5

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Ciągi

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
blickpixel - id. 451486/ CC0 Public Domain; blickpixel - id. 451512/ CC0 Public Domain; fredmosc - id. 604416/ CC0 Public Domain; rose_mcavoy - id. 842337/ CC0 Public Domain; geralt - id. 639237/ CC0 Public Domain; Usinglight - id. 542155/ CC0 Public Domain

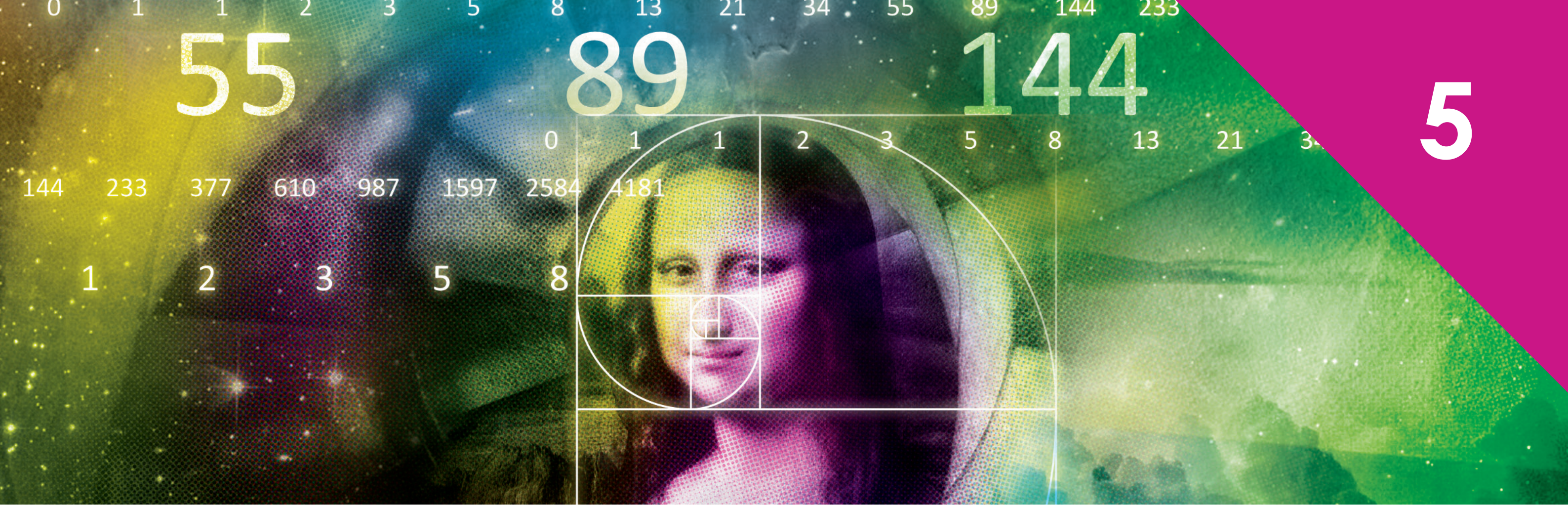
Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-15-9

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl



Ciągi

P.5.1.8

Ciągi liczbowe to listy liczb, które ułożono w określonej kolejności — według jakiejś zasady. Pierwszym ciągiem liczbowym, jaki człowiek zapisał, jest ciąg liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 5, ... Każda kolejna liczba jest większa od poprzedniej o 1. Podobnie możemy ułożyć zbiór liczb parzystych czy podzielnych przez 3. To prostsze przykłady ciągów. Oczywiście istnieją ciągi bardziej skomplikowane. Dzięki zasadzie, która „rządzi" danym ciągiem, możemy obliczać dużo szybciej zależności między dowolnymi liczbami ciągu. Wyobraź sobie taki przykład (możesz też spróbować wykonać to doświadczenie). Weź arkusz papieru, jak największy, np. z gazety, i zacznij składać go na pół, potem jeszcze raz na pół itd. Jaką grubość będą mieć łącznie złożone warstwy, gdy złożysz ten arkusz 20 razy, a jaką gdy złożysz go 42 razy? Arkusz ma grubość ok. 0,1 mm. Po pierwszym złożeniu grubość wynosi 0,2 mm, po drugim — 0,4 mm, po trzecim — 0,8 mm, po czwartym — 1,6 mm. Nic szczególnego, prawda? Przy każdym złożeniu grubość zwiększa się dwukrotnie. Próbujemy jednak dalej. Składamy piąty raz — 3,2 mm, szósty — 6,4 mm, siódmy — 12,8 mm. W praktyce trudno złożyć ten arkusz więcej niż 6 – 7 razy, co już pewnie zauważyłeś. Jednak zasada, która rządzi narastaniem grubości tego złożonego arkusza, pozwoli nam obliczyć jego grubość po 20 czy 42 złożeniach. Zauważ, że pomijając przecinki w otrzymanych wynikach, otrzymujemy kolejne potęgi liczby 21=2, 22=4, 23=8, ..., 27=128... . Obliczmy: 220=1 048 576, czyli 104857,6 mm, zatem ponad 104 metry! Niewiarygodne! Ale spróbujmy składać dalej. Przy 42 złożeniu otrzymamy 242=4 398 046 511 104, czyli ok. 439 804 kilometrów, co jest długością większą niż odległość między Ziemią a Księżycem. Oczywiście takie rozważania są już czysto teoretyczne.

Jednym z najbardziej tajemniczych i przedziwnych ciągów jest ciąg Fibonacciego. Leonardo Pisano Fibonacci żył w latach ok. 1175 — 1250 n.e. W 1202 roku wydał książkę Liber abaci (Księga abaku). Uczony poruszył w niej takie tematy, jak: podzielność, teoria liczb, symbolika matematyczna, ale również zasady księgowania, reguły zysków i strat czy wymiany pieniędzy. Najsłynniejsze stało się zadanie o królikach. Oto ono:

„Ile par królików będziemy mieli na końcu roku, jeśli zaczniemy w styczniu z jedną parą królików, ta w każdym następnym miesiącu, poczynając od marca, wyda na świat kolejną parę królików i z każdej pary urodzą się kolejne pary po dwóch miesiącach od narodzin?".

Okazało się, że łączna liczba królików w poszczególnych miesiącach tworzyła zadziwiający ciąg liczb 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. W grudniu będą 144 pary królików. Od trzeciego wyrazu ciągu każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich. Taki ciąg można tworzyć w nieskończoność.

Obserwując przyrodę, można zauważyć, że ciąg Fibonacciego jest wszechobecny. Kwiaty mają liczbę płatków, która jest liczbą Fibonacciego, np. lilia — 1, wilczomlecz — 2, irysy — 3, jaskier — 5, ostróżka — 8, nagietek — 13, stokrotki — 21 lub 34. Cały rozwój rośliny — liczba kolejnych pędów czy gałęzi drzew — tworzy również ciąg Fibonacciego. To dlatego tak trudno znaleźć czterolistną koniczynę, bo liczba 4 nie jest liczbą tego ciągu. Przykłady ciągu Fibonacciego występują, od anatomii człowieka poczynając, a na kształcie galaktyk kończąc. Własności tego ciągu wykorzystuje się w ekonomii, ale również w muzyce, czego przykładem jest kanon D-dur Johanna Pachelbela.

To nie koniec magii ciągu Fibonacciego. Jeżeli będziemy dzielić kolejne liczby tego ciągu przez wyrazy poprzedzające, to kolejne wyniki będą coraz bardziej zbliżone do złotej liczby, zwanej też złotą lub boską proporcją. Najczęściej oznacza się tę liczbę literą φ, a jej wartość to w przybliżeniu 1,618. Starożytni Grecy uważali złoty podział za idealną proporcję, którą chętnie wykorzystywali w architekturze czy w malarstwie. Złotą proporcję odnajdziemy też w słynnych obrazach Leonarda da Vinci — Mona Lisa czy Ostatnia Wieczerza.

Galileusz powiedział, że „matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat". A może tajemnice ciągów liczbowych to matematyczne ślady Stwórcy?

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

5.1 ▶ Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym

DEFINICJA

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich (ciąg nieskończony) lub skończony k- elementowy podzbiór od 1 do k (ciąg skończony). Możemy to zapisać symbolicznie: $D = \boldsymbol{N}_{+}$ lub $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Wartości tak zdefiniowanych funkcji nazywamy wyrazami ciągu.

W celu stwierdzenia, czy dane przyporządkowanie jest ciągiem, należy sprawdzić, czy jest ono funkcją oraz jaką ma dziedzinę.

PRZYKŁAD

Przyporządkowanie zostało zdefiniowane w następujący sposób: każdej liczbie naturalnej od 1 do 30 zostało przypisane nazwisko ucznia zapisanego w dzienniku lekcyjnym klasy 2a (uwaga: w klasie 2a jest 30 uczniów). Czy tak określone przyporządkowanie jest ciągiem?

Aby sprawdzić, czy jest to ciąg, zauważmy najpierw, że jest to funkcja, ponieważ każdej liczbie jest przypisane jedno i tylko jedno nazwisko. Ponadto dziedziną tego przyporządkowania jest skończony zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Zatem jest to ciąg.

PRZYKŁAD

Przyporządkowanie zostało zdefiniowane w następujący sposób: każdej liczbie naturalnej dodatniej przypisano jej pierwiastek. Czy tak określone przyporządkowanie jest ciągiem?

Zauważmy, że dziedzina to $D = \boldsymbol{N}_{+}$. Ponadto w sposób jednoznaczny przypisujemy każdej liczbie naturalnej dodatniej jej pierwiastek: $1 \to \sqrt{1}$, $2 \to \sqrt{2}$, $3 \to \sqrt{3}$, $4 \to \sqrt{4}$, $5 \to \sqrt{5}$, $6 \to \sqrt{6}$, $7 \to \sqrt{7}$. Zatem jest to również ciąg.

Ciąg liczbowy to ciąg, którego wyrazy są liczbami rzeczywistymi.

Najczęściej spotykamy następujący sposób zapisu ciągu: (a_n). Litera a oznacza nazwę ciągu, litera n to argument (zmienna niezależna), natomiast samo (a_n) oznacza wartość ciągu a dla argumentu n.

PRZYKŁAD

Zapis a_3 oznacza wartość ciągu a dla argumentu 3, czyli wartość trzeciego wyrazu ciągu.
Zapis a_{28} oznacza wartość ciągu a dla argumentu 28, czyli wartość dwudziestego ósmego wyrazu ciągu.
Zapis a_{2k+3} oznacza wartość ciągu a dla argumentu $2k + 3$, czyli wartość wyrazu o numerze $2k + 3$.

► Sposoby określania ciągów

SPOSÓB 1 — wzór ogólny

Opisuje on zależność podobnie jak przy wzorze funkcji.

PRZYKŁAD

$a_n = n + 2 - n^2$ — za pomocą tego wzoru można od razu obliczyć dowolną wartość, czyli dowolny wyraz ciągu: $a_1 = 1 + 2 - 1^2 = 2$, $a_4 = 4 + 2 - 4^2 = -10$ itd.

SPOSÓB 2 — tabelka

Podając w jednym wierszu argumenty, wskazujemy wartości w drugim wierszu.

PRZYKŁAD

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	4	-10	3	12	$\sqrt{2}$	0	0

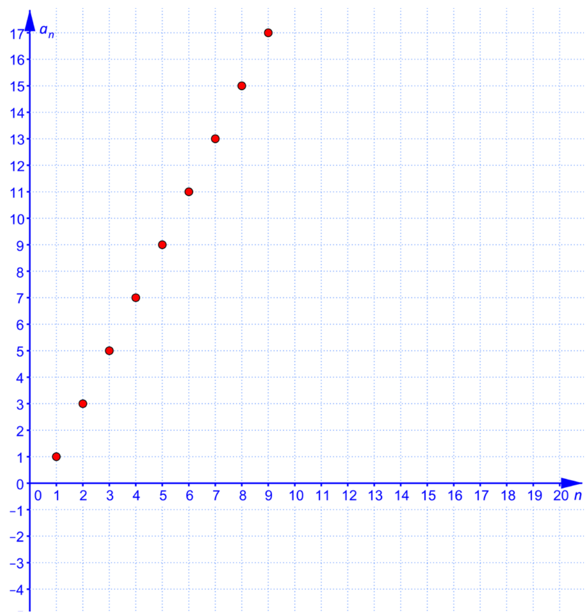
Z tabelki odczytujemy, że $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = -10$, $a_4 = 3$, $a_5 = 12$, $a_6 = \sqrt{2}$, $a_7 = 0$, $a_8 = 0$.

SPOSÓB 3 — wykres

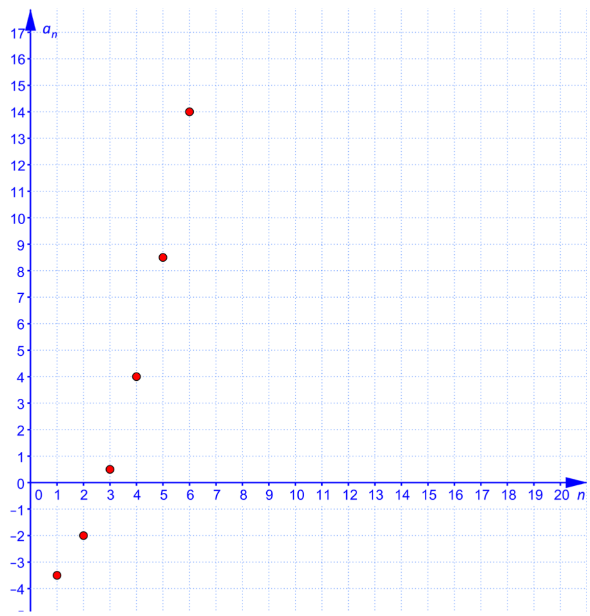
Ze względu na specyficzną dziedzinę ciągu wykres znajduje się w I lub IV ćwiartce układu współrzędnych, ponadto sam wykres składa się z pojedynczych kropek.

PRZYKŁAD P.5.1.1

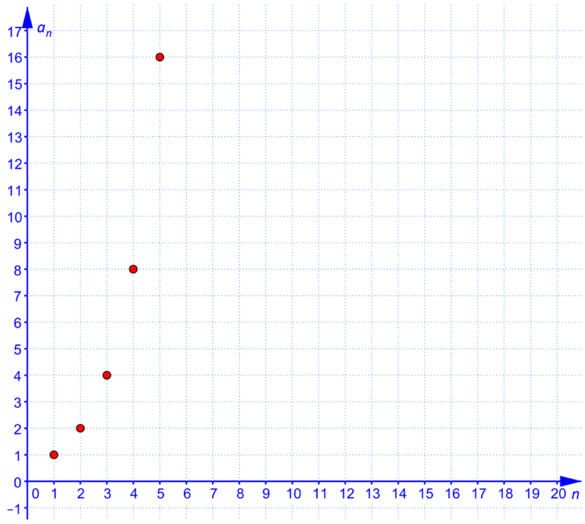
$a_n = 2n - 1$

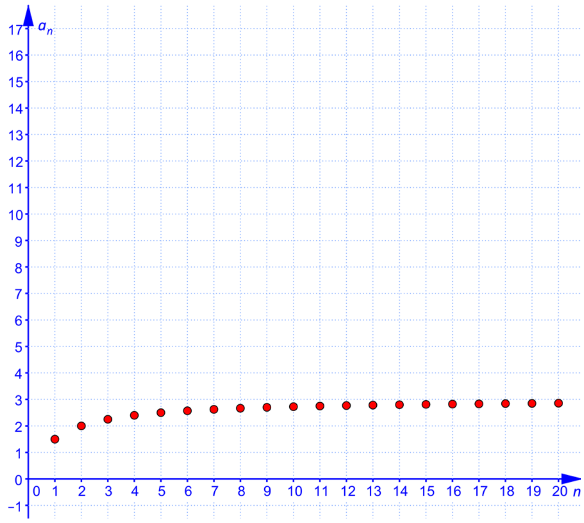


$a_n = \frac{1}{2}n^2 - 4$



$a_n = 2^{n-1}$	$a_n = \dfrac{3n}{n+1}$





SPOSÓB 4 — wyliczanie elementów

W nawiasie okrągłym podajemy kolejne wartości. Ten zapis stosujemy, gdy ciąg jest skończony lub wyrazy ciągu układają się w pewien regularny sposób.

PRZYKŁAD

Ciąg $(1, 4, 10, 2, -1, 7)$
Jest to ciąg sześcioelementowy, pozycja liczby w nawiasie oznacza argument, zatem: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 10$, $a_4 = 2$, $a_5 = -1$, $a_6 = 7$.

Ciąg $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$
Badając zależność między kolejnymi wyrazami ciągu, odczytujemy, że następną liczbą będzie 11, potem 13 itd.

PRZYKŁAD

P.5.1.2

Dany jest ciąg określony wzorem: $a_n = n + \frac{n-1}{n+1}$. Oblicz a_1, a_3, a_{10}, a_{2n}, a_{n+1}.

1° Aby wyznaczyć a_1, czyli pierwszy wyraz ciągu, należy wstawić liczbę 1 w miejsce n we wzorze ciągu.

$$a_1 = 1 + \frac{1-1}{1+1} = 1 + 0 = 1$$

W pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie.

$$a_3 = 3 + \frac{3-1}{3+1} = 3 + \frac{2}{4} = 3\frac{1}{2}$$

$$a_{10} = 10 + \frac{10-1}{10+1} = 10 + \frac{9}{11} = 10\frac{9}{11}$$

$$a_{2n} = 2n + \frac{2n-1}{2n+1}$$

$$a_{n+1} = n + 1 + \frac{n+1-1}{n+1+1} = n + 1 + \frac{n}{n+2}$$

PRZYKŁAD 1

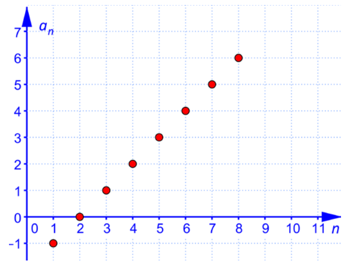
P.5.1.3

Naszkicuj wykres ciągu opisanego wzorem ogólnym $a_n = n - 2$.

1° Podstawiając za n kolejne liczby naturalne, obliczamy kilka początkowych wyrazów ciągu i zapisujemy odpowiednie wartości w tabelce.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-1	0	1	2	3	4	5	6

2° Zaznaczamy punkty w układzie współrzędnych. Wykresem ciągu są pojedyncze punkty.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Naszkicuj wykres ciągu opisanego wzorem ogólnym:

PRZYKŁAD 2. $a_n = 2n - 5$

PRZYKŁAD 3. $a_n = -2n + 10$

PRZYKŁAD 4. $a_n = \frac{12}{n} - 4$

PRZYKŁAD

P.5.1.4

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = \frac{2n-10}{n+2}$. Dla jakich wartości n: $a_n = 0$, $a_n = \frac{1}{4}$, $a_n = 3$?

1° Aby znaleźć taki argument n, że $a_n = 0$, należy rozwiązać równanie. Zauważmy, że ułamek wynosi 0, gdy licznik będzie równy zero.

$$\frac{2n-10}{n+2} = 0$$
$$2n - 10 = 0$$
$$n = 5$$

2° Aby znaleźć taki argument, że $a_n = \frac{1}{4}$, należy rozwiązać równanie. Wykorzystujemy własność proporcji.

$$\frac{2n-10}{n+2} = \frac{1}{4}$$
$$4 \cdot (2n-10) = 1 \cdot (n+2)$$
$$8n - 40 = n + 2$$
$$8n - n = 2 + 40$$
$$7n = 42 \quad |:7$$
$$n = 6$$

3° Aby znaleźć taki argument n, że $a_n = 3$, należy rozwiązać równanie. Wykorzystujemy własność proporcji.

$$\frac{2n-10}{n+2} = 3$$
$$3 \cdot (n+2) = 1 \cdot (2n-10)$$
$$3n + 6 = 2n - 10$$
$$3n - 2n = -10 - 6$$
$$n = -16$$

Liczba -16 nie należy do dziedziny ciągu, ponieważ $-16 \notin \boldsymbol{N}_+$. Zatem nie istnieje wyraz o wartości 3.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.1.1. Zapisz cztery początkowe wyrazy ciągu o podanym wzorze ogólnym.

a. $a_n = 2n + 4$ **b.** $a_n = 5^n$ **c.** $a_n = \frac{5n+2}{n+1}$ **d.** $a_n = n^{n-1}$

5.1.2. Zapisz wyrazy a_5, a_{10}, a_{k+1}, a_{n+m} ciągu o podanym wzorze ogólnym .

a. $a_n = 2n^2$ **b.** $a_n = \frac{1}{n}$

5.1.3. Sporządź wykres ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{2^n}{4}$.

5.1.4. Sprawdź, którym wyrazem ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = n^2 + 2n + 1$ jest wyraz o wartości 121.

5.1.5. Oblicz piąty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3-n^2}{n^3}$ dla $n \geq 1$. **Z.5.1.5**

5.1.6. Wyznacz setny wyraz ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = \frac{n^2-100}{9n}$.

PRZYKŁAD

P.5.1.5

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{15-3n}{n+1}$ dla $n \geq 1$. Oblicz liczbę wszystkich nieujemnych wyrazów tego ciągu.

1° Układamy nierówność zgodnie z warunkiem, żeby wyrazy były nieujemne.

$$\frac{15-3n}{n+1} \geq 0$$

2° Wyrażenie w mianowniku jest dodatnie, więc możemy pomnożyć nierówność stronami, nie zmieniając jej znaku.

$$\frac{15-3n}{n+1} \geq 0 \quad |\cdot(n+1)$$

$$15 - 3n \geq 0$$

3° Wyznaczamy n.

$$-3n \geq -15 \quad |:(-3)$$

$$n \leq 5$$

4° Istnieje pięć nieujemnych wyrazów ciągu.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.1.7. Oblicz, ile jest wyrazów dodatnich ciągu (a_n) określonego wzorem $a_n = -2n^2 + 12$. Wyznacz te wyrazy.

5.1.8. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 58$. Oblicz, ile jest wyrazów tego ciągu, które są większe od 40.

▶ Monotoniczność ciągów

Skoro ciąg jest definiowany jako funkcja w dziedzinie $\boldsymbol{N}_+$, to możemy badać jego monotoniczność. Monotoniczność określamy dla ciągów liczbowych (o wyrazach, które są liczbami rzeczywistymi).

TWIERDZENIE

Jeżeli dla każdego $n \in \boldsymbol{N}_+$ mamy:

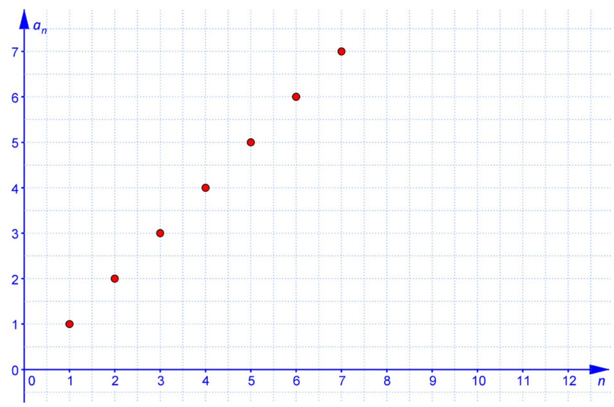
- ▶ $a_{n+1} > a_n$, to ciąg jest rosnący (tzn. każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego)
- ▶ $a_{n+1} < a_n$, to ciąg jest malejący (tzn. każdy następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego)
- ▶ $a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg jest niemalejący (tzn. każdy następny wyraz jest większy lub równy poprzedniemu)
- ▶ $a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg jest nierosnący (tzn. każdy następny wyraz jest mniejszy lub równy poprzedniemu)
- ▶ $a_{n+1} = a_n$, to ciąg jest stały (tzn. każdy następny wyraz jest równy poprzedniemu)

Ciąg liczbowy spełniający którykolwiek z powyższych warunków nazywamy ciągiem monotonicznym, pozostałe ciągi są niemonotoniczne.

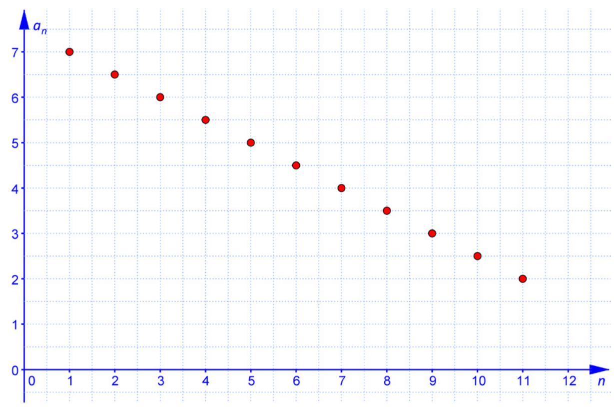
PRZYKŁAD P.5.1.6

W praktyce, chcąc określić monotoniczność ciągu, badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$, czyli jeżeli dla każdego $n \in \boldsymbol{N}_+$ mamy:

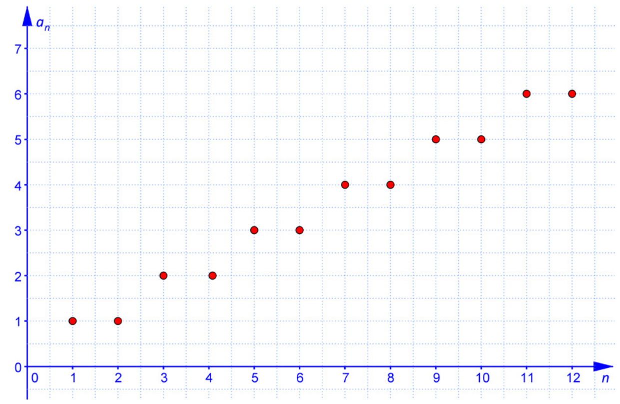
▶ $a_{n+1} - a_n > 0$, to ciąg jest rosnący



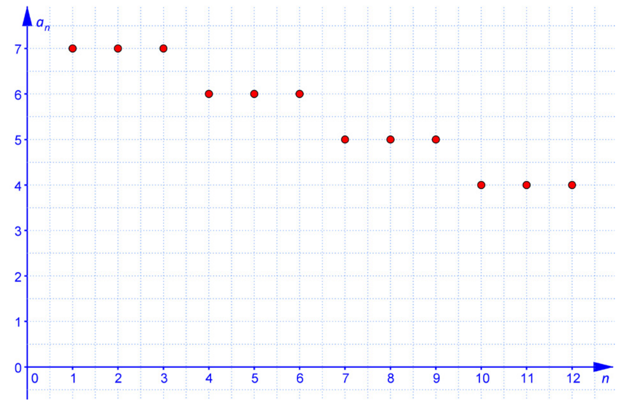
▶ $a_{n+1} - a_n < 0$, to ciąg jest malejący



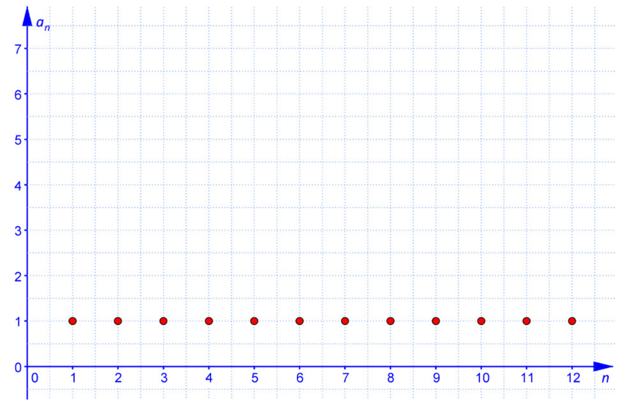
▶ $a_{n+1} - a_n \geq 0$, to ciąg jest niemalejący



▶ $a_{n+1} - a_n \leq 0$, to ciąg jest nierosnący

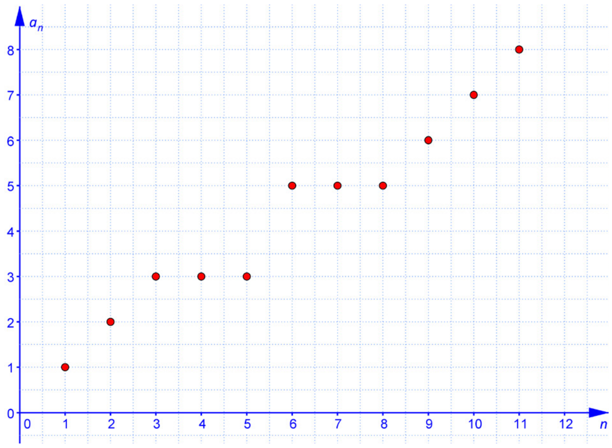


▶ $a_{n+1} - a_n = 0$, to ciąg jest stały

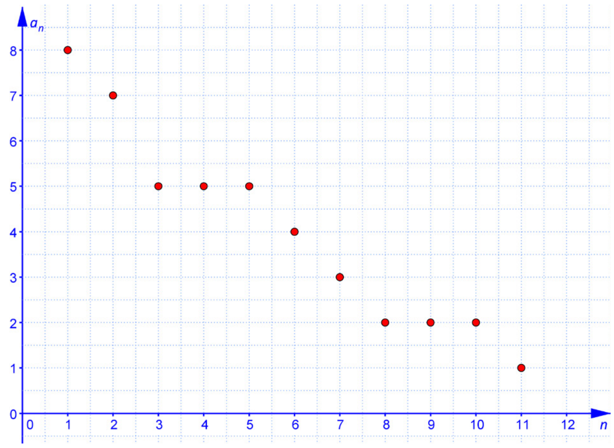


Zauważmy, że każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym i każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym, ale nie odwrotnie, ponieważ istnieją również ciągi, które są niemalejące, ale nie są rosnące oraz ciągi, które są nierosnące, ale nie są malejące.

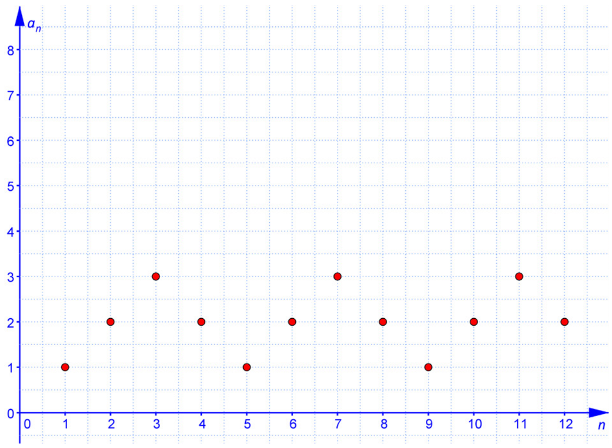
Ciąg, który jest niemalejący, ale nie jest rosnący.

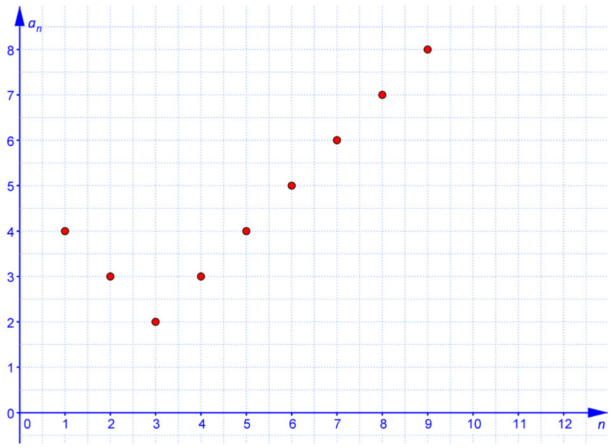


Ciąg, który jest nierosnący, ale nie jest malejący.



Przykłady ciągów niemonotonicznych.





PRZYKŁAD P.5.1.7

Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 5n - 8$ jest rosnący.

1° Ciąg będzie rosnący, jeśli $a_{n+1} - a_n > 0$.

2° Wyznaczamy wyraz a_{n+1}. $a_{n+1} = 5(n+1) - 8 = 5n + 5 - 8 = 5n - 3$

3° Podstawiamy odpowiednie wartości. $a_{n+1} - a_n = 5n - 3 - (5n - 8) = 5n - 3 - 5n + 8 = 5 > 0$

4° Ciąg (a_n) jest rosnący.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.1.9. Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -3n + 11$ jest malejący.

5.1.10.* Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{2}{n}$ jest malejący.

5.1.11. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \sqrt{2n+10}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_{13} = \sqrt{26}$ **B.** $a_{13} = 2\sqrt{13}$ **C.** $a_{13} = 6$ **D.** $a_{13} = 2\sqrt{36}$

5.1.12. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n}{(-2)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

A. $a_4 = \frac{1}{4}$ **B.** $a_4 = -\frac{1}{4}$ **C.** $a_4 = -\frac{1}{2}$ **D.** $a_4 = -\frac{1}{8}$

5.1.13. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{3}{4}n - 8$. Liczba wyrazów tego ciągu mniejszych od 100 jest równa:

A. 143 **B.** 144 **C.** 40 **D.** 145

5.1.14. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 + 5n$. Wyraz o wartości 150 jest:

A. piątym wyrazem tego ciągu,
B. ósmym wyrazem tego ciągu,
C. dziewiątym wyrazem tego ciągu,
D. dziesiątym wyrazem tego ciągu.

5.1.15. Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = -7n + 12$:

A. jest malejący,
B. jest rosnący,
C. jest stały,
D. nie jest monotoniczny.

5.1.16. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_{100} = 200$ i $a_{102} = 210$. Wynika z tego, że ciąg (a_n) może być określony wzorem:

A. $a_n = 2n$ **B.** $a_n = n + 100$ **C.** $a_n = 2n + 6$ **D.** $a_n = 5n - 300$

5.1.17. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Prawdą jest, że wyraz a_{2n+1} ma wartość:

A. $\frac{n}{2n+2}$ **B.** $\frac{n}{n+1}$ **C.** $\frac{2n+2}{2n+4}$ **D.** $\frac{2n-1}{2n+1}$

5.1.18. Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (-2)^n$. Niech $x = a_3$, $y = a_4$, $z = a_5$. Wtedy prawdą jest, że:

A. $x < y < z$ **B.** $x < z < y$ **C.** $z < x < y$ **D.** $y \leq z \leq x$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

5.1.19. Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = (n-4)(n+2)$. Wyznacz wszystkie ujemne wyrazy tego ciągu. **2 pkt**

5.1.20. Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 8n + 12$ jest rosnący. **2 pkt**

5.2 ► Badanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny

► Ciąg arytmetyczny

DEFINICJA

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy następny wyraz (począwszy od drugiego) powstaje w wyniku dodania do wyrazu poprzedniego stałej liczby r nazywanej różnicą ciągu.

PRZYKŁAD

Ciąg $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ jest ciągiem arytmetycznym, ponieważ każdy wyraz (począwszy od drugiego) powstaje przez dodanie liczby 2 do wyrazu poprzedniego, tzn. $3 = 1 + 2$, $5 = 3 + 2$, $7 = 5 + 2$ itd.

Ciąg $(8, 4, 0, -4, -8, \ldots)$ również jest ciągiem arytmetycznym o różnicy równej -4.

Ciąg $(3, 3, 3, 3, \ldots)$ jest także ciągiem arytmetycznym, bo każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez dodanie liczby 0.

Zauważmy, że jeśli a_1 — będzie wyrazem pierwszym, a r — różnicą, to możemy zbudować następujący ciąg arytmetyczny: $(a_1, a_1 + r, a_1 + r + r, a_1 + r + r + r, a_1 + 4r, a_1 + 5r, a_1 + 6r, \ldots)$, czyli

$$a_2 = a_1 + r,$$
$$a_3 = a_1 + 2r,$$
$$a_4 = a_1 + 3r,$$
$$a_5 = a_1 + 4r,$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

W ten sposób otrzymaliśmy tzw. wzór ogólny ciągu arytmetycznego albo wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

TWIERDZENIE

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie a_1 i o różnicy r, to wzór na n-ty wyraz ciągu, czyli wzór ogólny ciągu arytmetycznego, ma postać:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

PRZYKŁAD

Zapisz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, wiedząc, że $a_1 = 3$ oraz $r = -2$, a następnie oblicz a_2, a_5, a_{2n}.

1° Korzystamy ze wzoru: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ i zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot (-2)$$
$$a_n = 3 - 2n + 2$$
$$a_n = -2n + 5$$

2° Obliczamy wskazane wyrazy, podstawiając za n poszczególne wartości.

$$a_2 = -2 \cdot 2 + 5 = 1$$
$$a_5 = -2 \cdot 5 + 5 = -5$$
$$a_{2n} = -2 \cdot 2n + 5 = -4n + 5$$

Możemy zauważyć, że jeśli uporządkujemy wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = r \cdot n + a_1 - r$, to otrzymana postać jest postacią funkcji liniowej, gdzie współczynnik kierunkowy to r, a wyraz wolny to $a_1 - r$.

Oznacza to, że wykresem ciągu arytmetycznego są punkty leżące na pewnej prostej.

TWIERDZENIE

Jeśli ciąg jest zadany wzorem w postaci liniowej, to jest to ciąg arytmetyczny.

PRZYKŁAD

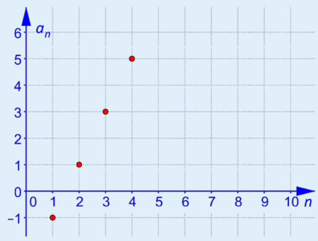
Dane są wzory ciągów: $a_n = 6n - 2$, $b_n = -n^2 - 2n$, $c_n = \frac{n-2}{n+2}$, $d_n = -n + 1$. Określ, które z nich są ciągami arytmetycznymi.

Ciągami arytmetycznymi są ciągi (a_n) i (d_n), ponieważ tylko ich wzory są w postaci wzorów funkcji liniowej.

PRZYKŁAD 1

P.5.2.1

Odczytaj z wykresu pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).



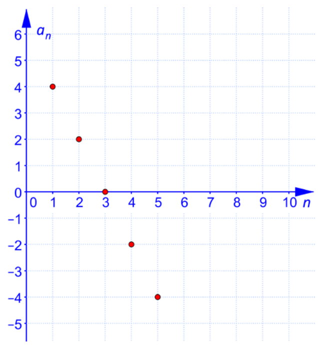
Szukamy wartości dla $n = 1$. Jest to wartość -1, więc $a_1 = -1$. Aby znaleźć różnicę r, należy odczytać wartość dla $n = 2$ i odjąć od niej wartość dla $n = 1$. Zatem $r = 2$.

$a_1 = -1$, $r = 2$

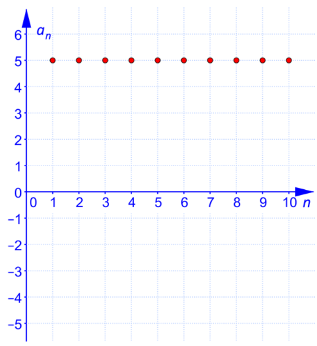
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Odczytaj z wykresu pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n):

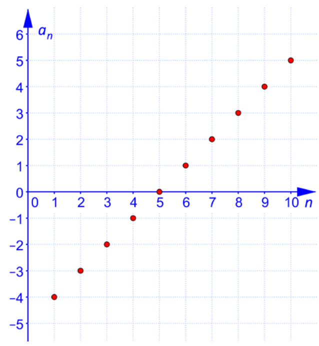
PRZYKŁAD 2.



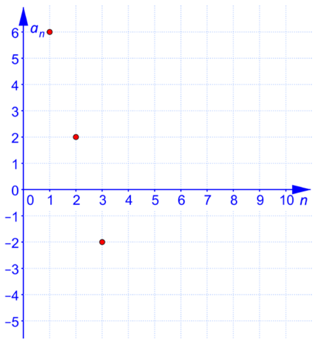
PRZYKŁAD 3.



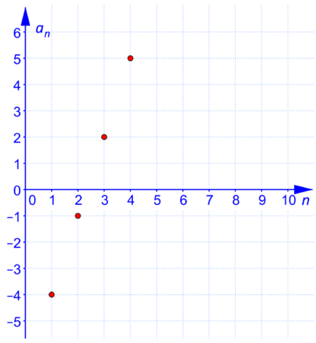
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



TWIERDZENIE

Pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n), $n > 1$ zachodzi zależność:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

Oznacza to, że w ciągu arytmetycznym różnica pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami jest stała.

Aby stwierdzić, czy dany ciąg jest arytmetyczny, należy zbadać różnicę między dwoma sąsiednimi wyrazami ciągu, tzn. należy obliczyć różnicę $a_{n+1} - a_n$ — jeśli ta różnica okaże się liczbą stałą (niezależną od n), to będzie to wówczas ciąg arytmetyczny.

PRZYKŁAD 1

P.5.2.2

Zbadaj, czy ciąg $a_n = 6n - 2$ jest arytmetyczny.

1° Obliczamy wyraz a_{n+1}.

$a_{n+1} = 6(n+1) - 2 = 6n + 6 - 2 = 6n + 4$

2° Badamy wartość różnicy $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = 6n + 4 - (6n - 2) =$
$= \cancel{6n} + 4 \cancel{-6n} + 2 = 6 = const$

3° Otrzymaliśmy stałą wartość równą 6, więc ciąg jest arytmetyczny.

PRZYKŁAD 2

Zbadaj, czy ciąg $d_n = -n + 1$ jest arytmetyczny.

1° Obliczamy wyraz d_{n+1}.

$d_{n+1} = -(n+1) + 1 = -n - \cancel{1} + \cancel{1} = -n$

2° Badamy wartość różnicy $d_{n+1} - d_n$.

$d_{n+1} - d_n = -n - (-n + 1) = \cancel{-n} \cancel{+n} - 1 = -1 = const$

3° Otrzymaliśmy stałą wartość równą -1, więc ciąg jest arytmetyczny.

PRZYKŁAD

P.5.2.3

Liczby $-1, 3, 7, \ldots$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, różnicę ciągu oraz wzór na wyraz ogólny.

1° Liczby $-1, 3, 7, \ldots$ tworzą ciąg arytmetyczny określony za pomocą wyliczenia elementów, czyli pierwszy wyraz ciągu to:

$a_1 = -1$

2° Różnicę r obliczymy, odejmując od wyrazu a_2 wyraz a_1.

$r = a_2 - a_1$
$r = 3 - (-1)$
$r = 4$

3° Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru na wyraz ogólny ciągu: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$.

$a_n = -1 + (n-1) \cdot 4$
$a_n = 4n - 5$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.2.1. Liczby $4, -1, -6, \ldots$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, różnicę ciągu oraz wzór na wyraz ogólny. Z.5.2.1

5.2.2. Liczby $-8, -18, -28, \ldots$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, różnicę ciągu oraz wzór na wyraz ogólny. Z.5.2.2

PRZYKŁAD

P.5.2.4

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_3 = 10$ i $a_{11} = 42$. Wyznacz wyraz a_1 oraz różnicę ciągu.

1° W ciągu arytmetycznym każdy wyraz różni się od następnego o stałą wartość (różnicę r). Gdy mamy a_3 i a_{11}, to znaczy, że wyrazy te różnią się o osiem różnic.

$a_{11} - a_3 = 8r$

2° Podstawiamy za $a_3 = 10$ i za $a_{11} = 42$ i obliczamy r.

$8r = 42 - 10$
$8r = 32 \quad |:8$
$r = 4$

3° Pierwszy wyraz obliczamy, odejmując od a_3 dwie różnice r.

$a_1 = a_3 - 2r$
$a_1 = 10 - 2 \cdot 4$
$a_1 = 10 - 8$
$a_1 = 2$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_9 = -10$ i $a_{37} = 46$. Wyznacz wyraz a_1 oraz różnicę ciągu.

PRZYKŁAD 3. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_5 = 2$ i $a_{18} = -50$. Wyznacz wyraz a_1 oraz różnicę ciągu.

PRZYKŁAD 4. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy $a_{26} = -8$ i $a_{43} = -25$. Wyznacz wyraz a_1 oraz różnicę ciągu.

PRZYKŁAD 1

P.5.2.5

Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $7,\ x,\ 21$. Oblicz x.

METODA 1 — jest to sposób uniwersalny, który może być wykorzystywany niezależnie od tego, czy wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, czy wyrażeniami arytmetycznymi.

1° Korzystamy z zależności pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ (ponieważ różnice każdych dwóch kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego są stałe).

$$x - 7 = 21 - x$$

2° Obliczamy x, czyli brakujący wyraz ciągu.

$$2x = 21 + 7$$
$$2x = 28 \quad |:2$$
$$x = 14$$

3° Szukany wyraz to $x = 14$.

METODA 2 — jest to krótszy sposób rozwiązania, ale może być wykorzystywany tylko wtedy, gdy dane wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, a nie wyrażeniami algebraicznymi, co pozwala na obliczenie różnicy r.

1° Pomiędzy wyrazem pierwszym i trzecim są dwie różnice, więc możemy zapisać równość.

$$a_1 = 7 \qquad a_3 = 21$$
$$a_3 - a_1 = 2r$$

2° Podstawiamy za a_1 i a_3 dane wartości i obliczamy różnicę r.

$$2r = 21 - 7$$
$$2r = 14 \quad |:2$$
$$r = 7$$

3° Obliczamy x, dodając do wyrazu pierwszego różnicę r.

$$x = 7 + 7 = 14$$

4° Szukany wyraz to $x = 14$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $5,\ x,\ 35$. Oblicz x.

PRZYKŁAD 3. Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $30,\ x,\ 8$. Oblicz x.

PRZYKŁAD 4

Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $25,\ x,\ y,\ 49$. Oblicz x i y.

METODA 1

1° Korzystamy z zależności pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ i analogicznie $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$, tworząc w ten sposób układ równań z dwiema niewiadomymi, który rozwiązujemy metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} x - 25 = y - x \\ y - x = 49 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 25 & |\cdot 2 \\ -x + 2y = 49 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4x - \cancel{2y} = 50 \\ -x + \cancel{2y} = 49 \end{cases}$$

$$3x = 99 \quad |:3$$

$$x = 33$$

2° Wstawiamy otrzymaną liczbę za x do drugiego równania i obliczamy y.

$$\begin{cases} x = 33 \\ 2x - y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 33 \\ 2 \cdot 33 - y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 33 \\ -y = 25 - 66 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 33 \\ -y = -41 & |\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 33 \\ y = 41 \end{cases}$$

3° Szukane wyrazy to $x = 33$, $y = 41$.

METODA 2

1° Pomiędzy wyrazem czwartym i pierwszym są trzy różnice, więc możemy zapisać równość.

$a_1 = 25 \qquad a_4 = 49$

$a_4 - a_1 = 3r$

2° Podstawiamy za a_4 i a_1 dane wartości i obliczamy różnicę r.

$3r = 49 - 25$

$3r = 24 \quad |:3$

$r = 8$

3° Obliczamy x, dodając do wyrazu pierwszego różnicę r.

$x = 25 + 8 = 33$

4° Obliczamy y, dodając do wyrazu drugiego, czyli x, różnicę r.

$y = 33 + 8 = 41$

5° Szukane wyrazy to $x = 33$, $y = 41$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 5. Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $10, x, y, 37$. Oblicz x i y.

PRZYKŁAD 6. Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $30, x, y, -12$. Oblicz x i y.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.2.3. Liczby $3x-2$; $3x+2$; $2x+9$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby. Z.5.2.3

5.2.4. Liczby $2x+2$; $15-3x$; $5x+2$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Znajdź te liczby. Z.5.2.4

PRZYKŁAD

P.5.2.6

Liczby x, y, 23 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=10$. Oblicz x i y.

1° Układamy równanie z zależności ciągu arytmetycznego $a_2-a_1=a_3-a_2$.

$$y-x=23-y$$

2° Zapisujemy układ równań, dodając do pierwszego równania drugie równanie podane w treści zadania. Rozwiązujemy układ równań, wykorzystując metodę przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ y-x=23-y \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x+y=10 \\ -x+2y=23 \end{cases}$$

$$3y=33 \quad |:3$$

$$y=11$$

3° Wstawiamy otrzymaną liczbę za y do pierwszego równania i obliczamy x.

$$x+11=10$$
$$x=10-11$$
$$x=-1$$

4° Szukane liczby to $x=-1$, $y=11$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

5.2.5. Ciąg $(x, y, x+y)$ jest arytmetyczny, a suma tych wyrazów jest równa 60. Oblicz x i y.

PRZYKŁAD

P.5.2.7

Wykaż, że dla każdego m ciąg $(m-4; 2m-1; 3m+2)$ jest arytmetyczny.

1° Jeśli ciąg jest arytmetyczny, to zachodzi zależność $a_2-a_1=a_3-a_2$. Zapisujemy więc równanie.

$$(2m-1)-(m-4)=(3m+2)-(2m-1)$$

2° Redukujemy i rozwiązujemy równanie.

$$2m-1-m+4=3m+2-2m+1$$
$$2m-m-3m+2m=2+1+1-4$$
$$0=0$$

3° Równanie jest nieoznaczone, więc istnieje nieskończenie wiele rozwiązań, a parametr m może być każdą dowolną liczbą rzeczywistą.

$m \in \boldsymbol{R}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

5.2.6. Wykaż, że nie istnieje parametr m, dla którego ciąg $(2m+3; m-1; 6)$ jest arytmetyczny.

TWIERDZENIE

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, wtedy gdy każdy wyraz tego ciągu oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego, co zapisujemy:

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

DOWÓD:

1° Korzystając ze wzoru ogólnego ciągu, wypiszemy trzy kolejne wyrazy ciągu.

$$a_{n-1} = a_1 + (n-2)\cdot r$$
$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$
$$a_{n+1} = a_1 + n\cdot r$$

2° Sumujemy pierwszy i trzeci wyraz ciągu.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = a_1 + (n-2)\cdot r + a_1 + n\cdot r =$$
$$= a_1 + nr - 2r + a_1 + nr = 2a_1 + 2nr - 2r =$$
$$= 2a_1 + (2n-2)r = 2a_1 + 2(n-1)r =$$
$$= 2[a_1 + (n-1)r] =$$

3° Wyrażenie w nawiasie to wyraz a_n, więc suma jest równa $2a_n$.

$$= 2\cdot a_n$$

4° Dzieląc obie strony przez 2, otrzymujemy zależność, którą należało udowodnić.

$$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n \quad |:2$$
$$\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} = a_n$$

Zauważmy, że jeśli przekształcimy powyższe równanie, to otrzymamy zależność pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \quad |\cdot 2$$
$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$
$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.2.7. Ciąg $(99, x, 165)$ jest arytmetyczny. Oblicz x. (Wykorzystaj wzór na średnią arytmetyczną)

5.2.8. Ciąg $(5, x, 11, y, 17)$ jest arytmetyczny. Oblicz x i y. (Wykorzystaj wzór na średnią arytmetyczną)

► Ciąg geometryczny

DEFINICJA

Ciągiem geometrycznym nazywamy ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy następny wyraz (począwszy od drugiego) powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę, którą oznacza się zazwyczaj literą q i nazywa ilorazem ciągu geometrycznego.

PRZYKŁAD

Ciąg $(1, 3, 9, 27, 81, \ldots)$ jest ciągiem geometrycznym, ponieważ każdy wyraz (począwszy od drugiego) powstaje przez pomnożenie przez liczbę 3 wyrazu poprzedniego, tzn. $3 = 1 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$, $27 = 9 \cdot 3$ itd.

Ciąg $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ również jest ciągiem geometrycznym o ilorazie równym $\frac{1}{2}$.

Ciąg $(3, 3, 3, 3, \ldots)$ jest także ciągiem geometrycznym, bo każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez pomnożenie go przez 1.

Ciąg $(3, 0, 0, 0, \ldots)$ jest także ciągiem geometrycznym, bo każdy wyraz następny powstaje z poprzedniego przez pomnożenie go przez 0.

Zauważmy, że jeśli a_1 — będzie wyrazem pierwszym, a q — ilorazem, to możemy zbudować następujący ciąg geometryczny: $(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q \cdot q, a_1 \cdot q \cdot q \cdot q, a_1 \cdot q^4, a_1 \cdot q^5, a_1 \cdot q^6, \ldots)$, czyli:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 \cdot q,\\
&a_3 = a_1 \cdot q^2,\\
&a_4 = a_1 \cdot q^3,\\
&a_5 = a_1 \cdot q^4,\\
&\vdots\\
&a_n = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy tzw. wzór ogólny ciągu geometrycznego albo wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego.

TWIERDZENIE

Jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q, to wzór na n-ty wyraz ciągu, czyli wzór ogólny ciągu geometrycznego ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

PRZYKŁAD

Zapisz wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że $a_1 = 3$ oraz $q = -\frac{1}{3}$, a następnie oblicz a_2, a_5, a_{2n}.

1° Korzystamy ze wzoru: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ i zapisujemy wzór ogólny ciągu.

$$a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

2° Obliczamy wskazane wyrazy, podstawiając za n poszczególne wartości.

$$a_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{2-1} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{1} = -1$$

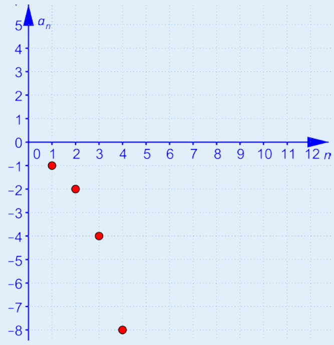
$$a_5 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{5-1} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{4} = 3 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{27}$$

$$a_{2n} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

PRZYKŁAD 1

P.5.2.8

Odczytaj z wykresu pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (a_n).



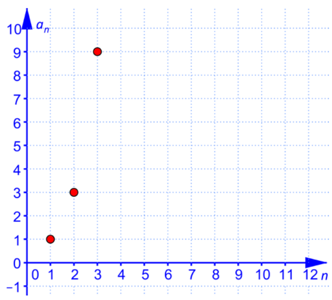
Szukamy wartości dla $n = 1$. Jest to wartość -1, więc $a_1 = -1$. Aby znaleźć iloraz q, należy odczytać wartość dla $n = 2$ i podzielić przez wartość dla $n = 1$. Zatem $q = 2$.

$$a_1 = -1, q = 2$$

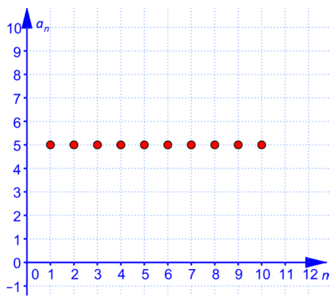
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Odczytaj z wykresu pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (a_n):

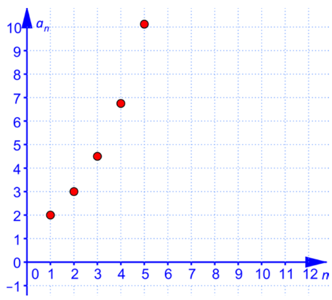
PRZYKŁAD 2.



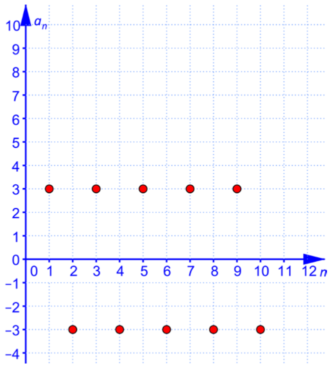
PRZYKŁAD 3.



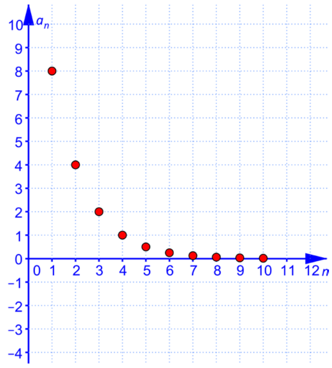
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



TWIERDZENIE

Pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n), $n > 1$ zachodzi zależność:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Oznacza to, że w ciągu geometrycznym o niezerowych wyrazach iloraz każdych dwóch sąsiednich wyrazów jest stały.

Aby stwierdzić, czy dany ciąg jest geometryczny, należy zbadać iloraz między dwoma sąsiednimi wyrazami ciągu (jeśli wyrazy nie są zerami), tzn. należy obliczyć iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ — jeśli ten iloraz okaże się liczbą stałą (niezależną od n), to będzie to wówczas ciąg geometryczny.

PRZYKŁAD 1

P.5.2.9

Zbadaj, czy ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 2^n$ jest geometryczny.

1° Obliczamy wyraz a_{n+1}.

$$a_{n+1} = 2^{n+1}$$

2° Badamy wartość ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2 = const$$

3° Otrzymaliśmy stałą wartość równą 2,
więc ciąg jest geometryczny.

PRZYKŁAD 2

Zbadaj, czy ciąg (d_n) określony wzorem $d_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ jest geometryczny.

1° Obliczamy wyraz d_{n+1}.

$$d_{n+1} = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

2° Badamy wartość ilorazu $\frac{d_{n+1}}{d_n}$.

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\cancel{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\cancel{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1-n} = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3} = const$$

3° Otrzymaliśmy stałą wartość równą $-\frac{1}{3}$,
więc ciąg jest geometryczny.

TWIERDZENIE

Dla trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), $n > 1$ prawdziwa jest zależność:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Dla dwóch dodatnich liczb a i b liczbę $\sqrt{ab}$ nazywamy ich średnią geometryczną.

Jeżeli wyrazy ciągu geometrycznego są liczbami dodatnimi, to każdy jego wyraz oprócz pierwszego (i ewentualnie ostatniego) jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, czyli $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$.

PRZYKŁAD

P.5.2.10

Liczby 1, 3, 9, … są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, iloraz ciągu oraz wzór na wyraz ogólny.

1° Liczby 1, 3, 9, … tworzą ciąg geometryczny określony za pomocą wyliczenia elementów, czyli pierwszy wyraz ciągu to:

$a_1 = 1$

2° Iloraz q ciągu geometrycznego możemy obliczyć, dzieląc przez siebie dwa kolejne wyrazy: a_2 przez a_1.

$q = \frac{3}{1}$

$q = 3$

3° Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru na wyraz ogólny ciągu: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

$a_n = 1 \cdot 3^{n-1}$

$a_n = 3^{n-1}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.2.9. Liczby 32, 16, 8, … są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, iloraz ciągu oraz wzór na wyraz ogólny. Z.5.2.9

5.2.10. Liczby -10, -40, -160, … są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego (a_n). Wyznacz pierwszy wyraz ciągu, iloraz ciągu oraz wzór na wyraz ogólny. Z.5.2.10

PRZYKŁAD

P.5.2.11

W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = 24$ i $a_7 = 192$. Wyznacz wyraz a_1 oraz iloraz ciągu.

1° Jeżeli podzielimy a_7 przez a_4, to otrzymamy q^3, ponieważ $\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q^3} = q^3$.

$$\frac{a_7}{a_4} = q^3$$

2° Obliczamy q, podstawiając odpowiednie wartości.

$$q^3 = \frac{192}{24} = 8$$
$$q = \sqrt[3]{8} = 2$$

3° Wyraz a_1 obliczamy, dzieląc wyraz a_4 przez q^3.

$$a_1 = a_4 : q^3$$
$$a_1 = 24 : 2^3 = 24 : 8 = 3$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_{10} = 4$ i $a_{15} = 128$. Wyznacz wyraz a_1 oraz iloraz ciągu.

PRZYKŁAD 3. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_6 = 10$ i $a_{10} = 160$. Wyznacz wyraz a_1 oraz iloraz ciągu.

PRZYKŁAD 4. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_3 = 9$ i $a_7 = 729$. Wyznacz wyraz a_1 oraz iloraz ciągu.

PRZYKŁAD 1

P.5.2.12

Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 6, x, 54. Znajdź x.

METODA 1 — podobnie jak w przypadku ciągów arytmetycznych jest to sposób uniwersalny, który może być wykorzystywany niezależnie od tego, czy wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, czy wyrażeniami arytmetycznymi.

1° Korzystamy z zależności pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ ponieważ ilorazy każdych dwóch kolejnych wryazów ciągu geometycznego są stałe i wyrazy są niezerowe.

$$\frac{x}{6} = \frac{54}{x}$$

2° Korzystamy z własności proporcji i obliczamy x, czyli brakujący wyraz ciągu.

$$x^2 = 324$$
$$x = \sqrt{324} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{324}$$
$$x = 18 \quad \text{lub} \quad x = -18$$

3° Szukany wyraz ciągu to $x = 18$ lub $x = -18$.

METODA 2 — podobnie jak w przypadku ciągów arytmetycznych, jest to krótszy sposób rozwiązania, ale może być wykorzystywany tylko wtedy, gdy dane wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, a nie wyrażeniami algebraicznymi, co pozwala na obliczenie ilorazu q.

1° Korzystamy z zależności pomiędzy pierwszym i trzecim wyrazem ciągu, wiedząc, że $a_3 = a_1 \cdot q^2$.

$$a_1 = 6 \qquad a_3 = 54$$
$$\frac{a_3}{a_1} = q^2$$

2° Podstawiamy za a_1 i a_3 dane wartości i obliczamy iloraz q.

$q^2 = \frac{54}{6} = 9$

$q = \sqrt[2]{9}$

$q = 3$ lub $q = -3$

3° Obliczamy x, mnożąc wyraz pierwszy przez q. Skoro q może mieć dwie wartości, to należy rozpatrzyć oba przypadki.

$x = 6 \cdot 3$ lub $x = 6 \cdot (-3)$

$x = 18$ lub $x = -18$

4° Szukany wyraz ciągu to $x = 18$ lub $x = -18$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 4, x, 100. Znajdź x.

PRZYKŁAD 3. Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 36, x, 4. Znajdź x.

PRZYKŁAD 4

Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 6, x, y, 48. Znajdź x i y.

METODA 1

1° Korzystamy z zależności pomiędzy dwoma kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ i analogicznie $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}$, tworząc w ten sposób układ równań z dwiema niewiadomymi.

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = \frac{y}{x} \\ \frac{y}{x} = \frac{48}{y} \end{cases}$$

2° Korzystamy z własności proporcji, a następnie rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} 6y = x^2 & |:6 \\ y^2 = 48x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{6}x^2 \\ y^2 - 48x = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{6}x^2\right)^2 - 48x = 0$$

$$\frac{1}{36}x^4 - 48x = 0 \quad |\cdot 36$$

$$x^4 - 1728x = 0$$

$$x(x^3 - 1728) = 0$$

$x = 0 \in \varnothing$, ponieważ jeśli $x = 0$, to również $y = 0$, a następny wyraz to 48, więc liczby nie utworzą ciągu geometrycznego

3° Wstawiamy otrzymaną liczbę za x do pierwszego równania i obliczamy y.

$x = \sqrt[3]{1728} = 12$

$y = \frac{1}{6} \cdot 12^2 = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24$

4° Szukane wyrazy to $x = 12$, $y = 24$.

METODA 2

1° Korzystamy z zależności pomiędzy pierwszym i czwartym wyrazem ciągu.

$a_1 = 6 \qquad a_4 = 48$

$\frac{a_4}{a_1} = q^3$

2° Podstawiamy za a_1 i a_4 dane wartości i obliczamy iloraz q.

$$q^3 = \frac{48}{6} = 8$$
$$q = \sqrt[3]{8}$$
$$q = 2$$

3° Obliczamy x, mnożąc wyraz pierwszy przez iloraz q.

$$x = 6 \cdot 2 = 12$$

4° Obliczamy y, mnożąc wyraz drugi, czyli x, przez iloraz q.

$$x = 12 \cdot 2 = 24$$

5° Szukane wyrazy to $x = 12$, $y = 24$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 5. Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 4, x, y, 108. Znajdź x i y.

PRZYKŁAD 6. Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego 40, x, y, 5. Znajdź x i y.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.2.11. Dane są wyrazy ciągu geometrycznego a; $a + 2$; 8. Oblicz a. **Z.5.2.11**

5.2.12. Dane są kolejne wyrazy ciągu geometrycznego a; $a + 4$; 18. Wyznacz wyrazy tego ciągu. **Z.5.2.12**

5.2.13. Liczby 5, x, y w podanej kolejności tworzą rosnący ciąg geometryczny, przy czym $y - x = 10$. Oblicz x i y.

PRZYKŁAD

Liczby x, y, 8 w podanej kolejności tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, a liczby x, $y - 1$, 8 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i y.

1° Korzystamy z zależności pomiędzy trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

2° Korzystamy z zależności pomiędzy trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

3° Podstawiamy odpowiednie wartości, tworząc układ równań.

$$\begin{cases} y - x = 8 - y \\ \dfrac{y-1}{x} = \dfrac{8}{y-1} \end{cases}$$

4° Rozwiązujemy układ równań, wyznaczając wartość x z pierwszego równania i podstawiając ją do drugiego równania.

$$\begin{cases} -x = 8 - y - y \\ (y-1)(y-1) = 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = 8 - 2y \quad | \cdot (-1) \\ y^2 - y - y + 1 = 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8 + 2y \\ y^2 - 2y + 1 = 8x \end{cases}$$

$$y^2-2y+1=8(-8+2y)$$
$$y^2-2y+1=-64+16y$$
$$y^2-2y-16y+1+64=0$$
$$y^2-18y+65=0$$

5° Otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które rozwiązujemy.

$$\Delta=18^2-4\cdot 1\cdot 65=324-260=64$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$$

$$\begin{cases} y_1=\frac{18-8}{2\cdot 1}=\frac{10}{2}=5 \\ x_1=-8+2\cdot 5=2 \end{cases}$$

lub

$$\begin{cases} y_2=\frac{18+8}{2\cdot 1}=\frac{26}{2}=13 \\ x_2=-8+2\cdot 13=18 \end{cases}$$

Rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, ponieważ ciąg powinien być rosnący.

6° Szukane wartości to $x=2$, $y=5$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

5.2.14. Liczby x, y, 11 w podanej kolejności tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, a liczby x; $y+2$; 27 w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny. Oblicz x i y.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.5.2

MATURA MATURA MATURA MATURA

5.2.15. W ciągu arytmetycznym (a_n) określonym wzorem $a_n=n+2$ dla $n\geq 1$ różnica ciągu jest równa:

A. -1 **B.** 1 **C.** 2 **D.** -2

5.2.16. W ciągu arytmetycznym drugi wyraz jest równy 6, a siódmy 31. Różnica tego ciągu to:

A. 5 **B.** 25 **C.** -5 **D.** -25

5.2.17. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_2=10$ i $a_6=42$. Wtedy wyraz a_1 jest równy:

A. 2 **B.** 8 **C.** 18 **D.** -22

5.2.18. Ciąg $(24; 18; x+8)$ jest arytmetyczny. Wtedy:

A. $x=4$ **B.** $x=2$ **C.** $x=-2$ **D.** $x=-6$

5.2.19. Ciąg arytmetyczny (a_n), określony wzorem $a_n = 4n - 3$, jest:

A. malejący, **B.** rosnący, **C.** stały, **D.** nierosnący.

5.2.20. Dany jest ciąg arytmetyczny $(x+1;\ x+2;\ x+3)$. Wynika z tego, że:

A. $x = 1$ **B.** $x \in \varnothing$ **C.** $x \in \boldsymbol{R}$ **D.** $x = 0$

5.2.21. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony wzorem $a_n = 5 \cdot 2^{n+2}$ dla $n \geq 1$. Iloraz tego ciągu wynosi:

A. 5 **B.** 2 **C.** 10 **D.** 4

5.2.22. W rosnącym ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1 = 3$ i $a_3 = 27$. Wtedy a_5 równy jest:

A. 81 **B.** 243 **C.** 729 **D.** 9

5.2.23. Ciąg $(x;\ x+2;\ 2x+1)$ jest geometryczny. Wtedy x może być równy:

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

5.2.24. Dany jest rosnący ciąg geometryczny $\left(\frac{2}{3}, a, \frac{3}{2}\right)$. Wówczas:

A. $a = 1$ **B.** $a = -\frac{2}{3}$ **C.** $a = -\frac{3}{2}$ **D.** $a = -1$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

5.2.25. Dane są trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $2x+1;\ x;\ x-2$. Oblicz x. **2 pkt**

5.2.26. Wykaż, że dla każdego m ciąg $(2m-3;\ 3m+4;\ 4m+11)$ jest arytmetyczny. **2 pkt**

5.2.27. Liczby $125,\ x,\ 5$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu. **2 pkt**

5.2.28. Ciąg $(10, x, 18)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(y, x, 28, z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y, z. **4 pkt**

5.2.29. Ciąg $(a+4;\ a+8;\ 16)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a, b, 36, c)$ jest rosnącym ciągiem geometrycznym. Oblicz a, b, c. **4 pkt**

5.3 ▶ Zastosowanie wzoru na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

WPROWADZENIE

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem. Rozważmy nowy ciąg zbudowany z ciągu (a_n) wg zasady:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$ suma pierwszych dwóch wyrazów ciągu (a_n)

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ suma pierwszych trzech wyrazów ciągu (a_n)

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ suma pierwszych czterech wyrazów ciągu (a_n)

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$ suma pierwszych n wyrazów ciągu (a_n)

W ten sposób powstał nowy ciąg (S_n), tzw. ciąg sum częściowych.

PRZYKŁAD

Dany jest ciąg arytmetyczny $(2, 4, 6, 8, \ldots)$. Wówczas ciąg sum częściowych ma postać: $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$.

Dany jest ciąg geometryczny $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$. Wówczas ciąg sum częściowych ma postać: $(2, 6, 14, 30, 62, \ldots)$.

DEFINICJA

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu (czyli n-ty wyraz ciągu sum częściowych) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

PRZYKŁAD 1

P.5.3.1

Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze: $a_n = 2n - 6$. Oblicz sumę pierwszych piętnastu wyrazów tego ciągu.

1° Obliczamy wyraz a_1 i a_{15}, korzystając ze wzoru ogólnego ciągu $a_n = 2n - 6$.

$a_1 = 2 \cdot 1 - 6 = -4$

$a_{15} = 2 \cdot 15 - 6 = 24$

2° Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{-4 + 24}{2} \cdot 15 =$$

$$= \frac{20}{2} \cdot 15 = 10 \cdot 15 = 150$$

3° Suma pierwszych piętnastu wyrazów ciągu wynosi 150.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze $a_n = -n + 11$. Oblicz sumę pierwszych dziewięciu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD 3. Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze $a_n = 4n - 6$. Oblicz sumę pierwszych dwudziestu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD 4. Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze $a_n = -2n + 4$. Oblicz sumę pierwszych stu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD

P.5.3.2

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 10, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 24. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

1° Obliczamy sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu ze wzoru: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8$$

2° Skoro wiemy, że suma wynosi 24, to możemy zapisać równanie. Rozwiązujemy równanie, aby obliczyć wyraz a_8.

$$24 = \frac{10 + a_8}{\cancel{2}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}}$$
$$24 = (10 + a_8) \cdot 4$$
$$24 = 40 + 4a_8$$
$$-4a_8 = 40 - 24$$
$$-4a_8 = 16 \quad |:(-4)$$
$$a_8 = -4$$

3° Ósmy wyraz ciągu jest równy -4.

PRZYKŁAD

P.5.3.3

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 5, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy 17. Oblicz sumę siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

1° Pierwszy i czwarty wyraz ciągu różnią się o trzy różnice r, więc zapisujemy równanie i podstawiamy dane wartości.

$$a_4 - a_1 = 3r$$
$$3r = 17 - 5$$
$$3r = 12 \quad |:3$$
$$r = 4$$

2° Do obliczenia sumy siedmiu wyrazów potrzebny nam siódmy wyraz ciągu. Obliczamy go, posługując się wzorem ogólnym: $a_n = a_1 + (n-1)r$, czyli dodając do wyrazu pierwszego a_1 sześć różnic r.

$$a_7 = a_1 + 6r = 5 + 6 \cdot 4 = 5 + 24 = 29$$

3° Obliczamy sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu ze wzoru: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$$

$$S_7 = \frac{5 + 29}{2} \cdot 7 = \frac{34}{2} \cdot 7 = 17 \cdot 7 = 119$$

4° Suma siedmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi 119.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.3.1. Oblicz sumę stu początkowych dodatnich liczb naturalnych.

5.3.2. Drugi wyraz ciągu arytmetycznego wynosi 7, a piąty 25. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

5.3.3. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego wynosi -18, a suma dziesięciu początkowych wyrazów wynosi zero. Wyznacz wzór ogólny ciągu.

5.3.4. Liczby $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę pięćdziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

5.3.5. Miary kątów czworokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 22°. Oblicz miarę najmniejszego kąta tego czworokąta. **Z.5.3.5**

Czy wiesz, że...

Dla dowolnego ciągu (a_n) istnieje ścisła zależność między wyrazami a sumą S_n początkowych wyrazów ciągu (a_n).

1° Suma jednego wyrazu ciągu jest równa pierwszemu wyrazowi tego ciągu, czyli $S_1 = a_1$.

2° Ostatni wyraz ciągu można obliczyć, odejmując od sumy n początkowych wyrazów ciągu sumę $n-1$ początkowych wyrazów tego ciągu, czyli $a_n = S_n - S_{n-1}$.

DOWÓD: **P.5.3.4**

1° Przyjmijmy, że S_n oraz S_{n-1} to sumy n i $n-1$ początkowych wyrazów ciągu (a_n). Zapisujemy:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$$

2° Odejmujemy od sumy S_n sumę S_{n-1}.

$$\begin{array}{rl} & S_n = \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + a_n \\ - & S_{n-1} = \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} \\ \hline & S_n - S_{n-1} = a_n \end{array}$$

3° Otrzymaliśmy zależność, którą należało udowodnić. Zatem równość $a_n = S_n - S_{n-1}$ jest prawdziwa dla dowolnego ciągu (a_n), gdzie $n \geq 1$.

PRZYKŁAD

P.5.3.5

Suma S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu.

1° Korzystamy ze wzoru na wyraz ogólny, gdy dana jest suma:
$a_n = S_n - S_{n-1}$.

2° Wyznaczamy wzór S_{n-1}.

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) =$$
$$= n^2 - 2n + 1 - 2n + 2 = n^2 - 4n + 3$$

3° Wyznaczamy wzór (a_n).

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) =$$
$$= \cancel{n^2} - 2n - \cancel{n^2} + 4n - 3 = 2n - 3$$

4° Wzór na n-ty wyraz ciągu to $a_n = 2n - 3$.

PRZYKŁAD

P.5.3.6

Dana jest suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona wzorem $S_n = 2n^2$, $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

1° Skorzystamy ze wzoru na wyraz ogólny ciągu, gdy dany jest wzór na sumę ciągu: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

2° Wyznaczamy wzór S_{n-1}.

$$S_{n-1} = 2(n-1)^2 = 2(n^2 - 2n + 1) = 2n^2 - 4n + 2$$

3° Wyznaczamy wzór a_n.

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - (2n^2 - 4n + 2) =$$
$$= \cancel{2n^2} - \cancel{2n^2} + 4n - 2 = 4n - 2$$

4° Aby sprawdzić, czy ciąg (a_n) jest arytmetyczny, wyznaczamy wzór a_{n+1} w celu zbadania, czy różnica $a_{n+1} - a_n = \text{const}$.

$$a_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 4 - 2 = 4n + 2$$
$$a_{n+1} - a_n = 4n + 2 - (4n - 2) =$$
$$= \cancel{4n} + 2 - \cancel{4n} + 2 = 4 = const$$

5° Zatem ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.3.6. Suma S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = 5n - n^2$. Wyznacz wzór ogólny ciągu.

5.3.7. Dana jest suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określona wzorem $S_n = -n^2 + n$. Wykaż, że ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem arytmetycznym.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

5.3.8. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony wzorem $a_n = -2n + 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

A. 100 **B.** 90 **C.** -90 **D.** -100

5.3.9. W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $a_2 = 15$ i $a_4 = 11$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. 53 **B.** 36 **C.** 56 **D.** 28

5.3.10. Liczby 2, 5, 8 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego (a_n). Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

A. 200 **B.** 50 **C.** 80 **D.** 100

5.3.11. Suma pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 45, a piąty wyraz tego ciągu ma wartość 13. Wtedy:

A. $a_1 = 7$ **B.** $a_1 = 5$ **C.** $a_1 = 11$ **D.** $a_1 = 6$

5.3.12. W ciągu arytmetycznym $a_1 = 5$ oraz $a_{10} = 15$. Wówczas suma S_{10} dziesięciu początkowych wyrazów ciągu jest równa:

A. 200 **B.** 20 **C.** 220 **D.** 100

5.3.13. Suma siedmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym: $a_2 = 3$ i $a_4 = 9$, wynosi:

A. 18 **B.** 48 **C.** 63 **D.** 45

MATURA — ZADANIA OTWARTE

5.3.14. Szósty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 12, a suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 27. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu. **2 pkt**

5.3.15. Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 5, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy 11. Oblicz sumę dwunastu początkowych wyrazów tego ciągu. **2 pkt**

5.3.16. Liczby 5, 10, 15, 20, … są kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Oblicz sumę trzydziestu pierwszych wyrazów tego ciągu. **2 pkt**

5.3.17. Dany jest ciąg arytmetyczny o wzorze $a_n = 4n - 3$. Wykaż, że suma S_n tego ciągu wynosi $S_n = 2n^2 - n$ dla $n \geq 0$. **2 pkt**

5.4 ► Zastosowanie wzoru na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

DEFINICJA

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu (czyli n-ty wyraz ciągu sum częściowych) wyraża się wzorem:

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 & \text{dla } q \neq 1 \text{ i dowolnej liczby naturalnej dodatniej } n \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \text{ i dowolnej liczby naturalnej dodatniej } n \end{cases}$$

PRZYKŁAD

P.5.4.1

Dany jest ciąg geometryczny o wzorze: $a_n = 3 \cdot 2^n$. Oblicz sumę pierwszych dziesięciu wyrazów tego ciągu.

1° Obliczamy wyraz a_1, korzystając ze wzoru ogólnego ciągu $a_n = 3 \cdot 2^n$.

$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$

2° Obliczamy wyraz a_2.

$a_2 = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

3° Obliczamy iloraz q ze wzoru $q = \frac{a_2}{a_1}$.

$q = \frac{12}{6} = 2$

4° Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu: $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$.

$S_{10} = \frac{1-2^{10}}{1-2} \cdot 6 = \frac{1-1024}{1-2} \cdot 6 = \frac{-1023}{-1} \cdot 6 = 1023 \cdot 6 = 6138$

5° Suma pierwszych dziesięciu wyrazów ciągu wynosi 6138.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dany jest ciąg geometryczny o wzorze $a_n = 3^{n-1}$. Oblicz sumę pierwszych sześciu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD 3. Dany jest ciąg geometryczny o wzorze $a_n = 2 \cdot 4^{n+1}$. Oblicz sumę pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD 4. Dany jest ciąg geometryczny o wzorze $a_n = 5^{n-1}$. Oblicz sumę pierwszych siedmiu wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD

P.5.4.2

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), których suma $S_n = 63$, jeżeli wiadomo, że $a_1 = 1$, a iloraz $q = 2$.

1° Korzystamy ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego: $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$ i obliczamy wartość n.

$$63 = \frac{1-2^n}{1-2} \cdot 1$$
$$63 = \frac{1-2^n}{-1} \quad |\cdot(-1)$$
$$-63 = 1 - 2^n$$
$$2^n = 1 + 63$$
$$2^n = 64$$
$$n = 6$$

2° Szukana liczba wyrazów ciągu wynosi 6.

PRZYKŁAD

Oblicz sumę $1 + 3 + 9 + \ldots + 243$.

1° Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$$a_1 = 1$$

2° Wyznaczamy iloraz q ciągu.

$$q = \frac{3}{1} = 3$$

3° Korzystamy ze wzoru ogólnego ciągu geometrycznego: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, aby wyznaczyć liuczbę wszystkich wyrazów ciągu, czyli n.

$$1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

4° Jeśli wiemy, że ostatni wyraz ciągu ma wartość 243 to możemy zapisać równanie.

$$3^{n-1} = 243$$
$$3^{n-1} = 3^5$$
$$n - 1 = 5$$
$$n = 6$$

5° Obliczamy sumę sześcu początkowych wyrazów ciągu, korzystając ze wzoru: $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$.

$$S_6 = \frac{1-3^6}{1-3} \cdot 1 = \frac{1-729}{-2} = \frac{-728}{-2} = 364$$

6° Suma$1 + 3 + 9 + \ldots + 243 = 364$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

5.4.1. Oblicz sumę $5 - 10 + 20 - 40 + \ldots + 1280 - 2560$.

5.4.2. Oblicz sumę $\pi + 2\pi + 4\pi + \ldots + 128\pi$.

5.4.3. Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n), których suma $S_n = 242$, jeżeli wiadomo, że $a_1 = 2$, a iloraz $q = 3$.

5.4.4. Wyznacz sumę sześciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu geometrycznego (a_n), wiedząc, że $a_2 = 10$ i $a_4 = 1000$.

5.4.5. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = 5 \cdot 2^n$. Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma wynosi 2550.

5.4.6. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n), jeżeli wiadomo, że suma $S_4 = 150$, a iloraz $q = \frac{1}{2}$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

5.4.7. W ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, wyraz $a_1 = 4$, natomiast iloraz $q = -2$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

A. -1364 **B.** 4092 **C.** 1364 **D.** -1023

5.4.8. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = 2^{n-1}$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

A. 257 **B.** 127 **C.** 255 **D.** 510

5.4.9. Liczby 2, 6, 18 w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego (a_n). Suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

A. -728 **B.** 728 **C.** 364 **D.** -364

5.4.10. Suma $4 + 8 + 16 + \ldots + 128$ wynosi:

A. 256 **B.** 255 **C.** -255 **D.** 252

5.4.11. Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

A. $-\frac{31}{32}$ **B.** $\frac{15}{16}$ **C.** $\frac{9}{10}$ **D.** $\frac{31}{32}$

5.4.12. Dany jest skończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1 = 2$, $q = -1$ i $n = 11$. Wynika z tego, że:

A. $S_{11} = 2$ **B.** $S_{11} = -2$ **C.** $S_{11} = 13$ **D.** $S_{11} = -13$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

5.4.13. Boki czworokąta są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $\frac{3}{2}$. Wyznacz długości boków tego czworokąta, wiedząc, że jego obwód równy jest 195. **2 pkt**

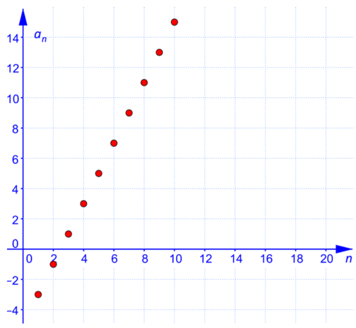
5.4.14. Dane są kwadraty $K_1, K_2, K_3, \ldots$. Kwadrat K_1 ma bok o długości p. Kwadrat K_2 ma bok o połowę mniejszy od K_1, kwadrat K_3 ma bok o połowę mniejszy od K_2 itd. Oblicz pole kwadratu K_{10}. **2 pkt**

► Podsumowanie najważniejszych informacji dotyczących ciągów

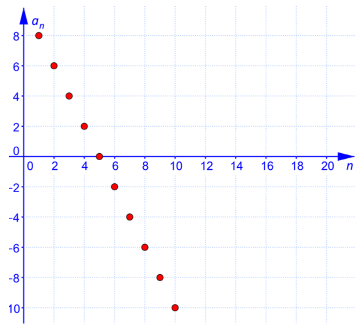
	CIĄG ARYTMETYCZNY	CIĄG GEOMETRYCZNY
Cecha charakterystyczna	Każdy następny wyraz powstaje przez dodanie do poprzedniego stałej liczby (r).	Każdy następny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez stałą liczbę (q).
Wzór na wyraz ogólny ciągu	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Wzór na sumę n początkowych wyrazów	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$ dla $q \neq 1$ $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$ (ciąg stały)
Zależność między kolejnymi wyrazami	$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = \ldots = r$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \ldots = q$ dla ciągu o niezerowych wyrazach
Średnie	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ średnia arytmetyczna	$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ średnia geometryczna dla nieujemnych wyrazów ciągu

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

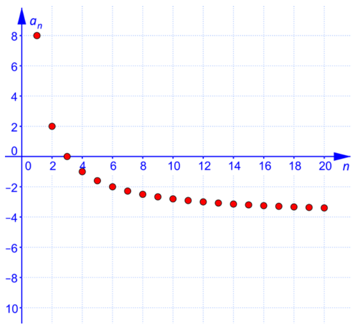
P.5.1.3 PRZYKŁAD 2.



PRZYKŁAD 3.



PRZYKŁAD 4.



5.1.1.

a. $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$

b. $a_1 = 5$, $a_2 = 25$, $a_3 = 125$, $a_4 = 625$

c. $a_1 = 3\frac{1}{2}$, $a_2 = 4$, $a_3 = 4\frac{1}{4}$, $a_4 = 4\frac{2}{5}$

d. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 9$, $a_4 = 64$

5.1.2.

a. $a_5 = 50$

$a_{10} = 200$

$a_{k+1} = 2k^2 + 4k + 2$

$a_4 = 2n^2 + 4nm + 2m^2$

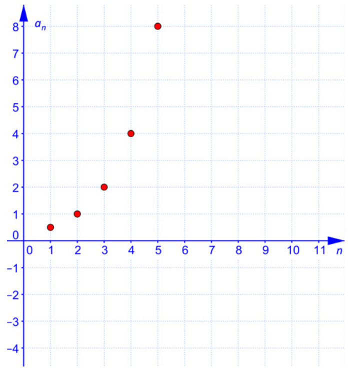
b. $a_5 = \frac{1}{5}$

$a_{10} = \frac{1}{10}$

$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$

$a_4 = \frac{1}{n+m}$

5.1.3.



5.1.4. $n = 10$

5.1.5. $a_5 = \frac{22}{125}$

5.1.6. $a_{100} = 11$

5.1.7. dwa wyrazy: $a_1 = 10$, $a_2 = 4$

5.1.8. pięć wyrazów

5.1.9. $a_n = -3n + 11$, $a_{n+1} = -3n + 8$

$a_{n+1} - a_n = -3n + 8 - (-3n + 11) = -\cancel{3n} + 8 + \cancel{3n} - 11 = -3 < 0$

Ciąg (a_n) jest malejący.

5.1.10.* $a_n = \frac{2}{n}$, $a_{n+1} = \frac{2}{n+1}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2}{n(n+1)} = \frac{-2}{\underbrace{n(n+1)}_{\text{mianownik zawsze dodatni dla } n \in \mathbf{N}_+}} < 0$$

Ciąg (a_n) jest malejący.

5.1.11. C **5.1.12.** A **5.1.13.** A **5.1.14.** D **5.1.15.** A
5.1.16. D **5.1.17.** B **5.1.18.** C

5.1.19. $a_1 = -9$, $a_2 = -8$, $a_3 = -5$

5.1.20. $b_n = 8n + 12$, $b_{n+1} = 8n + 20$

$b_{n+1} - b_n = 8n + 20 - (8n + 12) =$

$= \cancel{8n} + 20 - \cancel{8n} - 12 = 8 > 0$

Ciąg (b_n) jest rosnący.

P.5.2.1 PRZYKŁAD 2. $a_1 = 4$, $r = -2$

PRZYKŁAD 3. $a_1 = 5$, $r = 0$

PRZYKŁAD 4. $a_1 = -4$, $r = 1$

PRZYKŁAD 5. $a_1 = 6$, $r = -4$

PRZYKŁAD 6. $a_1 = -4$, $r = 3$

5.2.1. $a_1 = 4$, $r = -5$, $a_n = -5n + 9$

5.2.2. $a_1 = -8$, $r = -10$, $a_n = -10n + 2$

P.5.2.4 PRZYKŁAD 2. $a_1 = -26$, $r = 2$

PRZYKŁAD 3. $a_1 = 18$, $r = -4$

PRZYKŁAD 4. $a_1 = 17$, $r = -1$

P.5.2.5 PRZYKŁAD 2. $x = 20$

PRZYKŁAD 3. $x = 19$

PRZYKŁAD 5. $x = 19,\ y = 28$

PRZYKŁAD 6. $x = 16,\ y = 2$

5.2.3. 7, 11, 15

5.2.4. 6, 9, 12

5.2.5. $x = 10,\ y = 20$

5.2.6.

$$m - 1 - (2m + 3) = 6 - (m - 1)$$
$$m - 1 - 2m - 3 = 6 - m + 1$$
$$m - 2m + m = 6 + 1 + 1 + 3$$
$$0 \neq 11$$

Równanie sprzeczne, więc $m \in \varnothing$

5.2.7. $x = 132$

5.2.8. $x = 8,\ y = 14$

P.5.2.8 PRZYKŁAD 2. $a_1 = 1,\ q = 3$

PRZYKŁAD 3. $a_1 = 5,\ q = 1$

PRZYKŁAD 4. $a_1 = 2,\ q = 1\frac{1}{2}$

PRZYKŁAD 5. $a_1 = 3,\ q = -1$

PRZYKŁAD 6. $a_1 = 8,\ q = \frac{1}{2}$

5.2.9. $a_1 = 32,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

5.2.10. $a_1 = -10,\ q = 4,\ a_n = -10 \cdot 4^{n-1}$

P.5.2.11 PRZYKŁAD 2. $a_1 = \frac{1}{128},\ q = 2$

PRZYKŁAD 3. $a_1 = \frac{5}{16},\ q = 2$

PRZYKŁAD 4. $a_1 = 1,\ q = 3$

P.5.2.12 PRZYKŁAD 2. $x = 20 \vee x = -20$

PRZYKŁAD 3. $x = 12 \vee x = -12$

PRZYKŁAD 5. $x = 12,\ y = 36$

PRZYKŁAD 6. $x = 20,\ y = 10$

5.2.11. $a = 2$

5.2.12. 2, 6, 18 $\vee$ 8, 12, 18

5.2.13. $x = 10,\ y = 20$

5.2.14. $x = 3,\ y = 7$

5.2.15. B	**5.2.16.** A	**5.2.17.** A	**5.2.18.** A	**5.2.19.** B
5.2.20. C	**5.2.21.** B	**5.2.22.** B	**5.2.23.** A	**5.2.24.** A

5.2.25. $x = 1$

5.2.26.

$$3m + 4 - (2m - 3) = 4m + 11 - (3m + 4)$$
$$3m + 4 - 2m + 3 = 4m + 11 - 3m - 4$$
$$m + 7 = m + 7$$
$$0 = 0$$

Równanie nieoznaczone, więc $m \in \boldsymbol{R}$

5.2.27. $a_5 = \frac{1}{5}$

5.2.28. $x = 14,\ y = 7,\ z = 56$

5.2.29. $a = 4,\ b = 12,\ c = 108$

P.5.3.1 PRZYKŁAD 2. $S_9 = 54$ PRZYKŁAD 4. $S_{100} = -9700$

PRZYKŁAD 3. $S_{20} = 720$

5.3.1. $S_{100} = 5050$

5.3.2. $S_5 = 65$

5.3.3. $a_n = 4n - 22$

5.3.4. $S_{50} = 1275\sqrt{2}$

5.3.5. 57°

5.3.6. $a_n = -2n + 6$

5.3.7. $S_n = -n^2 + n,\ S_{n-1} = -n^2 + 3n - 2$

$a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + n - (-n^2 + 3n - 2) = -2n + 2,\ a_{n+1} = -2n$

$a_{n+1} - a_n = -2$

Zatem ciąg (a_n) jest malejącym ciągiem arytmetycznym

5.3.8.	D	**5.3.9.**	C	**5.3.10.**	D	**5.3.11.**	B	**5.3.12.**	D
5.3.13.	C	**5.3.14.**	$a_1 = -3$	**5.3.15.**	$S_{12} = 192$	**5.3.16.**	$S_{30} = 2325$		

5.3.17. $a_n = 4n - 3 \Longrightarrow a_1 = 1$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 4n - 3}{2} \cdot n = \frac{4n - 2}{2} \cdot n = 2n^2 - n$$

P.5.4.1 PRZYKŁAD 2. $S_6 = 364$ PRZYKŁAD 4. $S_7 = 19\,531$

PRZYKŁAD 3. $S_5 = 10\,912$

5.4.1. -1705

5.4.2. 255π

5.4.3. $n = 5$

5.4.4. $S_6 = 111\,111$

5.4.5. $n = 8$

5.4.6. $a_1 = 80$

5.4.7.	A	**5.4.8.**	C	**5.4.9.**	B	**5.4.10.**	D	**5.4.11.**	D
5.4.12.	A	**5.4.13.**	24, 36, 54, 81			**5.4.14.**	$P_{K_{10}} = \frac{p^2}{2^{18}}\ j^2$		

ISBN: 978-83-63975-15-9

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY