego zbioru (Idze) przyporządkowano dwa elementy drugiego zbioru (dwa kolory oczu).

► Słowny opis funkcji

P.4.1.1

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Opis słowny	Każde dziecko ma jedną mamę. Każde państwo ma dokładnie jedną stolicę. Każdej liczbie przyporządkowujemy jej kwadrat. Każdej liczbie można przyporządkować jej połowę.	Każdy człowiek ma jeden samochód. To nie jest funkcja, ponieważ niektóre osoby mogą w ogóle nie mieć samochodu lub mogą mieć więcej niż jeden.

► Opis funkcji za pomocą wzoru

P.4.1.1

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Wzór	$f(x)=2x+1$ $y=3x^2-x$ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ Zapisy $f(x)=\dots$ lub $y=\dots$ są zapisami równoważnymi.	$y^2=x$ To nie jest funkcja, ponieważ jednemu argumentowi (x) przyporządkowane są dwie wartości $(y$ i $-y)$. Np. $(-2)^2=4$ i $2^2=4$

► Opis funkcji za pomocą tabeli

P.4.1.1

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Tabela	Argumenty x: 1, -1, 0, 2, -2 Wartości $y=f(x)$: 4, 5, 2, 1, 2 Zapis informuje nas o tym, że poszczególnym argumentom przyporządkowane są następujące wartości: $f(1)=4$ $f(-1)=5$ $f(0)=2$ $f(2)=1$ $f(-2)=2$	Argumenty x: 2, -1, 0, 2, -2 Wartości $y=f(x)$: 4, 5, 2, 1, 2 To nie jest funkcja, ponieważ temu samemu argumentowi $(x=2)$ przyporządkowane są dwie wartości $(y=4$ i $y=1)$.

Tabela (funkcja):

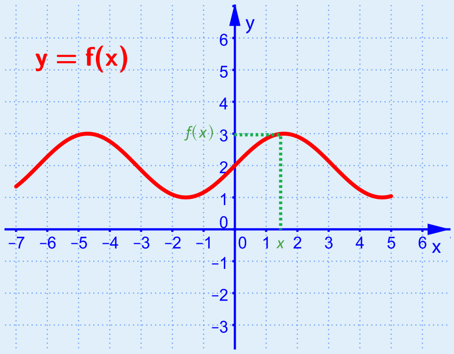
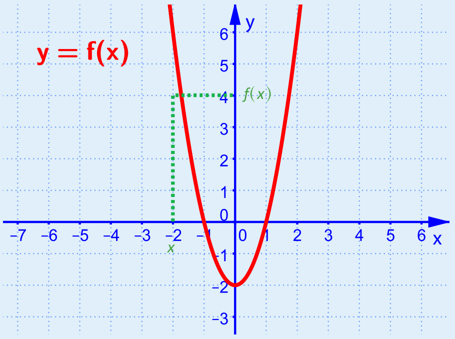
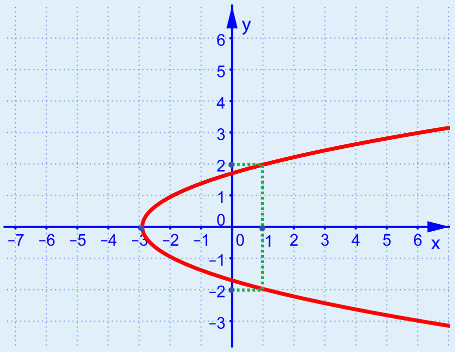
Argumenty x	1	-1	0	2	-2
Wartości $y=f(x)$	4	5	2	1	2

Tabela (nie funkcja):

Argumenty x	2	-1	0	2	-2
Wartości $y=f(x)$	4	5	2	1	2

► Opis funkcji za pomocą wykresu

P.4.1.1

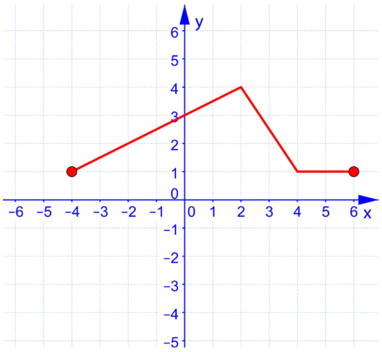
SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Wykres Na osi *OX* odczytujemy argumenty (x), a na osi *OY* wartości $f(x)$.	 	 To nie jest funkcja, ponieważ istnieją argumenty (x), którym przyporządkowane są dwie wartości $(y \text{ i } -y)$. Np. $f(1)=2$ i $f(1)=-2$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

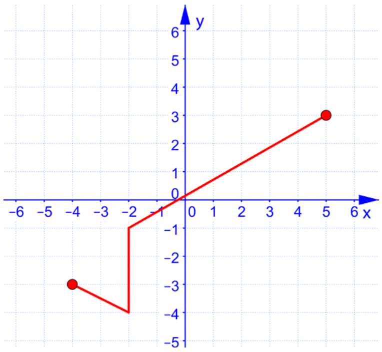
4.1.1. Określ, czy wykres przedstawia funkcję.

Z.4.1.1

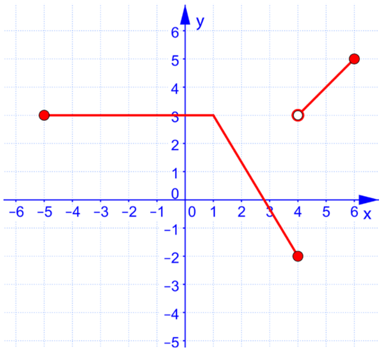
PRZYKŁAD 1.



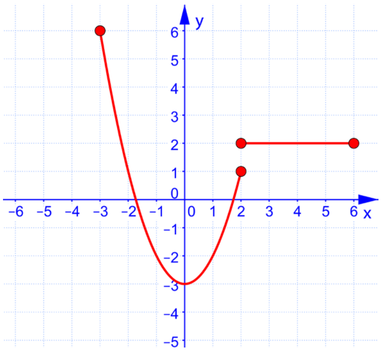
PRZYKŁAD 2.



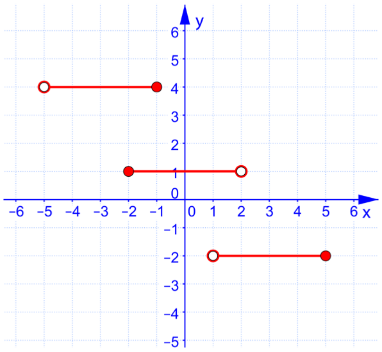
PRZYKŁAD 3.



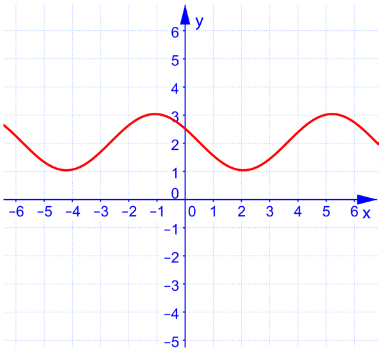
PRZYKŁAD 4.



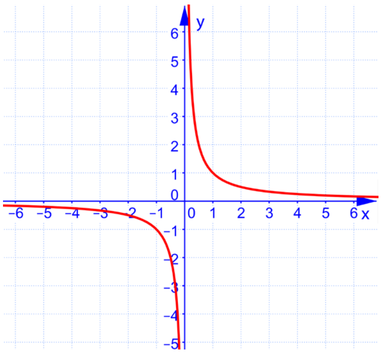
PRZYKŁAD 5.



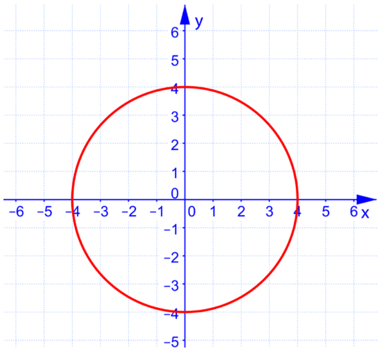
PRZYKŁAD 6.



PRZYKŁAD 7.



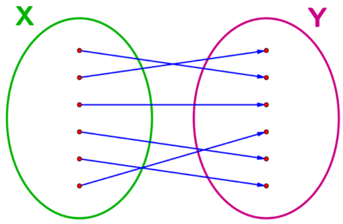
PRZYKŁAD 8.



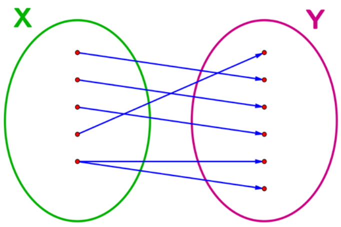
4.1.2. Określ, czy graf przedstawia funkcję.

Z.4.1.2

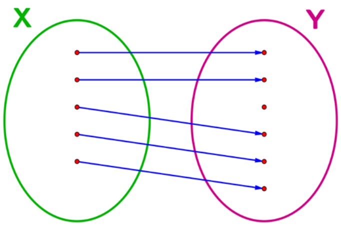
PRZYKŁAD 1.



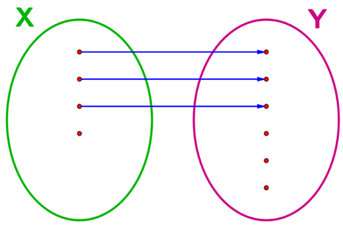
PRZYKŁAD 2.



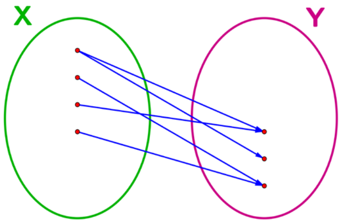
PRZYKŁAD 3.



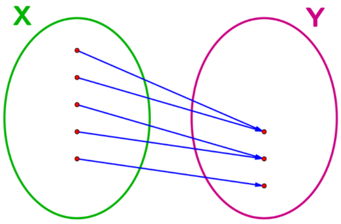
PRZYKŁAD 4.



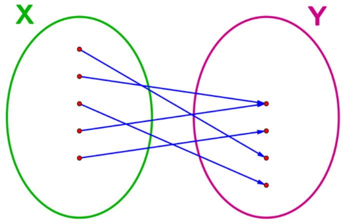
PRZYKŁAD 5.



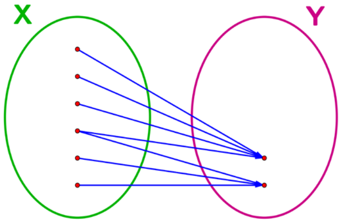
PRZYKŁAD 6.



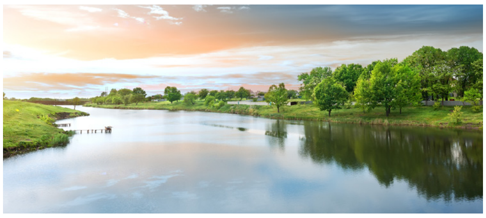
PRZYKŁAD 7.



PRZYKŁAD 8.



4.1.3. Na podstawie słownego opisu przyporządkowania określ, czy jest ono funkcją.



Opis słowny przyporządkowania	Przyporządkowanie	
	jest funkcją	nie jest funkcją
Każdej liczbie pierwszej przyporządkowany jest jej dzielnik różny od 1.		
Każdemu wielokątowi wypukłemu przyporządkowana jest liczba jego przekątnych.		
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowany jest jej kwadrat.		
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowana jest liczba o 10 większa.		
Każdej rzece przyporządkowana jest jej długość.		
Każdemu uczniowi w klasie przyporządkowany jest numer w dzienniku.		
Każdej osobie przyporządkowana jest data urodzenia.		
Każdej mamie przyporządkowane jest jej dziecko.		
Każdemu uczniowi przyporządkowany jest język obcy, którego się uczy.		
Każdemu pracownikowi firmy przyporządkowany jest jego adres e-mail.		

4.1.4. Ustal (zaznacz), czy przedstawione w tabeli przyporządkowania są funkcjami.

a.

x	-3	-2	1	3	1	4
$f(x)$	-1	-2	3	4	2	1

jest funkcją	nie jest funkcją

b.

x	-5	-4	-2	0	1	4
$f(x)$	25	16	4	0	1	16

jest funkcją	nie jest funkcją

c.

x	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	11	12	13	14	15	16

jest funkcją	nie jest funkcją

d.

x	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	7	6	5	4	3	2

jest funkcją	nie jest funkcją

► Dziedzina funkcji określonej wzorem

P.4.1.2

Dziedzina funkcji składa się ze wszystkich elementów, które można podstawić w miejsce litery x do wzoru. Określając dziedzinę funkcji, należy zwrócić uwagę na:

► mianowniki, ponieważ w mianowniku nie może występować cyfra 0,

$f(x) = \frac{1}{x-2}$

W mianowniku występuje wyrażenie: $x-2$. Aby zapewnić, że w mianowniku nie będzie występowała cyfra 0, należy z dziedziny usunąć 2, ponieważ: $x-2 \neq 0$, czyli $x \neq 2$.

Dziedzina:

$x \in \boldsymbol{R} \setminus \{2\}$

► pierwiastki stopnia parzystego, ponieważ liczba pod pierwiastkiem musi być nieujemna.

$f(x) = \sqrt{x+5}$

Pod pierwiastkiem występuje wyrażenie: $x+5$. Aby to wyrażenie było nieujemne, trzeba rozwiązać nierówność: $x+5 \geq 0$, czyli $x \geq -5$.

Dziedzina:

$x \in \langle -5; \infty)$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyznacz dziedzinę funkcji.

PRZYKŁAD 1. $f(x) = \frac{x}{2x+4}$

PRZYKŁAD 2. $f(x) = \sqrt{3x+9}$

PRZYKŁAD 3. $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x-1}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.1.5. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a. $f(x) = 3x+5$

b. $f(x) = x^2 - 1$

c. $f(x) = \frac{1}{x-5}$

d. $f(x) = \frac{x}{4x+2}$

e. $f(x) = \sqrt{2x-6}$

f. $f(x) = \sqrt{4+3x}$

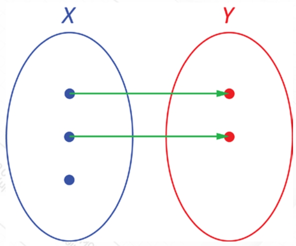
g. $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{2x-2}$

h. $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}+3}{x-2}$

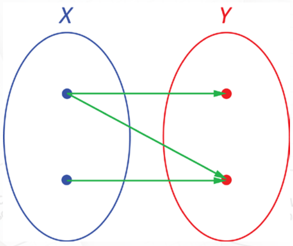
i. $f(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x-5)}$

4.1.6. Graf, który przedstawia funkcję, to:

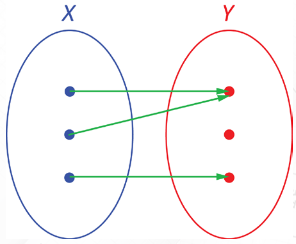
A.



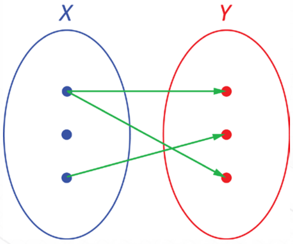
C.



B.



D.



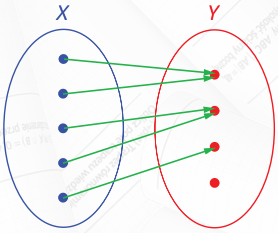
4.1.7. Dana jest funkcja określona za pomocą tabeli:

x	-1	0	a	2
$f(x)$	2	3	1	5

Liczba a nie może być liczbą równą:

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

4.1.8. Na grafie przedstawiono pewną funkcję. Wynika z tego, że przeciwdziedzina zawiera:



A. 5 elementów,
B. 4 elementy,
C. 3 elementy,
D. 9 elementów.

4.1.9. Zdanie, które nie jest opisem funkcji, to:

A. Każdemu człowiekowi przyporządkowana jest liczba wyrażająca jego wagę.

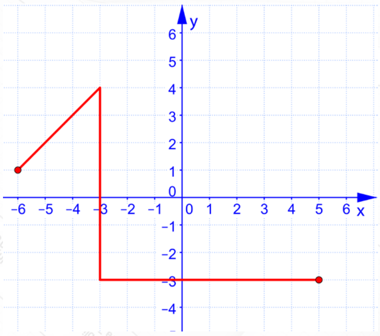
B. Każdej liczbie przyporządkowana jest jej połowa.

C. Każdemu uczniowi przyporządkowany jest nauczyciel.

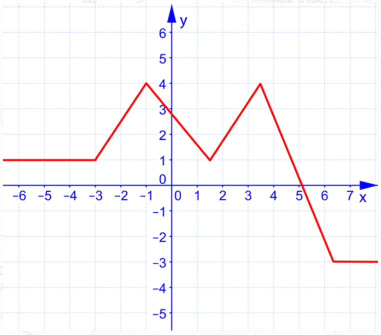
D. Każdemu wielokątowi przyporządkowana jest wartość jego pola.

4.1.10. Wykresem funkcji jest:

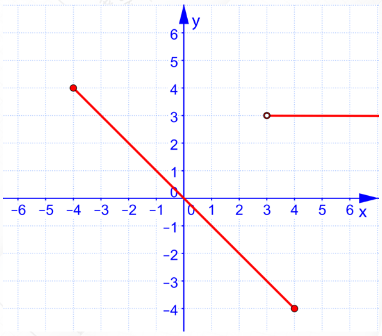
A.



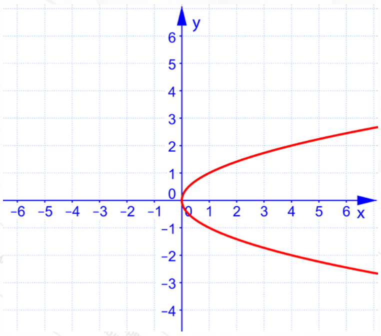
C.



B.



D.



4.1.11. Dziedziną funkcji $f(x)=\frac{x}{2x-16}$ jest zbiór:

A. $\boldsymbol{R}\setminus\{16\}$ **B.** $\boldsymbol{R}\setminus\{2\}$ **C.** $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ **D.** $\boldsymbol{R}\setminus\{8\}$

4.1.12. Dziedziną funkcji $y=\sqrt{4x-18}$ jest zbiór:

A. $x\in(18;\infty)$ **B.** $x\in\left(-\infty;4\frac{1}{2}\right)$ **C.** $x\in\left\langle4\frac{1}{2};\infty\right)$ **D.** $x\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{4\frac{1}{2}\right\}$

4.1.13. Funkcję $f(x)$, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje kwadrat liczby pomniejszony o jeden, można zapisać wzorem:

A. $f(x)=x^2-1$ **B.** $f(x)=(x-1)^2$ **C.** $(f(x))^2=x-1$ **D.** $f(x)-1=x^2$

4.1.14. Wzór, który nie przedstawia funkcji, to:

A. $y=x^2$ **B.** $y=2x$ **C.** $x=2y$ **D.** $x=y^2$

4.1.15. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x}}$. Do dziedziny funkcji należy liczba:

A. 5 **B.** 6 **C.** -1 **D.** 4

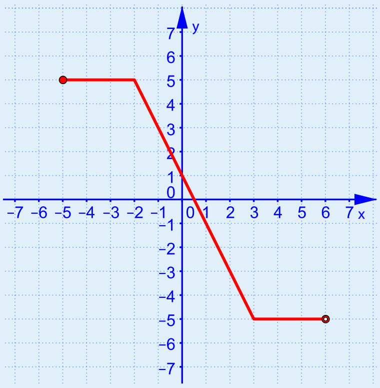
4.2 ▶ Obliczanie wartości funkcji dla danego argumentu. Obliczanie argumentu funkcji dla danej wartości

▶ Odczytywanie z wykresu wartości funkcji dla danego argumentu

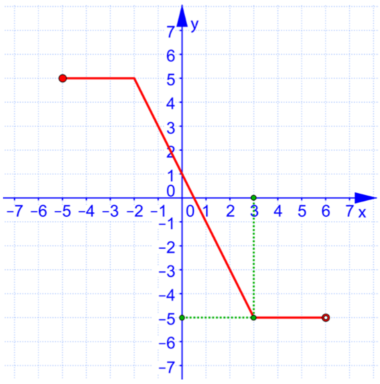
PRZYKŁAD 1

P.4.2.1

Odczytaj z wykresu, ile wynosi wartość funkcji dla argumentu: $x = 3$.



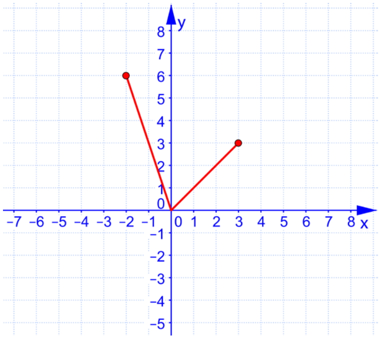
Aby znaleźć wartość dla argumentu $x = 3$, należy poprowadzić prostą równoległą do osi OY przechodzącą przez wskazany argument. Ta prosta przetnie wykres dokładnie w jednym miejscu. Teraz, prowadząc z tego punktu prostą równoległą do osi OX, w przecięciu z osią OY odczytujemy wartość. Zatem $f(3) = -5$.



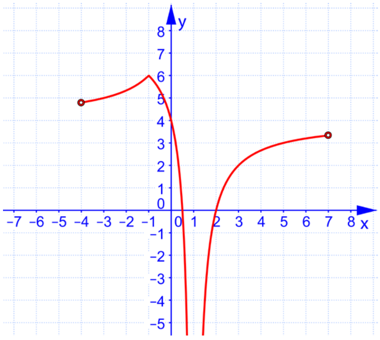
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Odczytaj z wykresów, ile wynoszą wartości funkcji dla poszczególnych argumentów.

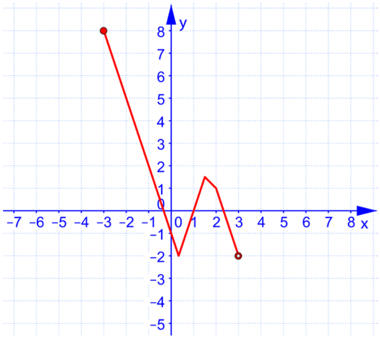
PRZYKŁAD 2. dla $x = -1$



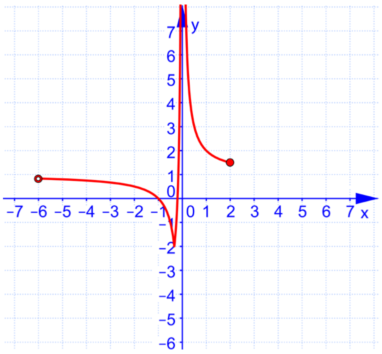
PRZYKŁAD 3. dla $x = 5$



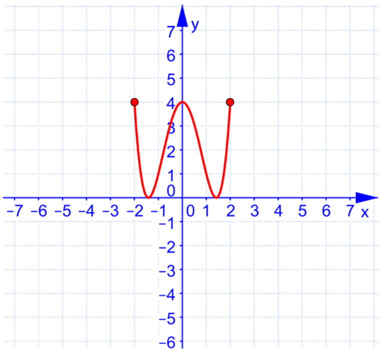
PRZYKŁAD 4. dla $x = -2$



PRZYKŁAD 5. dla $x = 1$



PRZYKŁAD 6. dla $x = 0$

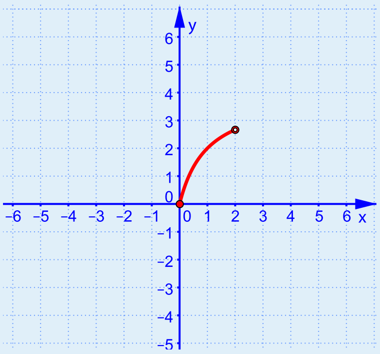


► Odczytywanie z wykresu argumentu funkcji dla danej wartości

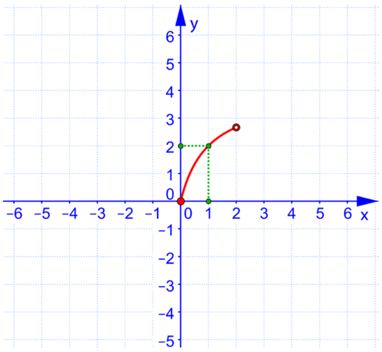
PRZYKŁAD 1

P.4.2.2

Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu wartość funkcji wynosi $y = 2$.



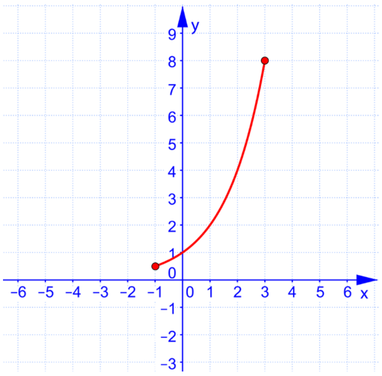
Aby odczytać z wykresu argument, mając daną wartość, należy poprowadzić prostą równoległą do osi OX przechodzącą przez wskazaną wartość. Ta prosta przetnie wykres w pewnym miejscu. Teraz, prowadząc z tego punktu prostą równoległą do osi OY, w przecięciu z osią OX odczytujemy argument. Zatem wartość 2 jest przyjmowana dla argumentu 1, co zapiszemy: $f(1) = 2$.



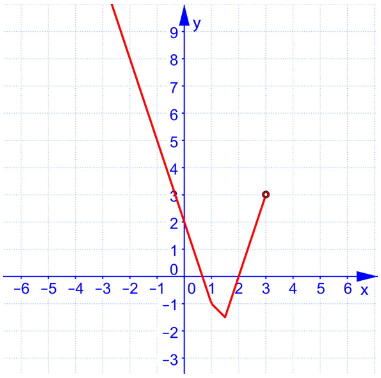
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Odczytaj z wykresów, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje poszczególne wartości.

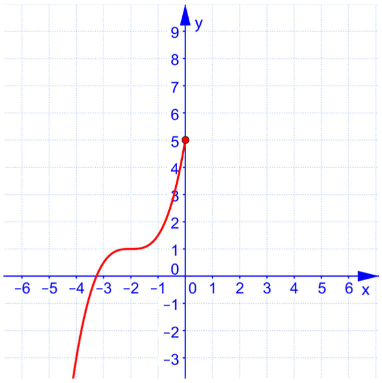
PRZYKŁAD 2. $y = 4$



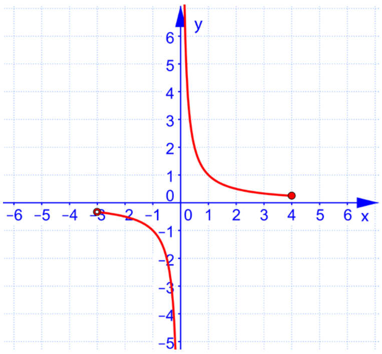
PRZYKŁAD 3. $y = 5$



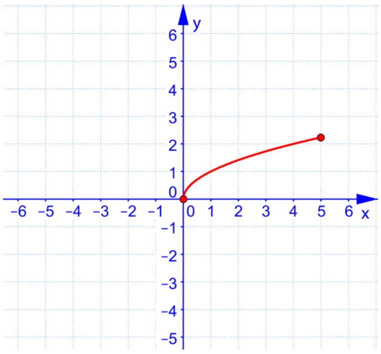
PRZYKŁAD 4. $y = -3$



PRZYKŁAD 5. $y = -1$



PRZYKŁAD 6. $y = 2$



► Obliczanie wartości funkcji dla danego argumentu na podstawie wzoru funkcji

PRZYKŁAD 1

P.4.2.3

Oblicz wartości funkcji o wzorze $f(x) = 2x + 3$ dla argumentów $-2, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

Aby znaleźć odpowiednią wartość, należy w miejsce każdego x występującego we wzorze wstawić odpowiednią liczbę.

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 = \frac{4}{3} + 3 = 1\frac{1}{3} + 3 = 4\frac{1}{3}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 3 + 3 = 6$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Oblicz wartości poszczególnych funkcji dla argumentów: $-2, -1, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$.

PRZYKŁAD 2. $f(x) = x^2 - 1$

PRZYKŁAD 3. $f(x) = \frac{x}{x+3}$

PRZYKŁAD 4. $f(x) = -x + 5$

PRZYKŁAD 5. $f(x) = x^3$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.2.1. Funkcja f jest określona na zbiorze $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$. Podaj zbiór wartości funkcji, jeśli:

a. $f(x) = \frac{x}{x+5}$

b. $f(x) = x^2 + 5x$

c. $f(x) = 2x - 5$

d. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x-2}$

► Obliczanie na podstawie wzoru funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje dane wartości

PRZYKŁAD 1

Oblicz, dla jakich argumentów x wartość funkcji $f(x) = 2x + 3$ wynosi: 6, 0, -4.

W celu znalezienia takiego x, aby $f(x) = 6$ lub $f(x) = 0$ albo $f(x) = -4$, należy wykorzystać wzór funkcji, czyli rozwiązać równania:

$2x + 3 = 6$

$2x = 3 \quad |:2$

$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

$f\left(1\frac{1}{2}\right) = 6$

$2x + 3 = 0$

$2x = -3 \quad |:2$

$x = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$

$f\left(-1\frac{1}{2}\right) = 0$

$2x + 3 = -4$

$2x = -7 \quad |:2$

$x = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$

$f\left(-3\frac{1}{2}\right) = -4$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.2.2. Oblicz, dla jakich argumentów wartość funkcji $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ wynosi odpowiednio: $-8; -4; \frac{1}{2}; 1$.

4.2.3. Dane są funkcje opisane za pomocą wzorów. Uzupełnij tabele.

a.

x	-2	-1		1	
$f(x) = 3x + 1$			1		10

b.

x	-5	-3		3	
$f(x) = x^3$			8		64

c.

x	-2		1		
$f(x) = \frac{x}{x+1}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{10}{11}$	$1\frac{1}{2}$

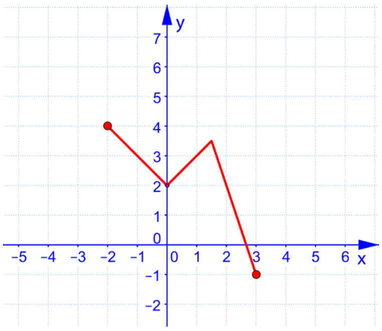
d.

x	-2	-1			
$f(x) = 2^x$			1	32	128

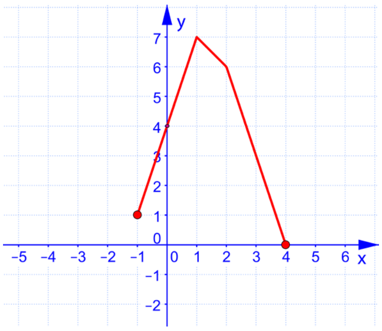
4.2.4. Dany jest wykres funkcji f. Odczytaj z wykresu $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

Z.4.2.4

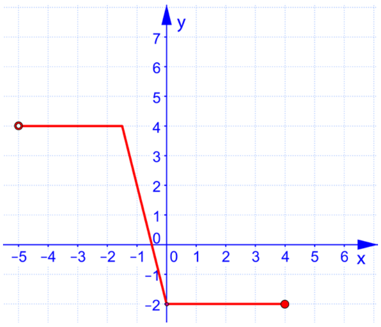
a.



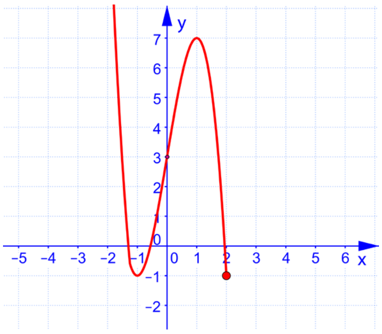
b.



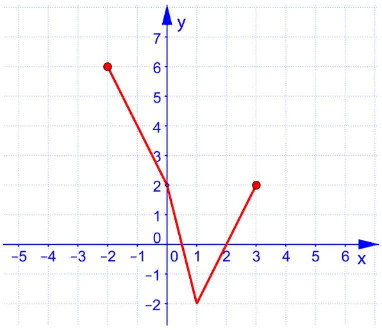
c.

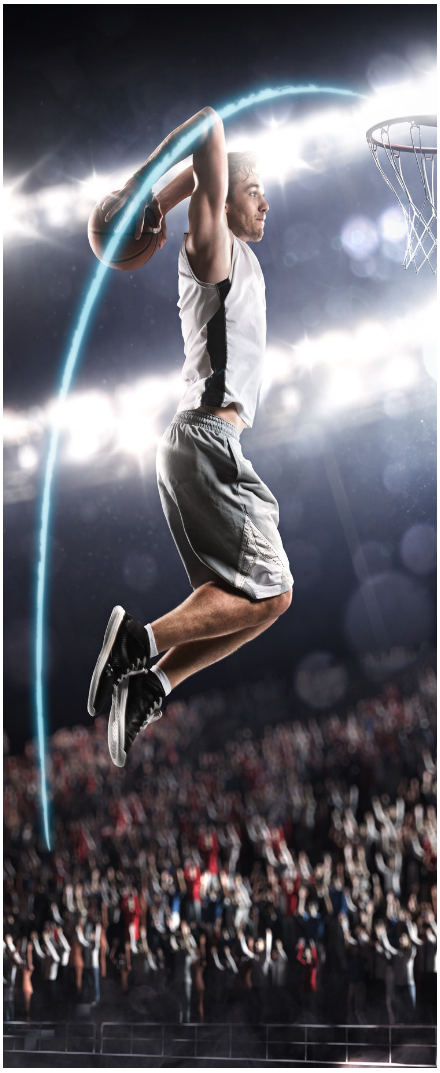


d.

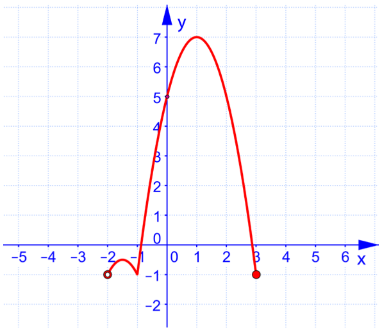


e.

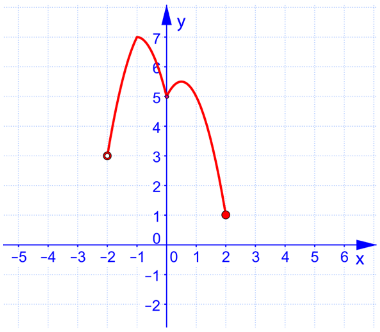




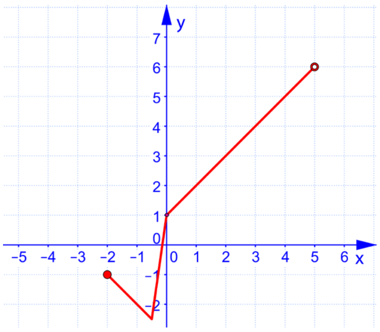
f.



g.



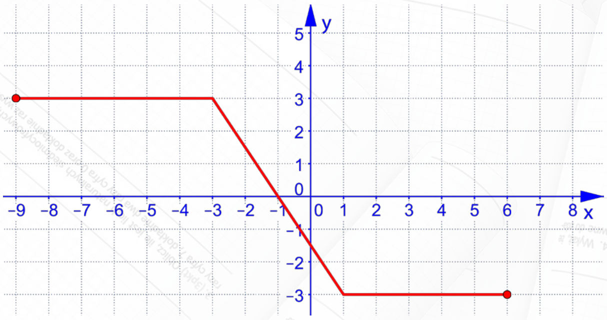
h.



MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

☑ **T.4.2**

4.2.5. Dana jest funkcja $f(x)$ przedstawiona na wykresie:



Wartość funkcji dla argumentu -3 wynosi:

A. 1 **B.** -3 **C.** 3 **D.** -1

4.2.6. Dana jest funkcja $f(x)=x^2+5x$. Prawdziwa jest zależność:

A. $f(0)<f(-1)$ **B.** $f(-3)<f(-4)$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)\leq f(0)$ **D.** $f(-10)=f(10)$

4.2.7. Dana jest funkcja $f(x)=4x+3$. Wartość funkcji wynosi -7, jeśli argument jest równy:

A. 1 **B.** -1 **C.** $-2\frac{1}{2}$ **D.** $2\frac{1}{2}$

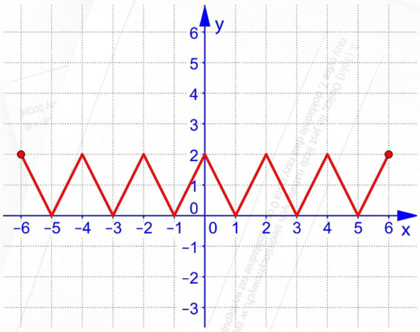
4.2.8. Dana jest funkcja o wzorze $f(x)=2x-1$. Zależności między argumentami a wartościami tej funkcji przedstawiono w tabeli:

x	-2	0	4
$f(x)$	-5	-1	a

Prawdziwa jest zależność:

A. $f(a)=4$ **B.** $a=2\cdot4-1$ **C.** $f(x)=2a-1$ **D.** $f(4)=2a-1$

4.2.9. Dany jest wykres funkcji $f(x)$:



Funkcja ta przyjmuje wartość 1 dla:

A. 6 argumentów,

B. 10 argumentów,

C. 12 argumentów,

D. nieskończenie wielu argumentów.

4.2.10. Dana jest funkcja określona wzorem $f(x)=-2x+3$. Wartość funkcji wynosi 11, jeśli argument jest równy:

A. 4 **B.** 2 **C.** -4 **D.** -7

4.2.11. Wartość 25 funkcja $f(x)=x^2$ osiąga dla:

A. jednego argumentu,

B. dwóch argumentów,

C. trzech argumentów,

D. argumentu równego $5\sqrt{5}$.

4.2.12. Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x)=\frac{3x}{x+1}$. W tabeli przedstawiono zależność między argumentami a wartościami tej funkcji:

x	0	b	3
$f(x)$	a	2	c

Prawdziwa jest zależność:

A. $a+b=c$ **B.** $2a+b=c$ **C.** $2b=3c$ **D.** $a+b+c>3$

4.2.13. Dana jest funkcja $f(x)$ taka, że $f(1)=2$ i $f(-1)=-1$. Funkcja $f(x)$ może mieć wzór:

A. $f(x)=x^2+1$ **B.** $f(x)=\frac{2x}{x+3}$ **C.** $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ **D.** $f(x)=\sqrt{x}+1$

4.2.14. Funkcja $f(x)=2x^2$ przyjmuje dla argumentów całkowitych wartości, które są zawsze liczbami:

A. parzystymi, **B.** nieparzystymi, **C.** dodatnimi, **D.** niewymiernymi.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

4.2.15. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{4-6x}}{x+1}$. **2 pkt**

4.2.16. Oblicz, dla jakiego argumentu wartość funkcji $f(x)=\frac{x+2}{x-3}$ jest równa 4. **2 pkt**

4.2.17. Punkt $A(3;-5)$ należy do wykresu funkcji $f(x)=\frac{a}{x+1}$. Oblicz wartość a. **2 pkt**

4.2.18. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x-2)}+\sqrt{2x+1}$. **4 pkt**

4.3 ► Odczytywanie własności funkcji z wykresu

► Dziedzina

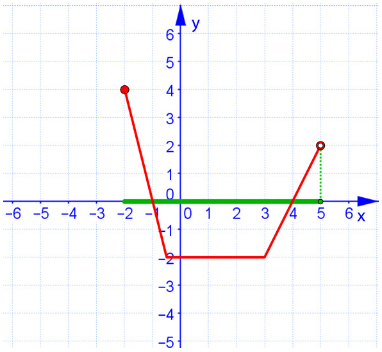
P.4.3.1

DEFINICJA

Dziedzina to zbiór wszystkich argumentów funkcji.

PRZYKŁAD 1

Aby z wykresu funkcji odczytać dziedzinę, należy sprawdzać, przesuwając się od ujemnej części osi *OX* do dodatniej części tej osi, dla których argumentów wskazano wartości.



$D = \langle -2;5)$

►Zbiór wartości

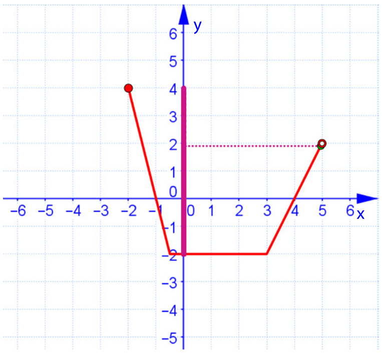
P.4.3.1

DEFINICJA

Zbiór wartości to zbiór wszystkich y-ów, które są wartościami dla wszystkich argumentów.

PRZYKŁAD 1

Aby z wykresu funkcji odczytać zbiór wartości, należy sprawdzać, przesuwając się od ujemnej części osi OY do dodatniej części osi OY, które punkty są wartościami dla jakichś argumentów.



$ZW = \langle -2;4\rangle$

►Monotoniczność funkcji

P.4.3.1

DEFINICJA

Funkcja jest rosnąca w pewnym przedziale zawartym w dziedzinie, gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$ rosną wartości $(f(x_1) < f(x_2))$.

Funkcja jest malejąca w pewnym przedziale zawartym w dziedzinie, gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$ maleją wartości $(f(x_1) > f(x_2))$.

Funkcja jest stała w pewnym przedziale zawartym w dziedzinie, gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$ wartości zachowują swoją wartość $(f(x_1) = f(x_2))$.

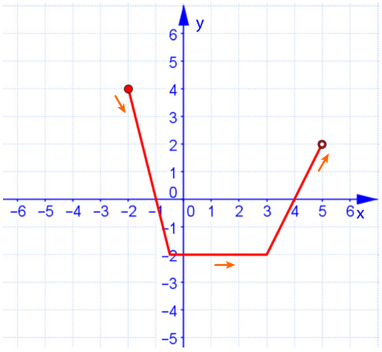
Jeżeli funkcja jest rosnąca albo malejąca lub stała w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest monotoniczna.

Jeżeli funkcja nie jest ani stała, ani rosnąca, ani malejąca w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że jest monotoniczna przedziałami. W takim przypadku najczęściej określamy monotoniczność oddzielnie w każdym przedziale. Określając monotoniczność funkcji, podajemy maksymalne przedziały monotoniczności, czyli przedziały domknięte, jeżeli dla argumentów, które są końcami przedziału, istnieje wartość funkcji.

Należy pamiętać, że jeżeli funkcja jest rosnąca (malejąca) w zbiorze A i w zbiorze B, to nie znaczy, że jest ona również rosnąca (malejąca) w sumie tych zbiorów, czyli $A \cup B$.

PRZYKŁAD 1

Aby z wykresu funkcji odczytać przedziały monotoniczności (czyli argumenty, dla których funkcja jest rosnąca, malejąca lub stała), należy, przesuwając się od ujemnej części osi OX do dodatniej części osi OX, sprawdzać, czy wykres się wznosi (wówczas funkcja jest rosnąca), opada (wówczas funkcja jest malejąca), czy pozostaje na tym samym poziomie (wówczas funkcja jest stała).



dla $x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle$ funkcja jest malejąca

dla $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$ funkcja jest stała

dla $x \in \langle 3; 5)$ funkcja jest rosnąca

▶Miejsce zerowe

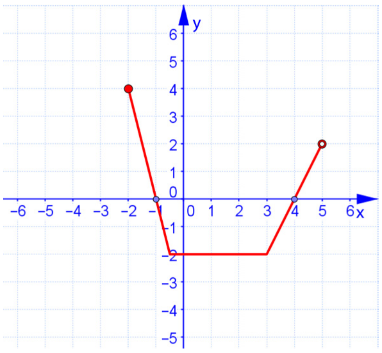
P.4.3.1

DEFINICJA

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taką liczbę x, należącą do dziedziny funkcji, że $f(x) = 0$.

PRZYKŁAD 1

W celu znalezienia miejsc zerowych należy wskazać te miejsca, w których wykres funkcji przecina oś OX.



$x_1 = -1 \qquad x_2 = 4$

► Znak funkcji, czyli dodatniość lub ujemność funkcji

P.4.3.1

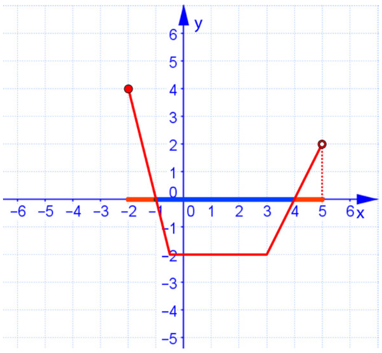
DEFINICJA

Mówimy, że funkcja jest dodatnia w pewnym przedziale zawartym w dziedzinie, gdy wartości funkcji są w tym przedziale dodatnie.

Mówimy, że funkcja jest ujemna w pewnym przedziale zawartym w dziedzinie, gdy wartości funkcji są w tym przedziale ujemne.

PRZYKŁAD 1

W celu odczytania przedziałów (czyli odpowiednich argumentów), w których funkcja jest dodatnia (lub ujemna), należy wskazać te fragmenty wykresu, które są umieszczone nad (pod) osią OX, a potem je opisać (tzn. wyznaczyć argumenty dla wskazanych fragmentów wykresu).



dla $x \in (-1;4)$ funkcja jest ujemna

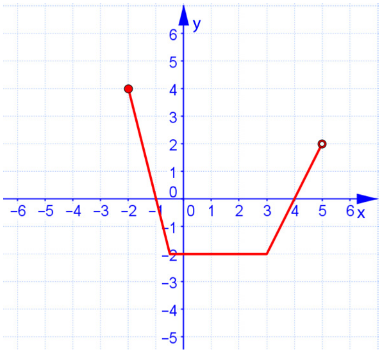
dla $x \in \langle -2;-1) \cup (4;5)$ funkcja jest dodatnia

► Wartość największa i wartość najmniejsza w przedziale

P.4.3.1

PRZYKŁAD 1

Aby odpowiedzieć na pytania dotyczące wartości największej lub najmniejszej w określonym przedziale (dla określonych argumentów), należy odczytać z wykresu wartości dla wskazanych argumentów, a następnie wskazać wartość największą bądź najmniejszą — o ile istnieją.



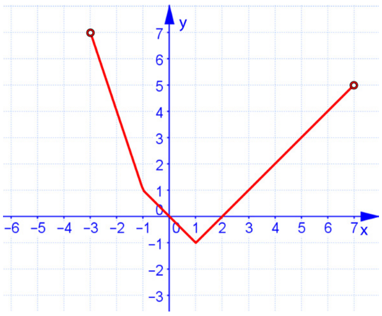
$y_{\min} = -2,\ y_{\max} = 4$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

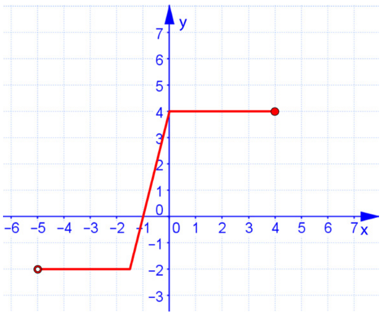
Na podstawie wykresu funkcji określ:

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- monotoniczność funkcji,
- miejsca zerowe,
- przedziały, w których funkcja jest dodatnia, i przedziały, w których jest ujemna,
- najmniejszą i największą wartość funkcji.

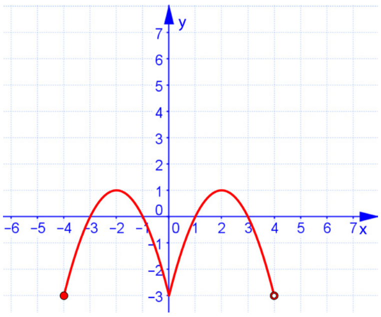
PRZYKŁAD 2.



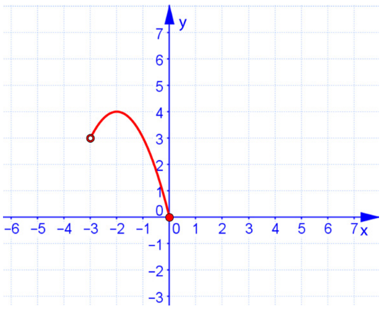
PRZYKŁAD 3.



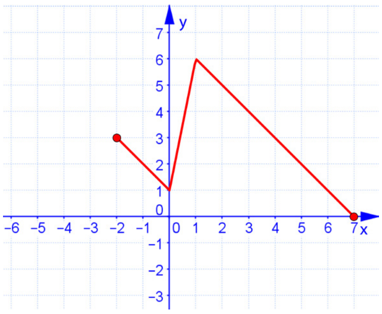
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



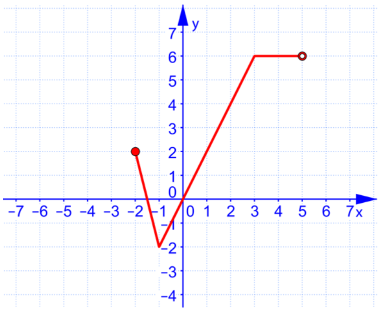
ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.3.1. Na podstawie wykresu funkcji określ:

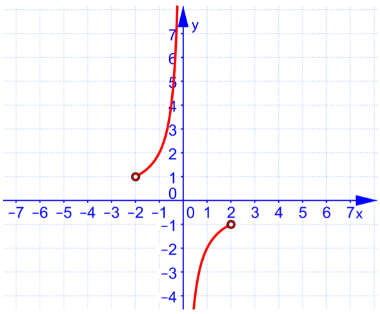
Z.4.3.1

- dziedzinę funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- maksymalne przedziały monotoniczności,
- miejsca zerowe,
- przedziały, w których funkcja jest dodatnia, i przedziały, w których jest ujemna.

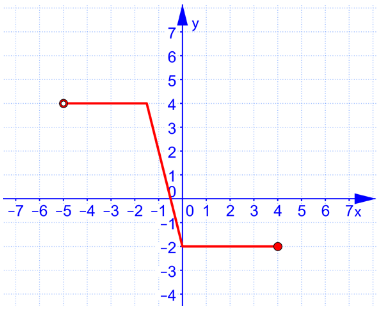
a.



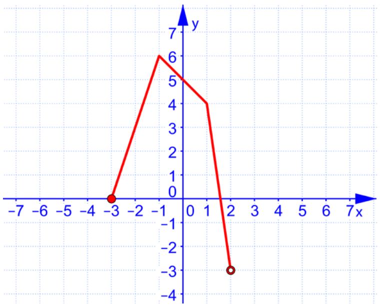
b.



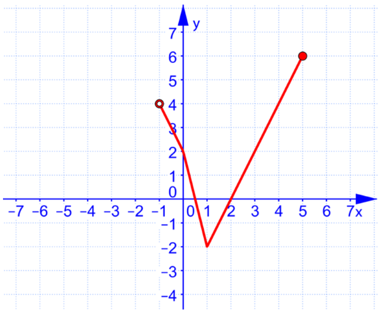
c.



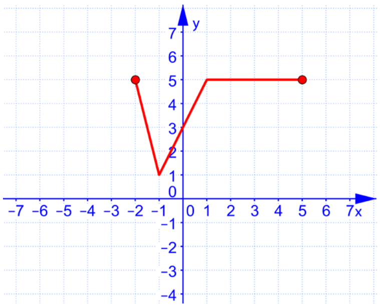
d.



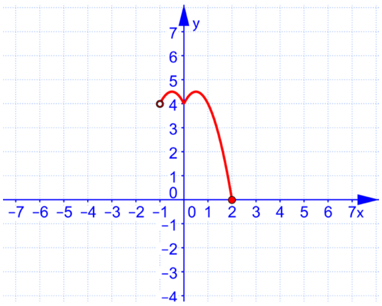
e.



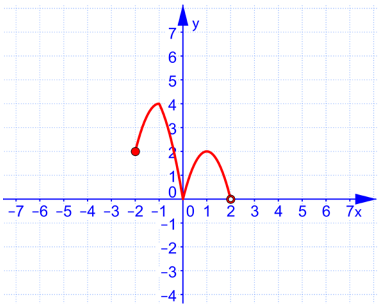
f.



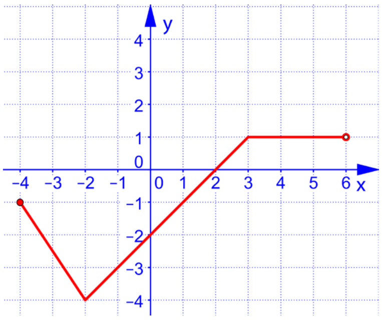
g.



h.

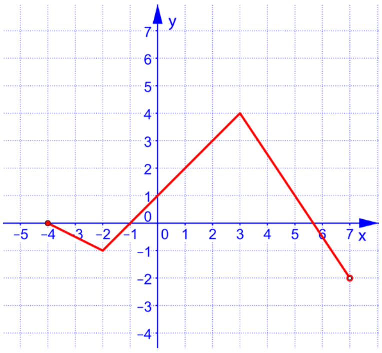


4.3.2. Na podstawie wykresu funkcji określ dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe oraz najmniejszą wartość funkcji.



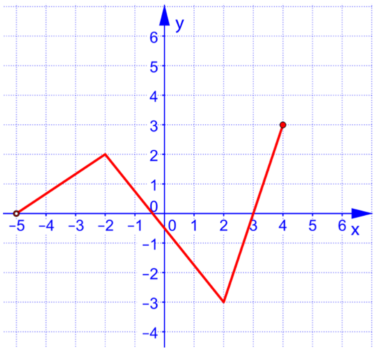
Z.4.3.2

4.3.3. Na podstawie wykresu funkcji określ dziedzinę, zbiór wartości funkcji oraz maksymalne przedziały monotoniczności.



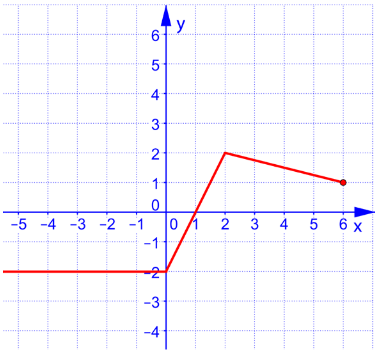
Z.4.3.3

4.3.4. Na podstawie wykresu funkcji określ dziedzinę, zbiór wartości oraz maksymalne przedziały monotoniczności.



Z.4.3.4

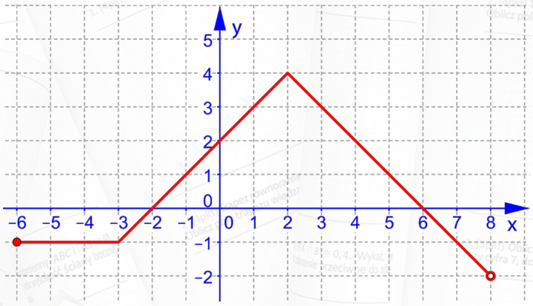
4.3.5. Na podstawie wykresu funkcji określ dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe oraz przedziały, w których funkcja jest dodatnia, i przedziały, w których jest ujemna.



Z.4.3.5

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. ☑

W zadaniach 4.3.6., 4.3.7., 4.3.8. oraz 4.3.9. wykorzystaj wykres funkcji f przedstawionej na rysunku obok:



4.3.6. Dziedziną funkcji f jest przedział:

A. $\langle -6; 8\rangle$

B. $(-6; 8\rangle$

C. $\langle -2; 4\rangle$

D. $(-2; 4)$

4.3.7. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział:

A. $\langle -6; 8)$

B. $(-2; 4\rangle$

C. $\langle 1; 4\rangle$

D. $\langle -4; 4)$

4.3.8. Na podstawie wykresu funkcji f można stwierdzić, że:

A. $f(1) < f(3)$

B. $f(-1) < f(6)$

C. $f(-3) = f(7)$

D. $f(-5) \geq f(4)$

4.3.9. Funkcja f jest rosnąca w przedziale:

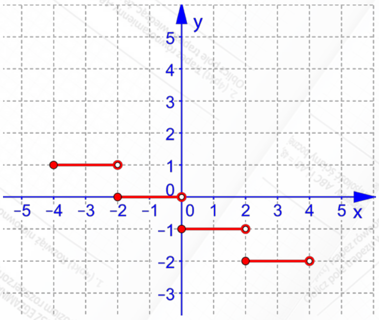
A. $x \in \langle -3; 2)$

B. $x \in \langle -3; 2\rangle$

C. $x \in \langle -6; 4\rangle$

D. $x \in \langle -3; 4\rangle$

W zadaniach 4.3.10., 4.3.11., 4.3.12., 4.3.13. wykorzystaj wykres funkcji f przedstawionej na rysunku obok:



4.3.10. Dziedziną funkcji f jest przedział:

A. $\langle 4;4\rangle \setminus \{-2;0;2\}$

B. $\langle -4; 4\rangle$

C. $\langle -4; 4)$

D. $\langle -4;4) \setminus \{-2;0;2\}$

4.3.11. Zbiór wartości funkcji f składa się z:

A. czterech elementów,

B. nieskończenie wielu elementów,

C. wszystkich liczb należących do przedziału $\langle -2; 1\rangle$,

D. wszystkich liczb należących do przedziału $\langle -4; 4\rangle$.

4.3.12. Funkcja f posiada:

A. jedno miejsce zerowe,

B. dwa miejsca zerowe,

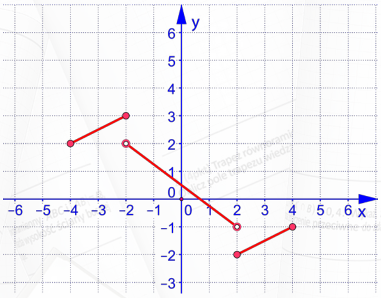
C. nieskończenie wiele miejsc zerowych,

D. trzy miejsca zerowe.

4.3.13. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów z przedziału:

A. $\langle -4; 0)$ **B.** $\langle 0; 1\rangle$ **C.** $\langle -4; -2)$ **D.** $(0; 1\rangle$

W zadaniach 4.3.14., 4.3.15. wykorzystaj wykres funkcji f przedstawionej na rysunku obok:



4.3.14. Największą wartość funkcja f osiąga dla argumentu:

A. 3 **B.** -2 **C.** 4 **D.** -1

4.3.15. Dziedziną funkcji f jest przedział:

A. $\langle -2; 3\rangle$

B. $\langle -4; 4\rangle$

C. $\langle -2; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; 3\rangle$

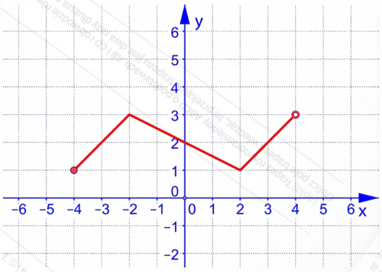
D. $\langle -4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4\rangle$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

4.3.16. Na podstawie wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku obok określ:

a. dziedzinę funkcji,

b. największą i najmniejszą wartość funkcji.

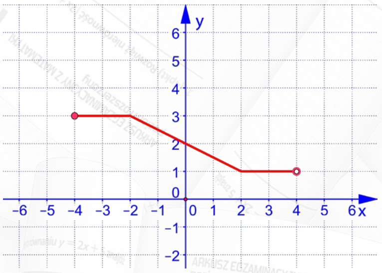


2 pkt

4.3.17. Na podstawie wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku obok określ:

a. maksymalne przedziały monotoniczności,

b. zbiór wartości funkcji.



2 pkt

4.3.18. Na podstawie wykresu funkcji f przedstawionego na rysunku obok określ:

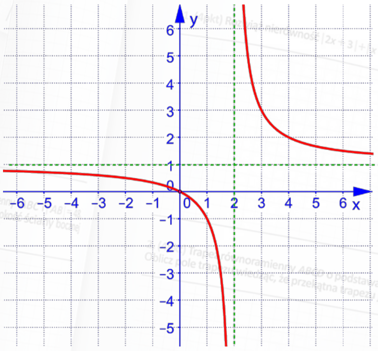
a. dziedzinę funkcji,

b. zbiór wartości funkcji,

c. miejsce zerowe,

d. przedział, w którym funkcja jest ujemna,

e. przedziały monotoniczności.



2 pkt

4.4 ▶ Przekształcanie wykresu funkcji

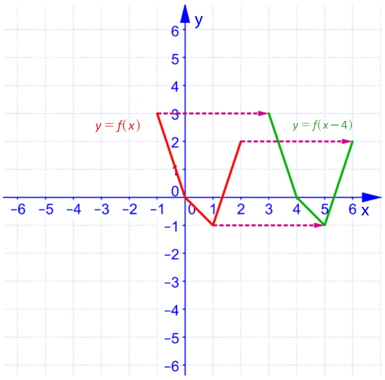
▶ Przesunięcia równoległe wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych

P.4.4.1

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OX: $y = f(x + a)$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OX.

PRZYKŁAD 1

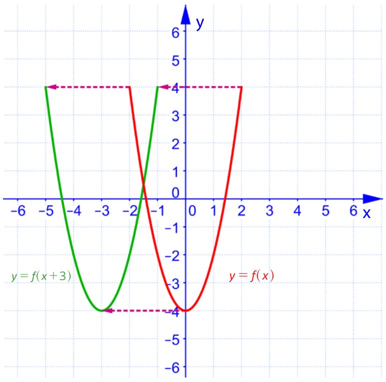


Wykres został przesunięty o 4 jednostki w prawo.

$a = -4$

Jeśli $a < 0$, to przesuwamy w prawo.

PRZYKŁAD 2



Wykres został przesunięty o 3 jednostki w lewo.

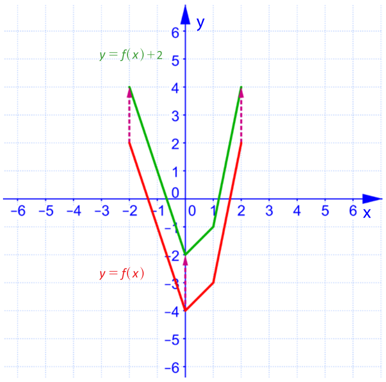
$a = 3$

Jeśli $a > 0$, to przesuwamy w lewo.

Przesunięcie równoległe wzdłuż osi OY: $y = f(x) + a$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OY.

PRZYKŁAD 3

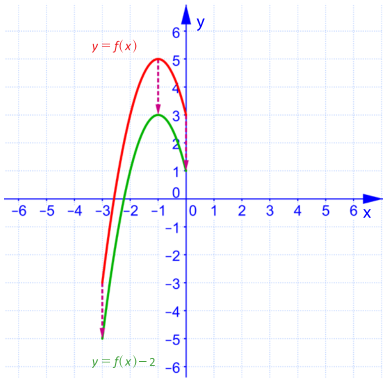


Wykres został przesunięty o 2 jednostki w górę.

$a = 2$

Jeśli $a > 0$, to przesuwamy w górę.

PRZYKŁAD 4



Wykres został przesunięty o 2 jednostki w dół.

$a = -2$

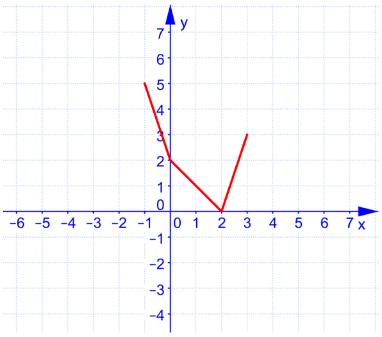
Jeśli $a < 0$, to przesuwamy w dół.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

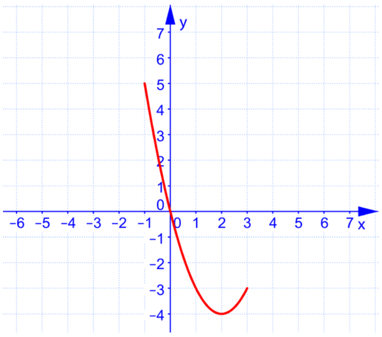
4.4.1. Przesuń wykres funkcji:

Z.4.4.1

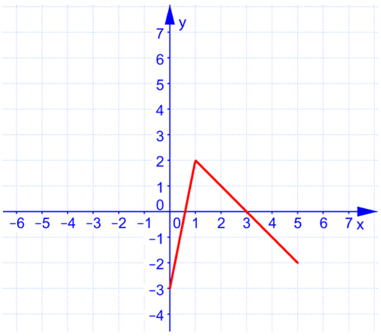
a. o 4 jednostki w prawo i podaj wzór funkcji po przesunięciu,



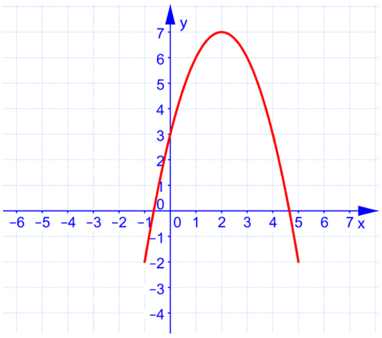
b. o 3 jednostki w lewo i podaj wzór funkcji po przesunięciu,



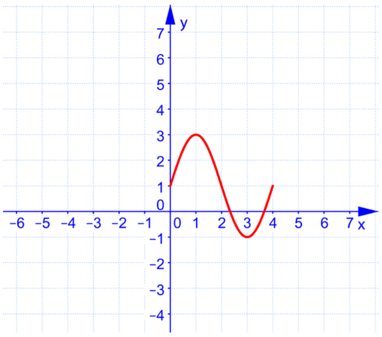
c. o 5 jednostek w górę i podaj wzór funkcji po przesunięciu.



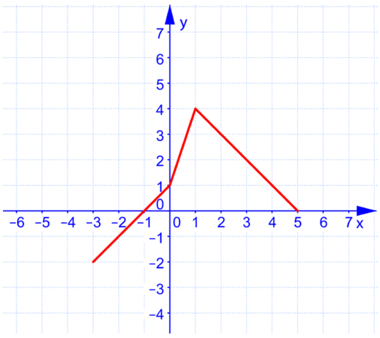
d. o 2 jednostki w dół i podaj wzór funkcji po przesunięciu,



e. o 4 jednostki w lewo i podaj wzór funkcji po przesunięciu,



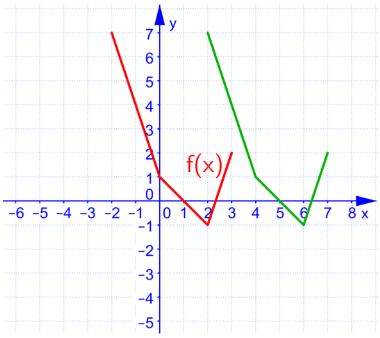
f. o 2 jednostki w górę i podaj wzór funkcji po przesunięciu.



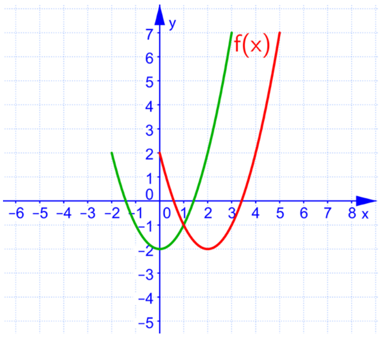
4.4.2. Określ, o ile jednostek i w którą stronę przesunięto wykres funkcji $f(x)$, oraz podaj wzór funkcji po przesunięciu.

Z.4.4.2

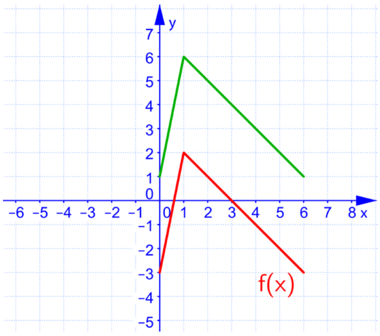
a.



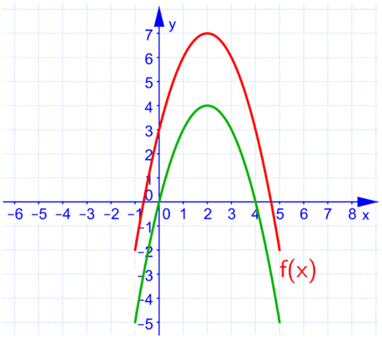
b.



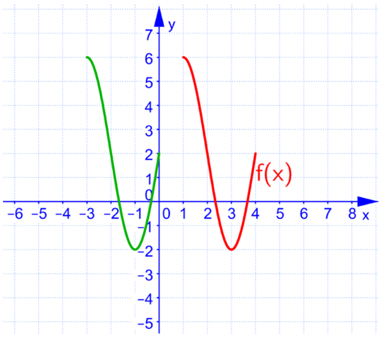
c.



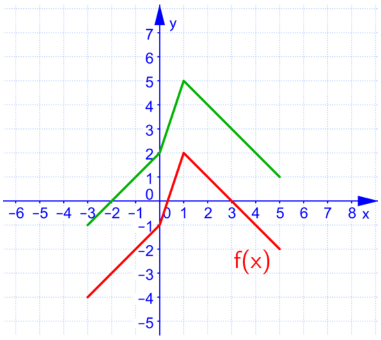
d.



e.



f.



4.4.3. Zapisz wzór funkcji $y = f(x)$ po przesunięciu tej funkcji o:

- **a.** 3 jednostki w prawo,
- **b.** 2 jednostki w lewo,
- **c.** 4 jednostki do góry,
- **d.** 5 jednostek w dół,
- **e.** 3 jednostki w prawo i 2 jednostki w dół,
- **f.** jedną jednostkę w lewo i pół jednostki w górę.

4.4.4. Funkcję $f(x)$ przesunięto o 7 jednostek w prawo. Zapisz wzór funkcji po przesunięciu, jeśli:

a. $f(x) = 2x$ **b.** $f(x) = x^2$ **c.** $f(x) = \frac{x}{x+2}$ **d.** $f(x) = \sqrt{x}$

4.4.5. Funkcję $f(x)$ przesunięto o 5 jednostek w górę. Zapisz wzór tej funkcji po przesunięciu, wiedząc, że:

a. $f(x) = 4x - 1$ **b.** $f(x) = 2^x$ **c.** $f(x) = \frac{3}{x-1}$ **d.** $f(x) = 2\sqrt{x}$

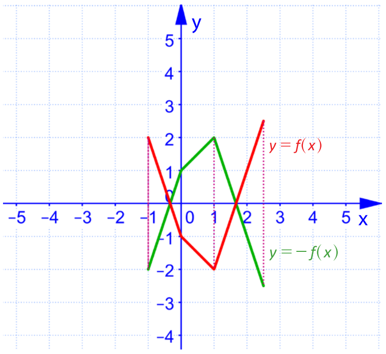
▶ Przekształcenia wykresu funkcji w symetrii względem osi układu współrzędnych

P.4.4.2

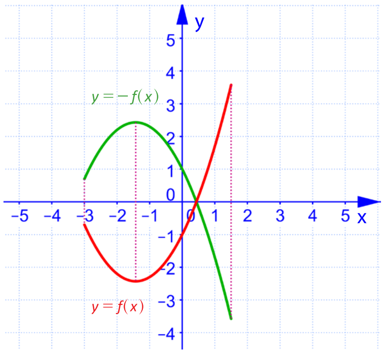
Symetria osiowa względem osi OX: $y = -f(x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OX.

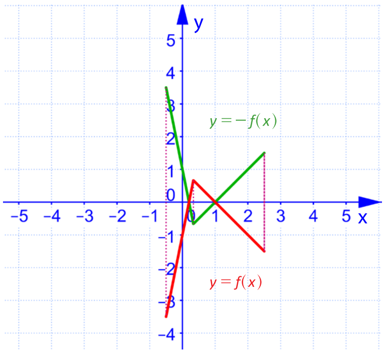
PRZYKŁAD 1



PRZYKŁAD 2



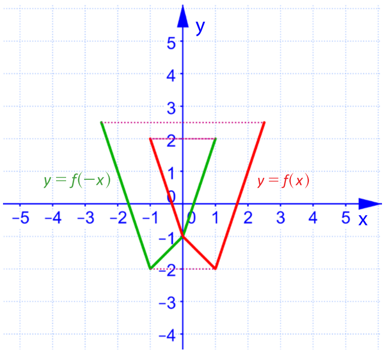
PRZYKŁAD 3



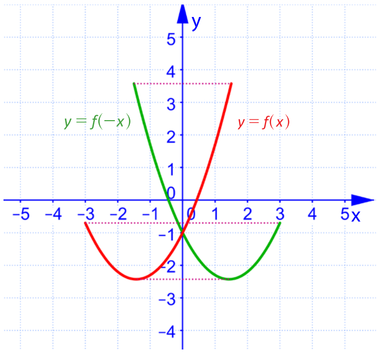
Symetria osiowa względem osi OY: $y = f(-x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OY.

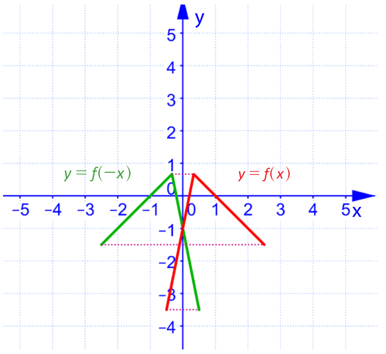
PRZYKŁAD 1



PRZYKŁAD 2



PRZYKŁAD 3

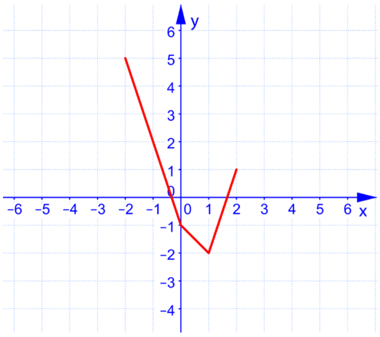


ZADANIA UTRWALAJĄCE

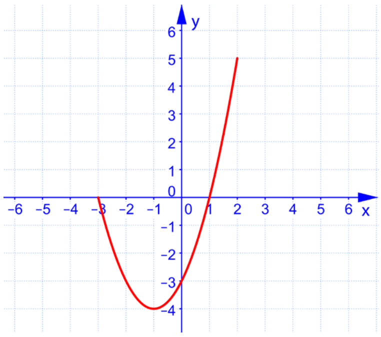
4.4.6. Przekształć wykres funkcji $y = f(x)$ w symetrii względem osi OX.

Z.4.4.6

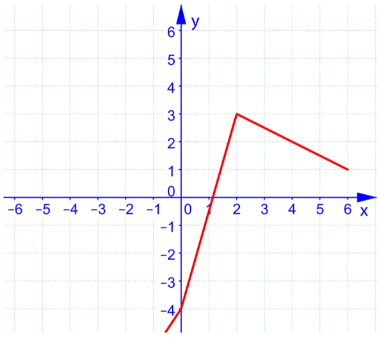
a.



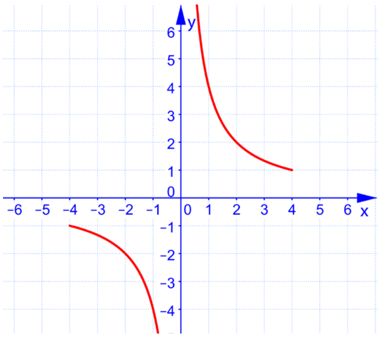
b.



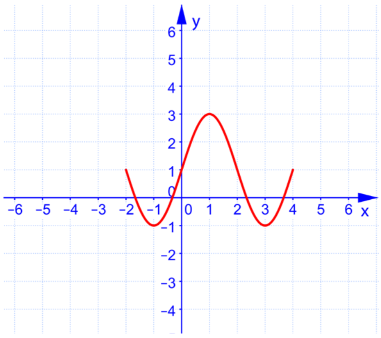
c.



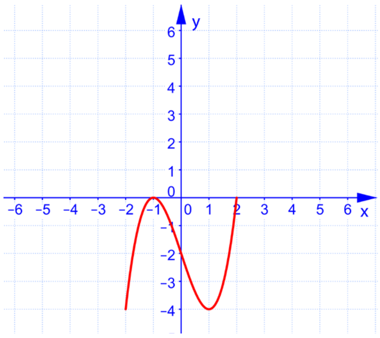
d.



e.



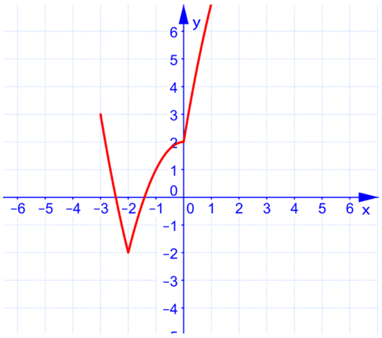
f.



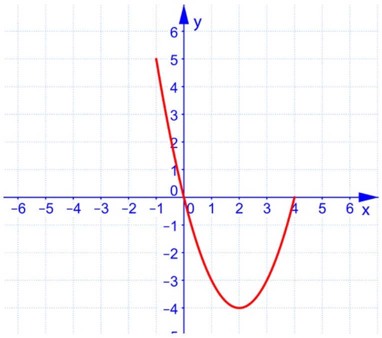
4.4.7. Przekształć wykres funkcji $y = f(x)$ w symetrii względem osi OY.

Z.4.4.7

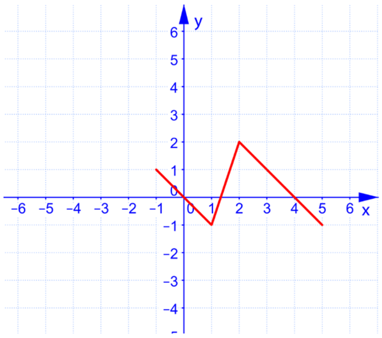
a.



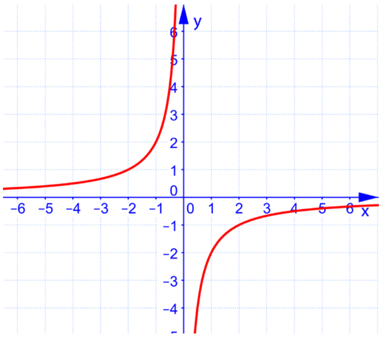
b.



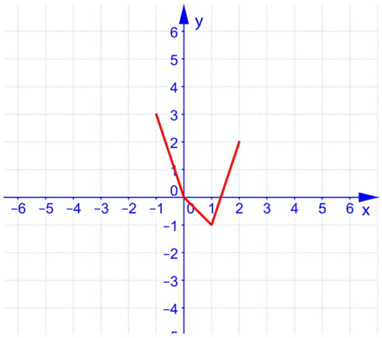
c.



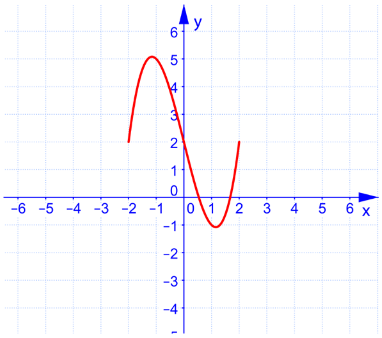
d.



e.



f.



4.4.8. Dana jest funkcja $y = f(x)$, którą przesunięto o 3 jednostki w lewo. Wzór tej funkcji ma postać:

A. $y = f(x) - 3$ **B.** $y = f(x - 3)$ **C.** $y = f(x + 3)$ **D.** $y = f(x) + 3$

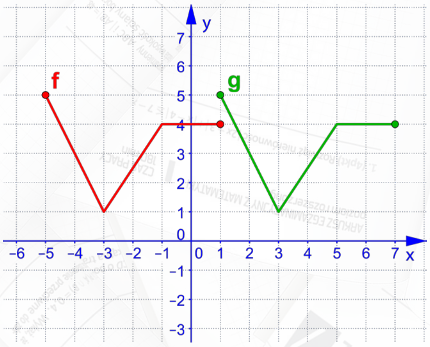
4.4.9. Funkcja $y = f(x)$ została przesunięta w taki sposób, że wzór tej funkcji po przesunięciu ma postać $y = f(x - 4)$. Wynika z tego, że wykres funkcji został przesunięty o 4 jednostki:

A. w lewo, **B.** w prawo, **C.** w dół, **D.** w górę.

4.4.10. Funkcję $f(x) = x^2$ przekształcono w symetrii względem osi OX. Otrzymano funkcję $g(x)$, której wzór ma postać:

A. $g(x) = -x^2$ **B.** $g(x) = (-x)^2$ **C.** $g(x) = x^2$ **D.** $g(x) = -(-x^2)$

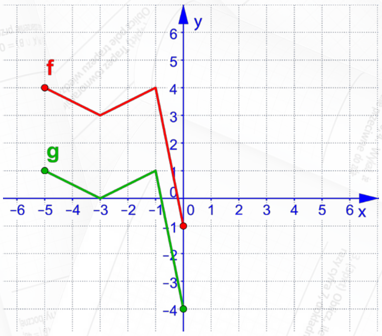
4.4.11. Wykres funkcji $f(x)$ przesunięto i otrzymano wykres funkcji $g(x)$, której wzór ma postać:



A. $g(x) = f(x - 6)$ **C.** $g(x) = f(x) - 6$

B. $g(x) = f(x + 6)$ **D.** $g(x) = f(x) + 6$

4.4.12. Wykres funkcji $f(x)$ przesunięto i otrzymano wykres funkcji $g(x)$, której wzór ma postać:

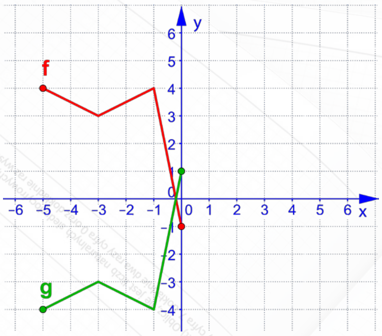


A. $g(x) = f(x - 3)$ **B.** $g(x) = f(x) + 3$ **C.** $g(x) = f(x) - 3$ **D.** $g(x) = f(x + 3)$

4.4.13. Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ zostanie najpierw przesunięty o 2 jednostki w prawo, a potem o 3 jednostki do góry, to funkcja po przesunięciu będzie miała postać:

A. $y = f(x - 2) + 3$ **B.** $y = f(x - 2) - 3$ **C.** $y = f(x + 2) - 3$ **D.** $y = f(x + 2) + 3$

4.4.14. Wykres funkcji $f(x)$ przekształcono i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wynika z tego, że:



A. $g(x)=f(-x)$

B. $g(x)=f(x)$

C. $g(x)=-f(x)$

D. $g(x)=-f(-x)$

4.4.15. Wykres funkcji $f(x)$ został przekształcony w symetrii względem osi OY. Funkcja $g(x)$, która powstała w wyniku tego przekształcenia, ma postać:

A. $g(x)=-f(x)$

B. $g(x)=-f(-x)$

C. $g(x)=f(-x)$

D. $g(x)=f(x)-1$

4.4.16. Wykres funkcji $f(x)$, której największa wartość wynosi 5, a najmniejsza -1, przekształcono w symetrii względem osi OY i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wynika z tego, że:

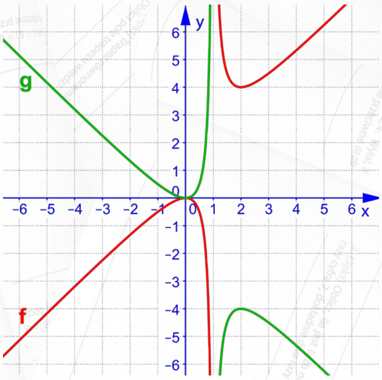
A. najmniejsza wartość funkcji $g(x)$ wynosi -5,

B. największa wartość funkcji $g(x)$ wynosi 1,

C. najmniejsza wartość funkcji $g(x)$ wynosi 1,

D. największa wartość funkcji $g(x)$ wynosi 5.

4.4.17. Wykres funkcji $g(x)$ otrzymano w wyniku przekształcenia funkcji $f(x)$ względem:



A. osi OX,

B. osi OY,

C. punktu $(0;0)$,

D. prostej $y=x$.

4.A ▶ Proporcjonalność prosta

O dwóch zmiennych wielkościach x i y możemy powiedzieć, że są wprost proporcjonalne, jeśli ich iloraz jest stały.

Omówimy następujące przykłady:

PRZYKŁAD 1

P.4.A.1

Samochód osiąga na pewnej trasie średnią prędkość $80\frac{km}{h}$, co oznacza, że w ciągu 1 godziny pokonuje 80 km. Ile kilometrów przejedzie ten samochód z tą samą prędkością w ciągu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 godzin, a jaką odległość pokona w ciągu pół godziny oraz półtorej godziny?

1° Narysujmy tabelę, w której przedstawimy zależność drogi od czasu.

czas (h)	1	2	3	4	5	6	7	8	0,5	1,5
droga (km)	80	160	240	320	400	480	560	640	40	120

Analizując powyższy przykład, można zauważyć, że pomiędzy kolejnymi wartościami zmiennych w tabeli istnieje pewna zależność. Jeśli w każdej kolumnie podzielimy wartość z drugiego wiersza przez wartość z pierwszego wiersza, to otrzymamy taką samą liczbę równą 80.

PRZYKŁAD 2

P.4.A.1

Pan Leopold zamierza otworzyć kawiarnię i analizuje koszt zakupu krzeseł. Jedno krzesło kosztuje 95 zł. Pan Leopold zastanawia się nad zakupem 20, 25, 30, 35 lub 40 krzeseł. Oblicz kwoty, jakie będzie musiał zapłacić za poszczególne liczby krzeseł.

1° Narysujmy tabelę, w której przedstawimy zależność liczby krzeseł od kosztu w złotych.

liczba krzeseł (szt.)	20	25	30	35	40
koszt krzeseł (zł)	1900	2375	2850	3325	3800

Jeśli podzielimy, tak jak w poprzednim przykładzie, w każdej kolumnie wartość z drugiego wiersza przez wartość z pierwszego wiersza, to otrzymamy taką samą liczbę równą 95.

PRZYKŁAD 3

P.4.A.1

Ogrodnik Karol zastanawia się, jakiej wielkości kwadratowy klomb będzie najlepszy w jego ogrodzie. Analizuje długość boku tego klombu w zależności od długości jego obwodu, ponieważ chce ogrodzić go specjalnym, ozdobnym płotem. Oblicz, jaka będzie długość ogrodzenia, jeśli Karol analizuje następujące długości boków: 5, 6, 7, 8, 10 metrów.

1° Narysujmy tabelę, w której przedstawimy zależność między długością boku a długością obwodu.

długość boku klombu (m)	5	6	7	8	10
długość obwodu klombu (m)	20	24	28	32	40

Jeśli w każdej kolumnie podzielimy wartość z drugiego wiersza przez wartość z pierwszego wiersza, to również w tym przypadku otrzymamy taką samą liczbę równą 4.

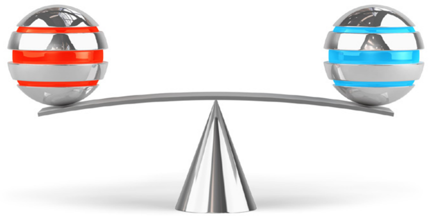
Otrzymane liczby 80, 95, 4 nazywamy współczynnikami proporcjonalności, a zmienne w poszczególnych przykładach nazywamy wprost proporcjonalnymi.

DEFINICJA

Dwie wielkości x, y nazwiemy wprost proporcjonalnymi (lub inaczej: pomiędzy nimi zachodzi proporcjonalność prosta), gdy istnieje taka liczba $a \neq 0$, że $y = ax$.

Liczbę a nazywamy współczynnikiem proporcjonalności.

Dla wielkości wprost proporcjonalnych wzrost jednej z nich powoduje taki wzrost drugiej, że iloraz tych wielkości pozostaje bez zmian.



Pojęcie wielkości wprost proporcjonalnych ma zastosowanie w opisie różnych zależności i zjawisk znanych z życia codziennego, z przyrody, fizyki, matematyki itp.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.A.1. W poniższych tabelach przedstawione są kolejne miary dwóch zmiennych x i y. Określ, czy wartości x i y są wprost proporcjonalne. Jeśli tak, to oblicz współczynnik proporcjonalności i napisz wzór określający zależność pomiędzy zmiennymi.

a.

x	8	6	10
y	20	15	25

b.

x	2,5	4,5	6
y	7,5	13,5	18

c.

x	5	8	11
y	10	13	16

Dobrym sposobem rozwiązywania zadań z proporcjonalnością prostą jest wykorzystanie proporcji. Oto dwa przykłady:

PRZYKŁAD 1

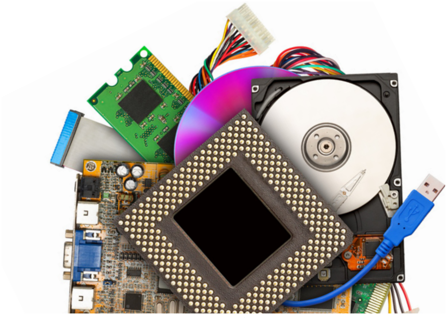
P.4.A.2

10 pracowników składa w ciągu jednego miesiąca 1200 komputerów. Ilu pracowników potrzeba do złożenia w tym czasie 2640 komputerów?

1200 sztuk → 10 osób
2640 sztuk → x osób

$$1200x = 10 \cdot 2640$$
$$1200x = 26\,400 \quad |:1200$$
$$x = 22 \text{ osoby}$$

Do złożenia 2640 komputerów w ciągu miesiąca potrzeba 22 pracowników.



PRZYKŁAD 2

P.4.A.2

Właściciel sklepu zamówił 20 par spodni i zapłacił łącznie 2300 zł. Oblicz, ile zapłaciłby za zamówienie, gdyby zamówił 48 par spodni?

20 sztuk → 2300 zł
48 sztuk → x zł

$$20x = 48 \cdot 2300$$
$$20x = 110\,400 \quad |:20$$
$$x = 5520 \text{ zł}$$

Za zamówienie 48 par spodni właściciel sklepu zapłaciłby 5520 zł.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.A.2. Z ilu kilogramów zboża można otrzymać 90 kilogramów mąki, jeżeli ze 100 kg zboża uzyskuje się jej 60 kg?

4.A.3. Jeżeli Darek przez pół roku oszczędza 900 zł, to ile czasu musi oszczędzać, by móc kupić komputer, który kosztuje 3900 zł?

4.A.4. Samochód w ciągu 4 godzin pokonał trasę 380 kilometrów. Oblicz, jaką trasę pokona ten samochód w czasie 7 godzin, jeżeli będzie jechał z taką samą średnią prędkością.

4.A.5. W ciągu jednej doby pompa może przepompować 1500 litrów wody. Oblicz, w jakim czasie można tą pompą przepompować 37 500 litrów wody.

4.A.6. Autobus spala 28 litrów paliwa na każde 100 kilometrów. Oblicz, ile paliwa potrzeba na przejechanie 1250 kilometrów.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

☑ **T.4.A**

4.A.7. 3 kilogramy jabłek kosztują 10,20 zł. Za 47,60 zł można kupić:

A. 12 kg jabłek,
C. 11 kg jabłek,
B. 14 kg jabłek,
D. więcej niż 15 kg jabłek.

4.A.8. Kasia w ciągu tygodnia wypija średnio 10,5 litra wody mineralnej. W ciągu 30-dniowego miesiąca Kasia wypije:

A. 42 litry wody, **B.** 45 litrów wody, **C.** 44,5 litra wody, **D.** 450 litrów wody.

4.A.9. Sprzedawca w ciągu 20 minut obsługuje średnio 8 osób. W ciągu 2 godzin i 10 minut obsłuży łącznie:

A. 46 osób, **B.** 48 osób, **C.** 52 osoby, **D.** 54 osoby.

4.A.10. Krawiec z 14 m^2 materiału uszył 4 bluzki. Na 9 bluzek potrzeba:

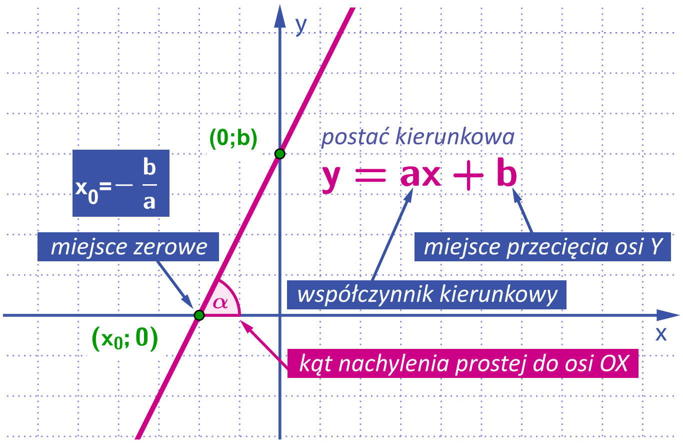
A. 28,5 m^2 **B.** 31,5 m^2 **C.** 32 m^2 **D.** 126 m^2

4.A.11. Jeśli pociąg średnio w 2 godziny pokonuje 128 kilometrów, to 416 kilometrów pokona w czasie:

A. 6 godzin, **B.** 7 godzin, **C.** 6,5 godziny, **D.** 5,5 godziny.

4.5 ▶ Wykres funkcji liniowej

Funkcja liniowa to funkcja określona wzorem $y = ax + b$ dla $x \in \boldsymbol{R}$, gdzie a i b to współczynniki, a litera x oznacza zmienną. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.



PRZYKŁADY

Jeżeli $f(x) = -x + 4$,
to współczynnik $a = -1$, $b = 4$.

Jeżeli $f(x) = 2x$,
to współczynnik $a = 2$, $b = 0$.

Jeżeli $f(x) = -1$,
to współczynnik $a = 0$, $b = -1$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.5.1. Oblicz miejsce zerowe funkcji:

a. $y = 2x + 3$

b. $y = -x + 1$

c. $y = -4x + 2$

d. $y = 3x - 9$

e. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

f. $y = -\frac{2}{5}x + 0{,}2$

▶ Szkicowanie wykresu funkcji liniowej z wykorzystaniem tabelki

PRZYKŁAD 1

P.4.5.1

Narysuj wykres funkcji $y = -2x + 3$.

1° Uzupełniamy tabelkę z argumentami i wartościami funkcji.

x	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1

$f(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$

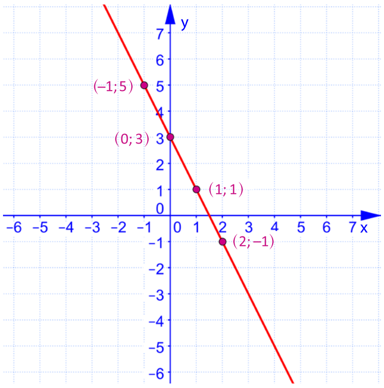
$f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

$f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$

$f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$

2° Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych.

3° Rysujemy prostą przechodzącą przez wszystkie punkty, która jest wykresem funkcji.



Uwaga! Pamiętaj, że aby narysować prostą, wystarczą dwa punkty.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Narysuj wykres funkcji:

PRZYKŁAD 2. $y = 4x - 3$

PRZYKŁAD 3. $y = 3x - 1$

PRZYKŁAD 4. $y = -5x$

PRZYKŁAD 5. $y = 1$

PRZYKŁAD 6. $y = -x + 2$

PRZYKŁAD 7. $y = x - 1$

PRZYKŁAD 8. $y = -2$

PRZYKŁAD 9. $y = -2x - 4$

► Szkicowanie wykresu funkcji liniowej z wykorzystaniem punktów przecięcia osi

Aby narysować wykres funkcji, wystarczy znaleźć miejsce zerowe, zaznaczając je na osi OX, oraz współczynnik b, zaznaczając go na osi OY.

PRZYKŁAD 1

P.4.5.2

Narysuj wykres funkcji $y = 2x - 4$.

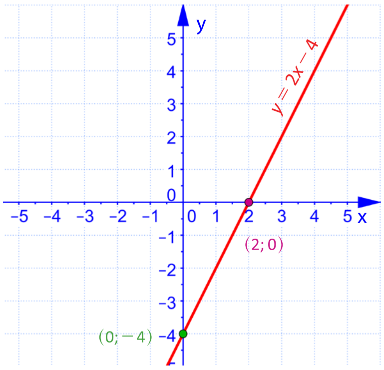
1° Obliczamy miejsce zerowe, rozwiązując równanie $2x - 4 = 0$ lub korzystając ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{a}$. W tym przypadku skorzystajmy ze wzoru.

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2$$

2° Wyznaczamy punkt przecięcia wykresu z osią OY, pamiętając, że ma on współrzędne $(0; b)$.

$$(0; b) = (0; -4)$$

3° Zaznaczamy wyznaczone punkty na obu osiach i rysujemy prostą przechodzącą przez te punkty, która jest wykresem funkcji.



PRZYKŁAD 2

P.4.5.2

Narysuj wykres funkcji $y = -3x + 6$.

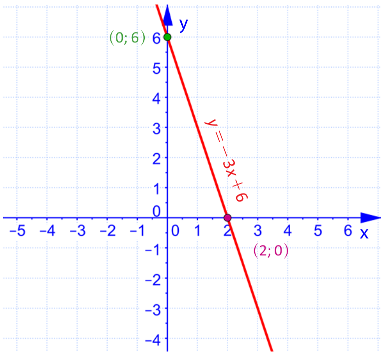
1° Obliczamy miejsce zerowe, korzystając ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{a}$.

$x_0 = \frac{-6}{-3} = 2$

2° Wyznaczamy punkt przecięcia wykresu z osią OY, pamiętając, że ma on współrzędne $(0;b)$.

$(0;b) = (0;6)$

3° Zaznaczamy wyznaczone punkty na obu osiach i rysujemy prostą przechodzącą przez te punkty, która jest wykresem funkcji.



PRZYKŁAD 3

P.4.5.2

Narysuj wykres funkcji $y = 5x$.

1° Obliczamy miejsce zerowe, korzystając ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{a}$.

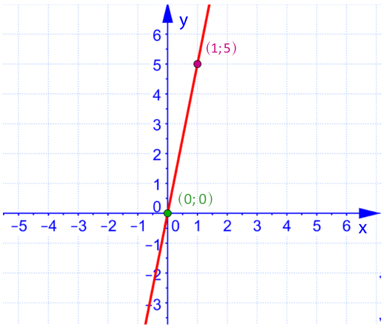
$x_0 = -\frac{0}{5} = 0$

2° Miejsce zerowe pokrywa się z punktem przecięcia osi OY, ponieważ $b = 0$. W takim przypadku potrzebny jest dodatkowy punkt, przez który przechodzi wykres funkcji.

3° Obliczamy wartość funkcji dla $x = 1$.

$y = 5 \cdot 1 = 5 \Rightarrow (1;5)$

4° Zaznaczamy wyznaczone punkty w układzie współrzędnych i rysujemy prostą przechodzącą przez te punkty, która jest wykresem funkcji.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Narysuj wykres funkcji:

PRZYKŁAD 4. $y = 4$

PRZYKŁAD 5. $y = -6x + 3$

PRZYKŁAD 6. $y = 10x + 5$

PRZYKŁAD 7. $y = -2x$

PRZYKŁAD 8. $y = -2$

PRZYKŁAD 9. $y = x + 4$

► Jak szybko narysować wykres funkcji liniowej

Aby naszkicować wykres funkcji, można również posłużyć się poniższym sposobem.

PRZYKŁAD 1

P.4.5.3

Narysuj wykres funkcji $y = -3x + 5$.

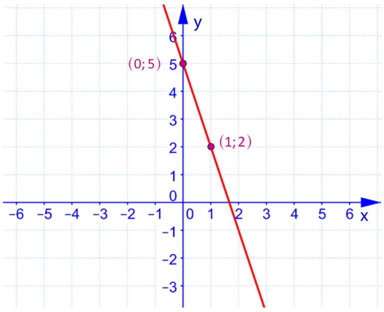
1° Określamy współczynniki a i b. $a = -3,\ b = 5$

2° Wyznaczamy dwa ważne punkty.

$(0; b) \rightarrow (0; 5)$

$(1; a + b) \rightarrow (1; 2)$

3° Zaznaczamy oba punkty w układzie współrzędnych i rysujemy prostą, będącą wykresem funkcji.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Narysuj wykres funkcji.

PRZYKŁAD 2. $y = 5x - 2$

PRZYKŁAD 3. $y = -4x - 1$

PRZYKŁAD 4. $y = 4x$

PRZYKŁAD 5. $y = 3$

PRZYKŁAD 6. $y = 2x + 5$

PRZYKŁAD 7. $y = -x$

PRZYKŁAD 8. $y = -2$

PRZYKŁAD 9. $y = 3x + 1$

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.4.5

4.5.2. Prosta nie jest wykresem funkcji:

A. $y = 4x - 1$ **B.** $x - y = 0$ **C.** $2x - y + 1 = 0$ **D.** $\frac{x}{y} = 2$

4.5.3. Funkcja liniowa $y = 3x + 1$ przechodzi przez punkt o współrzędnych:

A. $(-1; 4)$ **B.** $(-2; 5)$ **C.** $(3; 11)$ **D.** $(2; 7)$

4.5.4. Prosta o wzorze $y = -x + 3$ przechodzi przez następujące ćwiartki układu współrzędnych:

A. I, II, III **B.** II, III, IV **C.** I, II, IV **D.** I, III, IV

4.5.5. Prosta o wzorze $y = 4x - 3$ przechodzi jednocześnie przez punkty:

A. $(1; 1), (-2; 5)$

B. $\left(-\frac{1}{2}; -5\right), \left(\frac{1}{2}; -1\right)$

C. $(3; 9), (-1; 7)$

D. $(100; 307), (-20; 83)$

4.5.6. Proste o wzorach $y = 2x - 4$ i $y = -x + 5$ przecinają się w punkcie:

A. $(2; 0)$ **B.** $(-1; 6)$ **C.** $(3; 2)$ **D.** $(-3; 8)$

4.6 ▶ Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej

We wzorze funkcji liniowej $f(x)=ax+b$ występują dwa parametry. Oznacza to, że w celu wyznaczenia wzoru funkcji liniowej potrzeba dwóch różnych informacji (wartości obu parametrów).

PRZYKŁAD 1

P.4.6.1

Wyznacz wzór funkcji liniowej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli $A(2;1)$, $B(-1;-3)$.

1° W celu znalezienia wzoru $y=ax+b$ musimy wyznaczyć współczynniki a oraz b. Zauważmy, że jeśli punkt A należy do wykresu, to spełnia również wzór funkcji, czyli jeśli wstawimy w miejsce x pierwszą współrzędną punktu, a w miejsce y drugą współrzędną, to otrzymamy równanie prawdziwe.

$$1=a\cdot 2+b$$

2° Analogicznie, wykorzystując punkt B, otrzymujemy drugie równanie.

$$-3=a\cdot(-1)+b$$

3° Mamy zatem dwa równania, w których litery a oraz b stają się zmiennymi.

$$\begin{cases}1=a\cdot 2+b\\ -3=a\cdot(-1)+b\end{cases}$$

4° Rozwiązujemy układ równań.

$$\begin{cases}1=2a+b & |\cdot(-1)\\ -3=-a+b\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-1=-2a-b\\ -3=-a+b\end{cases}$$

$$-4=-3a \quad |:(-3)$$

$$a=\frac{4}{3}$$

5° Powracamy do pierwszego równania i wyznaczamy b.

$$1=a\cdot 2+b \quad \rightarrow \quad 1-2a=b$$

$$b=1-2\cdot\frac{4}{3}$$

$$b=1-\frac{8}{3}$$

$$b=-\frac{5}{3}$$

6° Wzór funkcji liniowej zapisujemy, podstawiając za a i b wyznaczone wartości.

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyznacz wzór funkcji liniowej przechodzącej przez punkty A i B, jeśli:

PRZYKŁAD 2. $A(3;4)$, $B(-2;1)$

PRZYKŁAD 3. $A(3;5)$, $B(1;1)$

PRZYKŁAD 4. $A(3;5)$, $B(2;1)$

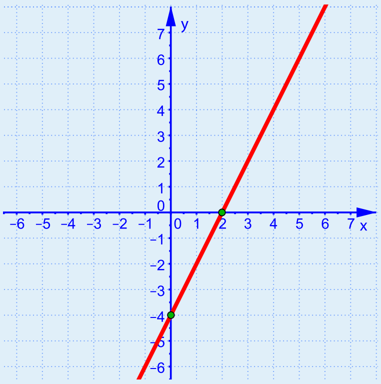
PRZYKŁAD 5. $A(2;0)$, $B(3;2)$

PRZYKŁAD 6. $A(3;0)$, $B(-5;-2)$

PRZYKŁAD 1

P.4.6.2

Wyznacz wzór funkcji przedstawionej na wykresie.

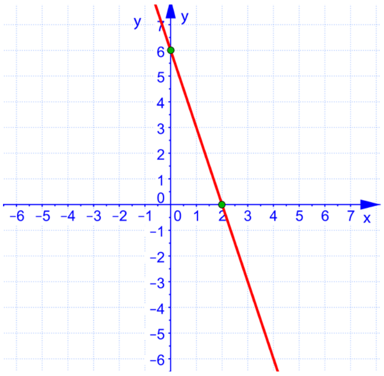


1° Szukamy współczynników wzoru.	$y = ax + b \qquad a = ?, b = ?$
2° Ze współrzędnych punktu przecięcia wykresu z osią OY wyznaczamy współczynnik b.	$(0; b) = (0; -4) \rightarrow b = -4$
3° Wzór funkcji przyjmuje postać:	$y = ax - 4$
4° Ze współrzędnych miejsca zerowego (czyli punktu przecięcia wykresu z osią OX) wyznaczamy współczynnik a.	$(2; 0) \rightarrow 0 = a \cdot 2 - 4$ $-2a = -4$ $a = 2$
5° Wzór funkcji liniowej zapisujemy, podstawiając za a i b wyznaczone wartości.	$y = 2x - 4$

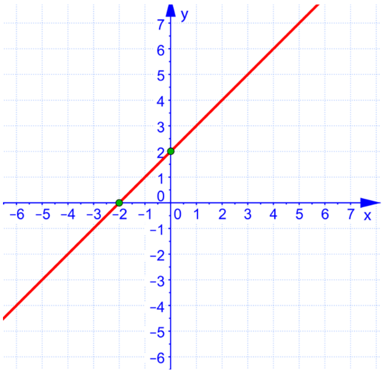
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyznacz wzory funkcji przedstawionych na wykresach:

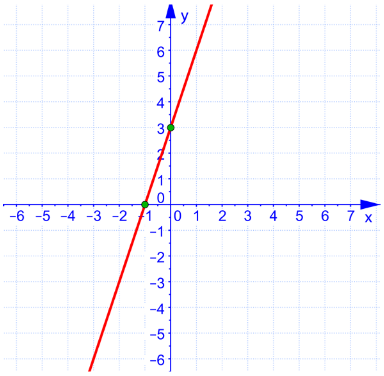
PRZYKŁAD 2.



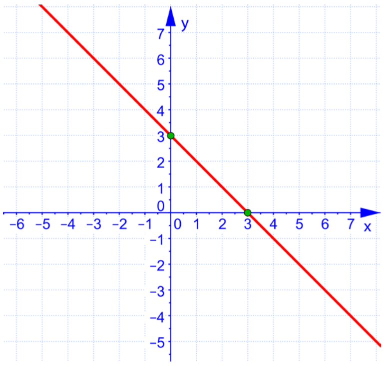
PRZYKŁAD 3.



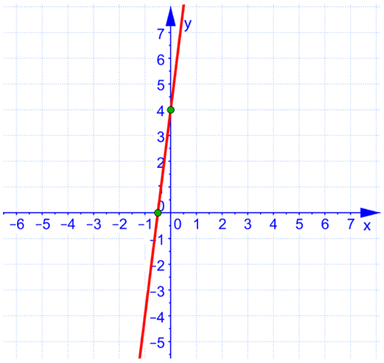
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



PRZYKŁAD

Wyznacz wzór funkcji liniowej $y = ax + b$, wiedząc, że $a + 2b = 3$ i że miejscem zerowym jest liczba 2.

1° Korzystamy z informacji o miejscu zerowym.

$(2;0) \rightarrow 0 = a \cdot 2 + b \rightarrow b = -2a$

2° Dodatkowo wiemy, że $a + 2b = 3$, więc podstawimy za $b = -2a$ i wyznaczymy a.

$$a + 2 \cdot (-2a) = 3$$
$$a - 4a = 3$$
$$-3a = 3 \qquad | : (-3)$$
$$a = -1$$

3° Obliczamy b.

$$b = -2a$$
$$b = -2 \cdot (-1)$$
$$b = 2$$

4° Zapisujemy wzór funkcji liniowej, podstawiając za a i b wyznaczone wartości.

$$y = -x + 2$$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.6.1. Wyznacz wzór funkcji liniowej, która przecina oś OY w punkcie $(0;4)$ oraz przechodzi przez punkt $(2;6)$.

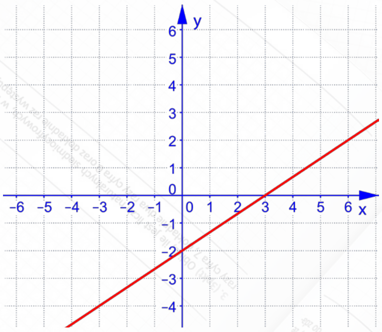
4.6.2. Wyznacz wzór funkcji liniowej, która przechodzi przez początek układu współrzędnych, a dla argumentu -3 przyjmuje wartość 9.

4.6.3. Liczba 2 jest miejscem zerowym funkcji liniowej, a punkt przecięcia funkcji z osią OY ma współrzędne $(0;-2)$. Znajdź wzór tej funkcji.

4.6.4. Współczynnik kierunkowy pewnej funkcji liniowej wynosi $-\frac{2}{3}$, a miejsce zerowe wynosi $\frac{3}{2}$. Znajdź wzór tej funkcji.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. ☑

4.6.5. Wzór funkcji liniowej przedstawionej na rysunku ma postać:



A. $y = 3x - 2$

B. $y = 2x - 3$

C. $y = \frac{2}{3}x - 2$

D. $y = \frac{3}{2}x - 2$

4.6.6. Miejscem zerowym funkcji liniowej jest -4, a współczynnik kierunkowy ma wartość 3. Wynika z tego, że wzór funkcji ma postać:

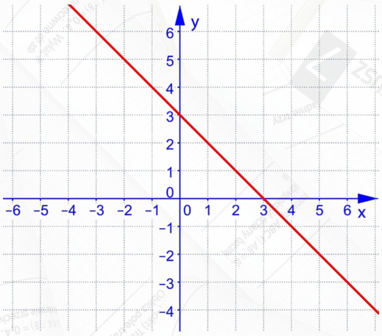
A. $y = 3x - 4$

B. $y = 3x + 4$

C. $y = 3x - 12$

D. $y = 3x + 12$

4.6.7. Wzór funkcji przedstawionej na wykresie ma postać:



A. $y = 3x$

B. $y = x - 3$

C. $y = -x + 3$

D. $y = 3x + 3$

4.6.8. Dane są funkcje $f(x)$ i $g(x)$, których miejscem zerowym jest początek układu współrzędnych, oraz $f(1) = g(2)$. Warunek taki spełnia para funkcji:

A. $f(x) = x; g(x) = 2x$

B. $f(x) = x + 1; g(x) = x + 2$

C. $f(x) = 4x; g(x) = 2x$

D. $f(x) = x; g(x) = 2x + 1$

4.6.9. Miejscem zerowym funkcji przechodzącej przez punkty $A(2; 3)$ i $B(-4; -6)$ jest:

A. $x = -2$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

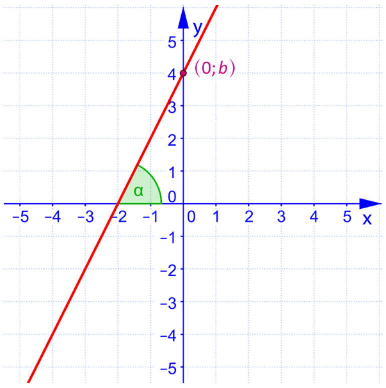
4.7 ▶ Współczynniki we wzorze funkcji liniowej

We wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ występują dwa współczynniki:

- ▶ a — współczynnik kierunkowy,
- ▶ b — wyraz wolny.

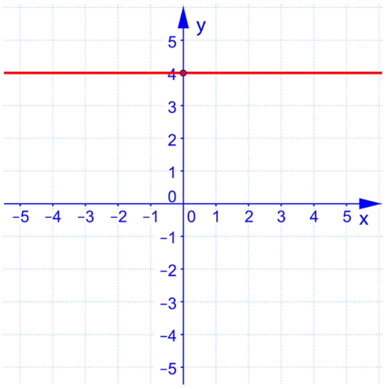
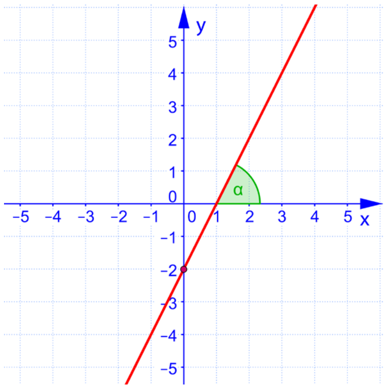
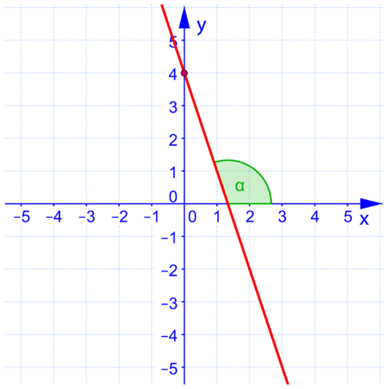
▶ Interpretacja współczynników funkcji liniowej

P.4.7.1

współczynnik b	wskazuje miejsce przecięcia wykresu z osią OY (ponieważ $f(0) = a \cdot 0 + b = b$)	
współczynnik a	informuje o kącie nachylenia prostej do osi OX (kąt α) oraz monotoniczności funkcji	

▶ Monotoniczność funkcji liniowej

P.4.7.1

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
		
Prosta jest równoległa do osi OX.	Prosta tworzy kąt ostry z osią OX.	Prosta tworzy kąt rozwarty z osią OX.
Funkcja jest stała.	Funkcja jest rosnąca.	Funkcja jest malejąca.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.7.1. Określ, przez które ćwiartki układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $y = ax + b$, jeśli:

Z.4.7.1

a. $a > 0, b > 0$

b. $a < 0, b < 0$

c. $a > 0, b < 0$

d. $a < 0, b = 0$

e. $a < 0, b > 0$

f. $a = 0, b > 0$

g. $a > 0, b = 0$

h. $a = 0, b < 0$

4.7.2. Uzupełnij tabelę, określając monotoniczność funkcji.

Wzór funkcji	Funkcja jest:			Wzór funkcji	Funkcja jest:		
	rosnąca	malejąca	stała		rosnąca	malejąca	stała
$y = 3x - 1$				$y = -2$			
$y = -2x + 5$				$y = -10 - x$			
$y = x - 3$				$y = 3 - \frac{x}{2}$			

4.7.3. Zaznacz w tabeli, przez które ćwiartki przechodzi funkcja liniowa o podanym wzorze.

Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:				Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
$y = 4x$					$y = -3x + 1$				
$y = 2x - 1$					$y = x + 3$				
$y = -x - 1$					$y = \pi$				
$y = 6$					$y = 4x + 2$				

4.7.4. Dana jest funkcja $y = (2m + 3)x + 2$. Określ, dla jakiego parametru m funkcja jest:

a. rosnąca, **b.** malejąca, **c.** stała.

4.7.5. Dana jest funkcja $y = (8 - 2k)x - 3$. Określ, dla jakiego parametru k funkcja jest:

a. rosnąca, **b.** malejąca, **c.** stała.

4.7.6. Dana jest funkcja:

Z.4.7.6

a. $y = 2x + 4$ **b.** $y = 3x$ **c.** $y = -4x + 4$ **d.** $y = x + 1$

Narysuj wykres funkcji i określ:

- miejsce zerowe,
- monotoniczność,
- kiedy funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
- kiedy funkcja przyjmuje wartości ujemne.

MATURA – ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

4.7.7. Funkcja $y=(4-m^2)x+5$ jest stała, jeśli:

A. $m=0$ **B.** $m^2=-4$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-1$

4.7.8. Funkcja $y=4x-12$ jest dodatnia, jeśli:

A. $x\in(12;\infty)$ **B.** $x\in(4;\infty)$ **C.** $x\in(3;\infty)$ **D.** $x\in(-\infty;3)$

4.7.9. Pole trójkąta ograniczonego prostą $y=-3x+6$ oraz osiami układu współrzędnych wynosi:

A. $3\,j^2$ **B.** $6\,j^2$ **C.** $4\,j^2$ **D.** $12\,j^2$

4.7.10. Dany jest zbiór prostych $f(x)=2x+3$, $g(x)=4+x$, $h(x)=5$. Nie jest prawdą, że wszystkie funkcje:

A. są monotoniczne,

B. mają miejsca zerowe,

C. przecinają oś OY dla $y>0$,

D. dla argumentu 1 przyjmują tę samą wartość.

4.7.11. Dane są funkcje liniowe $f(x)=(a+1)x+3$ oraz $g(x)=2ax-1$. Funkcje mają to samo miejsce zerowe, jeśli:

A. $a=1$ **B.** $a=-7$ **C.** $a=\frac{1}{7}$ **D.** $a=-\frac{1}{7}$

4.7.12. Wykres funkcji $y=-4x-1$ nie przechodzi przez ćwiartkę:

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

4.7.13. Jeśli $a>0$ i $b<0$, to prosta $y=ax+b$ przechodzi przez ćwiartki:

A. I, II, III **B.** II, III, IV **C.** I, II, IV **D.** I, III, IV

4.7.14. Funkcja $y=(a+2)x+a-4$ przecina oś OX w $x=1$, jeśli:

A. $a=1$ **B.** $a=2$ **C.** $a=-1$ **D.** $a=3$

4.7.15. Funkcja $y=\left(2m-\frac{3}{4}\right)x$ jest malejąca, gdy:

A. $m<\frac{3}{8}$ **B.** $m>\frac{3}{4}$ **C.** $m>\frac{3}{8}$ **D.** $m=\frac{3}{8}$

4.7.16. Prosta $y=-3x-2$ przyjmuje wartości dodatnie wtedy, gdy:

A. $x\in\left(\frac{2}{3};\infty\right)$ **B.** $x\in\left(-\frac{2}{3};\infty\right)$ **C.** $x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$ **D.** $x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$

4.8 ▶ Funkcja kwadratowa

DEFINICJA

Funkcja kwadratowa to funkcja określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $x \in \boldsymbol{R}$, gdzie $a \neq 0$. Litery a, b, c to współczynniki funkcji kwadratowej, a litera x oznacza zmienną.

Wzór w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy postacią ogólną funkcji kwadratowej.

▶ Współczynniki funkcji kwadratowej w postaci ogólnej

PRZYKŁAD 1

P.4.8.1

Wypisz współczynniki funkcji kwadratowej o wzorze $y = 2x^2 + 3x - 1$.

$a = 2, b = 3, c = -1$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wypisz współczynniki funkcji kwadratowej o wzorze:

PRZYKŁAD 2. $y = -x^2 + 2x + 4$

PRZYKŁAD 3. $y = -4x^2 + x - 2$

PRZYKŁAD 4. $y = -5x^2 + 7$

PRZYKŁAD 5. $y = x^2 - 6x$

PRZYKŁAD 6. $y = 4x^2 - 3$

▶ Funkcja kwadratowa $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$

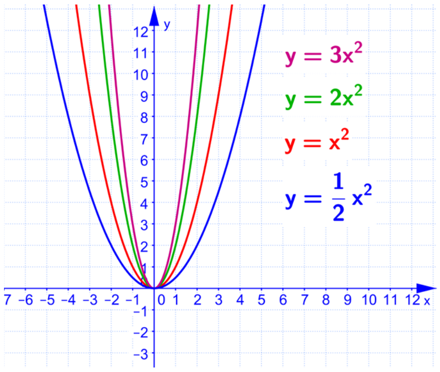
PRZYKŁAD

P.4.8.2

Naszkicujmy wykresy funkcji $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ w jednym układzie współrzędnych.

Do naszkicowania wykresów posłużymy się tabelką:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = 3x^2$	12	3	0	3	12
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



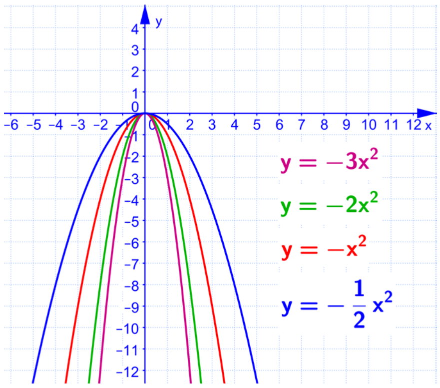
PRZYKŁAD

P.4.8.3

Teraz naszkicujemy wykresy funkcji $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Do naszkicowania wykresów posłużymy się tabelką:

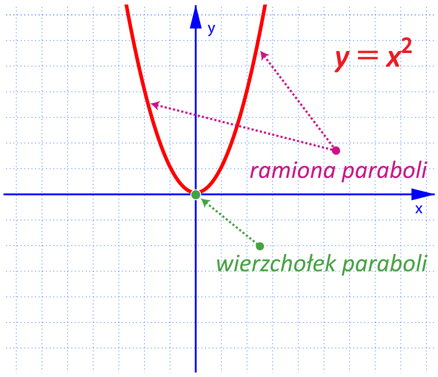
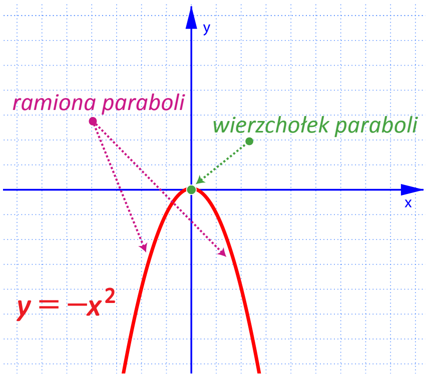
x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
$y = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8
$y = -3x^2$	-12	-3	0	-3	-12
$y = -\frac{1}{2}x^2$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2



Można również zauważyć, że wykresy tych funkcji powstają poprzez symetrię osiową wykresów funkcji $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ względem osi OX.

► Własności funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$

Na podstawie powyższych wykresów omówimy własności funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.

Wykres		
	Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Osią symetrii paraboli jest w tym przypadku prosta $x = 0$, a wierzchołek paraboli ma współrzędne $(0;0)$.	
Dziedzina	$D = R$	
Współczynnik a	$a > 0$	$a < 0$
Jak skierowane są ramiona paraboli	Ramiona paraboli skierowane są do góry.	Ramiona paraboli skierowane są do dołu.
Zbiór wartości	$ZW = \langle 0;\infty)$	$ZW = (-\infty;0\rangle$
Przedziały monotoniczności	Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty;0\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 0;\infty)$.	Funkcja jest malejąca w przedziale $\langle 0;\infty)$ i rosnąca w przedziale $(-\infty;0\rangle$.

Wartość największa	Funkcja nie przyjmuje wartości największej.	Dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość największą równą 0.
Wartość najmniejsza	Dla $x=0$ funkcja przyjmuje wartość najmniejszą równą 0.	Funkcja nie przyjmuje wartości najmniejszej.
Odchylenie ramion paraboli od osi OY	Współczynnik a decyduje również o tym, jak bardzo rozchylone są ramiona paraboli. Im większa jest wartość $\lvert a \rvert$, tym mniej ramiona są odchylone od osi OY.	

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.8.1. Narysuj wykres funkcji $y=\frac{2}{3}x^2$ oraz określ maksymalne przedziały monotoniczności.

4.8.2. Narysuj wykres funkcji $y=-\frac{1}{4}x^2$ oraz podaj zbiór wartości tej funkcji.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

☑ **T.4.8**

4.8.3. Suma współczynników funkcji kwadratowej o wzorze $y=4x^2-5x-\frac{1}{3}$ jest liczbą:

A. wymierną, **B.** pierwszą, **C.** parzystą, **D.** dodatnią.

4.8.4. O funkcji $f(x)=-3x^2$ można powiedzieć, że:

A. nie ma wartości najmniejszej,

B. nie ma wartości największej,

C. jest rosnąca w przedziale $x\in\langle 0;\infty)$,

D. jest malejąca w przedziale $x\in(-\infty;0\rangle$.

4.8.5. Przedział $\langle 0;\infty)$ jest zbiorem wartości funkcji:

A. $y=(2\sqrt{3}-\sqrt{5})x^2$

B. $y=(\sqrt{5}-\sqrt{7})x^2$

C. $y=(\sqrt{5}-3)x^2$

D. $y=\left(0,(3)-\frac{1}{3}\right)x^2$

4.8.6. Dane są funkcje $f(x)=3x^2$ i $g(x)=2x^2$. Prawdą jest, że:

A. $f(3)>g(4)$ **B.** $f(-2)>g(1)$ **C.** $f(-1)\le g(1)$ **D.** $f(-3)=g(2)$

4.8.7. Dane są funkcje $f(x)=-2x^2$ i $g(x)=2x^2$. Funkcja $f(x)$ jest obrazem funkcji $g(x)$ w symetrii względem:

A. punktu $(0;0)$

B. osi OY

C. prostej $y=x$

D. prostej $y=-x$

4.9 ► Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o funkcji lub jej wykresie

PRZYKŁAD 1

P.4.9.1

Wyznacz wzór funkcji kwadratowej przechodzącej przez punkty $A(-1;3)$, $B(1;-1)$, $C(0;2)$.

1° Korzystamy ze wzoru $y=ax^2+bx+c$.

2° Podstawiamy współrzędne poszczególnych punktów do wzoru, tworząc układ równań z 3 niewiadomymi.

$$\begin{cases} 3=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c \\ -1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \\ 2=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \end{cases}$$

3° Przekształcamy poszczególne równania.

$$\begin{cases} 3=a-b+c \\ -1=a+b+c \\ c=2 \end{cases}$$

4° Podstawiamy za $c=2$ i dodajemy do siebie stronami dwa pierwsze równania.

$$+\begin{cases} 3=a-\cancel{b}+2 \\ \underline{-1=a+\cancel{b}+2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2&=2a+4 \\ -2a&=4-2 \\ -2a&=2 \qquad |:(-2) \\ a&=-1 \end{aligned}$$

5° Powracamy do pierwszego równania i podstawiamy za $a=-1$.

$$\begin{aligned} 3&=a-b+2 \\ 3&=-1-b+2 \\ b&=-1+2-3 \\ b&=-2 \end{aligned}$$

6° Podstawiamy wyznaczone wartości a, b, c do wzoru $y=ax^2+bx+c$.

$$y=-x^2-2x+2$$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej przechodzącej przez punkty $A(3;3)$, $B(0;0)$, $C(1;-1)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.9.1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej przechodzącej przez punkty $A(-3;0)$, $B(-1;0)$, $C(-2;-1)$.

4.9.2. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx+3$. Wyznacz współczynniki a i b, jeśli do wykresu tej funkcji należą punkty $A(-2;-5)$ i $B(2;3)$.

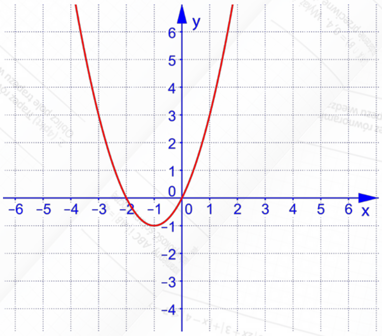
4.9.3. Do funkcji o wzorze $f(x) = 2x^2 + 5x + c$ należy punkt $A(1;10)$. Wynika z tego, że:

A. $c = 3$ **B.** $c = 2$ **C.** $c = 1$ **D.** $c = 0$

4.9.4. Dana jest funkcja $y = -x^2 + bx + c$ przechodząca przez początek układu współrzędnych oraz punkt $(2;8)$. Wynika z tego, że:

A. $b = -6, c = 0$ **B.** $b = 0, c = -6$ **C.** $b = 0, c = 6$ **D.** $b = 6, c = 0$

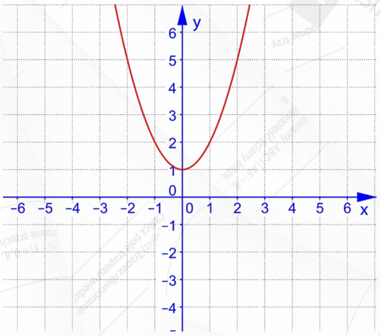
4.9.5. Dany jest wykres funkcji kwadratowej.



Wzór funkcji przedstawionej na wykresie ma postać:

A. $y = x^2 + 4x$ **B.** $y = x^2 - 4$ **C.** $y = x^2 + 2x$ **D.** $y = x^2 - 2x$

4.9.6. Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Wynika z tego, że:

A. $a = 1, b = 0, c = 1$ **C.** $a = 2, b = 0, c = 1$

B. $a = -1, b = 1, c = -1$ **D.** $a = 1, b = 0, c = -1$

4.9.7. Wierzchołek paraboli pewnej funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ leży w punkcie $(0;1)$. Jeżeli wiadomo, że jedno miejsce zerowe tej funkcji wynosi 1, można stwierdzić, że:

A. ramiona paraboli skierowane są do góry,

B. współczynnik c jest liczbą pierwszą,

C. suma miejsc zerowych wynosi zero,

D. drugie miejsce zerowe wynosi -2.

4.10 ► Interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, ogólnej i iloczynowej

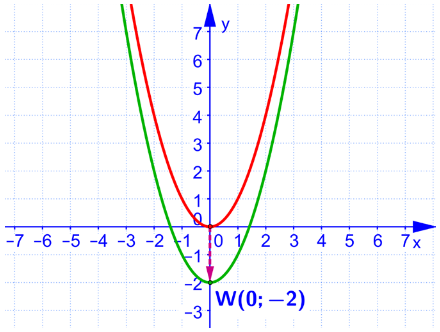
► Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

PRZYKŁAD 1

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = x^2 - 2$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 2 jednostki w dół.

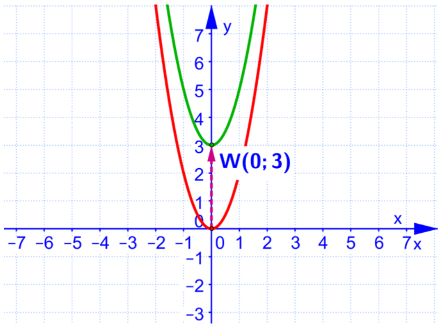


PRZYKŁAD 2

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x^2 + 3$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = 2x^2$ wzdłuż osi OY o 3 jednostki do góry.

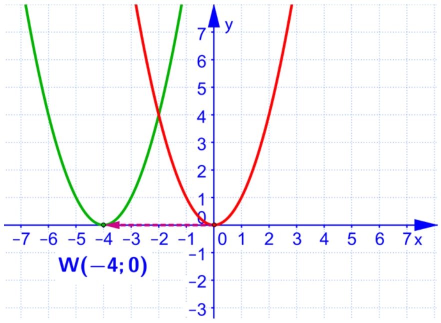


PRZYKŁAD 3

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x + 4)^2$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 4 jednostki w lewo.

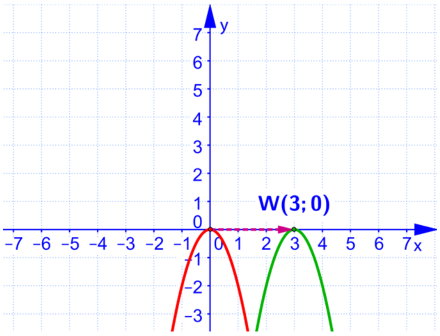


PRZYKŁAD 4

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = -2(x - 3)^2$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = -2x^2$ wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo.

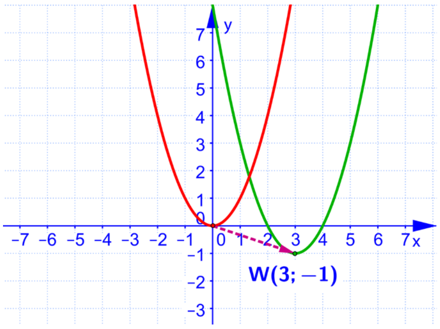


PRZYKŁAD 5

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = (x-3)^2 - 1$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OX o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi OY o 1 jednostkę w dół.

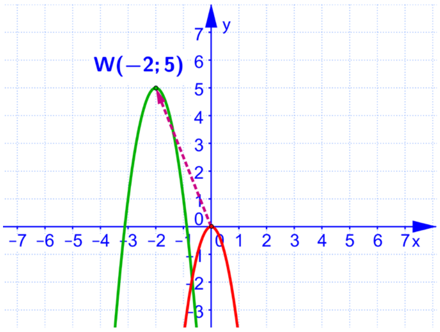


PRZYKŁAD 6

P.4.10.1

Naszkicuj wykres funkcji $y = -4(x+2)^2 + 5$.

Wykres powstaje poprzez przesunięcie równoległe wykresu funkcji $y = -4x^2$ wzdłuż osi OX o 2 jednostki w lewo oraz wzdłuż osi OY o 5 jednostek w górę.



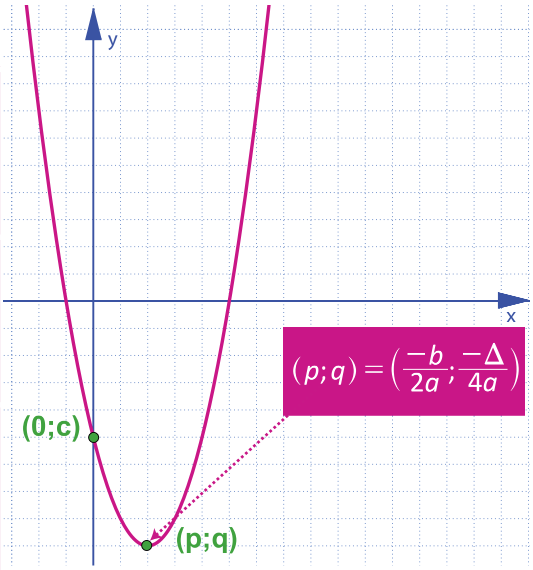
WNIOSEK

Wierzchołkiem W paraboli o równaniu $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest punkt o współrzędnych $W = (p; q)$. p i q wskazują kierunek i wielkość przesunięcia równoległego względem osi układu współrzędnych wykresu funkcji $y = ax^2$.

DEFINICJA

Wzór w postaci $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, nazywamy postacią kanoniczną funkcji kwadratowej.

	WZÓR
wyróżnik funkcji kwadratowej (oznaczamy grecką literą Δ [delta])	$\Delta = b^2 - 4ac$
współrzędne wierzchołka paraboli $(x_w; y_w) = (p; q)$	$x_w = p = \frac{-b}{2a}$ $y_w = q = \frac{-\Delta}{4a}$
współrzędne punktu przecięcia wykresu z osią *OY*	$(0; c)$



ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.10.1. Określ współrzędne wierzchołka paraboli o podanym wzorze oraz położenie jej ramion. Uzupełnij tabelkę:

Wzór funkcji	Współrzędne wierzchołka	Ramiona skierowane
$y = (x-3)^2 + 1$	$W(3; 1)$	*do góry*
$y = -2(x+2)^2 - 1$		
$y = 4(x-1)^2$		
$y = -3x^2 + 1$		
$y = 2(x-4)^2 + 2$		
$y = -(x+2)^2$		

4.10.2. Dany jest wzór funkcji kwadratowej $y = 2x^2$. Podaj wzór tej funkcji po przesunięciu wykresu o:

a. dwie jednostki w prawo,

b. trzy jednostki w lewo,

c. cztery jednostki w prawo i dwie w dół,

d. jedną jednostkę w lewo i dwie w górę.

► Obliczanie współrzędnych wierzchołka paraboli

PRZYKŁAD 1

P.4.10.2

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o wzorze $y = x^2 + 4x - 6$.

1° Współczynniki funkcji to: $a=1, b=4, c=-6$

2° Obliczamy wyróżnik (deltę) ze wzoru: $\Delta=b^2-4ac$. $\Delta=4^2-4\cdot1\cdot(-6)=16+24=40$

3° Obliczamy p — pierwszą współrzędną wierzchołka ze wzoru: $p=\frac{-b}{2a}$. $p=\frac{-4}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=-2$

4° Obliczamy q — drugą współrzędną wierzchołka ze wzoru: $q=\frac{-\Delta}{4a}$. $q=\frac{-40}{4\cdot1}=\frac{-40}{4}=-10$

5° Współrzędne wierzchołka to: $W(-2;-10)$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli o wzorze:

PRZYKŁAD 2. $y=x^2+2x+4$
PRZYKŁAD 3. $y=-x^2-2x+1$
PRZYKŁAD 4. $y=-2x^2+4x-4$
PRZYKŁAD 5. $y=-4x^2+2$
PRZYKŁAD 6. $y=2x^2-x$
PRZYKŁAD 7. $y=4x^2-8x$
PRZYKŁAD 8. $y=x^2+9$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.3. Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli:

a. $y=2x^2+5x-3$
b. $y=-x^2+6x-10$
c. $y=x^2-8x$
d. $y=-4x^2+16x-1$

► Zamiana postaci ogólnej wzoru funkcji kwadratowej na postać kanoniczną

PRZYKŁAD 1

P.4.10.3

Zapisz funkcję kwadratową o wzorze $y=x^2-6x+8$ w postaci kanonicznej.

1° Współczynniki funkcji to: $a=1, b=-6, c=8$

2° Do postaci kanonicznej potrzebne są współrzędne wierzchołka, które obliczymy ze wzorów:
$p=\frac{-b}{2a}, q=\frac{-\Delta}{4a}$

3° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta=b^2-4ac$. $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$

4° Obliczamy p i q.

$$p = \frac{6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$q = \frac{-4}{4 \cdot 1} = \frac{-4}{4} = -1$$

5° Podstawiamy p i q do wzoru na postać kanoniczną $f(x) = a(x-p)^2 + q$

$$y = (x-3)^2 - 1$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Zapisz podaną funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

PRZYKŁAD 2. $y = 2x^2 - 4x + 6$

PRZYKŁAD 3. $y = x^2 + 2x + 9$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.4. Przekształć podane wzory funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej.

a. $y = x^2 + 10x - 2$

b. $y = -x^2 + 4x + 2$

c. $y = x^2 + 6x - 1$

d. $y = -2x^2 + 4x + 3$

► Zamiana postaci kanonicznej wzoru funkcji kwadratowej na postać ogólną

PRZYKŁAD 1

Dana jest funkcja kwadratowa o wzorze $y = (x-3)^2 - 1$. Przedstaw wzór funkcji w postaci ogólnej.

Aby uzyskać postać ogólną, należy wykonać działania i uporządkować wyrażenie.

$$y = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8$$

PRZYKŁAD 2

Dana jest funkcja kwadratowa o wzorze $y = 2(x+1)^2 + 4$. Przedstaw wzór funkcji w postaci ogólnej.

$$y = 2(x+1)^2 + 4 = 2(x^2 + 2x + 1) + 4 = 2x^2 + 4x + 2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.5. Przedstaw podane wzory funkcji kwadratowej w postaci ogólnej.

a. $y = -(x+2)^2 - 1$

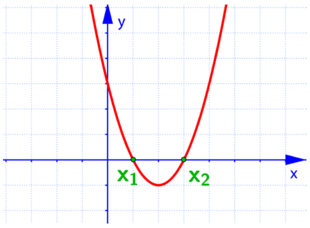
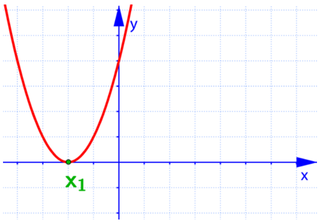
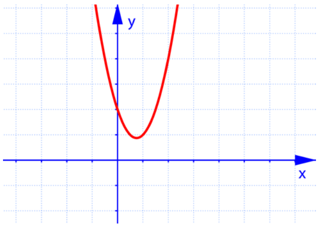
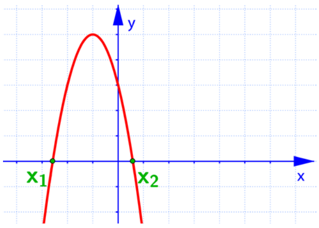
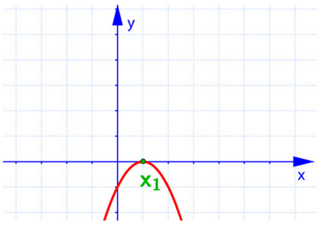
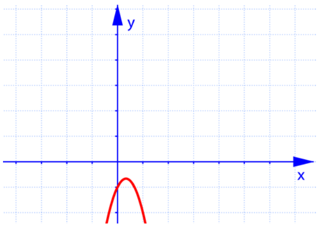
b. $y = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

c. $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$

d. $y = -2(x - \sqrt{2})^2 + 4$

▶ Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

P.4.10.4

PRZYKŁAD 1		WYRÓŻNIK $\Delta = b^2 - 4ac$	WNIOSKI
$y = x^2 - 4x + 3$ $a > 0$		$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 =$ $= 16 - 12 = 4$	$\Delta > 0$ dwa miejsca zerowe
PRZYKŁAD 2			
$y = x^2 + 4x + 4$ $a > 0$		$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 =$ $= 16 - 16 = 0$	$\Delta = 0$ jedno miejsce zerowe
PRZYKŁAD 3			
$y = 2x^2 - 3x + 2$ $a > 0$		$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$ $= 9 - 16 = -7$	$\Delta < 0$ brak miejsc zerowych
PRZYKŁAD 4			
$y = -2x^2 - 4x + 3$ $a < 0$		$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 =$ $= 16 + 24 = 40$	$\Delta > 0$ dwa miejsca zerowe
PRZYKŁAD 5			
$y = -x^2 + 2x - 1$ $a < 0$		$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) =$ $= 4 - 4 = 0$	$\Delta = 0$ jedno miejsce zerowe
PRZYKŁAD 6			
$y = -3x^2 + 2x - 1$ $a < 0$		$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) =$ $= 4 - 12 = -8$	$\Delta < 0$ brak miejsc zerowych

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.10.6. Uzupełnij tabelkę:

Wzór funkcji	Wartość wyróżnika	Liczba miejsc zerowych
$f(x)=x^2+4x-5$	$\Delta=36$	2
$f(x)=x^2-6x+7$		
$f(x)=2x^2+3x+5$		
$f(x)=-x^2-5$		
$f(x)=4x^2+4x+1$		

4.10.7. Oblicz wyróżnik (deltę) funkcji kwadratowej i określ liczbę jej miejsc zerowych. **Z.4.10.7**

a. $y=-5x^2-9x-3$
b. $y=x^2+5x+8$
c. $y=-4x^2+4x-1$
d. $y=2x^2+3$
e. $y=7x^2-3x-6$
f. $y=-3x^2+4x$
g. $y=2x^2+7$
h. $y=9x^2+6x+1$
i. $y=-x^2-8x-5$

$$x_0, x_1, x_2$$

▶ Obliczanie miejsc zerowych

WYRÓŻNIK	LICZBA MIEJSC ZEROWYCH	WZÓR NA MIEJSCA ZEROWE
$\Delta>0$	2	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	1	$x_0=\frac{-b}{2a}$
$\Delta<0$	0	brak

PRZYKŁAD 1

P.4.10.5

Oblicz, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y=x^2+5x-6$.

1° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta=b^2-4ac$.

$a=1, b=5, c=-6$

$\Delta=5^2-4\cdot1\cdot(-6)=25+24=49$

2° Obliczamy miejsca zerowe ze wzorów:

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

$x_1=\frac{-5-7}{2\cdot1}=\frac{-12}{2}=-6$

$x_2=\frac{-5+7}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1$

PRZYKŁAD 2

P.4.10.5

Oblicz, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = x^2 + 2x + 1$.

1° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$a = 1, b = 2, c = 1$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

2° Obliczamy miejsce zerowe ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

$x_0 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$

PRZYKŁAD 3

P.4.10.5

Oblicz, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji kwadratowej $y = 4x^2 - 2x + 3$.

1° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$a = 4, b = -2, c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4 - 48 = -44$

2° $\Delta = -44 < 0$, więc funkcja nie ma miejsc zerowych.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.8. Oblicz, o ile istnieją, miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

Z.4.10.8

a. $y = x^2 + x - 2$
b. $y = x^2 + 4x + 3$
c. $y = -x^2 - x + 6$
d. $y = 2x^2 + 3x - 2$
e. $y = x^2 - 2x - 8$
f. $y = -4x^2 + 4x - 1$
g. $y = 6x^2 + x + 3$
h. $y = 9x^2 - 6x + 1$
i. $y = x^2 + 5$

► Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

WYRÓŻNIK	POSTAĆ ILOCZYNOWA FUNKCJI KWADRATOWEJ	WZÓR NA MIEJSCA ZEROWE
$\Delta > 0$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	nie istnieje	brak

► Zamiana postaci ogólnej wzoru funkcji kwadratowej na postać iloczynową

PRZYKŁAD 1

P.4.10.6

Zapisz funkcję kwadratową $y = x^2 + 6x - 7$ w postaci iloczynowej.

1° Współczynniki funkcji to: $a = 1, b = 6, c = -7$

2° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64$

3° Obliczamy miejsca zerowe ze wzorów: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$
$$x_1 = \frac{-6-8}{2 \cdot 1} = \frac{-14}{2} = -7$$
$$x_2 = \frac{-6+8}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

4° Podstawiamy wyznaczone wartości do wzoru na postać iloczynową $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. $y = (x+7)(x-1)$

PRZYKŁAD 2

P.4.10.6

Zapisz funkcję kwadratową $y = x^2 + 4x + 4$ w postaci iloczynowej.

1° Współczynniki funkcji to: $a = 1, b = 4, c = 4$

2° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

3° Obliczamy miejsce zerowe ze wzoru: $x_0 = \frac{-b}{2a}$. $x_0 = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$

4° Podstawiamy wyznaczoną wartość do wzoru na postać iloczynową: $y = a(x - x_0)^2$. $y = (x+2)^2$

PRZYKŁAD 3

P.4.10.6

Zapisz funkcję kwadratową $y = 2x^2 - 2x + 1$ w postaci iloczynowej.

1° Współczynniki funkcji to: $a = 2, b = -2, c = 1$

2° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 - 8 = -4$

3° $\Delta < 0$, czyli funkcja nie ma miejsc zerowych i postać iloczynowa funkcji nie istnieje.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.9. Zapisz wzór funkcji $f(x)$ w postaci iloczynowej, jeśli:

a. $f(x) = x^2 - 9x + 8$

b. $f(x) = x^2 + x - 12$

c. $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

d. $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

e. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

f. $f(x) = x^2 - 4x$

► Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

PRZYKŁAD 1

P.4.10.7

Sporządź wykres funkcji $y=-x^2+4x-3$.

1° Odczytujemy współczynniki a, b, c.

$a=-1,\ b=4,\ c=-3$

2° Wyznaczamy punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY, wiedząc, że ma on współrzędne $(0; c)$.

$(0; c)=(0; -3)$

3° Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli ze wzorów: $p=\frac{-b}{2a}$ i $q=\frac{-\Delta}{4a}$.

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=16-12=4$$
$$p=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=\frac{-4}{-2}=2$$
$$q=\frac{-4}{4\cdot(-1)}=\frac{-4}{-4}=1$$
$$(p; q)=(2; 1)$$

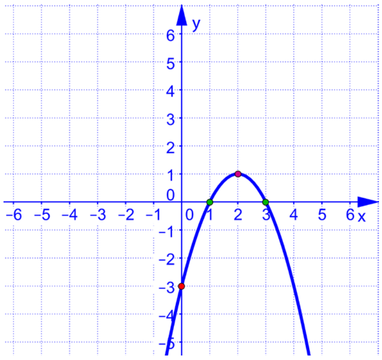
4° Obliczamy miejsca zerowe ze wzoru: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 2}{2\cdot(-1)}=\begin{smallmatrix}\nearrow 1\\ \searrow 3\end{smallmatrix}$$

5° Określamy, jak skierowane są ramiona paraboli.

$a<0$, więc ramiona skierowane są do dołu

6° Zaznaczamy wyznaczone punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.



PRZYKŁAD 2

P.4.10.7

Sporządź wykres funkcji $y=x^2-4x+5$.

1° Odczytujemy współczynniki a, b, c.

$a=1,\ b=-4,\ c=5$

2° Wyznaczamy punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY, wiedząc, że ma on współrzędne $(0; c)$.

$(0; c)=(0; 5)$

3° Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli ze wzorów: $p=\frac{-b}{2a}$ i $q=\frac{-\Delta}{4a}$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=16-20=-4$$
$$p=\frac{4}{2\cdot 1}=2$$
$$q=\frac{4}{4\cdot 1}=1$$
$$(p; q)=(2; 1)$$

4° $\Delta < 0$, więc funkcja nie ma miejsc zerowych. Obliczamy wartości funkcji na podstawie jej wzoru dla wybranych punktów.

$f(1) = 1 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$

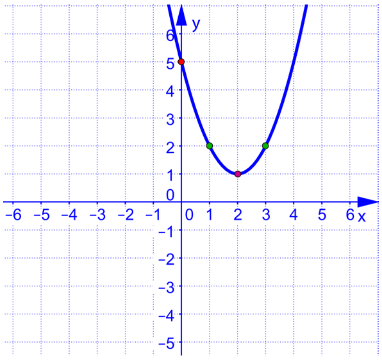
Wybieramy punkty położone symetrycznie względem osi symetrii paraboli i nieznacznie oddalone od x_w wierzchołka. W naszym przypadku oś symetrii to prosta o równaniu $x = 2$.

Skoro punkty są położone symetrycznie, to $f(1) = f(3) = 2$

5° Określamy, jak skierowane są ramiona paraboli.

$a > 0$, więc ramiona skierowane są do góry

6° Zaznaczamy wyznaczone punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.



PRZYKŁAD 3

P.4.10.7

Sporządź wykres funkcji $y = 2x^2 + 4x + 2$.

1° Odczytujemy współczynniki a, b, c.

$a = 2, b = 4, c = 2$

2° Wyznaczamy punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY, wiedząc, że ma on współrzędne $(0; c)$.

$(0; c) = (0; 2)$

3° Obliczamy współrzędne wierzchołka paraboli ze wzorów: $p = \frac{-b}{2a}$ i $q = \frac{-\Delta}{4a}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$
$$p = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$$
$$q = \frac{0}{4 \cdot 2} = 0$$
$$(p; q) = (-1; 0)$$

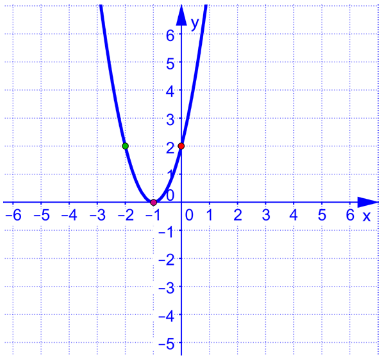
4° $\Delta = 0$, więc funkcja ma miejsce zerowe w wierzchołku. Wybieramy zatem punkt symetryczny do punktu $(0; c)$ względem osi symetrii paraboli.

$(-2; 2)$

5° Określamy, jak skierowane są ramiona paraboli.

$a > 0$, więc ramiona skierowane są do góry

6° Zaznaczamy wyznaczone punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 4. Sporządź wykres funkcji $y = x^2 + 2x$.

PRZYKŁAD 5. Sporządź wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.10. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$, jeśli:

a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b. $f(x) = -x^2 + 4$

c. $f(x) = x^2 + 6x$

d. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

e. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

f. $f(x) = 4x^2 - 9$

► Odczytywanie własności funkcji kwadratowej z wykresu funkcji

PRZYKŁAD 1

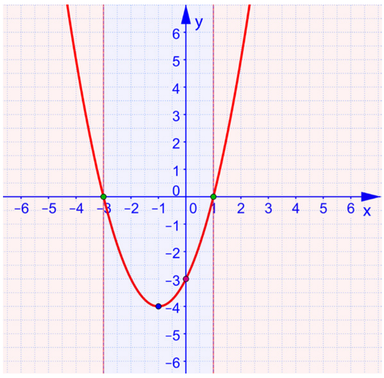
P.4.10.8

Narysuj wykres funkcji $y = x^2 + 2x - 3$ i na jego podstawie określ:

- monotoniczność funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- przedziały, w których funkcja jest dodatnia,
- przedziały, w których funkcja jest ujemna.

1° Rysujemy wykres funkcji.

2° Odczytujemy własności:

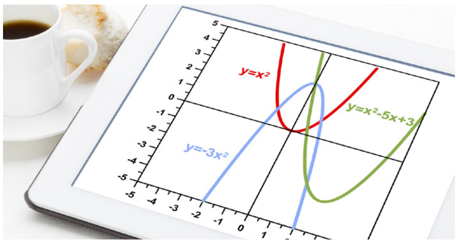


- funkcja jest rosnąca w przedziale $x \in \langle -1; \infty)$
- funkcja jest malejąca w przedziale $x \in (-\infty; -1\rangle$
- zbiór wartości funkcji $y \in \langle -4; \infty)$
- funkcja jest dodatnia w przedziale $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$
- funkcja jest ujemna w przedziale $x \in (-3; 1)$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Narysuj wykres funkcji i na jego podstawie określ:

- monotoniczność funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- przedziały, w których funkcja jest dodatnia,
- przedziały, w których funkcja jest ujemna.



PRZYKŁAD 2. $y = -2x^2 - 2x + 4$

PRZYKŁAD 3. $y = x^2 - 5x + 4$

PRZYKŁAD 4. $y = -x^2 + 2x$

PRZYKŁAD 5. $y = x^2 + 4x + 4$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

4.10.11. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ oraz:

- określ przedziały monotoniczności,
- podaj przedziały, w których funkcja jest dodatnia, a w których ujemna,
- określ zbiór wartości funkcji,
- sprawdź, czy punkty $A(1; -6)$ i $B(2; 8)$ należą do wykresu funkcji.

a. $f(x) = x^2 - x - 6$

b. $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

c. $f(x) = x^2 - 6x$

4.10.12. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$. Oblicz współczynniki b i c, wiedząc, że liczby -1 i 3 są miejscami zerowymi tej funkcji.

4.10.13. Wierzchołek paraboli o wzorze $f(x) = ax^2 + bx + 7$ ma współrzędne $(1; 5)$. Oblicz współczynniki a i b.

4.10.14. Funkcja kwadratowa $f(x)$ spełnia warunek $f(1) = 2$ oraz posiada dokładnie jedno miejsce zerowe $x_0 = 3$. Znajdź wzór tej funkcji.

4.10.15. Zapisz wzór funkcji $f(x) = (x - 4)(x + 2)$ w postaci kanonicznej.

4.10.16. Zapisz wzór funkcji $f(x) = (x + 2)^2 - 9$ w postaci iloczynowej.

4.10.17. Wierzchołek funkcji $f(x)=-x^2+3$ ma współrzędne:

A. $(3;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(0;-3)$ **D.** $(1;-3)$

4.10.18. Jeżeli funkcję $y=2x^2$ przesuniemy o 3 jednostki w lewo, to jej wzór będzie miał postać:

A. $y=2(x-3)^2$ **B.** $y=2x^2-3$ **C.** $y=2(x+3)^2$ **D.** $y=2x^2+3$

4.10.19. Funkcję $y=x^2$ przesunięto o 2 jednostki w prawo, a następnie o 4 jednostki do góry. Wzór funkcji po przesunięciu ma postać:

A. $y=(x-2)^2+4$ **C.** $f(x)=(x+2)^2+4$

B. $y=(x+2)^2-4$ **D.** $f(x)=(x-2)^2-4$

4.10.20. Funkcja $y=2x^2+5x+c$ przecina oś OY w punkcie $(0;-7)$. Wynika z tego, że:

A. $c=7$ **B.** $c=2$ **C.** $c=-3$ **D.** $c=-7$

4.10.21. Osią symetrii paraboli o wzorze $y=-3x^2+6x-1$ jest prosta:

A. $x=2$ **B.** $x=-2$ **C.** $x=1$ **D.** $x=-1$

4.10.22. Dana jest funkcja $y=(x-4)^2+1$. Prawdą jest, że:

A. $f(3)=f(5)$ **B.** $f(2)<f(3)$ **C.** $f(-1)<f(0)$ **D.** $f(5)>f(6)$

4.10.23. Zbiór wartości funkcji $f(x)=-(x-5)^2+3$ określony jest przedziałem:

A. $(-\infty;-3\rangle$ **B.** $\langle 3;\infty)$ **C.** $(-\infty;3\rangle$ **D.** $\langle -5;\infty)$

4.10.24. Miejscami zerowymi funkcji $f(x)=4x^2-8x+3$ są:

A. $x_1=1, x_2=-2$ **B.** $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$ **C.** $x_1=1, x_2=\frac{3}{4}$ **D.** $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{2}$

4.10.25. Dokładnie jedno miejsce zerowe posiada funkcja o wzorze:

A. $y=16x^2+1$ **C.** $y=x^2-5x-3$

B. $y=x^2+2x+4$ **D.** $y=9x^2-24x+16$

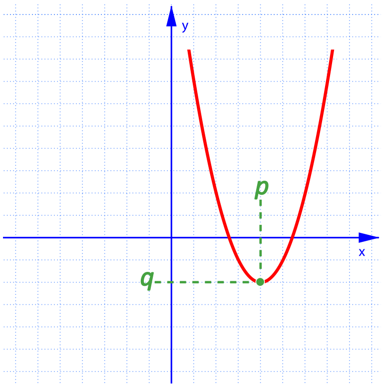
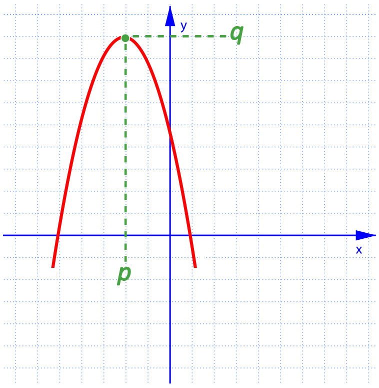
4.10.26. Dana jest funkcja $f(x)=(x+3)^2+6$. Funkcja f jest rosnąca w przedziale:

A. $x\in\langle 6;\infty)$ **B.** $x\in\langle -6;\infty)$ **C.** $x\in(-\infty;6\rangle$ **D.** $x\in\langle -3;\infty)$

4.11 ▶ Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale zamkniętym

▶ Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji kwadratowej w dziedzinie, czyli w zbiorze liczb rzeczywistych

Przypomnijmy, że zbiór wartości funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$, jest zależny od parametru a:

$a>0$, to ramiona skierowane do góry i $ZW=\langle q;\infty)$	$a<0$, to ramiona skierowane do dołu i $ZW=(-\infty;q\rangle$
W takim przypadku istnieje wartość najmniejsza (dla argumentu p i wynosi ona q), ale nie istnieje wartość największa.	W takim przypadku istnieje wartość największa (dla argumentu p i wynosi ona q), ale nie istnieje wartość najmniejsza.
	

PRZYKŁAD

Dana jest funkcja $f(x)=-x^2+2x-2$. Wyznacz wartość największą i najmniejszą tej funkcji w dziedzinie.

Zauważmy, że wykresem danej funkcji jest parabola skierowana ramionami do dołu, ponieważ $a=-1<0$. Zatem na pewno nie istnieje wartość najmniejsza. Natomiast wartość największa istnieje i można ją obliczyć, wykorzystując wzory na współrzędne wierzchołka:

$$p=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\cdot(-1)}=1, \text{ wówczas } q=f(1)=-1^2+2\cdot 1-2=-1$$

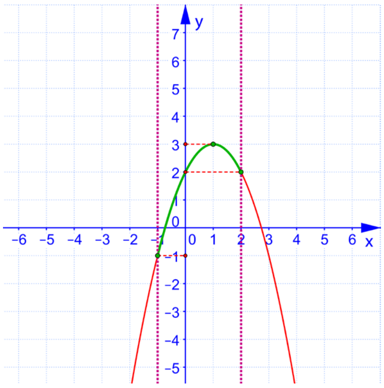
Zatem wartość największa funkcji wynosi -1.

▶ Wartość najmniejsza i wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

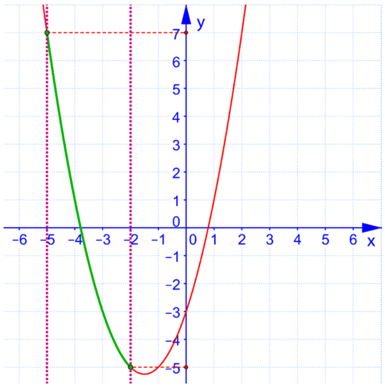
Wyznaczając najmniejszą i największą wartość funkcji w przedziale domkniętym, należy rozważyć 2 przypadki:

P.4.11.1

wierzchołek paraboli należy do przedziału	wierzchołek paraboli nie należy do przedziału
PRZYKŁAD 1	PRZYKŁAD 2
$y=-x^2+2x+2$, przedział $x\in\langle -1;2\rangle$	$y=x^2+3x-3$, przedział $x\in\langle -5;-2\rangle$



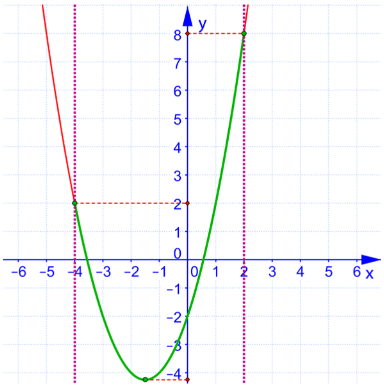
$f_{\max}(1)=3,\quad f_{\min}(-1)=-1$



$f_{\max}(-5)=7,\quad f_{\min}(-2)=-5$

PRZYKŁAD 3

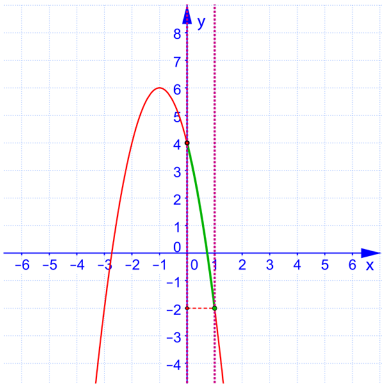
$y=x^2+3x-2$, przedział $x\in\langle -4;2\rangle$



$f_{\max}(2)=8,\quad f_{\min}\left(-1\frac{1}{2}\right)=-4\frac{1}{4}$

PRZYKŁAD 4

$y=-2x^2-4x+4$, przedział $x\in\langle 0;1\rangle$



$f_{\max}(0)=4,\quad f_{\min}(1)=-2$

WNIOSEK

Jeśli wierzchołek paraboli należy do przedziału, to:

Jeśli $a<0$, to:
$f_{\min}$ = wartość funkcji na jednym z końców przedziału
$f_{\max}=q$

Jeśli $a>0$, to:
$f_{\min}=q$
$f_{\max}$ = wartość funkcji na jednym z końców przedziału

Jeśli wierzchołek paraboli nie należy do przedziału, to:

$f_{\max}$, $f_{\min}$ to wartości funkcji na poszczególnych końcach przedziału

W celu wyznaczenia wartości największej lub najmniejszej w przedziale domkniętym $\langle a;b\rangle$ należy:

1. Obliczyć $f(a)$.
2. Obliczyć $f(b)$.
3. Obliczyć p (pierwszą współrzędną wierzchołka) i sprawdzić, czy należy do rozważanego przedziału:
   a. jeśli $p\in\langle a;b\rangle$, to należy obliczyć $f(p)$ (czyli q — drugą współrzędną wierzchołka),
   b. jeśli p nie należy do rozważanego przedziału $\langle a;b\rangle$, to na tym kończymy nasze obliczenia.
4. Porównujemy teraz następujące liczby: $f(a)$, $f(b)$, $f(p)$ (o ile $p\in\langle a;b\rangle$) — z tych liczb wybieramy największą (to będzie wartość największa) oraz najmniejszą (to będzie wartość najmniejsza).

PRZYKŁAD 1

P.4.11.2

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 2x - 2$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle -1; 2 \rangle$.

1° Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału.

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 2 = -1 - 2 - 2 = -5$$
$$f(2) = -2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -4 + 4 - 2 = -2$$

2° Obliczamy p — pierwszą współrzędną wierzchołka.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$$

3° Sprawdzamy, czy p należy do przedziału $\langle -1; 2 \rangle$.

$$p \in \langle -1; 2 \rangle$$

4° Obliczamy q.

$$q = f(p) = f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 - 2 = -1$$

5° Porównujemy liczby: $-5; -2; -1$.

-1 to wartość największa funkcji
-5 to wartość najmniejsza funkcji

PRZYKŁAD 2

P.4.11.2

Dana jest funkcja $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle -3; -1 \rangle$.

1° Obliczamy wartości funkcji na końcach przedziału.

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 2 \cdot 9 - 6 - 3 = 9$$
$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = 2 - 2 - 3 = -3$$

2° Obliczamy p — pierwszą współrzędną wierzchołka.

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

3° Sprawdzamy, czy p należy do przedziału $\langle -3; -1 \rangle$.

$$p \notin \langle -3; -1 \rangle$$

4° Oznacza to, że najmniejsza i największa wartość funkcji jest na końcach przedziału.

9 to wartość największa funkcji
-3 to wartość najmniejsza funkcji

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + x + 2$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle -2; 2 \rangle$.

PRZYKŁAD 4. Dana jest funkcja $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle 1; 3 \rangle$.

PRZYKŁAD 5. Dana jest funkcja $f(x) = 4x^2 + 2x + 1$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle -1; 1 \rangle$.

PRZYKŁAD 6. Dana jest funkcja $f(x) = -4x^2 - x + 4$. Wyznacz wartość najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $x \in \langle -2; 1 \rangle$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.11.1. Dana jest funkcja $f(x)=2x^2-3$. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale $x\in\langle -1;2\rangle$.

4.11.2. Dana jest funkcja $f(x)=-2x^2+6x-1$. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w przedziale $x\in\langle -3;1\rangle$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. ☑ T.4.11

4.11.3. Zbiór wartości funkcji $y=x^2-4$ w przedziale $x\in\langle -1;2\rangle$ to przedział:

A. $y\in\langle -4;\infty)$

B. $y\in(-\infty;-4\rangle$

C. $y\in\langle -4;0\rangle$

D. $y\in\langle -3;0\rangle$

4.11.4. Największa wartość funkcji $y=-x^2+2x+3$ w przedziale $x\in\langle -2;0\rangle$ wynosi:

A. 1

B. -5

C. 0

D. 3

4.11.5. Najmniejszą wartością funkcji $f(x)=x^2+8x-3$ określonej na zbiorze $\langle -5;-3\rangle$ jest:

A. 19

B. -19

C. -36

D. -18

4.11.6. Największą wartością funkcji $y=-x^2+4x$ w przedziale $x\in\langle 0;c\rangle$ jest liczba 4. Wynika z tego, że c nie może być liczbą:

A. 3

B. 1

C. 2

D. $2\frac{1}{2}$

4.11.7. Najmniejsza wartość funkcji $f(x)=x^2-3x+5$ określonej na zbiorze $\langle -1;3\rangle$ istnieje dla argumentu równego:

A. -1

B. 3

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{3}{2}$

4.12 ▶ Wykorzystanie własności funkcji liniowej i kwadratowej w kontekście praktycznym

PRZYKŁAD 1

P.4.12.1

Iga i Ewa pokonały rowerami trasę 60 km. Iga wyruszyła pół godziny wcześniej. Na wykresie przedstawiono zależność drogi pokonanej przez każdą z dziewcząt od czasu jazdy. Na podstawie wykresu określ, czy zdania są prawdziwe, i uzasadnij swoją odpowiedź.

a. Każda z dziewcząt pokonała drogę w tym samym czasie.

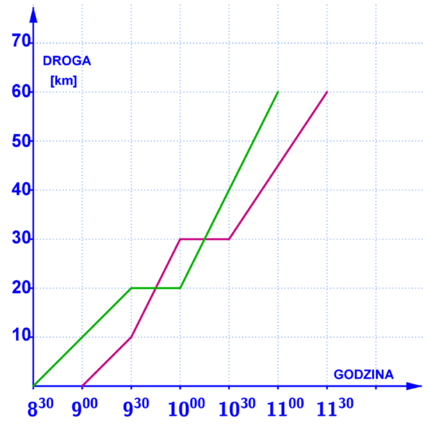
b. Iga pokonała trasę ze średnią prędkością większą niż Ewa.

c. O godzinie 10.00 bliżej celu była Ewa.

d. Iga odpoczywała na trasie dłużej niż Ewa.

e. W ostatniej godzinie jazdy średnia prędkość Igi była większa niż Ewy.

f. Iga dwa razy wyprzedzała Ewę.



Odp. a. — Prawda. Każda z dziewcząt pokonała trasę w 2,5 h. Ewa wyruszyła o 9.00 i dotarła na miejsce o 11.30, a Iga wyruszyła o 8.30 i dotarła na miejsce o 11.00.

Odp. b. — Fałsz. Średnia prędkość obu dziewcząt jest taka sama, ponieważ obie pokonały taką samą trasę w tym samym czasie.

Odp. c. — Prawda. Ewa była o 10 km bliżej niż Iga, ponieważ Ewa pokonała już 30 km, a Iga 20 km.

Odp. d. — Fałsz. Postój każdej z dziewcząt trwał 30 minut. Iga odpoczywała od 9.30 do 10.00, a Ewa od 10.00 do 10.30.

Odp. e. — Prawda. W ciągu ostatniej godziny średnia prędkość Igi to $40\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Ewy $30\frac{\text{km}}{\text{h}}$, ponieważ $v_{Iga} = \frac{40\text{ km}}{1\text{h}} = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_{Ewa} = \frac{30\text{ km}}{1\text{h}} = 30\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Odp. f. — Fałsz. Iga wyprzedzała jeden raz Ewę (o godzinie 10.15), a Ewa jeden raz Igę (o godzinie 9.45).

PRZYKŁAD 2

P.4.12.2

Szybkość zawodnika biorącego udział w biegu wyrażoną w metrach na sekundę można opisać wzorem $v(t) = -0,02t^2 + 0,8t$, gdzie t oznacza czas liczony od rozpoczęcia biegu podany w sekundach. Naszkicuj wykres zależności prędkości od czasu i określ:

a. jaką maksymalną szybkość osiągnął ten zawodnik i w której sekundzie?

b. w jakim czasie zawodnik pokonał dystans?

c. czy zawodnik miał większą szybkość w 5 sekundzie czy 28 sekundzie?

d. jaka była szybkość zawodnika w 10 sekundzie?

1° Szkicujemy wykres funkcji $v(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}8t$.

2° Obliczamy wyróżnik ze wzoru: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = 0{,}8^2 - 4\cdot(-0{,}02)\cdot 0 = 0{,}64$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

3° Obliczamy miejsca zerowe ze wzoru:
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$t_1 = \frac{-0{,}8 - 0{,}8}{2\cdot(-0{,}02)} = \frac{-1{,}6}{-0{,}04} = 40$$
$$t_2 = \frac{-0{,}8 + 0{,}8}{2\cdot(-0{,}02)} = 0$$

4° Obliczamy współrzędne wierzchołka ze wzorów:
$p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}$.

$$p = \frac{-0{,}8}{2\cdot(-0{,}02)} = \frac{-0{,}8}{-0{,}04} = 20$$
$$q = \frac{-0{,}64}{4\cdot(-0{,}02)} = \frac{-0{,}64}{-0{,}08} = 8$$

5° Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.

6° Na podstawie wykresu odpowiadamy na postawione w zadaniu pytania:

Odp. a. — Zawodnik osiągnął maksymalną szybkość równą $8\,\frac{m}{s}$ w 20 sekundzie ($v_{max}(20) = 8\,\frac{m}{s}$).

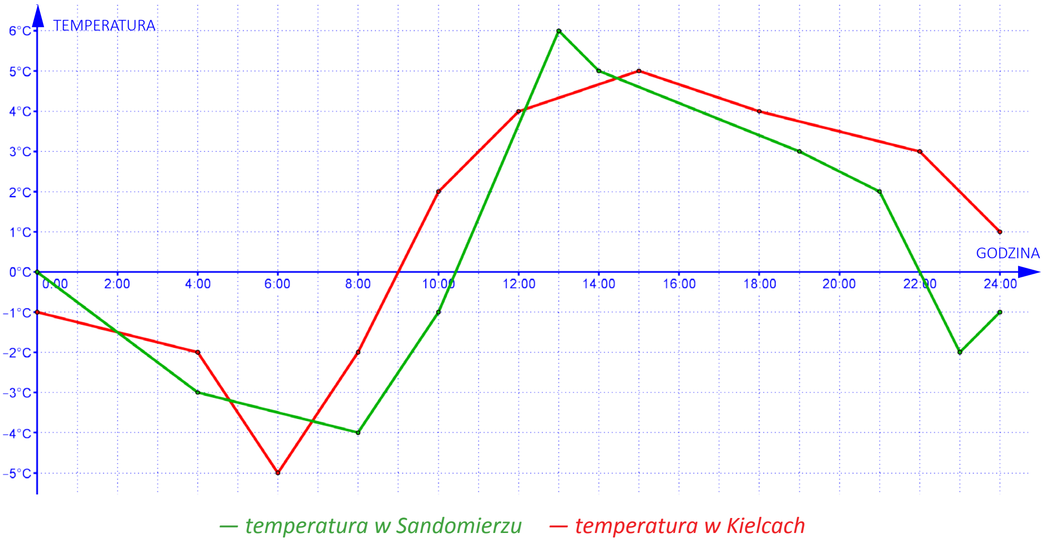
Odp. b. — Zawodnik pokonał dystans w ciągu 40 sekund.

Odp. c. — Szybkość zawodnika w 5 sekundzie jest mniejsza niż w 28 sekundzie.

Odp. d. — W 10 sekundzie zawodnik osiągnął szybkość $6\,\frac{m}{s}$ ($v(10) = 6\,\frac{m}{s}$).

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.12.1. Na poniższym wykresie przedstawione są zmiany temperatur odnotowane w tej samej dobie w Kielcach i Sandomierzu.



a. Jaką temperaturę odnotowano w obu miastach o godzinie 22.00?

b. Ile razy temperatura w obu miastach o tej samej godzinie była identyczna?

c. Jaka była najniższa temperatura w Kielcach, a jaka w Sandomierzu?

d. Jaka była największa różnica temperatur w obu miastach o tej samej godzinie?

e. O której godzinie w Kielcach odnotowano $-2^{\circ}C$?

f. W jakich godzinach temperatura w Kielcach wynosiła co najmniej $2^{\circ}C$?

4.12.2. Koszt wyprodukowania jednej książki wynosi 12 zł. Przy cenie 20 zł za jedną książkę wielkość sprzedaży wynosi 3000 egzemplarzy rocznie. Każde podniesienie ceny o 1 zł powoduje zmniejszenie sprzedaży rocznej o 100 egzemplarzy. Wiedząc, że x oznacza cenę sprzedaży w zł za jeden egzemplarz, podaj:

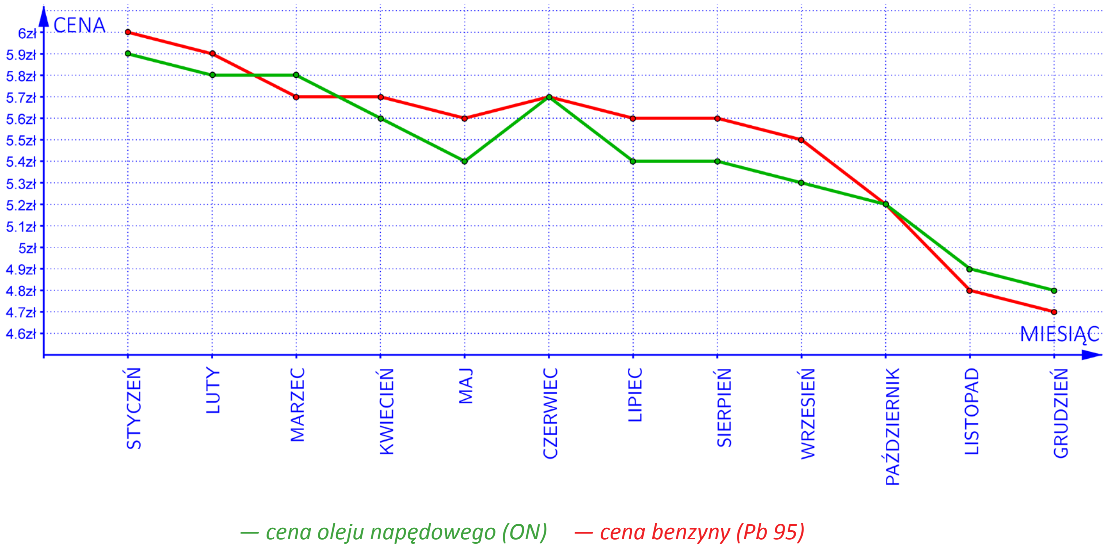
a. wzór funkcji opisujący wielkość rocznej sprzedaży w zależności od ceny x,

b. wzór funkcji opisującej wielkość rocznego przychodu ze sprzedaży książek w zależności od ceny x,

c. wzór funkcji opisującej zysk ze sprzedaży książek w ciągu roku w zależności od ceny x,

d. przy jakiej cenie x wartość zysku z rocznej sprzedaży książek będzie największa.

4.12.3. Na wykresie przedstawiono zmiany roczne średnich cen benzyny (Pb 95) oraz oleju napędowego (ON) w jednym z województw. Na podstawie danych przedstawionych na wykresie określ, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe.



a. Cena Pb 95 spadła od stycznia do marca o 5%.

b. Cena ON w sierpniu była niższa od Pb 95 o 5%.

c. W jednym miesiącu cena ON była wyższa od ceny Pb 95 o 20 groszy.

d. W ciągu roku cena Pb 95 spadła o 20%.

e. W ciągu roku cena ON spadła o 20%.

f. Między lipcem a wrześniem różnica między cenami Pb 95 i ON była taka sama.

4.12.4. Miesięczny abonament telefoniczny wynosi 35 zł. Każda minuta rozmowy w tym abonamencie kosztuje 20 groszy, a minuty nie są wliczane w abonament. Jeśli x oznacza liczbę minut rozmów w ciągu miesiąca, to koszt k opłat miesięcznych w złotych można wyrazić wzorem:

A. $k = 0{,}2x - 35$

B. $k = 0{,}2x + 35$

C. $k = -0{,}2x + 35$

D. $k = 20x + 35$

4.12.5. Prędkość kolejki metra między stacją A i stacją B można wyrazić wzorem $v(t) = -t^2 + 4t$, gdzie t oznacza czas przejazdu w minutach. Maksymalną prędkość kolejka osiągnie po:

A. 1 minucie,

B. 2 minutach,

C. 3 minutach,

D. 4 minutach.

4.12.6. W zbiorniku samochodu mieści się 60 litrów paliwa. Samochód spala 8,5 litra paliwa na każde 100 kilometrów. Jeżeli d oznacza ilość paliwa w zbiorniku, a liczbę przejechanych kilometrów oznaczymy jako s, to prawdziwa jest zależność:

A. $d = 0{,}085s - 60$

B. $d = -0{,}085s + 60$

C. $d = 8{,}5s + 60$

D. $d = -0{,}85s + 60$

4.12.7. Firma produkująca kalkulatory oszacowała roczną wielkość sprzedaży s (w sztukach) w zależności od ceny x (w złotych) za sztukę. Zależność tę przedstawiono w tabeli:

x	50	60	70	80	100
s	8000	7600	7200	6800	6000

Zależność wielkości s od ceny x można przedstawić wzorem:

A. $s = 50x + 8000$

B. $s = -50x + 8000$

C. $s = -40x + 10\,000$

D. $s = 8000x - 50$

4.12.8. Właściciel klubu muzycznego zauważył, że przy cenie 20 zł za bilet na koncert przychodzi średnio 100 osób. Każde podniesienie ceny biletu o dwa złote powoduje, że liczba gości zmniejsza się o 10 osób. Przychód p ze sprzedaży biletów w tym klubie przy cenie x można wyrazić wzorem:

A. $p = -5x^2 + 100x$

B. $p = -100x^2 + 5x$

C. $p = -5x^2 + 200x$

D. $p = -x^2 + 200x - 5$

4.13 ▶ Wykres i własności funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$. Wielkości odwrotnie proporcjonalne

DEFINICJA

Funkcja dana wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$, gdzie a jest parametrem i $a \neq 0$, jest przykładem funkcji wymiernej. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczby zero, co zapisujemy jako $D=\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

▶ Szkicowanie wykresów funkcji $f(x)=\frac{a}{x}, a \neq 0$

PRZYKŁAD 1

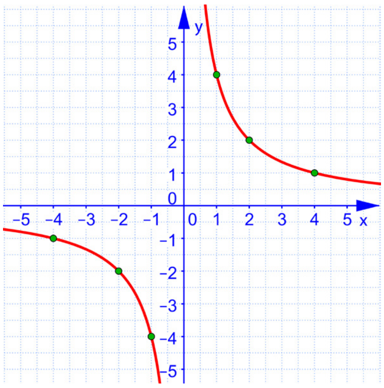
P.4.13.1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\frac{4}{x}$.

1° Uzupełniamy tabelkę.

x	-4	-2	-1	1	2	4
$y=\frac{4}{x}$	-1	-2	-4	4	2	1

2° Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Naszkicuj wykres funkcji:

PRZYKŁAD 2. $f(x)=-\frac{2}{x}$

PRZYKŁAD 3. $f(x)=\frac{3}{x}$

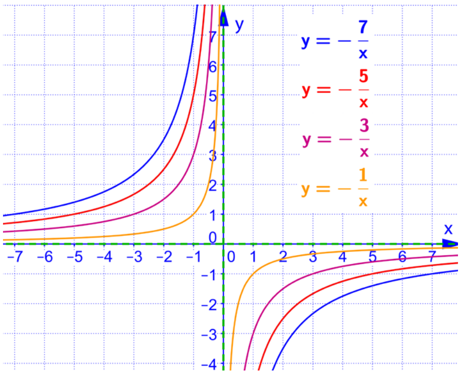
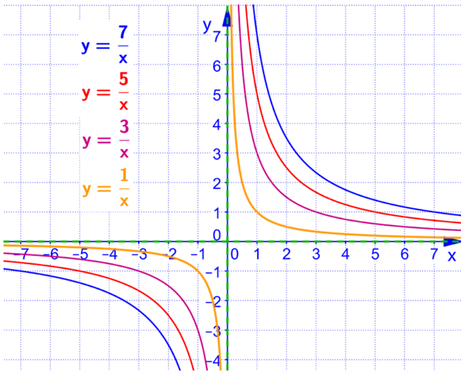
PRZYKŁAD 4. $f(x)=-\frac{1}{x}$

▶ Własności funkcji $f(x)=\frac{a}{x}, a \neq 0$

PRZYKŁAD 1

P.4.13.2

Na podstawie wykresów poszczególnych funkcji określ własności funkcji $y=\frac{a}{x}, a \neq 0$.

Wykres		
Współczynnik	$a < 0$	$a > 0$
Położenie	Wykres funkcji znajduje się w drugiej i czwartej ćwiartce.	Wykres funkcji znajduje się w pierwszej i trzeciej ćwiartce.
Dziedzina	$D = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$	
Zbiór wartości	$ZW = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$	
Przedziały monotoniczności	Rosnąca w przedziałach: $(-\infty; 0), (0; \infty)$	Malejąca w przedziałach: $(-\infty; 0), (0; \infty)$
Znak funkcji	Dodatnia dla $x < 0$ Ujemna dla $x > 0$	Dodatnia dla $x > 0$ Ujemna dla $x < 0$
Przecięcie z osią *OY*	Brak	
Miejsca zerowe	Brak	
Wartość największa	Nie istnieje	
Wartość najmniejsza	Nie istnieje	
Asymptota pionowa	oś *OY*	
Asymptota pozioma	oś *OX*	

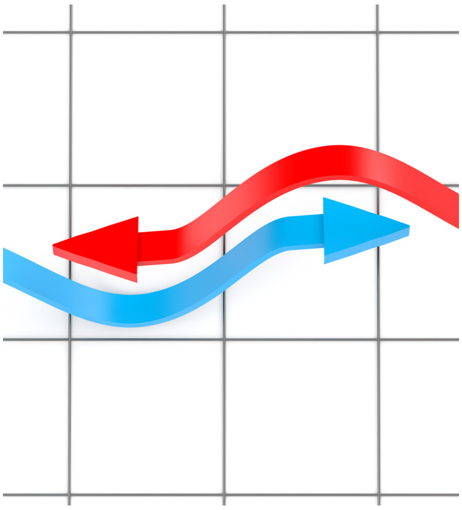
► Wielkości odwrotnie proporcjonalne

DEFINICJA

Dwie wielkości x, y różne od zera nazwiemy odwrotnie proporcjonalnymi, gdy istnieje taka liczba $a \neq 0$, że $y = \frac{a}{x}$. Można również zauważyć, że iloczyn $x \cdot y = a$ jest stały.

Pojęcie proporcjonalności odwrotnej ma zastosowanie w opisie różnych zależności i zjawisk znanych z życia codziennego, z przyrody, fizyki, matematyki itp.

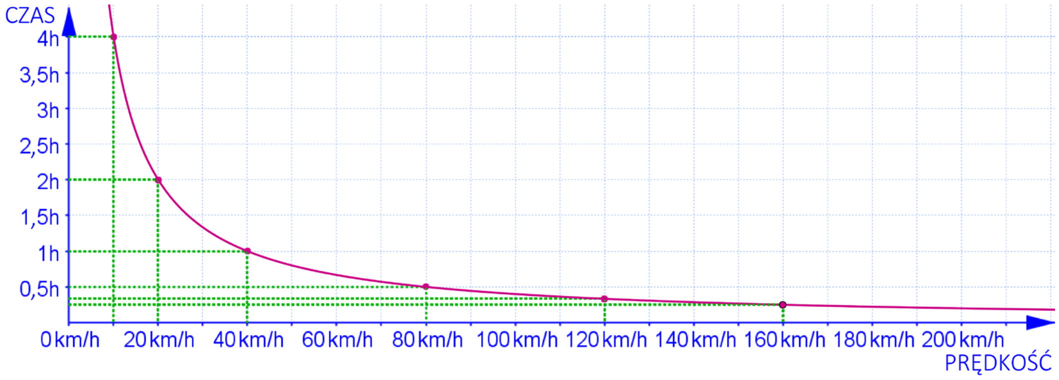
Wykresem proporcjonalności odwrotnej może być hiperbola, fragment hiperboli albo punkty leżące na hiperboli.



WPROWADZENIE

P.4.13.3

Odległość z Mińska Mazowieckiego do Warszawy wynosi 40 km. Samochód porusza się z prędkością v w czasie t. Korzystając z wykresu, określ, jak zmienia się wartość czasu, w jakim samochód pokona tę trasę, w zależności od prędkości.



WARIANT 1°: $4\text{ h}\cdot 10\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WARIANT 2°: $2\text{ h}\cdot 20\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WARIANT 3°: $1\text{ h}\cdot 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WARIANT 4°: $0{,}5\text{ h}\cdot 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WARIANT 5°: $\frac{1}{3}\text{ h}\cdot 120\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WARIANT 6°: $\frac{1}{4}\text{ h}\cdot 160\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\text{ km}$

WNIOSEK:

Czas, w jakim samochód pokona trasę, jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości, z jaką jedzie samochód.

PRZYKŁAD 1

P.4.13.4

W pewnej firmie 24 pracowników wykonuje 8000 pewnych komponentów w 4 dni. Oblicz, ilu pracowników potrzeba, aby wykonać tyle samo komponentów w 3 dni.

Korzystamy z proporcji odwrotnej:

4 dni → 24 pracowników
3 dni ← x pracowników

$$3x = 4\cdot 24$$
$$3x = 96 \qquad |:3$$
$$x = 32$$

Do wykonania tej samej liczby komponentów potrzeba 32 pracowników.

PRZYKŁAD 2

P.4.13.4

Pociąg, który jedzie ze średnią prędkością 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, pokonuje pewną trasę w 4,5 godziny. Oblicz, jaka musi być średnia prędkość pociągu, aby mógł pokonać tę samą trasę w 3 godziny i 20 minut.

Korzystamy z proporcji odwrotnej:

$80\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \rightarrow 4{,}5\text{ h}$

$x\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \leftarrow 3\frac{1}{3}\text{ h}$

$$3\frac{1}{3}x = 80\cdot 4{,}5$$
$$3\frac{1}{3}x = 360 \qquad |:3\frac{1}{3}$$
$$x = 36\cancel{0}\cdot\frac{3}{1\cancel{0}} = 108\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Prędkość pociągu musi wzrosnąć do 108 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.13.1. Na obóz traperski przygotowano zapasy żywnościowe, które wystarczą na 10 dni dla 24 osób. Okazało się jednak, że na obóz pojedzie 30 osób.

a. Na ile dni wystarczą przygotowane zapasy dla tej grupy po zmianie liczby osób?

b. Ile osób musiałaby liczyć grupa, żeby zapasy wystarczyły na 12 dni?

4.13.2. Samolot trasę z Warszawy do Paryża pokonuje w 2 godziny i 24 minuty ze średnią prędkością $600\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

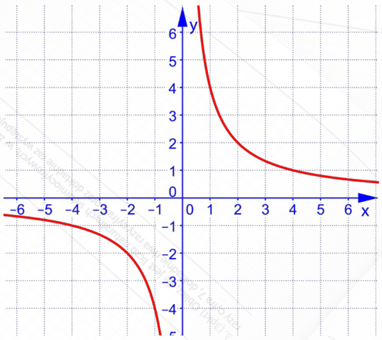
a. Z jaką średnią prędkością musiałby lecieć samolot na tej trasie, aby czas przelotu wynosił 2 godziny?

b. Ile czasu trwałby lot, gdyby samolot poruszał się na tej trasie z prędkością $960\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

☑ **T.4.13**

4.13.3. Na wykresie przedstawiono funkcję o wzorze:



A. $y=\frac{2}{x}$ **B.** $y=-\frac{4}{x}$ **C.** $y=\frac{4}{x}$ **D.** $y=\frac{1}{x}$

4.13.4. O funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ wiadomo, że przechodzi przez punkt $(-2;8)$. Wynika z tego, że:

A. $a=4$ **B.** $a=-4$ **C.** $a=32$ **D.** $a=-16$

4.13.5. Funkcja $y=-\frac{3}{x}$ przechodzi przez ćwiartki:

A. I, III **B.** II, III **C.** III, IV **D.** II, IV

4.13.6. Funkcję $g(x)$ otrzymano po przesunięciu o 3 jednostki w lewo funkcji $f(x)=\frac{2}{x}$. Prawdą jest, że:

A. $g(x)=\frac{2}{x-3}$ **C.** $g(x)=\frac{2}{x+3}$

B. $g(x)=\frac{2}{x}+3$ **D.** $g(x)=\frac{2}{x}-3$

4.13.7. W przedziale $x\in(0;\infty)$ funkcją rosnącą nie jest funkcja:

A. $y=-\frac{2}{x}$ **B.** $xy=-5$ **C.** $y=\frac{12}{x}$ **D.** $y+\frac{4}{x}=0$

4.14 ▶ Funkcja wykładnicza i jej własności

DEFINICJA

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią ($a > 0$ i $a \neq 1$), a litera x oznacza argument. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

Wykresem funkcji jest krzywa wykładnicza.

PRZYKŁAD 1

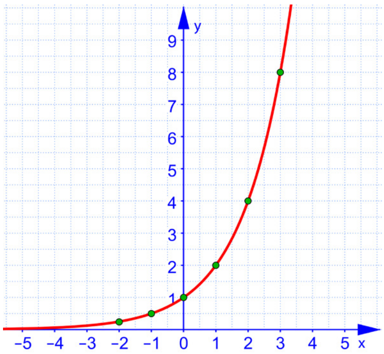
P.4.14.1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^x$.

1° Uzupełniamy tabelkę.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

2° Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych i sporządzamy wykres.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Naszkicuj wykres funkcji:

PRZYKŁAD 2. $f(x) = 3^x$

PRZYKŁAD 3. $f(x) = 4^x$

PRZYKŁAD 4. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

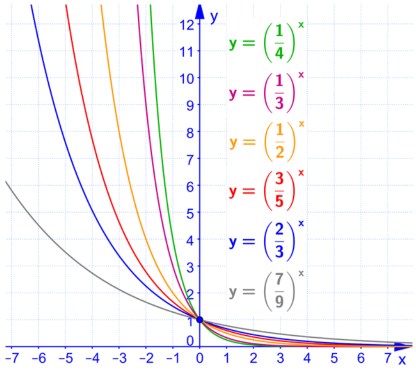
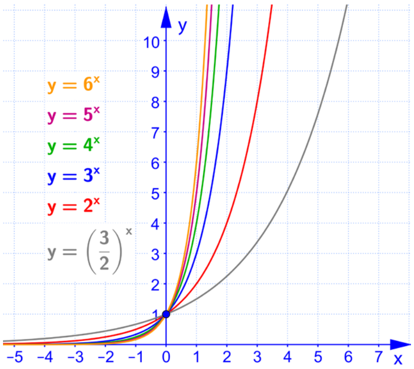
PRZYKŁAD 5. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

PRZYKŁAD 6. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

PRZYKŁAD 2

P.4.14.2

Na podstawie poszczególnych wykresów określ własności funkcji $y = a^x$ w zależności od parametru a.

Wykres		
Współczynnik	$y = a^x, a \in (0;1)$	$y = a^x, a \in (1;\infty)$

Dziedzina	$D=\mathbf{R}$	
Zbiór wartości	$ZW=(0;\infty)$	
Przedziały monotoniczności	Funkcja jest malejąca.	Funkcja jest rosnąca.
Przecięcie z osią *OY*	Każda krzywa wykładnicza przecina oś OY w punkcie $(0;1)$, ponieważ $f(0)=a^0=1$ dla $a>0$.	
Miejsca zerowe	Brak	
Asymptota pozioma	oś OX	

ZADANIA UTRWALAJĄCE

4.14.1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=2^{x-2}-2$. Określ:

- miejsce zerowe tej funkcji (o ile istnieje),
- zbiór wartości funkcji,
- przedział, w którym funkcja jest ujemna,
- czy punkty $A(5;16)$ i $B(-1;3)$ należą do wykresu tej funkcji,
- punkt przecięcia osi OY.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.4.14

4.14.2. Funkcja wykładnicza przechodząca przez punkt $(2;16)$ ma postać:

A. $f(x)=-4^x$ **B.** $f(x)=16^x$ **C.** $f(x)=8^x$ **D.** $f(x)=4^x$

4.14.3. Funkcje $f(x)=3^x$ i $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ są:

A. symetryczne względem osi OX,

B. symetryczne względem punktu $(0,0)$,

C. jednocześnie rosnące,

D. symetryczne względem osi OY.

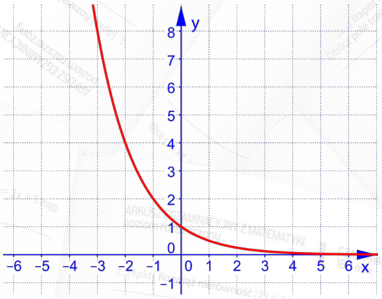
4.14.4. Na wykresie obok przedstawiono funkcję $f(x)=a^x$. Prawdą jest, że do wykresu tej funkcji należy punkt:

A. $(-3;24)$

B. $(-4;-32)$

C. $\left(2;\frac{1}{4}\right)$

D. $\left(4;\frac{1}{6}\right)$



4.14.5. Jedno miejsce zerowe ma funkcja:

A. $f(x)=5^{x-1}$ **B.** $f(x)=5^{x+1}$ **C.** $f(x)=5^x-1$ **D.** $f(x)=5^x+1$

4.14.6. Do wykresu funkcji wykładniczej należy punkt $(2;3)$. Wynika z tego, że wzór tej funkcji może mieć postać:

A. $y=-\sqrt{3}^x$ **B.** $y=\sqrt[3]{2}^x$ **C.** $y=\sqrt{3}^x$ **D.** $y=-\sqrt[3]{2}^x$

4.15 ▶ Wykorzystanie funkcji wykładniczej w kontekście praktycznym

PRZYKŁAD 1

P.4.15.1

Pan Grzegorz zamierza ulokować oszczędności w funduszu inwestycyjnym, który będzie przynosił mu 5% zysku rocznie. Zyski co roku będą kapitalizowane. Na wykresie przedstawiono wysokość kapitału w zależności od czasu inwestycji.

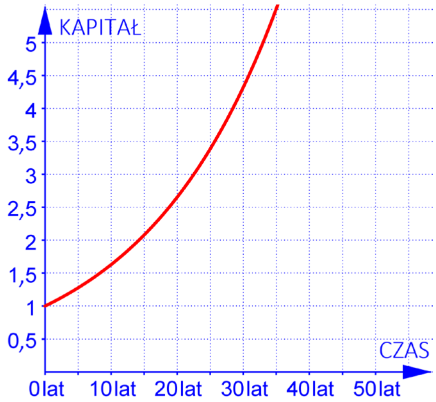
a. Zapisz wzór funkcji przedstawiającej zmianę kapitału K w czasie t lat.

b. Oblicz kwotę, jaka zgromadzi się w funduszu po 10 latach od zainwestowania 50 000 złotych.

c. Oblicz, po ilu latach zainwestowany kapitał się podwoi.

d. Jaką kwotę musi zainwestować pan Grzegorz, aby po 3 latach odebrać 92 610 zł?

e. Oblicz, jaki zysk można by otrzymać po 5 latach, inwestując 40 000 zł, gdyby oprocentowanie wzrosło dwukrotnie.



Odp. a. — 1° Po pierwszym roku inwestor otrzymuje 100% kapitału oraz 5% zysku z tej kwoty, czyli: $100\% + 5\% = 105\% = 1{,}05$.

2° Po drugim roku inwestor otrzyma 105% z nowej kwoty, czyli: $105\% \cdot 105\% = (1{,}05)^2$

3° Po trzecim roku inwestor otrzyma 105% z kwoty uzyskanej po drugim roku $(105\% \cdot 105\%)$, czyli: $105\% \cdot 105\% \cdot 105\% = (1{,}05)^3$. W kolejnych latach analogicznie.

4° Zatem po t latach kapitał wyniesie $1{,}5^t$, co możemy zapisać jako funkcję $K(t) = 1{,}05^t$.

Odp. b. — Szukana wartość będzie iloczynem kwoty zainwestowanej (K_0 = 50 000 zł) oraz wzoru wyrażającego zmianę kapitału po t latach: $K(t) = K_0 \cdot 1{,}05^t$.

Zatem biorąc pod uwagę 10 lat, otrzymujemy:
$K(10) = 50\,000 \cdot 1{,}05^{10} \approx 50\,000 \cdot 1{,}628894627 = 81\,444{,}73$ zł.

Odp. c. — Aby obliczyć, po ilu latach kapitał się podwoi, posłużymy się następującą nierównością: $K(t) \geq 2$, czyli $1{,}05^t \geq 2$.

Szukamy zatem najmniejszej wartości t, dla której spełniona jest ta nierówność. W tym celu możemy potęgować liczbę 1,05, aż otrzymamy liczbę powyżej 2, lub odczytać tę wartość z wykresu. Korzystając z wykresu, można zauważyć, że najmniejszy argument, dla którego funkcja osiąga wartość większą od 2, to 14 lub 15. Sprawdzamy zatem, czy nierówność będzie spełniona dla 14 czy dla 15 lat:

$1{,}05^{14} = 1{,}97993159938 < 2$

$1{,}05^{15} = 2{,}07892817934 \geq 2$

Wynika z tego, że zainwestowany kapitał podwoi się po 15 latach.

Odp. d. — Korzystając ze wzoru wyznaczonego w podpunkcie **b**, układamy równanie, w którym kapitał początkowy (K_0) jest niewiadomą, i rozwiązujemy je:

$K_0 \cdot 1{,}05^3 = 92\,610$

$1{,}157625\,K_0 = 92\,610 \quad |: 1{,}157625$

$K_0 = 80\,000$ zł

Pan Grzegorz powinien zainwestować 80 000 zł.

Odp. e. — Kwota kapitału po jednym roku wyniosłaby 110% wartości początkowej czyli:
$100\% + 10\% = 110\% = 1{,}1$.

Zatem po t latach otrzymujemy: $K(t) = K_0 \cdot 1{,}1^t$.

Obliczamy wartość kapitału po 5 latach, podstawiając dane do wzoru:
$K(5) = 40\,000 \cdot 1{,}1^5 = 40\,000 \cdot 1{,}61051 = 64\,420{,}40$ zł.

Aby obliczyć zysk, należy od wartości kapitału, który został zgromadzony po 5 latach, odjąć kapitał początkowy, czyli:
$64\,420{,}40$ zł $- 40\,000$ zł $= 24\,420{,}40$ zł.
Zysk wyniósłby 24 420,40 zł.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

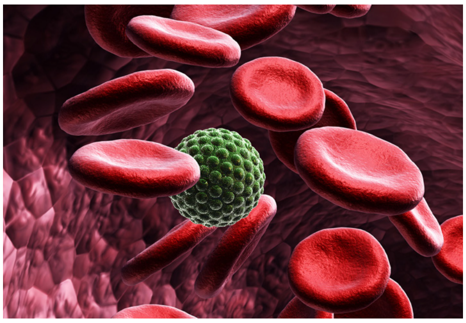
4.15.1. W wyniku zmian klimatycznych pewien gatunek zwierząt jest zagrożony wyginięciem. Biolodzy oszacowali, że po t latach gatunek ten będzie liczył około s sztuk, gdzie $s(t) = 500 \cdot 0{,}9^t$.

a. Oblicz, ile zwierząt tego gatunku żyje obecnie.

b. Oblicz, po ilu pełnych latach liczba zwierząt tego gatunku zmiejszy się o połowę.

c. Oblicz, ile w przybliżeniu sztuk zwierząt tego gatunku będzie żyło po upływie 6 lat.

4.15.2. W ramach eksperymentu udało się wyhodować 10 sztuk pewnej bakterii, której liczba podwaja się w ciągu doby. Liczbę bakterii oznaczmy jako N, a liczbę dób oznaczmy jako t.



a. Zapisz wzór na liczbę bakterii N w zależności od czasu t.

b. Oblicz, ile bakterii będzie po 12 dniach.

c. Oblicz, po jakim czasie liczba bakterii wyniesie 5000.

4.15.3. W jednym z parków krajobrazowych Skandynawii w 2002 roku odnotowano 300 sztuk reniferów. Wprowadzając specjalne udogodnienia, zadbano o to, aby liczba reniferów żyjących w tym parku zwiększyła się w jak największym stopniu. Liczba reniferów w ciągu kolejnych lat zwiększała się w przybliżeniu o 30% rocznie.

a. Oblicz, ile reniferów w przybliżeniu żyło w parku po 6 latach, w 2008 roku.

b. Oblicz, w którym roku przybliżona liczba reniferów zwiększy się dziesięciokrotnie w stosunku do roku 2002.

c. Zapisz wzór wyrażający przybliżoną liczbę reniferów w sztukach (R) w zależności od czasu w latach t.

4.15.4. Pewna cząstka radioaktywna ma masę 100 g, jej rozpad powoduje zmniejszenie masy o 2% każdego roku. Wzór wyrażający masę m tej cząstki po upływie t lat ma postać:

A. $m = 2^t \cdot 100$ g

B. $m = 102^t \cdot 100$ g

C. $m = 1{,}02^t \cdot 100$ g

D. $m = 0{,}98^t \cdot 100$ g

4.15.5. Zysk firmy w ciągu pierwszych pięciu kolejnych lat jej istnienia wzrasta o 20% rocznie. Firma ta podwoiła swoje zyski:

A. po czwartym roku istnienia,

B. po piątym roku istnienia,

C. w czasie czwartego roku istnienia,

D. w czasie piątego roku istnienia.

4.15.6. Wartość kapitału K_0 zainwestowanego w lokatę terminową po t latach można wyrazić wzorem $K = K_0 \cdot 1{,}04^t$. Wartość kapitału podwoi się po:

A. 10 latach,

B. 13 latach,

C. 18 latach,

D. 25 latach.

4.15.7. Przyrost naturalny pewnego afrykańskiego plemienia można wyrazić wzorem funkcji $f(t) = 1{,}015^t$, gdzie t oznacza czas w latach. Jeśli plemię liczy obecnie 200 osób, to za pięć lat będzie liczyć około:

A. 252 osoby,

B. 215 osób,

C. 207 osób,

D. 234 osoby.

4.15.8. Zmianę wielkości kapitału na lokacie terminowej można wyrazić wzorem $K(t) = \left(\frac{17}{16}\right)^t$, gdzie t oznacza czas w latach. Wynika, z tego że oprocentowanie roczne tej lokaty wynosi:

A. 6%

B. 6,25%

C. 106,25%

D. 0,6%

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

4.1.1 PRZYKŁAD 1. tak PRZYKŁAD 3. tak PRZYKŁAD 5. nie PRZYKŁAD 7. tak

PRZYKŁAD 2. nie PRZYKŁAD 4. nie PRZYKŁAD 6. tak PRZYKŁAD 8. nie

4.1.2 PRZYKŁAD 1. tak PRZYKŁAD 3. tak PRZYKŁAD 5. nie PRZYKŁAD 7. tak

PRZYKŁAD 2. nie PRZYKŁAD 4. nie PRZYKŁAD 6. tak PRZYKŁAD 8. nie

4.1.3.

Opis słowny przyporządkowania	Przyporządkowanie	
	jest funkcją	nie jest funkcją
Każdej liczbie pierwszej przyporządkowany jest jej dzielnik różny od 1.	✓	
Każdemu wielokątowi wypukłemu przyporządkowana jest liczba jego przekątnych.	✓	
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowany jest jej kwadrat.	✓	
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowana jest liczba o 10 większa.	✓	
Każdej rzece przyporządkowana jest jej długość.	✓	
Każdemu uczniowi w klasie przyporządkowany jest numer w dzienniku.	✓	
Każdej osobie przyporządkowana jest data urodzenia.	✓	
Każdej mamie przyporządkowane jest jej dziecko.		✓
Każdemu uczniowi przyporządkowany jest język obcy, którego się uczy.		✓
Każdemu pracownikowi firmy przyporządkowany jest jego adres e-mail.		✓

4.1.4. **a.** nie jest funkcją **b.** jest funkcją **c.** jest funkcją **d.** jest funkcją

P.4.1.2 PRZYKŁAD 1. $D = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$ PRZYKŁAD 3. $D = \langle -4; 1) \cup (1; \infty)$

PRZYKŁAD 2. $D = \langle -3; \infty)$

4.1.5.

a. $D = \boldsymbol{R}$

b. $D = \boldsymbol{R}$

c. $D = (-\infty; 5) \cup (5; \infty)$

d. $D = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$

e. $D = \langle 3; \infty)$

f. $D = \left\langle -1\frac{1}{3}; \infty\right)$

g. $D = \langle -8; 1) \cup (1; \infty)$

h. $D = (-\infty; 2) \cup (2; 4\rangle$

i. $D = (-\infty; 1) \cup (1; 5) \cup (5; \infty)$

4.1.6. B **4.1.7.** A **4.1.8.** B **4.1.9.** C **4.1.10.** C

4.1.11. D **4.1.12.** C **4.1.13.** A **4.1.14.** D **4.1.15.** C

P.4.2.1 PRZYKŁAD 2. $y = 3$ PRZYKŁAD 4. $y = 5$ PRZYKŁAD 6. $y = 4$

PRZYKŁAD 3. $y = 3$ PRZYKŁAD 5. $y = 2$

P.4.2.2 PRZYKŁAD 2. $x = 2$ PRZYKŁAD 4. $x = -4$ PRZYKŁAD 6. $x = 4$

PRZYKŁAD 3. $x = -1$ PRZYKŁAD 5. $x = -1$

P.4.2.3 PRZYKŁAD 2. $f(-2)=3$ $f(-1)=0$ $f(0)=-1$ $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{5}{9}$ $f\left(\frac{3}{2}\right)=1\frac{1}{4}$

PRZYKŁAD 3. $f(-2)=-2$ $f(-1)=-\frac{1}{2}$ $f(0)=0$ $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{11}$ $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}$

PRZYKŁAD 4. $f(-2)=7$ $f(-1)=6$ $f(0)=5$ $f\left(\frac{2}{3}\right)=4\frac{1}{3}$ $f\left(\frac{3}{2}\right)=3\frac{1}{2}$

PRZYKŁAD 5. $f(-2)=-8$ $f(-1)=-1$ $f(0)=0$ $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$ $f\left(\frac{3}{2}\right)=3\frac{3}{8}$

4.2.1. **a.** $ZW=\left\{-4;-\frac{3}{2};-\frac{2}{3};-\frac{1}{4};0;\frac{1}{6}\right\}$ **c.** $ZW=\{-13;-11;-9;-7;-5;-3\}$

b. $ZW=\{-4;-6;0;6\}$ **d.** $ZW=\left\{-63\frac{5}{6};-26\frac{4}{5};-7\frac{3}{4};-\frac{2}{3};\frac{1}{2};2\right\}$

4.2.2. $f\left(-2\frac{2}{5}\right)=-8$ $f(-2)=-4$ $f(1)=\frac{1}{2}$ $f(3)=1$

4.2.3. **a.**

x	-2	-1	0	1	3
$f(x)=3x+1$	-5	-2	1	4	10

c.

x	-2	2	1	10	-3
$f(x)=\frac{x}{x+1}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{11}$	$1\frac{1}{2}$

b.

x	-5	-3	2	3	4
$f(x)=x^3$	-125	-27	8	27	64

d.

x	-2	-1	0	5	7
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	32	128

4.2.4.

a. $f(-1)=3$ $f(0)=2$ $f(1)=3$ $f(2)=2$

b. $f(-1)=1$ $f(0)=4$ $f(1)=7$ $f(2)=6$

c. $f(-1)=2$ $f(0)=-2$ $f(1)=-2$ $f(2)=-2$

d. $f(-1)=-1$ $f(0)=3$ $f(1)=7$ $f(2)=-1$

e. $f(-1)=4$ $f(0)=2$ $f(1)=-2$ $f(2)=0$

f. $f(-1)=-1$ $f(0)=5$ $f(1)=7$ $f(2)=5$

g. $f(-1)=7$ $f(0)=5$ $f(1)=5$ $f(2)=1$

h. $f(-1)=-2$ $f(0)=1$ $f(1)=2$ $f(2)=3$

4.2.5. C **4.2.6.** B **4.2.7.** C **4.2.8.** B **4.2.9.** C

4.2.10. C **4.2.11.** B **4.2.12.** D **4.2.13.** C **4.2.14.** A

4.2.15. $D=(-\infty;-1)\cup\left(-1;\frac{2}{3}\right\rangle$ **4.2.16.** $x=4\frac{2}{3}$

4.2.17. $a=-20$ **4.2.18.** $D=\langle 0;1)\cup(1;2)\cup(2;\infty)$

P.4.3.1 PRZYKŁAD 2.

dziedzina:	zbiór wartości:	f malejąca:	f rosnąca:
$D=(-3;7)$	$y\in\langle -1;7)$	$x\in(-3;1\rangle$	$x\in\langle 1;7)$
miejsca zerowe:	f dodatnia:	f ujemna:	wartość min/max:
$x_1=0$, $x_2=2$	$x\in(-3;0)\cup(2;7)$	$x\in(0;2)$	$y_{min}=-1$, y_{max} nie istnieje

PRZYKŁAD 3.

dziedzina:	zbiór wartości:	f stała:	f rosnąca:
$D=(-5;4\rangle$	$y\in\langle -2;4\rangle$	$x\in\left(-5;-1\frac{1}{2}\right\rangle$, $x\in\langle 0;4\rangle$	$x\in\left\langle -1\frac{1}{2};0\right\rangle$

miejsca zerowe: $x_1 = -1$

f dodatnia: $x \in (-1; 4\rangle$

f ujemna: $x \in (-5; -1)$

wartość min/max: $y_{min} = -2,\ y_{max} = 4$

PRZYKŁAD 4.

dziedzina: $D = \langle -4; 4)$

zbiór wartości: $y \in \langle -3; 1\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle -4; -2\rangle$, $x \in \langle 0; 2\rangle$

f malejąca: $x \in \langle -2; 0\rangle, \langle 2; 4)$

miejsca zerowe: $x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$

f dodatnia: $x \in (-3; -1) \cup (1; 3)$

f ujemna: $x \in \langle -4; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; 4)$

wartość min/max: $y_{min} = -3$, $y_{max} = 1$

PRZYKŁAD 5.

dziedzina: $D = (-3; 0\rangle$

zbiór wartości: $y \in \langle 0; 4\rangle$

f rosnąca: $x \in (-3; -2\rangle$

f malejąca: $x \in \langle -2; 0\rangle$

miejsca zerowe: $x_1 = 0$

f dodatnia: $x \in (-3; 0)$

wartość min/max: $y_{min} = 0,\ y_{max} = 4$

PRZYKŁAD 6.

dziedzina: $D = \langle -2; 7\rangle$

zbiór wartości: $y \in \langle 0; 6\rangle$

f malejąca: $x \in \langle -2; 0\rangle$, $x \in \langle 1; 7\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle 0; 1\rangle$

f dodatnia: $x \in \langle -2; 7)$

miejsca zerowe: $x_1 = 7$

wartość min/max: $y_{min} = 0,\ y_{max} = 6$

4.3.1. **a.**

dziedzina: $D = \langle -2; 5)$

zbiór wartości: $y \in \langle -2; 6\rangle$

f malejąca: $x \in \langle -2; -1\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle -1; 3\rangle$

f stała: $x \in \langle 3; 5)$

miejsca zerowe: $x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 0$

f dodatnia: $x \in \left\langle -2; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; 5)$

f ujemna: $x \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$

b.

dziedzina: $D = (-2; 0) \cup (0; 2)$

zbiór wartości: $y \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

f rosnąca: $x \in (-2; 0)$, $x \in (0; 2)$

miejsca zerowe: f nie ma miejsc zerowych

f dodatnia: $x \in (-2; 0)$

f ujemna: $x \in (0; 2)$

c.

dziedzina: $D = (-5; 4\rangle$

zbiór wartości: $y \in \langle -2; 4\rangle$

f stała: $x \in \left(-5; -\frac{3}{2}\right\rangle$, $x \in \langle 0; 4\rangle$

f malejąca: $x \in \left\langle -\frac{3}{2}; 0\right\rangle$

miejsca zerowe: $x_1 = -\frac{1}{2}$

f dodatnia: $x \in \left(-5; -\frac{1}{2}\right)$

f ujemna: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right\rangle$

d.

dziedzina: $D = \langle -3; 2)$

zbiór wartości: $y \in (-3; 6\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle -3; -1\rangle$

f malejąca: $x \in \langle -1; 2)$

miejsca zerowe: $x_1 = -3,\ x_2 = \frac{3}{2}$

f dodatnia: $x \in \left(-3; \frac{3}{2}\right)$

f ujemna: $x \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

e.

dziedzina: $D = (-1; 5\rangle$

zbiór wartości: $y \in \langle -2; 6\rangle$

f malejąca: $x \in (-1; 1\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle 1; 5\rangle$

miejsca zerowe: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 2$

f dodatnia: $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; 5\rangle$

f ujemna: $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$

f. dziedzina: $D=\langle -2;5\rangle$ zbiór wartości: $y\in\langle 1;5\rangle$ f malejąca: $x\in\langle -2;-1\rangle$ f rosnąca: $x\in\langle -1;1\rangle$

f stała: $x\in\langle 1;5\rangle$ miejsca zerowe: f nie ma miejsc zerowych f dodatnia: $x\in\langle -2;5\rangle$

g. dziedzina: $D=(-1;2\rangle$ zbiór wartości: $y\in\left\langle 0;\frac{9}{2}\right\rangle$ f rosnąca: $x\in\left(-1;-\frac{1}{2}\right\rangle$, $x\in\left\langle 0;\frac{1}{2}\right\rangle$ f malejąca: $x\in\left\langle -\frac{1}{2};0\right\rangle$, $x\in\left\langle \frac{1}{2};2\right\rangle$

miejsca zerowe: $x_1=2$ f dodatnia: $x\in(-1;2)$

h. dziedzina: $D=\langle -2;2)$ zbiór wartości: $y\in\langle 0;4\rangle$ f rosnąca: $x\in\langle -2;-1\rangle$, $x\in\langle 0;1\rangle$ f malejąca: $x\in\langle -1;0\rangle$, $x\in\langle 1;2)$

miejsca zerowe: $x_1=0$ f dodatnia: $x\in\langle -2;0)\cup(0;2)$

4.3.2. $D=\langle -4;6)$ $y\in\langle -4;1\rangle$ $x_1=2$ $y_{min}=-4$

4.3.3. $D=\langle -4;7)$ $y\in(-2;4\rangle$ f rosnąca: $x\in\langle -2;3\rangle$ f malejąca: $x\in\langle -4;-2\rangle$, $x\in\langle 3;7)$

4.3.4. $D=(-5;4\rangle$ $y\in\langle -3;3\rangle$ f rosnąca: $x\in(-5;-2\rangle$, $x\in\langle 2;4\rangle$ f malejąca: $x\in\langle -2;2\rangle$

4.3.5. $D=(-\infty;6\rangle$ $y\in\langle -2;2\rangle$ $x_1=1$ f dodatnia: $x\in(1;6\rangle$

f ujemna: $x\in(-\infty;1)$

4.3.6. A **4.3.7.** B **4.3.8.** C **4.3.9.** B **4.3.10.** C

4.3.11. A **4.3.12.** C **4.3.13.** C **4.3.14.** B **4.3.15.** B

4.3.16. **a.** $D=\langle -4;4)$ **b.** $y_{max}=3$, $y_{min}=1$

4.3.17. **a.** f stała: $x\in\langle -4;-2\rangle$, $x\in\langle 2;4)$
f malejąca: $x\in\langle -2;2\rangle$
b. $y\in\langle 1;3\rangle$

4.3.18. **a.** $D=R\setminus\{2\}$ **d.** f ujemna: $x\in(0;2)$

b. $y\in R\setminus\{1\}$ **e.** f malejąca: $x\in(-\infty;2)$, $x\in(2;\infty)$

c. $x_1=0$

4.4.1. **a.** $y=f(x-4)$ **c.** $y=f(x)+5$ **e.** $y=f(x+4)$

b. $y=f(x+3)$ **d.** $y=f(x)-2$ **f.** $y=f(x)+2$

4.4.2. **a.** 4 jednostki w prawo, $y=f(x-4)$ **d.** 3 jednostki w dół, $y=f(x)-3$

b. 2 jednostki w lewo, $y=f(x+2)$ **e.** 4 jednostki w lewo, $y=f(x+4)$

c. 4 jednostki w górę, $y=f(x)+4$ **f.** 3 jednostki w górę, $y=f(x)+3$

4.4.3. **a.** $y=f(x-3)$ **c.** $y=f(x)+4$ **e.** $y=f(x-3)-2$

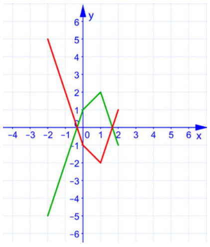
b. $y=f(x+2)$ **d.** $y=f(x)-5$ **f.** $y=f(x+1)+\frac{1}{2}$

4.4.4. **a.** $f(x)=2(x-7)$ **b.** $f(x)=(x-7)^2$ **c.** $f(x)=\frac{x-7}{x-5}$ **d.** $f(x)=\sqrt{x-7}$

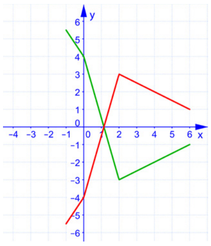
4.4.5. **a.** $f(x)=4x+4$ **b.** $f(x)=2^x+5$ **c.** $f(x)=\frac{3}{x-1}+5$ **d.** $f(x)=2\sqrt{x}+5$

4.4.6.

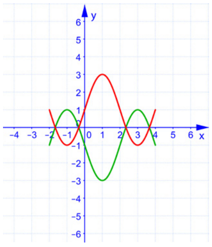
a.



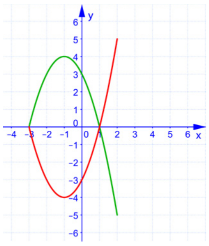
c.



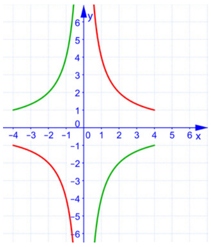
e.



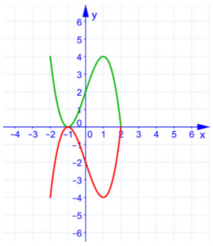
b.



d.

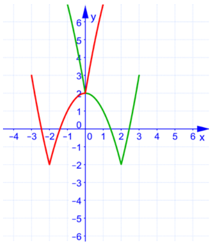


f.

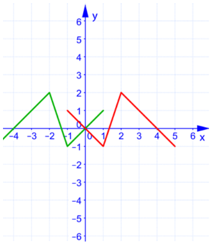


4.4.7.

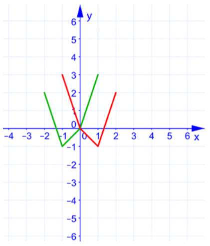
a.



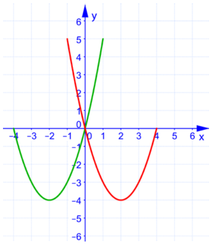
c.



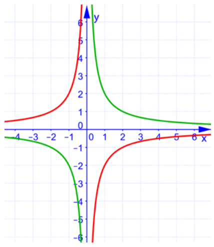
e.



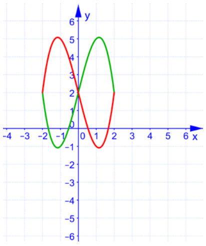
b.



d.



f.



4.4.8. C **4.4.9.** B **4.4.10.** A **4.4.11.** A **4.4.12.** C

4.4.13. A **4.4.14.** C **4.4.15.** C **4.4.16.** D **4.4.17.** A

4.A.1. **a.** wartości x i y są wprost proporcjonalne, $y=\frac{5}{2}x$

b. wartości x i y są wprost proporcjonalne, $y=3x$

c. wartości x i y nie są wprost proporcjonalne

4.A.2. 150 kg **4.A.3.** 26 miesięcy **4.A.4.** 665 km **4.A.5.** 25 dni **4.A.6.** 350 litrów

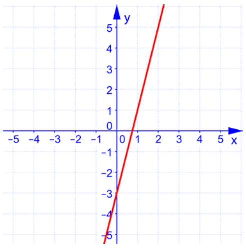
4.A.7. B **4.A.8.** B **4.A.9.** C **4.A.10.** B **4.A.11.** C

4.5.1. **a.** $x_0=-\frac{3}{2}$ **c.** $x_0=\frac{1}{2}$ **e.** $x_0=\frac{3}{2}$

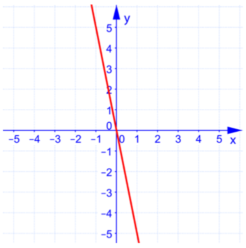
b. $x_0=1$ **d.** $x_0=3$ **f.** $x_0=\frac{1}{2}$

P.4.5.1

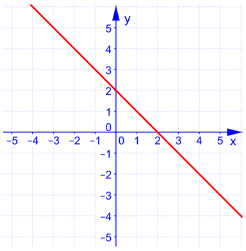
PRZYKŁAD 2.



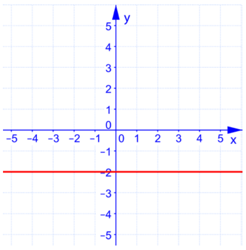
PRZYKŁAD 4.



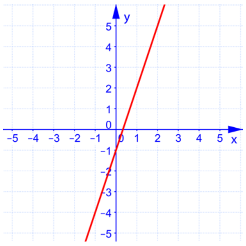
PRZYKŁAD 6.



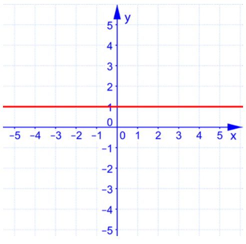
PRZYKŁAD 8.



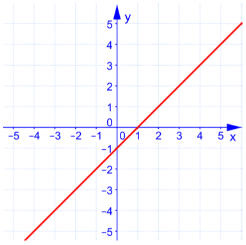
PRZYKŁAD 3.



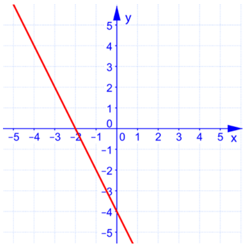
PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 7.

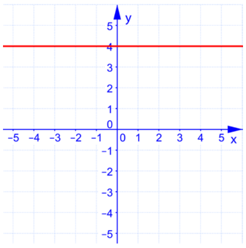


PRZYKŁAD 9.

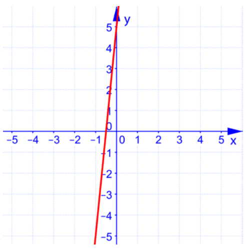


P.4.5.2

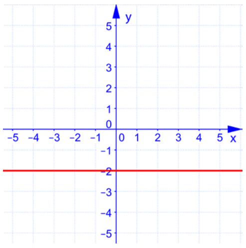
PRZYKŁAD 4.



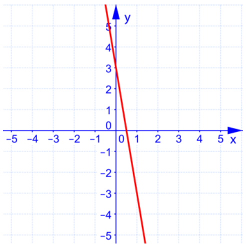
PRZYKŁAD 6.



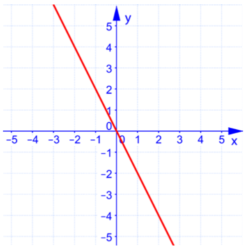
PRZYKŁAD 8.



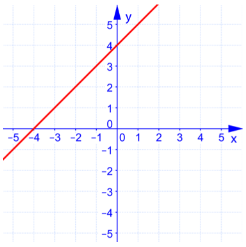
PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 7.

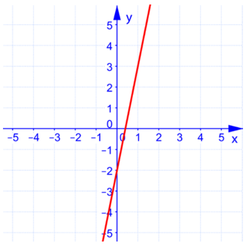


PRZYKŁAD 9.

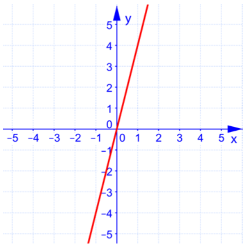


P.4.5.3

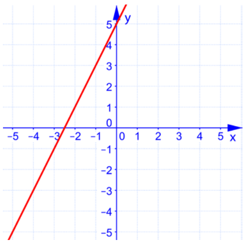
PRZYKŁAD 2.



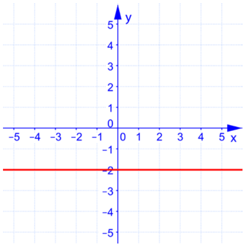
PRZYKŁAD 4.



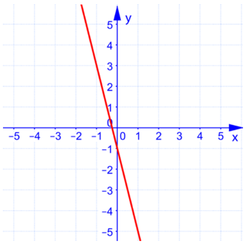
PRZYKŁAD 6.



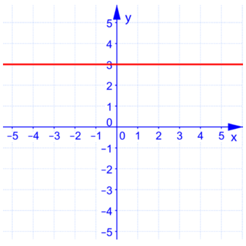
PRZYKŁAD 8.



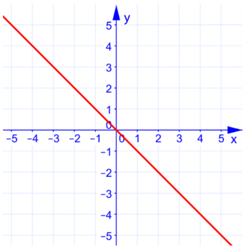
PRZYKŁAD 3.



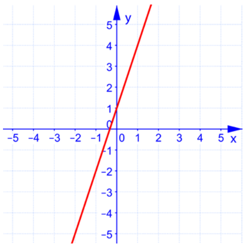
PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 7.



PRZYKŁAD 9.



4.5.2. D **4.5.3.** D **4.5.4.** C **4.5.5.** B **4.5.6.** C

P.4.6.1 PRZYKŁAD 2. $y=\frac{3}{5}x+\frac{11}{5}$ PRZYKŁAD 5. $y=2x-4$

PRZYKŁAD 3. $y=2x-1$ PRZYKŁAD 6. $y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$

PRZYKŁAD 4. $y=4x-7$

P.4.6.2 PRZYKŁAD 2. $y=-3x+6$ PRZYKŁAD 5. $y=-x+3$

PRZYKŁAD 3. $y=x+2$ PRZYKŁAD 6. $y=8x+4$

PRZYKŁAD 4. $y=3x+3$

4.6.1. $y=x+4$ **4.6.2.** $y=-3x$

4.6.3. $y=x-2$ **4.6.4.** $y=-\frac{2}{3}x+1$

4.6.5. C **4.6.6.** D **4.6.7.** C **4.6.8.** C **4.6.9.** B

4.7.1. **a.** I, II, III **c.** I, III, IV **e.** I, II, IV **g.** I, III

b. II, III, IV **d.** II, IV **f.** I, II **h.** III, IV

4.7.2.

Wzór funkcji	Funkcja jest:			Wzór funkcji	Funkcja jest:		
	rosnąca	malejąca	stała		rosnąca	malejąca	stała
$y=3x-1$	✓						✓
		✓				✓	
	✓					✓	

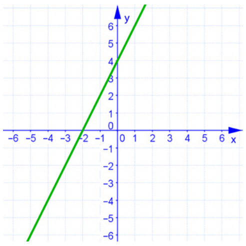
4.7.3.

Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:				Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
	✓		✓			✓	✓		✓
	✓		✓	✓		✓	✓	✓	
		✓	✓	✓		✓	✓		
	✓	✓				✓	✓	✓	

4.7.4. **a.** $m\in\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$ **b.** $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ **c.** $m=-\frac{3}{2}$

4.7.5. **a.** $k\in(-\infty;4)$ **b.** $k\in(4;\infty)$ **c.** $k=4$

4.7.6. **a.**



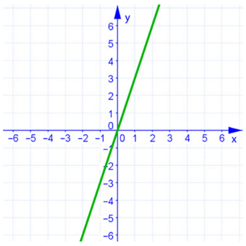
$x_0=-2$

f rosnąca:
$x\in\boldsymbol{R}$

f dodatnia:
$x\in(-2;\infty)$

f ujemna:
$x\in(-\infty;-2)$

b.



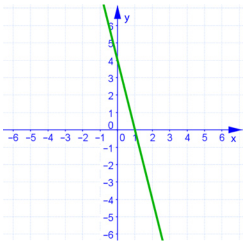
$x_0=0$

f rosnąca:
$x\in\boldsymbol{R}$

f dodatnia:
$x\in(0;\infty)$

f ujemna:
$x\in(-\infty;0)$

c.



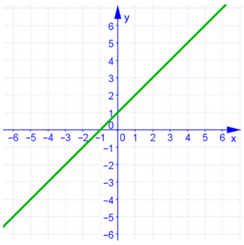
$x_0 = 1$

f malejąca:
$x \in \boldsymbol{R}$

f dodatnia:
$x \in (-\infty; 1)$

f ujemna:
$x \in (1; \infty)$

d.



$x_0 = -1$

f rosnąca:
$x \in \boldsymbol{R}$

f dodatnia:
$x \in (-1; \infty)$

f ujemna:
$x \in (-\infty; -1)$

4.7.7. C **4.7.8.** C **4.7.9.** B **4.7.10.** B **4.7.11.** D

4.7.12. A **4.7.13.** D **4.7.14.** A **4.7.15.** A **4.7.16.** C

P.4.8.1 PRZYKŁAD 2. $a = -1, b = 2, c = 4$ PRZYKŁAD 5. $a = 1, b = -6, c = 0$

PRZYKŁAD 3. $a = -4, b = 1, c = -2$ PRZYKŁAD 6. $a = 4, b = 0, c = -3$

PRZYKŁAD 4. $a = -5, b = 0, c = 7$

4.8.1. dla $x \in (-\infty; 0\rangle$ funkcja jest malejąca; dla $x \in \langle 0; \infty)$ funkcja jest rosnąca **4.8.2.** $ZW = (-\infty; 0\rangle$

4.8.3. A **4.8.4.** A **4.8.5.** A **4.8.6.** B **4.8.7.** A

P.4.9.1 PRZYKŁAD 2. $y = x^2 - 2x$

4.9.1. $y = x^2 + 4x + 3$ **4.9.2.** $a = -1, b = 2$

4.9.3. A **4.9.4.** D **4.9.5.** C **4.9.6.** A **4.9.7.** C

4.10.1.

Wzór funkcji	Współrzędne wierzchołka	Ramiona skierowane
	$W(3; 1)$	do góry
	$W(-2; -1)$	do dołu
	$W(1; 0)$	do góry
	$W(0; 1)$	do dołu
	$W(4; 2)$	do góry
	$W(-2; 0)$	do dołu

4.10.2. **a.** $y = 2(x-2)^2$ **b.** $y = 2(x+3)^2$ **c.** $y = 2(x-4)^2 - 2$ **d.** $y = 2(x+1)^2 + 2$

P.4.10.2 PRZYKŁAD 2. $W(-1; 3)$ PRZYKŁAD 5. $W(0; 2)$ PRZYKŁAD 7. $W(1; -4)$

PRZYKŁAD 3. $W(-1; 2)$ PRZYKŁAD 6. $W\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{8}\right)$ PRZYKŁAD 8. $W(0; 9)$

PRZYKŁAD 4. $W(1; -2)$

4.10.3. **a.** $W\left(-1\frac{1}{4}; -6\frac{1}{8}\right)$ **b.** $W(3; -1)$ **c.** $W(4; -16)$ **d.** $W(2; 15)$

P.4.10.3 PRZYKŁAD 2. $y = 2(x-1)^2 + 4$ PRZYKŁAD 3. $y = (x+1)^2 + 8$

4.10.4. **a.** $y = (x+5)^2 - 27$ **b.** $y = -(x-2)^2 + 6$ **c.** $y = (x+3)^2 - 10$ **d.** $y = -2(x-1)^2 + 5$

4.10.5. **a.** $y = -x^2 - 4x - 5$ **b.** $y = 6x^2 - 6x + 2$ **c.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8$ **d.** $y = -2x^2 + 4\sqrt{2}\,x$

4.10.6.

Wzór funkcji	Wartość wyróżnika	Liczba miejsc zerowych
	$\Delta = 8$	2
	$\Delta = -31$	0
	$\Delta = -20$	0
	$\Delta = 0$	1

4.10.7.

a. $\Delta = 21$,
2 miejsca zerowe

b. $\Delta = -7$,
brak miejsc zerowych

c. $\Delta = 0$,
1 miejsce zerowe

d. $\Delta = -24$,
brak miejsc zerowych

e. $\Delta = 177$,
2 miejsca zerowe

f. $\Delta = 16$,
2 miejsca zerowe

g. $\Delta = -56$,
brak miejsc zerowych

h. $\Delta = 0$,
1 miejsce zerowe

i. $\Delta = 44$,
2 miejsca zerowe

4.10.8.

a. $x_1 = -2,\ x_2 = 1$

b. $x_1 = -3,\ x_2 = -1$

c. $x_1 = 2,\ x_2 = -3$

d. $x_1 = -2,\ x_2 = \frac{1}{2}$

e. $x_1 = -2,\ x_2 = 4$

f. $x_1 = \frac{1}{2}$

g. brak miejsc zerowych

h. $x_1 = \frac{1}{3}$

i. brak miejsc zerowych

4.10.9.

a. $f(x) = (x-8)(x-1)$

b. $f(x) = (x-3)(x+4)$

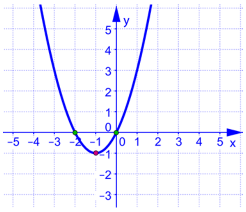
c. $f(x) = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+4)$

d. $f(x) = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$

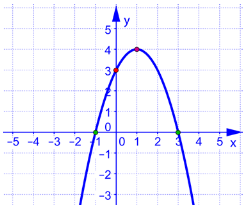
e. $f(x) = 4\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2$

f. $f(x) = x(x-4)$

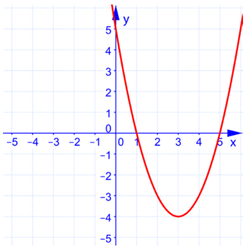
P.4.10.7 PRZYKŁAD 4.



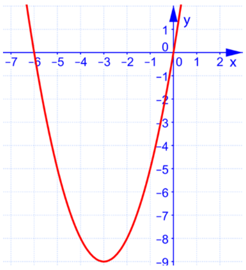
PRZYKŁAD 5.



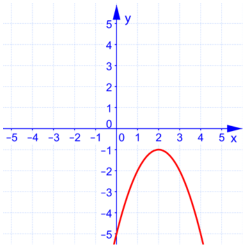
4.10.10. **a.**



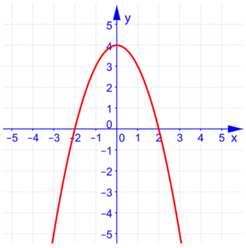
c.



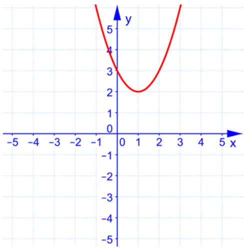
e.



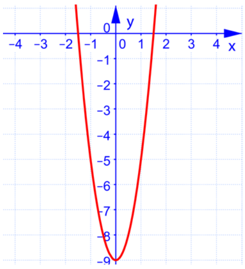
b.



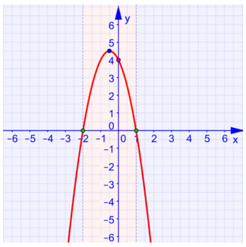
d.



f.



P.4.10.8 PRZYKŁAD 2.



f rosnąca: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle$

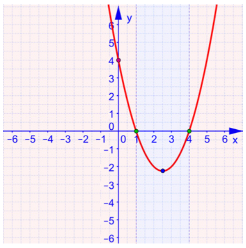
f malejąca: $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; \infty\right)$

zbiór wartości: $y \in \left(-\infty; 4\frac{1}{2}\right\rangle$

f dodatnia: $x \in (-2; 1)$

f ujemna:
$x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

PRZYKŁAD 3.



f rosnąca: $x \in \left\langle 2\frac{1}{2}; \infty\right)$

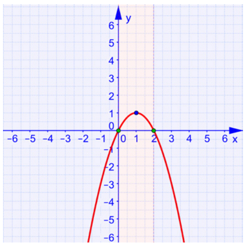
f malejąca: $x \in \left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right\rangle$

zbiór wartości: $y \in \left\langle -2\frac{1}{4}; \infty\right)$

f dodatnia:
$x \in (-\infty; 1) \cup (4; \infty)$

f ujemna: $x \in (1; 4)$

PRZYKŁAD 4.



f rosnąca: $x \in (-\infty; 1\rangle$

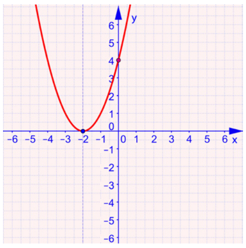
f malejąca: $x \in \langle 1; \infty)$

zbiór wartości: $y \in (-\infty; 1\rangle$

f dodatnia: $x \in (0; 2)$

f ujemna:
$x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

PRZYKŁAD 5.



f rosnąca: $x \in \langle -2; \infty)$

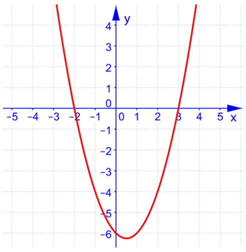
f malejąca: $x \in (-\infty; -2\rangle$

zbiór wartości: $y \in \langle 0; \infty)$

f dodatnia:
$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$

f ujemna nie istnieje

4.10.11. a.



f malejąca: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$

f rosnąca: $x \in \left\langle \frac{1}{2}; \infty\right)$

f dodatnia: $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

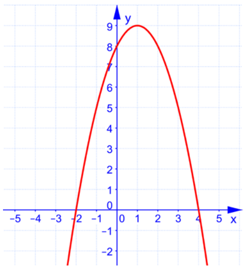
f ujemna: $(-2; 3)$

zbiór wartości: $y \in \left\langle -6\frac{1}{4}; \infty\right)$

punkt $A(1; -6)$ należy do wykresu f

punkt $B(2; 8)$ nie należy do wykresu f

b.



f malejąca: $x \in \langle 1; \infty)$

f rosnąca: $x \in (-\infty; 1\rangle$

f dodatnia: $x \in (-2; 4)$

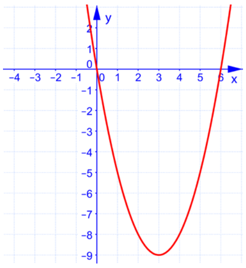
f ujemna: $x \in (-\infty; -2) \cup (4; \infty)$

zbiór wartości: $y \in (-\infty; 9\rangle$

punkt $A(1; -6)$ nie należy do wykresu f

punkt $B(2; 8)$ należy do wykresu f

c.



f malejąca: $x \in (-\infty; 3\rangle$

f rosnąca: $x \in \langle 3; \infty)$

f dodatnia: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$

f ujemna: $(0; 6)$

zbiór wartości: $y \in \langle -9; \infty)$

punkty $A(1; -6)$ i $B(2; 8)$ nie należą do wykresu funkcji

4.10.12. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

4.10.13. $y = 2x^2 - 4x + 7$

4.10.14. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\frac{1}{2}$

4.10.15. $y = (x-1)^2 - 9$

4.10.16. $y = (x+5)(x-1)$

4.10.17. B **4.10.18.** C **4.10.19.** A **4.10.20.** D **4.10.21.** C

4.10.22. A **4.10.23.** C **4.10.24.** D **4.10.25.** D **4.10.26.** D

P.4.11.2 PRZYKŁAD 3. $f_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right)=1\frac{3}{4}$, $f_{\max}(2)=8$

PRZYKŁAD 4. $f_{\min}(3)=-5$, $f_{\max}(1)=5$

PRZYKŁAD 5. $f_{\min}\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$, $f_{\max}(1)=7$

PRZYKŁAD 6. $f_{\min}(-2)=-10$, $f_{\max}\left(-\frac{1}{8}\right)=4\frac{1}{16}$

4.11.1. $f_{\min}(0)=-3$, $f_{\max}(2)=5$

4.11.2. $f_{\min}(-3)=-37$, $f_{\max}(1)=3$

4.11.3. C **4.11.4** D **4.11.5** B **4.11.6** B **4.11.7** C

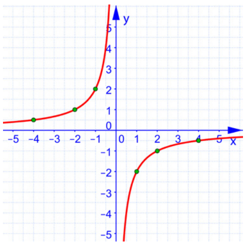
4.12.1.
a. Sandomierz: 0°C, Kielce: 3°C
b. 5 razy
c. Sandomierz: −4°C, Kielce: −5°C
d. 4°C (o 23.00)
e. 4.00, 8.00
f. 10.00 − 23.00

4.12.2.
a. $S(x)=-100x+5000$
b. $P(x)=-100x^2+5000x$
c. $Z(x)=-100x^2+6200x-60\,000$
d. $x=31$ zł

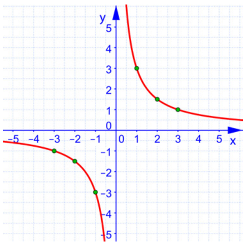
4.12.3. **a.** Prawda **b.** Fałsz **c.** Fałsz **d.** Fałsz **e.** Fałsz **f.** Prawda

4.12.4. B **4.12.5.** B **4.12.6.** B **4.12.7.** C **4.12.8.** C

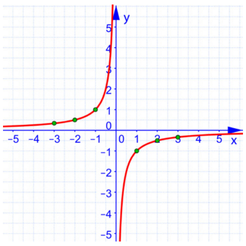
P.4.13.1 PRZYKŁAD 2.



PRZYKŁAD 3.



PRZYKŁAD 4.

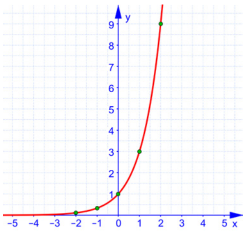


4.13.1. **a.** 8 dni **b.** 20 osób

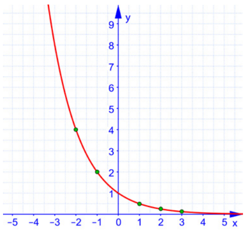
4.13.2. **a.** 720 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ **b.** 1,5 h

4.13.3. C **4.13.4.** D **4.13.5.** D **4.13.6.** C **4.13.7.** C

P.4.14.1 PRZYKŁAD 2.

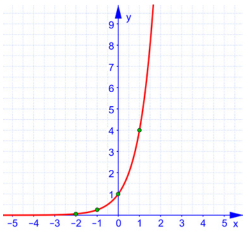


PRZYKŁAD 4.

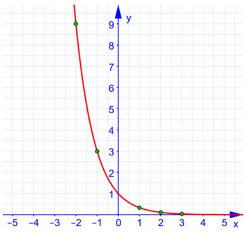


PRZYKŁAD 6.

PRZYKŁAD 3.



PRZYKŁAD 5.



4.14.1.

miejsca zerowe:	zbiór wartości:	f ujemna:	punkty:	przecięcie osi OY:
$x_1 = 3$	$ZW = (-2; \infty)$	$x \in (-\infty; 3)$	$A(5;16)$ i $B(-1;3)$ nie należą do wykresu tej funkcji	$\left(0; -1\frac{3}{4}\right)$

4.14.2.	D	**4.14.3.**	D	**4.14.4.**	C	**4.14.5.**	C	**4.14.6.**	C

4.15.1. **a.** $s = 500$ **b.** po 7 latach **c.** $s = 265$

4.15.2. **a.** $N(t) = 2^t \cdot 10$ **b.** 40 960 sztuk **c.** po 9 dniach

4.15.3. **a.** 1448 reniferów **b.** 2011 rok **c.** $R(t) = 1{,}3^t \cdot 300$

4.15.4.	D	**4.15.5.**	C	**4.15.6.**	C	**4.15.7.**	B	**4.15.8.**	B

ISBN: 978-83-63975-10-4

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY