6

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Trygonometria

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
Simon - id. 276995/ CC0 Public Domain; HebiFot - id. 625155/ CC0 Public Domain; jarmoluk - id. 488709/ CC0 Public Domain; PublicDomainPictures - id. 2269/ CC0 Public Domain; violetta - id. 286787/ CC0 Public Domain; Counselling - id. 5508677/ CC0 Public Domain; k_r_craft - id. 402953/ CC0 Public Domain; realworkhard - id. 99484/ CC0 Public Domain; Unsplash - id. 801715/ CC0 Public Domain;

Copyright by Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-16-6

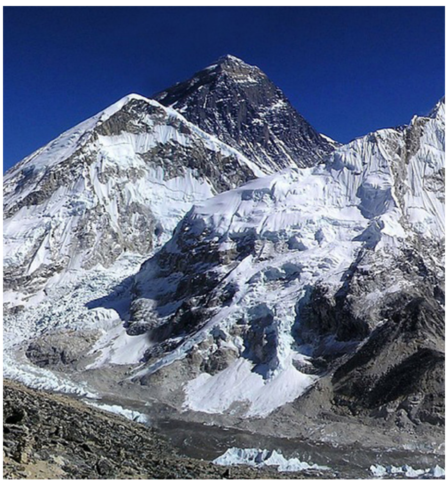
Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

Trygonometria

Trygonometria to dział matematyki zajmujący się badaniem związków między kątami i bokami trójkątów. Jej początki sięgają starożytności i wiążą się m.in. z wyznaczaniem tras w żegludze morskiej i określaniem położenia ciał niebieskich. Oczywiście ówcześni matematycy nie stosowali trygonometrii w dzisiejszej postaci. Opierali się na zależnościach pomiędzy bokami trójkąta równobocznego, kwadratu, pięciokąta i dziesięciokąta foremnego a promieniem opisanego na nich okręgu. Pierwsze tablice trygonometryczne (wtedy jeszcze bardzo proste) ułożył Hipparch około 180 roku p.n.e. W 150 roku n.e. Klaudiusz Ptolemeusz zamieścił w swej pracy tablice sinusów kątów od 1 do 90 stopni. Od V do XII wieku trygonometrią zajmowali się także Hindusi. Ich dzieła były tłumaczone z sanskrytu na język arabski, następnie z arabskiego na łacinę. Wskutek pomyłki jednego z tłumaczy powstała nazwa „sinus" (łac. „zatoka, zagięcie").

Użyteczność trygonometrii jest nie do przecenienia. Jednym z ciekawszych zastosowań trygonometrii było ustalenie, który ze szczytów himalajskich jest najwyższy, kiedy to z powodu sytuacji politycznej nie można było wykonywać pomiarów na terenie Nepalu i Tybetu, gdzie leżą Himalaje. W połowie XIX wieku brytyjscy mierniczy wykonywali pomiary nawet z odległości 150 kilometrów od danego obiektu, stosując narzędzie zwane teodolitem. Wykorzystując metody trygonometryczne, ustalili oni w 1852 roku, że najwyższa góra w Himalajach (i zarazem najwyższa na świecie) ma wysokość 8840 metrów n.p.m. Brytyjczycy nazwali ją imieniem szefa służb mierniczych, George'a Everesta.



Dziś wiemy, dzięki pomiarom dokonywanym z zastosowaniem nowoczesnych metod i technologii, takich jak system GPS, że wysokość tej góry wynosi w istocie 8848 m n.p.m. Jak widać, błąd w pomiarach z wykorzystaniem obliczeń trygonometrycznych był nieznaczny. Co ciekawe, dzięki trygonometrii wysokość Mount Everestu była zatem znana na 100 lat przed jego pierwszym zdobyciem, które miało miejsce w 1953 roku. Jak widać, opisywanie świata bez trygonometrii jest zupełnie niemożliwe, a potrzeba wykorzystywania jej narzędzi w dzisiejszych czasach jest nadal niezbędna.

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA — ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

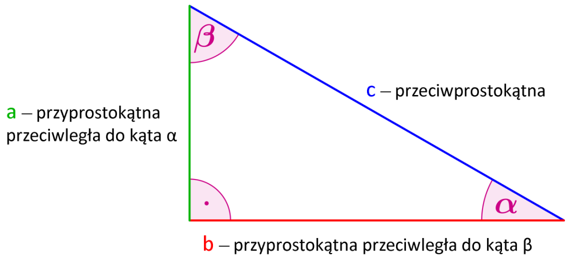
6.1 ▶ Wykorzystanie definicji i wyznaczanie wartości sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°

▶ Trójkąt prostokątny — wprowadzenie

TWIERDZENIE PITAGORASA

W trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

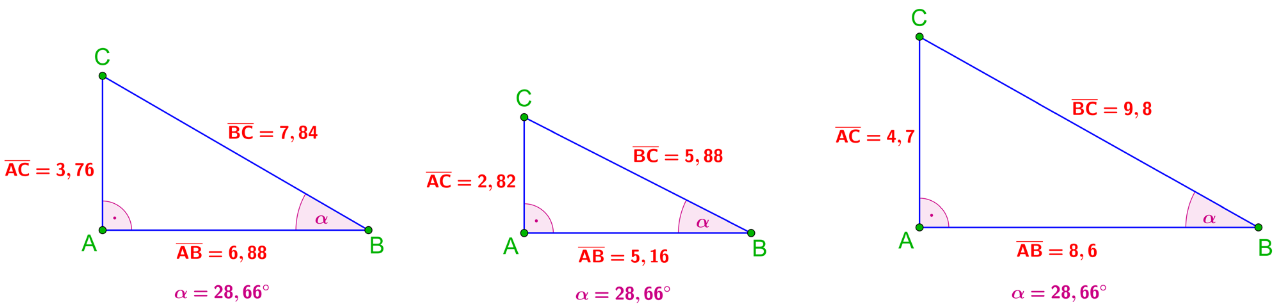


▶ Funkcje trygonometryczne — wstęp

P.6.1.1

Rozważmy dowolny trójkąt prostokątny ABC, w którym kąt $\sphericalangle BAC$ jest kątem prostym. Niech kąt α będzie kątem ostrym — ustalonym i niezmiennym, zmienne są natomiast długości boków. Wynika z tego, że trójkąty te są podobne.

	AB	AC	BC	$\frac{AC}{BC}$	$\frac{AB}{BC}$	$\frac{AC}{AB}$
Trójkąt 1	6,88	3,76	7,84	0,48	0,88	0,55
Trójkąt 2	5,16	2,82	5,88	0,48	0,88	0,55
Trójkąt 3	8,6	4,7	9,8	0,48	0,88	0,55

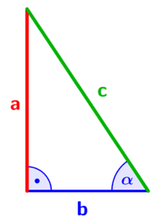


Możemy zauważyć, że dane stosunki boków $\left(\frac{AC}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}\right)$ przy ustalonym kącie ostrym są stałe.

DEFINICJE

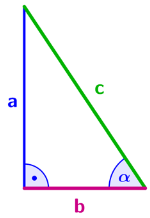
P.6.1.2

Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.



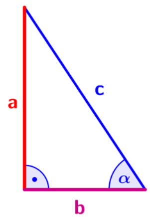
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α .



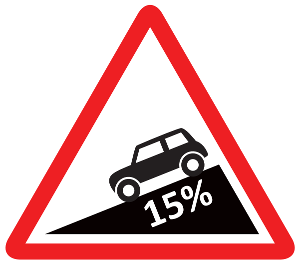
$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Zbiorem wartości funkcji sinus i cosinus jest przedział $(0;1)$, ponieważ każda z przyprostokątnych jest krótsza od przeciwprostokątnej.

Zbiorem wartości funkcji tangens jest przedział $(0;\infty)$, ponieważ obie przyprostokątne mogą mieć dowolne długości.

Czy wiesz, że...

Tangens kąta wykorzystuje się do określania nachylenia dróg czy stoków narciarskich. Wartość tangensa kąta nachylenia zamienia się wtedy na procenty. Przykładowo nachylenie 15% oznacza, że tangens kąta nachylenia jest równy 0,15, czyli kąt nachylenia wynosi około 9°. Nachylenie 100% odpowiada wartości kąta równej 45°.

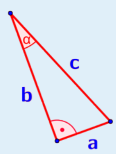


PRZYKŁAD 1

P.6.1.3

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, uzupełnij wartości funkcji.

$\sin\alpha = ?$, $\cos\alpha = ?$, $\text{tg}\,\alpha = ?$

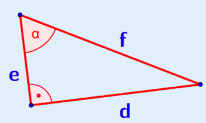


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

PRZYKŁAD 2

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, uzupełnij wartości funkcji.

$\sin\alpha = ?$, $\cos\alpha = ?$, $\text{tg}\,\alpha = ?$

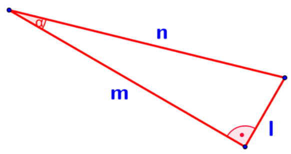


$\sin\alpha = \frac{d}{f}$, $\cos\alpha = \frac{e}{f}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{d}{e}$

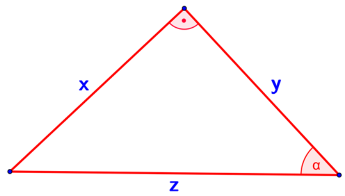
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, podaj wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

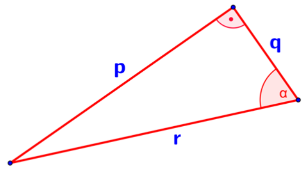
PRZYKŁAD 3.



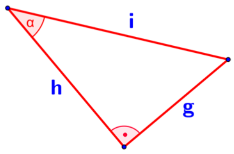
PRZYKŁAD 4.



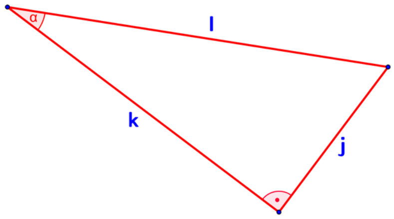
PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



PRZYKŁAD 7.

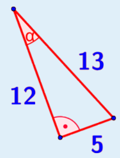


PRZYKŁAD 1

P.6.1.4

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, uzupełnij wartości funkcji.

$\sin\alpha = ?$, $\cos\alpha = ?$, $\operatorname{tg}\alpha = ?$

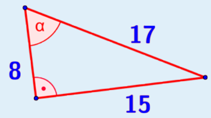


$\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

PRZYKŁAD 2

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, uzupełnij wartości funkcji.

$\sin\alpha = ?$, $\cos\alpha = ?$, $\operatorname{tg}\alpha = ?$

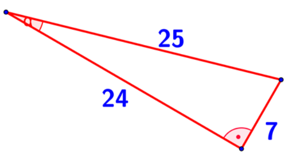


$\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{8}$

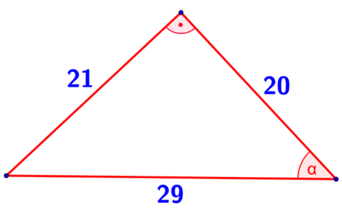
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Wykorzystując dane przedstawione na rysunku, podaj wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

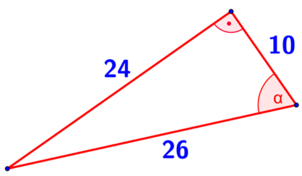
PRZYKŁAD 3.



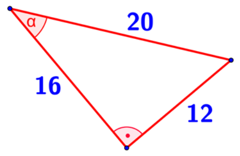
PRZYKŁAD 4.



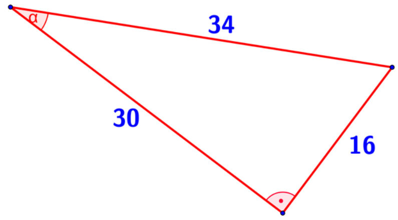
PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.

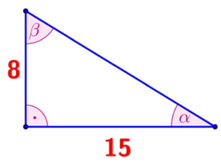
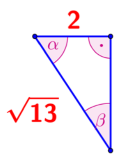
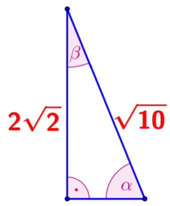
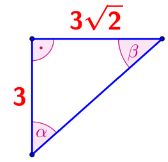


PRZYKŁAD 7.



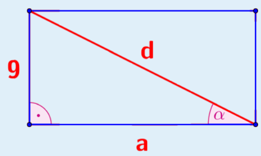
ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.1.1. Uzupełnij tabelę według wzoru.

Rysunek z danymi				
Brakująca długość boku trójkąta	17			
$\sin\alpha$	$\frac{8}{17}$			
$\cos\alpha$	$\frac{15}{17}$			
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{8}{15}$			
$\sin\beta$	$\frac{15}{17}$			
$\cos\beta$	$\frac{8}{17}$			
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\frac{15}{8}$			

PRZYKŁAD

Dany jest prostokąt (zobacz rysunek). Przekątna d jest nachylona do podstawy pod kątem α. Oblicz długość boku a, wiedząc, że $\sin\alpha = 0{,}6$.



1° Korzystamy z definicji funkcji sinus w trójkącie prostokątnym, powstałym z podzielenia prostokąta przekątną, i przyrównujemy do wartości 0,6.

$$\sin\alpha = \frac{9}{d} = 0{,}6$$

$$\frac{9}{d} = \frac{6}{10}$$

2° Wyznaczamy długość przekątnej.

$$6d = 90$$

$$d = 15$$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy długość boku a.

$$9^2 + a^2 = 15^2$$
$$81 + a^2 = 225$$
$$a^2 = 225 - 81$$
$$a^2 = 144$$
$$a = \sqrt{144} = 12$$

4° Długość boku a wynosi 12.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.1.2. Dany jest trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej długości 18 i kącie ostrym α. Oblicz pole trójkąta, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

► Wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla kątów 30°, 45° i 60°

KĄTY 30° I 60°

Do obliczenia wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla kątów 30° i 60° posłużymy się trójkątem prostokątnym, który powstał z dowolnego trójkąta równobocznego poprzez podzielenie go jedną z wysokości na połowy (zobacz rysunek). Otrzymujemy:

dla kąta 30°

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

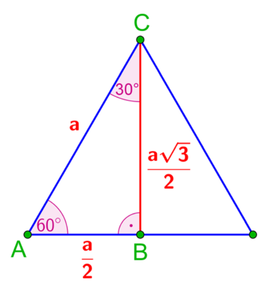
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dla kąta 60°

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



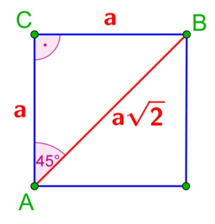
KĄT 45°

Do obliczenia wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla kąta 45° posłużymy się trójkątem prostokątnym, który powstał z kwadratu podzielonego przekątną (zobacz rysunek). Otrzymujemy:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1$$



PODSUMOWANIE

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.1.3. Oblicz:

Z.6.1.3

UWAGA: W praktyce stosujemy zapis np. $\sin^2 60^\circ$, co oznacza $(\sin 60^\circ)^2$.

a. $12\sin 30^\circ - \cos 60^\circ$

b. $8\cos 45^\circ + 3\mathrm{tg}\,30^\circ$

c. $-2\mathrm{tg}^2 45^\circ$

d. $\sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$

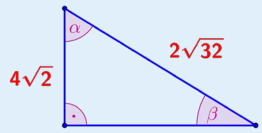
e. $\sqrt{8}\cos 45^\circ - \sqrt{12}\,\mathrm{tg}\,60^\circ$

f. $7\sqrt{3}\sin 60^\circ$

PRZYKŁAD 1

P.6.1.5

Wyznacz kąty w trójkącie prostokątnym przedstawionym na rysunku.



1° Wykorzystujemy funkcję cosinusa kąta α do wyznaczenia tego kąta.

$$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{4\sqrt{64}}{2\cdot 32} =$$
$$= \frac{4\cdot 8}{64} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

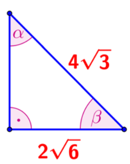
2° Obliczamy kąt β z sumy kątów w trójkącie.

$$60^\circ + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\beta = 30^\circ$$

3° Kąty w trójkącie przedstawionym na rysunku to $\alpha = 60^\circ$ i $\beta = 30^\circ$.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wyznacz kąty w trójkącie prostokątnym przedstawionym na rysunku.



▶ Funkcje trygonometryczne kątów o miarach od 0° do 180°

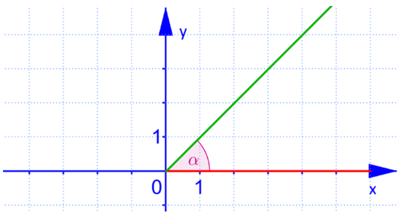
W celu określenia funkcji trygonometrycznych dla kątów od 0° do 180° umieszczamy kąt w układzie współrzędnych w następujący sposób:

▶ wierzchołek kąta znajduje się w początku układu współrzędnych $(0; 0)$,

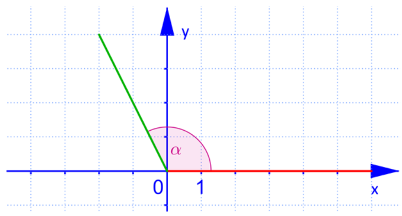
▶ jedno ramię kąta (tzw. ramię początkowe) pokrywa się z dodatnią półosią x,

▶ drugie ramię kąta (tzw. ramię końcowe lub wodzące) to półprosta zaczepiona w początku układu współrzędnych. Miarę kąta obliczamy od pierwszego ramienia do drugiego ramienia przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dla rozważanych kątów od 0° do 180° ramię drugie może znajdować się w I lub II ćwiartce układu współrzędnych lub na odpowiednich półosiach.

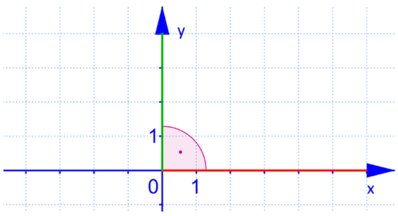
α — kąt ostry



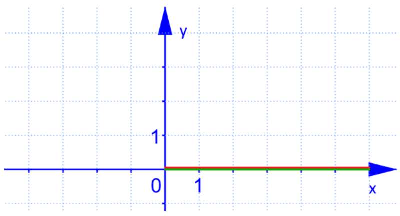
α — kąt rozwarty



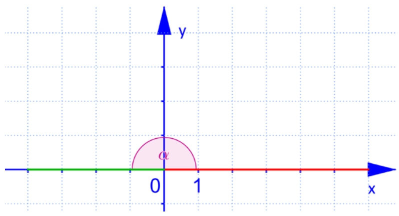
$\alpha = 90^\circ$



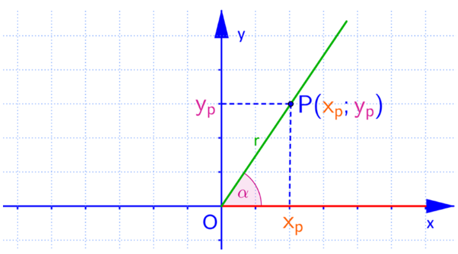
$\alpha = 0^\circ$

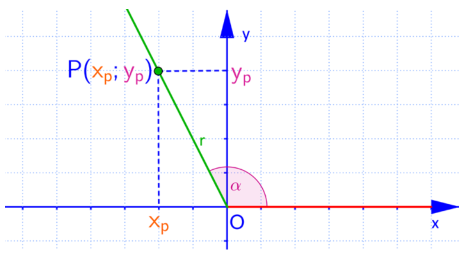


$\alpha = 180^\circ$



Aby określić wartość funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha (0^\circ \le \alpha \le 180^\circ)$, wybieramy na ramieniu wodzącym dowolny punkt P różny od punktu $O(0; 0)$, taki, że $P(x_p; y_p)$.





$r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ — promień wodzący punktu P

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\sin \alpha = \frac{y_p}{r}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\cos\alpha = \frac{x_p}{r}$$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu, przy założeniu, że jest ona różna od zera.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_p}{x_p}$$

► Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów

PRZYKŁAD

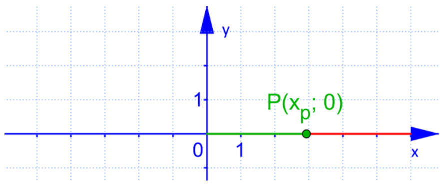
Niech $P(x_p; y_p)$ oznacza punkt leżący na ramieniu wodzącym kąta α oraz $r = |OP|$. Oblicz wartość funkcji sinus, cosinus i tangens dla kątów $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ oraz $\alpha = 180^\circ$.

1° $\alpha = 0^\circ$, ramię wodzące kąta pokrywa się z ramieniem początkowym. Zatem punkt $P(x_p; 0)$, $r = |OP| = x_p$.

$$\sin 0^\circ = \frac{y_p}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x_p}{r} = \frac{x_p}{x_p} = 1$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y_p}{x_p} = \frac{0}{x_p} = 0$$



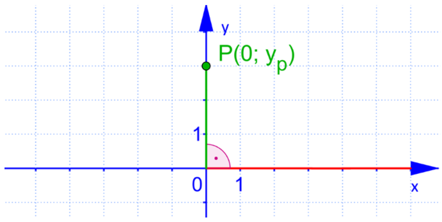
$r = x_p$

2° $\alpha = 90^\circ$, ramię wodzące kąta pokrywa się z dodatnią półosią y. Zatem punkt $P(0; y_p)$, $r = |OP| = y_p$.

$$\sin 90^\circ = \frac{y_p}{r} = \frac{y_p}{y_p} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \frac{x_p}{r} = \frac{0}{x_p} = 0$$

$\operatorname{tg} 90^\circ$ nie istnieje, ponieważ odcięta punktu P jest równa 0.



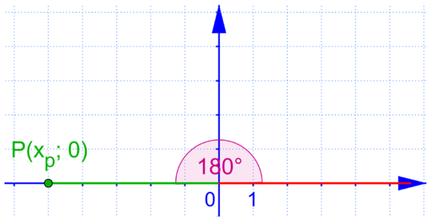
$r = y_p$

3° $\alpha = 180^\circ$, ramię wodzące kąta pokrywa się z ujemną półosią x. Zatem punkt $P(x_p; 0)$, $r = |OP| = |x_p| = -x_p$.

$$\sin 180^\circ = \frac{y_p}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 180^\circ = \frac{x_p}{r} = \frac{x_p}{-x_p} = -1$$

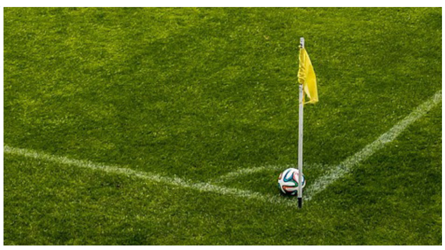
$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{y_p}{x_p} = \frac{0}{x_p} = 0$$



$r = -x_p$

PODSUMOWANIE

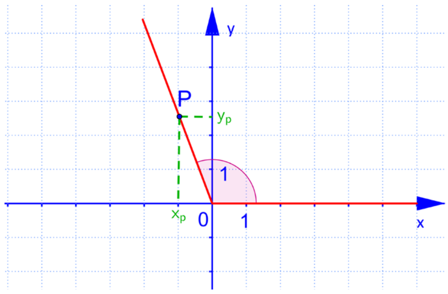
α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	nie istnieje	0



► Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych

Z definicji funkcji trygonometrycznych dla kątów o miarach od 0° do 180° wynika, że dla kątów rozwartych wartości cosinusa i tangensa są ujemne, ponieważ $x_p < 0$.

α	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ I ćwiartka układu współrzędnych	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$ II ćwiartka układu współrzędnych
$\sin\alpha$	$+$	$+$
$\cos\alpha$	$+$	$-$
$\operatorname{tg}\alpha$	$+$	$-$

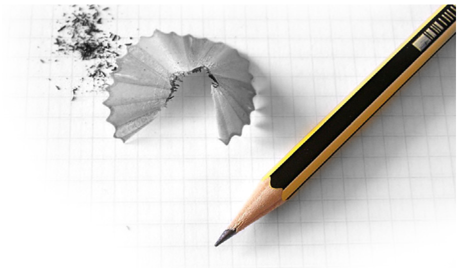


ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.1.4. Uzupełnij tabelę, wstawiając odpowiednie wartości. **Z.6.1.4**

$0;\ \sqrt{3};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1;\ -1;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}$

$\sin 60^\circ =$	$\cos 60^\circ =$
$\operatorname{tg} 60^\circ =$	$\cos 45^\circ =$
$\operatorname{tg} 30^\circ =$	$\cos 180^\circ =$
$\sin 90^\circ =$	$\sin 0^\circ =$



► Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90°

Wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta rozwartego można obliczyć za pomocą odpowiednich wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, korzystając z tzw. wzorów redukcyjnych.
Wybrane z nich to:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

PRZYKŁADY

P.6.1.6

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 120°.

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 120^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\mathrm{tg}\, 60^\circ = -\sqrt{3}$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 135°.

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 135^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\mathrm{tg}\, 45^\circ = -1$$

Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 150°.

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, 150^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\mathrm{tg}\, 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.1.5. Oblicz: **Z.6.1.5**

a. $-3\sin 150^\circ$

b. $6\cos 120^\circ$

c. $-2\mathrm{tg}\, 135^\circ$

d. $\sin 120^\circ \sin 150^\circ$

e. $\sqrt{2}\cos 135^\circ$

f. $-2\sqrt{3}\sin 120^\circ$

Czy wiesz, że…

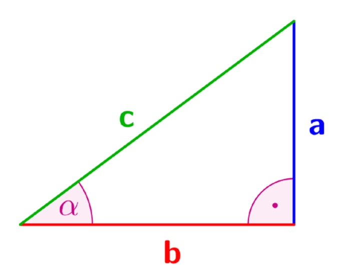
Oprócz powszechnie używanych funkcji trygonometrycznych, czyli sinusa, cosinusa i tangensa istnieją jeszcze ich odwrotności.

Odwrotnością:

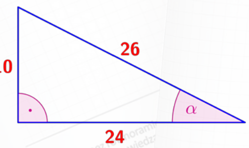
sinusa jest cosecans (skrót cosec), czyli $\mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$

cosinusa jest secans (skrót sec), czyli $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$

tangensa jest cotangens (skrót ctg), czyli $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{b}{a}$



6.1.6. W trójkącie prostokątnym dane są długości boków oraz oznaczenia jak na rysunku poniżej. Wynika z tego, że:



A. $\cos\alpha = \frac{5}{12}$

B. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{13}$

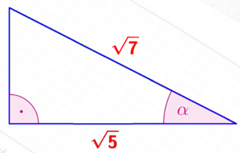
C. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

D. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$

6.1.7. Dany jest trójkąt prostokątny o bokach długości 8, 15, 17. Sinus najmniejszego kąta jest równy:

A. $\frac{8}{17}$ **B.** $\frac{17}{8}$ **C.** $\frac{15}{17}$ **D.** $\frac{17}{15}$

6.1.8. Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Tangens kąta ostrego α jest równy:



A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{35}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{35}}{7}$

6.1.9. W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i $|AB| = 25$ oraz $|BC| = 7$. Wówczas sinus kąta ABC jest równy:

A. $\frac{7}{25}$ **B.** $\frac{7}{24}$ **C.** $\frac{25}{7}$ **D.** $\frac{24}{25}$

6.1.10. Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Kąt α ma wartość:

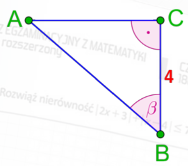
A. 45°

B. 60°

C. 30°

D. 75°

6.1.11. Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek), gdzie $\cos\beta = \frac{1}{2}$. Wynika z tego, że:



A. $|AC| = 8$

B. $|AC| = 4$

C. $|AC| = 4\sqrt{3}$

D. $|AC| = 8\sqrt{3}$

6.1.12. Wartość $\operatorname{tg}135^\circ$ wynosi:

A. -1 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** 1

6.1.13. Wartość $\cos 120^\circ$ wynosi:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

6.1.14. Liczba $\sin 150^\circ$ jest równa liczbie:

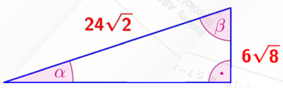
A. $\sin 60^\circ$ **B.** $\cos 60^\circ$ **C.** $\cos 120^\circ$ **D.** $\operatorname{tg} 60^\circ$

6.1.15. Jeżeli $\alpha = 90^\circ$, to wyrażenie $\sin\alpha + \cos\alpha$ ma wartość:

A. 1 **B.** -1 **C.** 0 **D.** 2

MATURA — ZADANIA OTWARTE

6.1.16. Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Wyznacz miary kątów α i β. **2 pkt**



6.1.17. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2\cos^2 120^\circ}{\sin 150^\circ}$. **2 pkt**

6.1.18. Oblicz wartość wyrażenia $\sin 120^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cos 120^\circ$. **2 pkt**

6.1.19. Dany jest trójkąt ABC, gdzie ramię AC tworzy z podstawą AB kąt 60°, a ramię BC tworzy z podstawą AB kąt 45°. Oblicz pole i obwód trójkąta, wiedząc, że wysokość opadająca na podstawę ma długość 12. **4 pkt**

6.2 ▶ Wykorzystywanie przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytywanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora)

Aby podać wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 90°, korzystamy z tablic wartości tych funkcji (zobacz s. 35).

PRZYKŁAD 1

P.6.2.1

Odczytaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych:

a. $\sin 5^\circ$
b. $\operatorname{tg} 38^\circ$
c. $\cos 72^\circ$
d. $\sin 1^\circ$
e. $\cos 20^\circ$

Odp. a — Aby odczytać wartość sinusa dla kąta 5°, należy w kolumnie pierwszej, oznaczonej $\alpha[^\circ]$, odszukać kąt równy 5° i z kolumny drugiej, oznaczonej $\sin\alpha \ \cos\beta$, odczytać wartość w danym wierszu.
Zatem $\sin 5^\circ = 0{,}0872$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
5°	0.0872	0.0875	85°

Odp. b — Aby odczytać wartość tangensa dla kąta 38°, należy w kolumnie pierwszej, oznaczonej $\alpha[^\circ]$, odszukać kąt równy 38° i z kolumny trzeciej, oznaczonej $\operatorname{tg}\alpha$, odczytać wartość w danym wierszu.
Zatem $\operatorname{tg} 38^\circ = 0{,}7813$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
38°	0.6157	0.7813	52°

Odp. c — Aby odczytać wartość cosinusa dla kąta 72°, należy w kolumnie czwartej, oznaczonej $\beta[^\circ]$, odszukać kąt równy 72° i z kolumny drugiej, oznaczonej $\sin\alpha \ \cos\beta$, odczytać wartość w danym wierszu.
Zatem $\cos 72^\circ = 0{,}3090$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
18°	0.3090	0.3249	72°

Odp. d — Aby odczytać wartość sinusa dla kąta 1°, należy w kolumnie pierwszej, oznaczonej $\alpha[^\circ]$, odszukać kąt równy 1° i z kolumny drugiej, oznaczonej $\sin\alpha \ \cos\beta$, odczytać wartość w danym wierszu.
Zatem $\sin 1^\circ = 0{,}0175$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
1°	0.0175	0.0175	89°

Odp. e — Aby odczytać wartość cosinusa dla kąta 20°, należy w kolumnie czwartej, oznaczonej $\beta[^\circ]$, odszukać kąt równy 20° i z kolumny drugiej, oznaczonej $\sin\alpha \ \cos\beta$, odczytać wartość w danym wierszu.
Zatem $\cos 20^\circ = 0{,}9397$.

α [°]	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\operatorname{tg}\alpha$	β [°]
70°	0.9397	2.7475	20°

Można zaobserwować, że w kolejnych wierszach tablic trygonometrycznych zachodzą równości: $\sin 0^\circ = \cos 90^\circ$, $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$, $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$, $\sin 3^\circ = \cos 87^\circ$, itd. Wynika z tego, że istnieje zależność między sinusem a cosinusem, którą zapisujemy w postaci $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

6.2.1. Odczytaj odpowiednie wartości z tablic trygonometrycznych. **Z.6.2.1**

a. $\sin 29^\circ$

b. $\cos 65^\circ$

c. $\operatorname{tg} 88^\circ$

d. $\sin 76^\circ$

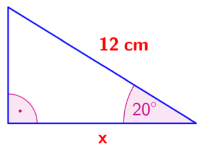
e. $\cos 10^\circ$

f. $\operatorname{tg} 4^\circ$

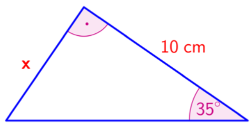
6.2.2. Najstarsza sosna zwyczajna w Polsce rośnie w lesie na obrzeżu Mińska Mazowieckiego i liczy sobie ponad 300 lat. Wykonano pomiar długości cienia sosny przy kącie padania promieni słonecznych o wartości 61°. Długość ta wynosi 12 metrów i 20 centymetrów. Oblicz przybliżoną wysokość sosny w metrach. **Z.6.2.2**

6.2.3. Oblicz długość boku x (zobacz rysunek) z dokładnością do 0,1 cm.

a.



b.



6.2.4. Kolejka linowa wjeżdża na górski szczyt pod kątem 32°, a jej długość wynosi 1200 m. Dolna stacja kolejki znajduje się na wysokości 850 m, a górna na szczycie. Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się górna stacja kolejki.

6.2.5. Paralotnia po starcie przebyła w linii prostej odległość 5 km, lecąc pod kątem 26°. Oblicz, ile metrów nad powierzchnią ziemi znajdowała się wtedy paralotnia.

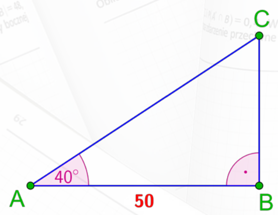
6.2.6. Jeżeli $a = \operatorname{tg} 89^\circ$, to:

A. $a > 4^3$ **B.** $a < 50$ **C.** $a \leq 0{,}9998$ **D.** $a > 57$

6.2.7. Dany jest trójkąt prostokątny ABC (zobacz rysunek). Przybliżona do 0,1 długość przeciwprostokątnej AC wynosi:

A. 38,3 **C.** 32,1

B. 65,3 **D.** 77,8



6.2.8. Jeżeli $a = \sin 10^\circ$ i $b = \operatorname{tg} 10^\circ$, to:

A. $a > b$ **B.** $a < b$ **C.** $a = b$ **D.** $2a = 3b$

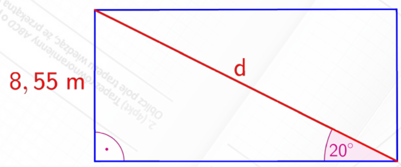
6.2.9. Prawdą jest, że:

A. $\cos 13^\circ = \sin 73^\circ$ **B.** $\sin 9^\circ = \cos 81^\circ$ **C.** $\operatorname{tg} 30^\circ = \cos 60^\circ$ **D.** $\operatorname{tg} 60^\circ = \sin 30^\circ$

6.2.10. Dana jest prostokątna działka (zobacz rysunek). Przekątna działki ma w przybliżeniu długość:

A. 34,2 metra, **C.** 2,5 metra,

B. 20 metrów, **D.** 25 metrów.



6.2.11. Jeżeli α i β są kątami ostrymi oraz $\alpha + \beta = 90^\circ$, to wartość wyrażenia $\dfrac{3\sin\alpha + 2\cos\beta}{\cos\beta + 4\sin\alpha}$ wynosi:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** 1 **D.** $\frac{1}{5}$

6.3 ▶ Obliczanie miary kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo — korzystając z tablic lub kalkulatora — przybliżoną)

PRZYKŁAD

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych (zobacz s. 35), odczytaj przybliżoną do całości miarę kąta α, dla której:

a. $\cos\alpha = 0{,}2250$ **b.** $\sin\alpha = 0{,}6$

Odp. a — W kolumnie drugiej, oznaczonej $\sin\alpha\cos\beta$, odszukujemy liczbę $0{,}2250$. Dana jest wartość cosinusa kąta, więc jego miarę odczytujemy z prawej kolumny, oznaczonej $\beta[^\circ]$.
Zatem $\alpha = 77^\circ$.

Odp. b — Liczby 0,6 nie ma w kolumnie drugiej oznaczonej $\sin\alpha\cos\beta$, więc szukamy w tej kolumnie dwóch liczb, pomiędzy którymi znajduje się dana liczba, i wybieramy z nich tę, która różni się od niej o mniejszą wartość.

$$\underbrace{0{,}5878}_{36^\circ} < 0{,}6 < \underbrace{0{,}6018}_{37^\circ}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}6000 \\ -\ 0{,}5878 \\ \hline 0{,}0122 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}6018 \\ -\ 0{,}6000 \\ \hline 0{,}0018 \end{array}$$

Zatem $\alpha \approx 37^\circ$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

6.3.1. Wyznacz kąt α i podaj jego przybliżoną wartość z dokładnością do całości, jeśli:

a. $\sin\alpha = 0{,}8725$

b. $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}2$

c. $\cos\alpha = 0{,}15$

6.3.2. Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych 4,1 cm i 2 cm. Wyznacz kąty ostre tego trójkąta.

6.3.3. Drzewo o wysokości 16 metrów rzuca cień o długości 22 metrów. Oblicz kąt padania promieni słonecznych. Wynik podaj z dokładnością do 1°.

6.3.4. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają odpowiednio długości 4 i 6. Najmniejszy kąt ma w przybliżeniu miarę:

A. 34° **B.** 48° **C.** 42° **D.** 56°

6.3.5. Jeśli $\sin \alpha = 0{,}3$, to:

A. $\alpha \in (10^\circ; 11^\circ)$ **B.** $\alpha \in (18^\circ; 19^\circ)$ **C.** $\alpha \in (17^\circ; 18^\circ)$ **D.** $\alpha \in (73^\circ; 74^\circ)$

6.3.6. Dane są wartości $\sin \alpha = 0{,}5150$, $\cos \beta = 0{,}3584$, $\operatorname{tg} \gamma = 0{,}7002$. Wynika z tego, że:

A. $\alpha < \beta < \gamma$ **B.** $\alpha + \gamma < \beta$ **C.** $\alpha + \beta < \gamma$ **D.** $\gamma < \beta < \alpha$

6.3.7. Murarz oparł drabinę o długości 5 metrów o ścianę. Górny kraniec drabiny sięgnął na wysokość 380 cm. Kąt, pod jakim drabina nachylona jest do podłoża, wynosi w przybliżeniu do pełnych stopni:

A. 49° **B.** 39° **C.** 40° **D.** 50°

6.3.8. Dany jest trójkąt o bokach 3, 4, 5. Najmniejszy kąt ma wartość około:

A. 32° **B.** 37° **C.** 72° **D.** 41°

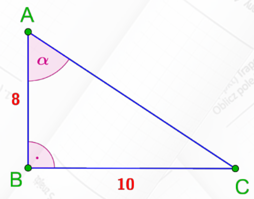
6.3.9. Dany jest prostokąt o bokach 6 i 12. Kąt między przekątną prostokąta a najdłuższym bokiem jest równy około:

A. 26° **B.** 27° **C.** 28° **D.** 63°

6.3.10. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AB| = 8$, $|BC| = 10$ (zobacz rysunek). Kąt α ma miarę około:

A. 52° **C.** 38°

B. 37° **D.** 51°

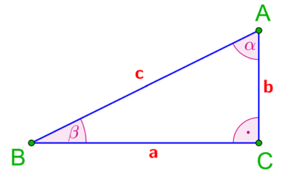


6.4 ▶ Zastosowanie prostych zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ oraz $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość dwóch wyrażeń zbudowanych ze związków trygonometrycznych prawdziwą dla wszystkich zmiennych z dziedziny.

PRZYKŁAD

1° Dany jest dowolny trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β.



2° Zapisujemy zależności wynikające z definicji poszczególnych funkcji trygonometrycznych.

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{a}{b}$

$\sin\beta=\frac{b}{c}$ $\cos\beta=\frac{a}{c}$ $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{b}{a}$

3° Możemy zauważyć, że: $\sin\alpha=\cos\beta$, $\cos\alpha=\sin\beta$, $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}$

4° Ponadto wiemy, że $\beta=90^\circ-\alpha$.

5° Wynika stąd, że:

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości:

$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha)$ $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}$ $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)=1$

Równości te nazywamy **wzorami redukcyjnymi**.

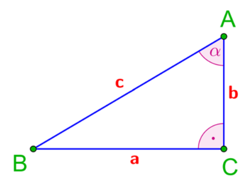
Możemy zatem zauważyć, że:

$\sin 60^\circ=\sin(90^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ$
$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ$
$\sin 45^\circ=\sin(90^\circ-45^\circ)=\cos 45^\circ$

PRZYKŁAD

P.6.4.1

1° Dany jest dowolny trójkąt prostokątny o kącie ostrym α.



2° Wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa $a^2+b^2=c^2$.

3° Wyznaczamy boki a i b, wykorzystując funkcje trygonometryczne.

$\sin\alpha=\frac{a}{c}\quad|\cdot c$ $\cos\alpha=\frac{b}{c}\quad|\cdot c$

$c\sin\alpha=a$ $c\cos\alpha=b$

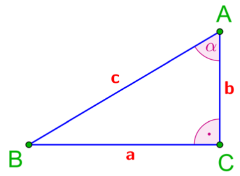
4° Podstawiamy otrzymane wartości do równania wynikającego z twierdzenia Pitagorasa.

$$(c\sin\alpha)^2+(c\cos\alpha)^2=c^2$$
$$c^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha=c^2\quad|:c^2$$
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy jedynką trygonometryczną.
Jest ona prawdziwa dla każdego kąta $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$.

PRZYKŁAD

1° Dany jest dowolny trójkąt prostokątny o kącie ostrym α.



2° Zbadamy iloraz funkcji sinus i cosinus kąta α.

3° Zapisujemy zależności wynikające z definicji obu funkcji. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

4° Podstawiamy wartości do ilorazu $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

5° Wynika stąd, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

6° Skoro $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$, to $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

PRZYKŁAD 1

P.6.4.2

Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ$.

1° Korzystamy ze wzoru redukcyjnego: $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$.

$\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ =$
$= \sin^2 35^\circ + \sin^2(90^\circ - 35^\circ) = \sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ =$
$= 1$

2° Korzystamy ze wzoru na jedynkę trygonometryczną: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

3° Wartość wyrażenia $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ = 1$.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 70^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$.

PRZYKŁAD 3

P.6.4.2

Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia $4\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ$.

1° Korzystamy ze wzoru redukcyjnego: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$

$4\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ = 4\operatorname{tg} 40^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 50^\circ)} =$
$= 4\cancel{\operatorname{tg} 40^\circ} \cdot \frac{1}{\cancel{\operatorname{tg} 40^\circ}} = 4$

2° Wartość wyrażenia $4\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ = 4$.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 4. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia $\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

6.4.1. Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia:

a. $(\sin 22^\circ - \cos 68^\circ)^2$

b. $\sqrt{\dfrac{\sin 63^\circ}{\cos 27^\circ}} - 2\operatorname{tg} 45^\circ$

c. $\operatorname{tg} 42^\circ \cdot \operatorname{tg} 43^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ \cdot \operatorname{tg} 47^\circ \cdot \operatorname{tg} 48^\circ$

d. $\sin^2 13^\circ + \sin^2 23^\circ + \sin^2 77^\circ + \sin^2 67^\circ$

e. $\dfrac{3\sin 110^\circ}{\sin 70^\circ} + \dfrac{2\cos 70^\circ}{\cos 110^\circ}$

f. $\dfrac{\operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 75^\circ + 2}{3\sin^2 25^\circ + 3\sin^2 65^\circ}$

PRZYKŁAD

P.6.4.3

Oblicz wartość wyrażenia $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

1° Z pierwszego i drugiego wyrażenia wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sin^2\alpha =$$

2° Wyrażenie w nawiasie jest jedynką trygonometryczną.

$$= \cos^2\alpha\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + \sin^2\alpha =$$

3° Otrzymaliśmy wyrażenie, które również jest jedynką trygonometryczną.

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

4° Wartość wyrażenia $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

PRZYKŁAD

P.6.4.4

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Oblicz $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

1° Korzystamy ze wzoru: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = 3$$
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3 \quad \Big|\cdot\cos\alpha$$
$$\sin\alpha = 3\cos\alpha$$

2° Podstawiamy otrzymaną wartość i redukujemy.

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{3\cos\alpha - \cos\alpha}{3\cos\alpha + \cos\alpha} = \frac{2\cancel{\cos\alpha}}{4\cancel{\cos\alpha}} = \frac{1}{2}$$

3° Wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1}{2}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

6.4.2. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha(\sin^2\alpha + 1)}$.

6.4.3. Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Oblicz $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}$.

6.4.4. Kąt α jest ostry i $\frac{9}{\sin^2\alpha} + \frac{9}{\cos^2\alpha} = 16$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$.

6.4.5.* Podaj odpowiednie założenia i sprawdź, czy tożsamością jest równość $(1 + \sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \cos\alpha$.

Z.6.4.5

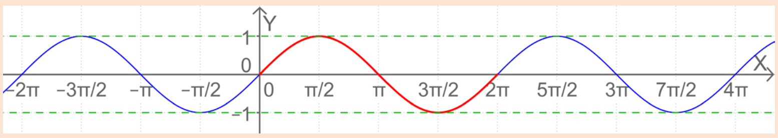
6.4.6.* Podaj odpowiednie założenia i sprawdź, czy tożsamością jest równość $\sin\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

Z.6.4.6

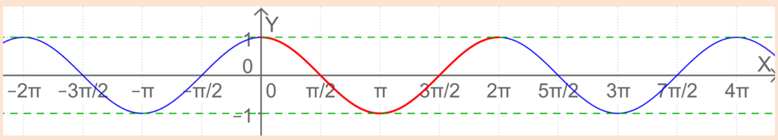
Czy wiesz, że…

Funkcje trygonometryczne można narysować, tak jak każdą dowolną funkcję. Oto wykresy funkcji sinus, cosinus i tangens.

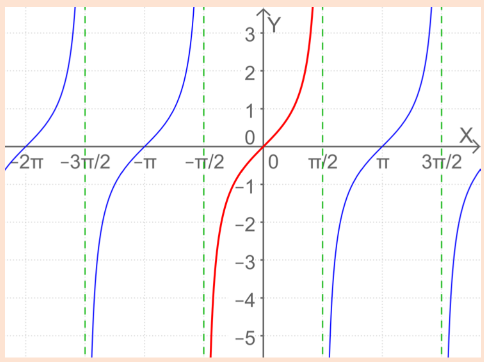
$y = \sin x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$



$y = \cos x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$



$y = \operatorname{tg}x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{C}$



6.4.7. Jeżeli α jest kątem ostrym, to wyrażenie $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$ jest równe:

A. 2 **B.** $2\cos^2\alpha$ **C.** 1 **D.** 0

6.4.8. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$, to wartość wyrażenia $\frac{2\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha-6\cos\alpha}$ jest równa:

A. 8 **B.** $-\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $-\frac{5}{8}$

6.4.9. Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 25^\circ+\cos^2 25^\circ-\sin 30^\circ}{2\operatorname{tg} 45^\circ}$ jest równa:

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** -1

6.4.10. Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 78^\circ+\cos^2 78^\circ-2}{\sin^2 23^\circ+\cos^2 23^\circ+2}$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{3}$ **C.** -1 **D.** 1

6.4.11. Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha=\cos 35^\circ$, to miara kąta α wynosi:

A. 35° **B.** 45° **C.** 55° **D.** 65°

6.4.12. Jeżeli α jest kątem ostrym i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=4$, to wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$ jest równa:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 2 **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.4.13. Wyrażenie $\frac{\sin 140^\circ}{\cos 40^\circ}$ jest równe:

A. $\cos 40^\circ$ **B.** $2\cos 40^\circ$ **C.** $\operatorname{tg} 40^\circ$ **D.** $-\operatorname{tg} 140^\circ$

6.4.14. Kąty ostre w trójkącie prostokątnym mają miary: $\alpha=25^\circ$ i $\beta=65^\circ$. Wtedy $\frac{\cos\beta-\sin\alpha}{\cos\beta}$ równa się:

A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

6.4.15. Wyrażenie $\sqrt{2\operatorname{tg} 80^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$ jest równe:

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.4.16. Dana jest liczba $a=\sin 170^\circ\sin 10^\circ-\cos 10^\circ\cos 170^\circ$. Wtedy a^2:

A. 0 **B.** 3 **C.** 16 **D.** 1

6.5 ▶ Wyznaczanie wartości funkcji tego samego kąta, znając wartość jednej z nich

Jeżeli znamy wartość funkcji sinus lub cosinus dowolnego kąta ostrego, możemy obliczyć wartości pozostałych funkcji, posługując się jednym z trzech sposobów.

P.6.5.1

SPOSÓB 1 — z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dla pewnego kąta ostrego α, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

1° Obliczamy wartość $\cos\alpha$, korzystając ze wzoru: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

2° Skoro α jest kątem ostrym, to wybieramy wartość dodatnią cosinusa.

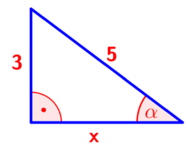
3° Obliczamy wartość $\operatorname{tg}\alpha$, korzystając ze wzoru: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$$

SPOSÓB 2 — z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dla pewnego kąta ostrego α, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

1° Rysujemy trójkąt prostokątny.



2° Z podanej wartości sinusa wynika, że stosunek długości naprzeciwległej przyprostokątnej do długości przeciwprostokątnej wynosi 3 : 5. Możemy przyjąć, że przyprostokątna przeciwległa do kąta α ma długość 3, a przeciwprostokątna ma długość 5. Oznaczmy odpowiednie boki tymi przykładowymi długościami.

3° Obliczamy brakującą długość boku, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$3^2 + x^2 = 5^2$$
$$9 + x^2 = 25$$
$$x^2 = 25 - 9$$
$$x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{16} = 4$$

4° Obliczamy pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych.

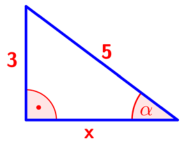
$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

SPOSÓB 3 — z wykorzystaniem trójek pitagorejskich

Zobacz informację o trójkach pitagorejskich na s. 28

Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ dla pewnego kąta ostrego α, oblicz $\cos\alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha$.

1° Rysujemy trójkąt prostokątny.



2° Z podanej wartości sinusa wynika, że stosunek długości naprzeciwległej przyprostokątnej do długości przeciwprostokątnej wynosi $3 : 5$. Możemy przyjąć, że przyprostokątna przeciwległa do kąta α ma długość 3, a przeciwprostokątna ma długość 5. Oznaczmy odpowiednie boki tymi przykładowymi długościami.

3° Istnieje trójkąt pitagorejski o bokach 3, 4, 5, więc brakująca długość przyprostokątnej to 4.

4° Obliczamy pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

6.5.1. Wyznacz (wykorzystując SPOSÓB 1) wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$), jeśli: **Z.6.5.1**

a. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$
b. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$
c. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$
d. $\cos\alpha = \frac{2}{9}$
e. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$
f. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

6.5.2. Wyznacz (wykorzystując SPOSÓB 2) wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$), jeśli: **Z.6.5.2**

a. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$
b. $\sin\alpha = \frac{6}{10}$
c. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$
d. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$
e. $\cos\alpha = \frac{9}{15}$
f. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$
g. $\cos\alpha = \frac{20}{25}$
h. $\sin\alpha = \frac{9}{41}$
i. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{10}$

6.5.3. Wyznacz (wykorzystując SPOSÓB 2) wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$), jeśli:

a. $\sin\alpha = \frac{6}{7}$
b. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$
c. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$
d. $\cos\alpha = \frac{1}{5}$
e. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
f. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{3}$

6.5.4. Wyznacz (wykorzystując SPOSÓB 3) wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$), jeśli: **Z.6.5.4**

a. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

b. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

c. $\sin\alpha = \frac{20}{29}$

d. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$

e. $\cos\alpha = \frac{24}{25}$

f. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$

PRZYKŁAD

P.6.5.2

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

1° Obliczamy $\cos\alpha$ z jedynki trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\frac{3}{4} + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

2° Skoro α jest kątem ostrym, to wybieramy wartość dodatnią cosinusa.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

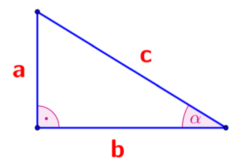
3° Podstawiamy wartości $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

$$\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

PRZYKŁAD

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy trójkąta prostokątnego i zaznaczamy jeden z kątów ostrych α.



2° Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to znaczy, że zgodnie z definicją stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do przyległej jest równy $3 : 4$. Możemy przyjąć, że odpowiednie boki mają długość 3 i 4.

3° Trzeci bok oznaczamy jako c. Jego długość obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 3^2 + 4^2$$
$$c^2 = 9 + 16$$
$$c^2 = 25$$
$$c = \sqrt{25} = 5$$

4° Obliczamy wartość $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}$$

5° Obliczamy wartość wyrażenia $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}$, podstawiając za $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

$$\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{2-\frac{4}{5}}{2+\frac{4}{5}} = \frac{1\frac{1}{5}}{2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{14}{5}} = \frac{6}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

6° Wartość wyrażenia $\frac{2-\cos\alpha}{2+\cos\alpha}=\frac{3}{7}$.

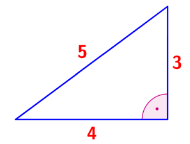
ZADANIA UTRWALAJĄCE

6.5.5. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Oblicz wartość wyrażenia $6\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$.

6.5.6. Wiadomo, że kąt spełnia warunek $0^\circ<\alpha<90^\circ$ oraz $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Oblicz $\frac{\sin^2\alpha-\frac{1}{4}}{\sin^2\alpha+\frac{1}{4}}$.

Czy wiesz, że…

Trójkąt pitagorejski, dobrze znany już od czasów antycznych, to trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 3 i 4 oraz przeciwprostokątnej 5 $(3^2+4^2=5^2)$.



Po jego odkryciu pitagorejczycy zadawali sobie pytanie, czy istnieją inne trójkąty prostokątne o bokach, których długości można wyrazić za pomocą liczb całkowitych. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, aby takie trójkąty znaleźć, należało wskazać liczby całkowite dodatnie a, b, c, takie, że:

$$a^2+b^2=c^2$$

Trójka pitagorejska to układ trzech liczb naturalnych będących rozwiązaniami tego równania. Pitagorejczycy poszukiwali takich trójek spełniających tę szczególną zależność. Wynaleźli metodę wyznaczania największej możliwej liczby takich trójek i wykazali przy tym, że jest ich nieskończenie wiele.

Warto znać kilka podstawowych trójek pitagorejskich, ponieważ pomoże Ci to w szybszym rozwiązywaniu zadań z wyznaczaniem funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Stosunek długości boków trójkąta	Kolejne wielokrotności trójek pitagorejskich				
3 : 4 : 5	6 : 8 : 10	9 : 12 : 15	12 : 16 : 20	15 : 20 : 25	18 : 24 : 30
5 : 12 : 13	10 : 24 : 26	15 : 36 : 39	20 : 48 : 52	25 : 60 : 65	
8 : 15 : 17	16 : 30 : 34	24 : 45 : 51	32 : 60 : 68	40 : 75 : 85	
7 : 24 : 25	14 : 48 : 50	21 : 72 : 75	28 : 96 : 100	35 : 120 : 125	
20 : 21 : 29	40 : 42 : 58	60 : 63 : 87	80 : 84 : 116	100 : 105 : 145	
9 : 40 : 41	18 : 80 : 82	27 : 120 : 123	36 : 160 : 164	45 : 200 : 205	

PRZYKŁAD 1

P.6.5.3

Czy trójka liczb 3, 4, 5 jest trójką pitagorejską?

1° Podane wartości podstawiamy do równania: $a^2 + b^2 = c^2$. $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

2° Sprawdzamy, czy powstałe równanie jest prawdziwe. $\quad 9 + 16 \stackrel{?}{=} 25$

$$25 = 25$$

3° Zatem trójka liczb 3, 4, 5 jest trójką pitagorejską.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Czy podana trójka liczb jest trójką pitagorejską?

PRZYKŁAD 2. 6, 7, 8

PRZYKŁAD 3. 5, 12, 13

PRZYKŁAD 4. 12, 16, 20

PRZYKŁAD 5. 7, 24, 26

PRZYKŁAD 6. 21, 20, 29

PRZYKŁAD 7. 8, 7, 10

PRZYKŁAD 8. 15, 8, 17

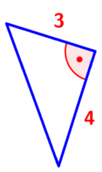
PRZYKŁAD 9. 24, 10, 26

ZADANIE UTRWALAJĄCE

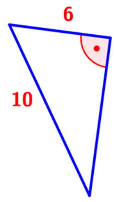
6.5.7. Uzupełnij brakującą długość boku trójkąta prostokątnego.

Z.6.5.7

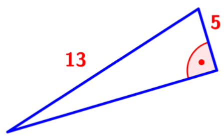
a.



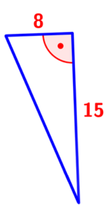
b.



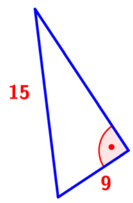
c.



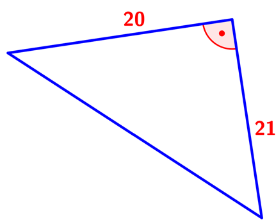
d.



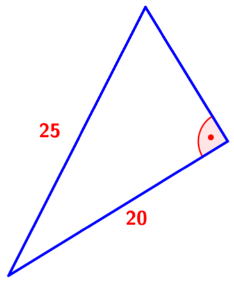
e.



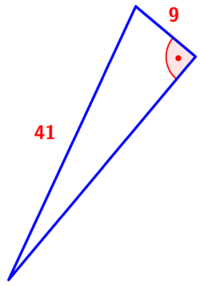
f.



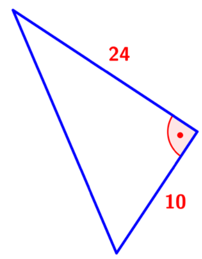
g.



h.



i.



MATURA – ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.6.5

6.5.8. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{12}{13}$. Wtedy:

A. $\sin\alpha = \frac{13}{5}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ **D.** $\cos\alpha = \frac{12}{5}$

6.5.9. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Wtedy:

A. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$

B. $\sin\alpha = \frac{5}{3}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{4}$

C. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

D. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$

6.5.10. Dany jest kąt ostry α i $\sin\alpha = \frac{2}{7}$. Wartość wyrażenia $\cos^2\alpha - 1$ jest równa:

A. $\frac{9}{7}$ **B.** $-\frac{4}{49}$ **C.** $\frac{4}{49}$ **D.** $\frac{46}{49}$

6.5.11. Jeżeli α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, to $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ równa się:

A. -1 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{8}{9}$

6.5.12. Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{7}{8}$. Wtedy $\sin\alpha$ jest równy:

A. $\frac{15}{64}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}}{64}$ **C.** $\frac{8}{\sqrt{15}}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{8}$

MATURA – ZADANIA OTWARTE

6.5.13. Kąt α jest ostry oraz $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$. **2 pkt**

6.5.14. Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{2}$. **2 pkt**

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

P.6.1.3 PRZYKŁAD 3. $\sin\alpha = \frac{l}{n}$, $\cos\alpha = \frac{m}{n}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{m}$

PRZYKŁAD 4. $\sin\alpha = \frac{x}{z}$, $\cos\alpha = \frac{y}{z}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$

PRZYKŁAD 5. $\sin\alpha = \frac{p}{r}$, $\cos\alpha = \frac{q}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{q}$

PRZYKŁAD 6. $\sin\alpha = \frac{g}{i}$, $\cos\alpha = \frac{h}{i}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{h}$

PRZYKŁAD 7. $\sin\alpha = \frac{j}{l}$, $\cos\alpha = \frac{k}{l}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{j}{k}$

P.6.1.4 PRZYKŁAD 3. $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$

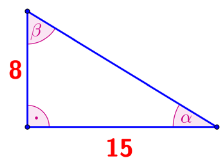
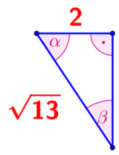
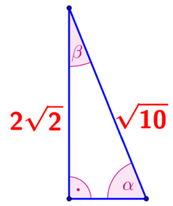
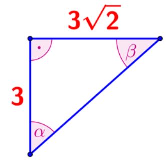
PRZYKŁAD 4. $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{21}{20}$

PRZYKŁAD 5. $\sin\alpha = \frac{24}{26}$, $\cos\alpha = \frac{10}{26}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{10}$

PRZYKŁAD 6. $\sin\alpha = \frac{12}{20}$, $\cos\alpha = \frac{16}{20}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{16}$

PRZYKŁAD 7. $\sin\alpha = \frac{16}{34}$, $\cos\alpha = \frac{30}{34}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16}{30}$

6.1.1.

Rysunek z danymi				
Brakująca długość boku trójkąta	17	3	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}$
$\sin\alpha$	$\frac{8}{17}$	$\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
$\cos\alpha$	$\frac{15}{17}$	$\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{8}{15}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$	$\frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$
$\sin\beta$	$\frac{15}{17}$	$\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos\beta$	$\frac{8}{17}$	$\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
$\operatorname{tg}\beta$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6.1.2. $P = 36\sqrt{2}\ \mathrm{j}^2$

6.1.3.

a. $5\frac{1}{2}$

b. $4\sqrt{2} + \sqrt{3}$

c. -2

d. $\frac{3}{8}$

e. -4

f. $10\frac{1}{2}$

P.6.1.5 PRZYKŁAD 2. $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$

6.1.4.

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cos 180^\circ = -1$
$\sin 90^\circ = 1$	$\sin 0^\circ = 0$

6.1.5. **a.** $-\frac{3}{2}$ **b.** -3 **c.** 2 **d.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **e.** -1 **f.** -3

6.1.6. C **6.1.7.** A **6.1.8.** B **6.1.9.** D **6.1.10.** A
6.1.11. C **6.1.12.** A **6.1.13.** D **6.1.14.** B **6.1.15.** A
6.1.16. $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ **6.1.17.** 1
6.1.18. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **6.1.19.** $P = 24(3+\sqrt{3})\,\mathrm{j}^2, O = 12(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

6.2.1. **a.** 0,4848 **b.** 0,4226 **c.** 28,6363 **d.** 0,9703 **e.** 0,9848 **f.** 0,0699

6.2.2. 22 m

6.2.3. **a.** 11,3 cm **b.** 7 cm

6.2.4. 1485,88 m

6.2.5. 2192 m

6.2.6. D **6.2.7.** B **6.2.8.** B **6.2.9.** B **6.2.10.** D
6.2.11. C

6.3.1. **a.** $\alpha = 61^\circ$ **b.** $\alpha = 50^\circ$ **c.** $\alpha = 81^\circ$

6.3.2. Kąty ostre mają miary 26° i 64°.

6.3.3. 36°

6.3.4. A **6.3.5.** C **6.3.6.** B **6.3.7.** A **6.3.8.** B
6.3.9. B **6.3.10.** D

P.6.4.2 PRZYKŁAD 2. 2 PRZYKŁAD 4. 1

6.4.1. **a.** 0 **b.** -1 **c.** 1 **d.** 2 **e.** 5 **f.** 1

6.4.2. 2

6.4.3. 2

6.4.4. $\frac{3}{4}$

6.4.5.* $\alpha \neq 90^\circ$

$$L = (1+\sin\alpha)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \frac{1}{\cos\alpha} - \cancel{\operatorname{tg}\alpha} + \cancel{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overbrace{1-\sin^2\alpha}^{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = \cos\alpha = P$$

6.4.6.* $\alpha \neq 90^\circ$

$$L = \sin\alpha + \sin\alpha\operatorname{tg}^2\alpha = \sin\alpha + \sin\alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\overbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}^{1}}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = P$$

6.4.7. A **6.4.8.** B **6.4.9.** C **6.4.10.** B **6.4.11.** C
6.4.12. B **6.4.13.** C **6.4.14.** B **6.4.15.** C **6.4.16.** D

6.5.1.
a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$
b. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$
d. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{77}}{9}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{77}}{2}$
e. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$
f. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$

6.5.2.
a. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$
b. $\cos\alpha = \frac{8}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8}$
c. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$
d. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$
e. $\sin\alpha = \frac{12}{15}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{9}$
f. $\sin\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\alpha = \frac{21}{29}$
g. $\sin\alpha = \frac{15}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{20}$
h. $\cos\alpha = \frac{40}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{40}$
i. $\sin\alpha = \frac{24}{26}$, $\cos\alpha = \frac{10}{26}$

6.5.3.
a. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{13}}{13}$
b. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$
c. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{9}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}$
d. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{6}$
e. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{39}}{13}$
f. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

6.5.4.
a. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$
b. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$
c. $\cos\alpha = \frac{21}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{20}{21}$
d. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$
e. $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$
f. $\sin\alpha = \frac{9}{41}$, $\cos\alpha = \frac{40}{41}$

6.5.5. $2\frac{4}{13}$

6.5.6. $\frac{5}{9}$

P.6.5.3 PRZYKŁAD 2. Nie

PRZYKŁAD 3. Tak

PRZYKŁAD 4. Tak

PRZYKŁAD 5. Nie

PRZYKŁAD 6. Tak

PRZYKŁAD 7. Nie

PRZYKŁAD 8. Tak

PRZYKŁAD 9. Tak

6.5.7. **a.** 5

b. 8

c. 12

d. 17

e. 12

f. 29

g. 15

h. 40

i. 26

6.5.8. C **6.5.9.** C **6.5.10.** B **6.5.11.** C **6.5.12.** D

6.5.13. $\frac{3}{2}$ **6.5.14.** $\frac{1}{2}$

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta[^\circ]$
0	**0,0000**	**0,0000**	**90**
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
10	**0,1736**	**0,1763**	**80**
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
20	**0,3420**	**0,3640**	**70**
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
30	**0,5000**	**0,5774**	**60**
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
40	**0,6428**	**0,8391**	**50**
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha[^\circ]$	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\beta[^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
50	**0,7660**	**1,1918**	**40**
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
60	**0,8660**	**1,7321**	**30**
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
70	**0,9397**	**2,7475**	**20**
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
80	**0,9848**	**5,6713**	**10**
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
90	**1,0000**	**-**	**0**

ISBN: 978-83-63975-16-6

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY