7

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Planimetria

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
OpenClipartVectors - id. 155528/ CC0 Public Domain; Huskyherz - id. 274968/ CC0 Public Domain; wilhei - id. 722820/ CC0 Public Domain; skeeze - id.760419/ CC0 Public Domain; cowins - id. 679041/ CC0 Public Domain; StockSnap - id. 925067/ CC0 Public Domain; stinne24 - id.349072/ CC0 Public Domain; EdiNugraha - id. 102840/ CC0 Public Domain; Hans - id. 116701/ CC0 Public Domain;

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-17-3

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

Planimetria

Gdyby ktoś zadał nam pytanie: „Kto kojarzy ci się z geometrią?”, to jednym tchem wymienilibyśmy Pitagorasa (ur. ok. 572 r. p.n.e.) i Talesa (ur. ok. 627 r. p.n.e.). I rzeczywiście można stwierdzić, że od tych dwóch uczonych zaczęło się wszystko, co jest związane z geometrią. To oni zaadaptowali wiele odkryć egipskich i babilońskich uczonych, twórczo je rozwijając. Myli się jednak ten, kto myśli, że najbardziej znane twierdzenie na świecie dotyczące geometrii, czyli twierdzenie Pitagorasa, zawdzięczamy tylko jemu samemu. Dokumenty pozostałe po niezależnie rozwijających się cywilizacjach Babilonu i Egiptu pokazują, że zależności boków w trójkątach prostokątnych były znane już dużo wcześniej. Pitagoras — „supergwiazda” matematyczna czasów starożytnych — zaczął jednak tę wiedzę porządkować i za Talesem, z którym prawdopodobnie się spotkał, udowadniać dawne twierdzenia. Niektórzy twierdzą, że Pitagoras był nawet uczniem starszego od niego Talesa. Pitagoras długo podróżował, odwiedzając zarówno Babilonię, jak i Egipt. Oczywiście nie można odebrać mu chwały za uporządkowanie tych obserwacji i sformułowanie słynnego twierdzenia. Pokazuje to, że rozwój cywilizacyjny wymusza niejako odkrycia matematyczne. O ile Pitagoras miał bardzo idealistyczne podejście i poświęcił się głównie nauce i założonemu przez siebie Związkowi Pitagorejskiemu, o tyle Tales stosował swoją wiedzę w praktyce, mierząc chociażby wysokość piramid z wykorzystaniem cienia.

Wśród znalezionych przez archeologów 500 tysięcy glinianych tabliczek pochodzących z Babilonu, sprzed niemal 3500 lat, trzysta dotyczy matematyki. Jedną z najsłynniejszych jest tabliczka Plimpton 322. Nazwa pochodzi od nazwiska amerykańskiego dziennikarza George’a Arthura Plimptona, który oznaczył ją numerem 322 w swojej kolekcji. Tabliczka wypełniona znakami pisma klinowego zawiera cztery kolumny, które wydają się liczbami zapisanymi w sześćdziesiątkowym układzie pozycyjnym. Okazuje się, że wśród tych liczb znajdują się trójki pitagorejskie, czyli liczby spełniające twierdzenie Pitagorasa. Można z niej odczytać chociażby trójkąty prostokątne o długościach boków 3, 4, 5 czy 5, 12, 13. Nie byłoby w tym nic dziwnego, gdyby nie fakt, że tabliczka datowana jest na przedział czasowy ok. 1800 – 1600 r. p.n.e. — ponad 1000 lat przed narodzinami Pitagorasa!

Drugą wspaniale rozwijającą się cywilizacją był Egipt. Po Egipcjanach również zachowało się dużo dokumentów, ale w odróżnieniu od Babilończyków używali oni do zapisu papirusu. Najlepszym odzwierciedleniem tego, co działo się w egipskim matematycznym świecie, jest papirus Rhinda. Nazwa pochodzi od nazwiska szkockiego egiptologa Henry’ego Rhinda, który odkrył ten dokument w 1858 roku. Jest to zbiór 87 zadań arytmetycznych i geometrycznych, jakimi zajmowali się Egipcjanie, a powstał ok. 1650 roku p.n.e. Papirus Rhinda zawiera rozwiązania krok po kroku, nawet ze szkicami rysunków. Spisał go skryba Ahmes — podał on również informację, że nie jest autorem, lecz tylko kopiował starszy dokument z około 1800 roku p.n.e. Wydawać by się mogło, że budowniczy niewyobrażalnie wielkiej, jak na tamte czasy, piramidy Cheopsa musieli znać również zasady, jakimi rządzą się trójkąty prostokątne. A jednak w papirusie Rhinda nic o tym nie ma, mimo że przypuszcza się, że zawarte w nich zadania musieli sobie przyswoić skrybowie królewscy.

Czy oznacza to, że jednak Egipcjanie nie wiedzieli nic o własnościach trójkąta prostokątnego? Nic bardziej mylnego. Po każdym wylewie Nilu Egipcjanie na nowo mierzyli swoje działki rolne. Na zalanych terenach rozmywały się miedze i trzeba było wyznaczać pola ponownie — od powierzchni pola zależały podatki. Jedną z podstawowych miar powierzchni był prostokąt o wymiarach 1 łokieć na 100 łokci. Jednak do dokładnego wyznaczenia tego prostokąta potrzebny był kąt prosty. Okazuje się, że Egipcjanie rozwiązywali ten problem, korzystając ze znakomitego narzędzia. Wiązali na sznurze w równych odstępach węzły i tworzyli z niego trójkąt o bokach mających długość 3, 4, 5 węzłów, wiedząc, że największy kąt jest kątem prostym! Nic dziwnego, że dzisiaj trójkąt o takich bokach nazywamy egipskim.

Nie wyobrażamy sobie matematyki bez geometrii, która jest jej swoistym fundamentem. Pięknie puentuje to napis umieszczony nad wejściem do Akademii Platońskiej, który brzmi: „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii”.

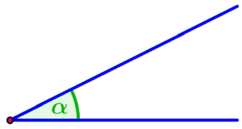
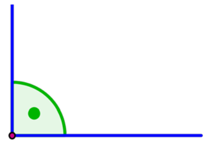
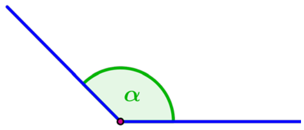
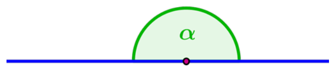
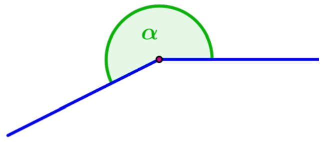
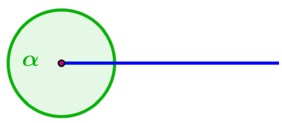
Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że…	dodatkowe informacje i ciekawostki

7.A ► Kąty. Czworokąty i ich podział. Trójkąt i jego punkty charakterystyczne

► Rodzaje kątów

PODZIAŁ KĄTÓW (w zależności od miary kąta)		PRZYKŁAD P.7.A.1
Kąty wypukłe $(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$	Kąt zerowy $(\alpha = 0^\circ)$	
	Kąt ostry $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$	
	Kąt prosty $(\alpha = 90^\circ)$	
	Kąt rozwarty $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$	
	Kąt półpełny $(\alpha = 180^\circ)$	
Kąt wklęsły $(180^\circ < \alpha < 360^\circ)$		
Kąt pełny $(\alpha = 360^\circ)$		

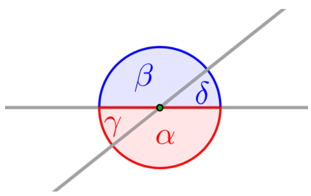
PODZIAŁ KĄTÓW (w zależności od położenia kątów względem siebie)

Dwa kąty wypukłe są przyległe, jeśli mają jedno ramię wspólne, a dwa pozostałe ramiona uzupełniają się do prostej.

Kąty przyległe tworzą razem kąt półpełny.

PRZYKŁAD

Kąty przyległe P.7.A.2



$\alpha + \gamma = 138^\circ + 42^\circ = 180^\circ$

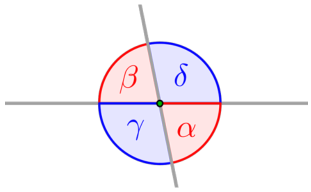
$\beta + \delta = 138^\circ + 42^\circ = 180^\circ$

Dwa wypukłe kąty są wierzchołkowe, gdy mają wspólny wierzchołek, a ramiona uzupełniają się do prostych.

Kąty wierzchołkowe mają równe miary.

Kąty wierzchołkowe

P.7.A.3



$\alpha = 87^\circ$, $\beta = 87^\circ$

$\gamma = 93^\circ$, $\delta = 93^\circ$

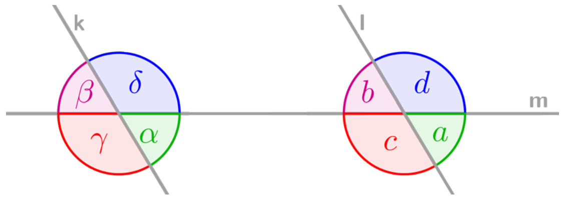
Jeżeli prosta m przecina parę równoległych prostych k i l, to utworzone w ten sposób zostały następujące kąty:

- odpowiadające: $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\delta = d$
- naprzemianległe: $\alpha = b$, $\beta = a$, $\gamma = d$, $\delta = c$

Kąty odpowiadające i naprzemianległe mają równe miary.

Kąty odpowiadające

P.7.A.4



$\alpha = a = 62^\circ$

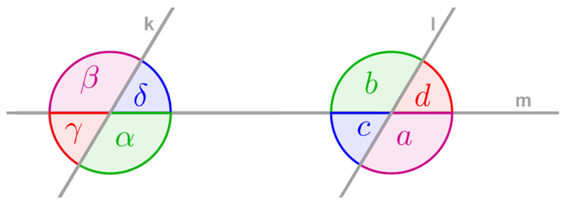
$\beta = b = 62^\circ$

$\gamma = c = 118^\circ$

$\delta = d = 118^\circ$

Kąty naprzemianległe

P.7.A.5



$\alpha = b = 128^\circ$

$\beta = a = 128^\circ$

$\gamma = d = 52^\circ$

$\delta = c = 52^\circ$

PRZYKŁAD

Kąt α jest trzy razy mniejszy od kąta do niego przyległego. Oblicz miarę kąta α.

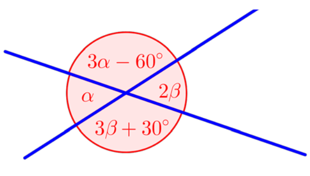
1° Skoro kąty są przyległe, to tworzą razem kąt półpełny (180°). Możemy więc zapisać równanie.

$$\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$
$$4\alpha = 180^\circ \quad |:4$$
$$\alpha = 45^\circ$$

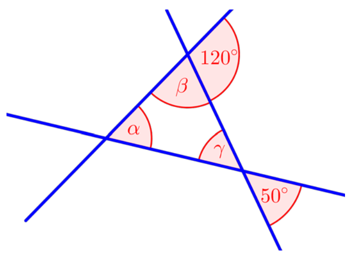
2° Miara kąta α wynosi 45°.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

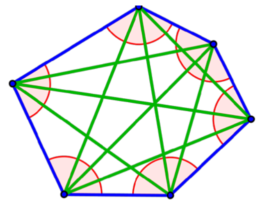
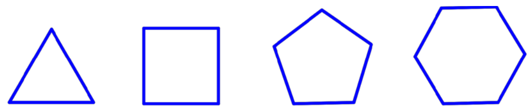
7.A.1. Oblicz miary α i β, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.



7.A.2. Oblicz miary kątów α, β i γ, korzystając z danych przedstawionych na rysunku.



► Wielokąty — podstawowe własności

WŁASNOŚCI	PRZYKŁAD
Wielokąt (n-kąt) posiada n boków i n wierzchołków.	
Przekątna wielokąta to odcinek łączący wierzchołki wielokąta, niebędący jego bokiem.	
Wielokąt foremny to wielokąt, którego boki mają równe długości, a kąty wewnętrzne mają równe miary.	

TWIERDZENIE

Liczba przekątnych w wielokącie mającym n boków ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$) jest równa:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

TWIERDZENIE

Suma kątów wewnętrznych wielokąta mającego n boków ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$) jest równa:

$$180^\circ \cdot (n-2)$$

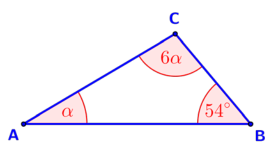
PRZYKŁAD	Suma kątów wewnętrznych	
Trójkąt	$S = 180^\circ \cdot (3-2) = 180^\circ$	P.7.A.6
Czworokąt	$S = 180^\circ \cdot (4-2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$	P.7.A.7
Sześciokąt	$S = 180^\circ \cdot (6-2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$	P.7.A.8

PRZYKŁAD

P.7.A.9

Jeden kąt trójkąta ma miarę 54°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest 6 razy większy od drugiego. Znajdź te kąty.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i oznaczamy brakujące kąty jako α oraz 6α.



2° Suma kątów w trójkącie wynosi 180°, więc układamy równanie.

$$\alpha + 6\alpha + 54^\circ = 180^\circ$$

3° Rozwiązujemy równanie.

$7\alpha = 180^\circ - 54^\circ$

$7\alpha = 126^\circ \quad |:7$

$\alpha = 18^\circ$

4° Obliczamy kąt 6α.

$6\alpha = 6 \cdot 18^\circ = 108^\circ$

5° Szukane kąty mają miary 18° i 108°.

PRZYKŁAD

P.7.A.10

Dany jest ośmiokąt foremny. Oblicz:

a. sumę miar kątów wewnętrznych,

b. wartość kąta wewnętrznego,

c. liczbę przekątnych.

odp. a. Korzystamy ze wzoru na sumę kątów: $S = (n-2)\cdot 180^\circ$.

$S = (8-2)\cdot 180^\circ = 6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$

odp. b. Wartość kąta wewnętrznego otrzymamy, dzieląc sumę kątów wewnętrznych przez ich liczbę.

$1080^\circ : 8 = 135^\circ$

odp. c. Korzystamy ze wzoru na liczbę przekątnych: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

$d = \frac{8\cdot(8-3)}{2} = \frac{\cancel{8}^{4}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}} = 20$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.A.3. Jeden z kątów trójkąta ma miarę 81°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest o 17° mniejszy od drugiego. Znajdź te kąty.

7.A.4. Stosunek miar kątów pięciokąta wypukłego wynosi $2:3:4:5:6$. Znajdź te kąty.

7.A.5. Oblicz sumę miar kątów siedmiokąta wypukłego.

7.A.6. Oblicz wartość kąta wewnętrznego dziesięciokąta foremnego.

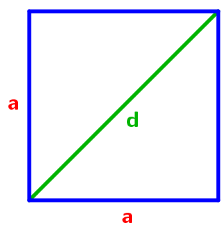
7.A.7. Oblicz liczbę przekątnych dziewięciokąta foremnego.

► Podział czworokątów i ich najważniejsze własności

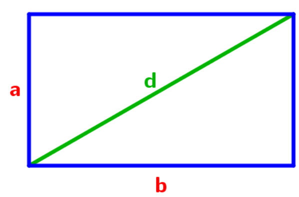
P.7.A.11

FIGURA

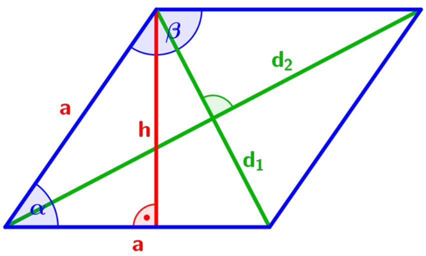
Kwadrat

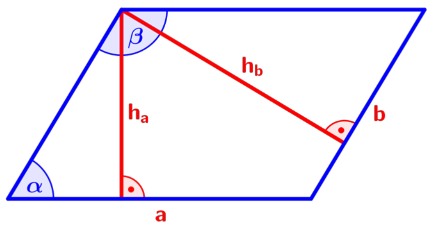


Prostokąt

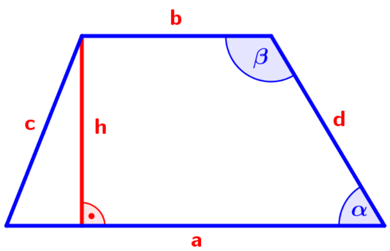


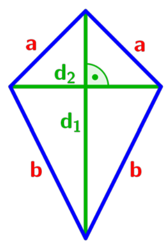
DEFINICJA	Kwadrat to prostokąt o wszystkich bokach równych.	Prostokąt to równoległobok o wszystkich kątach wewnętrznych prostych.
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P = a^2$	$P = a \cdot b$
WZÓR NA OBWÓD	$O = 4a$	$O = 2a + 2b$
INNE WAŻNE INFORMACJE	$d = a\sqrt{2}$; d — przekątna	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$; d — przekątna
FIGURA	Romb	Równoległobok





DEFINICJA	Romb to równoległobok o równych bokach.	Równoległobok to czworokąt o dwóch parach boków równoległych.
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P = a \cdot h$ $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; d_1, d_2 — przekątne	$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$
WZÓR NA OBWÓD	$O = 4a$	$O = 2a + 2b$
INNE WAŻNE INFORMACJE	$\alpha + \beta = 180^\circ$	$\alpha + \beta = 180^\circ$
FIGURA	Trapez	Deltoid





DEFINICJE	Trapez to czworokąt o co najmniej jednej parze boków równoległych.	Deltoid to czworokąt symetryczny względem jednej z przekątnych, w którym dwie pary sąsiednich boków, wychodzących z wierzchołków położonych na osi symetrii, są równe.
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$	$P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; d_1, d_2 — przekątne
WZÓR NA OBWÓD	$O = a + b + c + d$	$O = 2a + 2b$
INNE WAŻNE INFORMACJE	$\alpha + \beta = 180^\circ$	

WŁASNOŚĆ	Trapez	Równoległobok	Prostokąt	Romb	Kwadrat
Co najmniej jedna para boków równoległych.	TAK	TAK	TAK	TAK	TAK
Dwie pary boków równoległych.		TAK	TAK	TAK	TAK
Dwie pary boków równych.		TAK	TAK	TAK	TAK
Wszystkie boki równe.				TAK	TAK
Kąty wewnętrzne są równe i proste.			TAK		TAK
Równe przekątne.			TAK		TAK
Przekątne przecinają się pod kątem prostym.				TAK	TAK
Przekątne dzielą się na połowy.		TAK	TAK	TAK	TAK
Przekątne zawierają się w dwusiecznych.				TAK	TAK

Tabela powyżej wskazuje, że:

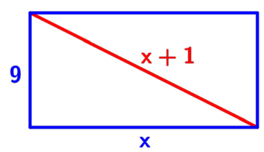
- Każda własność trapezów jest również własnością równoległoboków, prostokątów, rombów i kwadratów.
- Każda własność równoległoboku jest również własnością prostokątów, rombów i kwadratów.
- Każda własność prostokątów jest również własnością kwadratów.
- Każda własność rombów jest również własnością kwadratów.

PRZYKŁAD

P.7.A.12

Przekątna prostokąta jest o 1 dłuższa od jednego z boków, a drugi bok ma długość 9. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Układamy równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy, brakującą długość.

$$x^2 + 9^2 = (x+1)^2$$
$$\cancel{x^2} + 81 = \cancel{x^2} + 2x + 1$$
$$-2x = 1 - 81$$
$$-2x = -80 \quad |:(-2)$$
$$x = 40$$

3° Obliczamy pole i obwód prostokąta.

$P = a \cdot b = 9 \cdot 40 = 360$

$O = 2a + 2b = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 40 = 18 + 80 = 98$

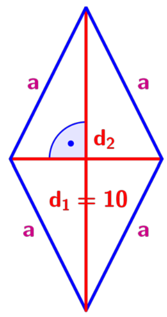
4° Pole prostokąta wynosi 360 j^2, a obwód 98 j.

PRZYKŁAD

P.7.A.13

Pole rombu wynosi 120, a jedna z przekątnych ma długość 10. Oblicz obwód tego rombu.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Obliczamy długość drugiej przekątnej, korzystając ze wzoru na pole rombu: $P = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$.

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot d_2 = 120$$
$$5d_2 = 120 \quad |:5$$
$$d_2 = 24$$

3° Obliczamy połowy przekątnych oraz długość boku rombu, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$\frac{1}{2}d_1 = 5$$
$$\frac{1}{2}d_2 = 12$$
$$a^2 = 5^2 + 12^2$$
$$a^2 = 25 + 144$$
$$a^2 = 169$$
$$a = \sqrt{169} = 13$$

4° Obliczamy obwód rombu.

$O = 4a = 4 \cdot 13 = 52$

5° Obwód rombu wynosi 52.

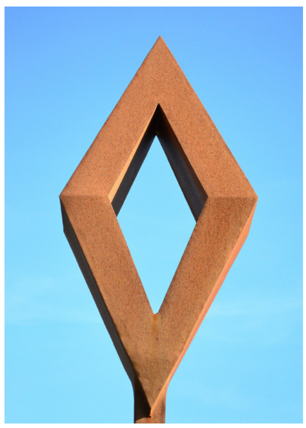
ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.A.8. Przekątna prostokąta jest o 8 dłuższa od jednego z jego boków, a drugi bok ma długość 12. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.

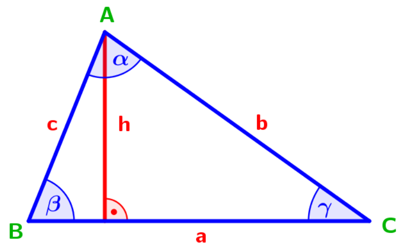
7.A.9. Oblicz pole trapezu równoramiennego, którego ramiona i krótsza podstawa mają długość 13, a wysokość równa się 5.

7.A.10. Pole rombu wynosi 96, a jedna z przekątnych ma długość 12. Oblicz obwód rombu.

7.A.11. Trapez prostokątny, w którym dłuższa podstawa jest równa 12, został podzielony krótszą przekątną na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Oblicz pole tego trapezu.



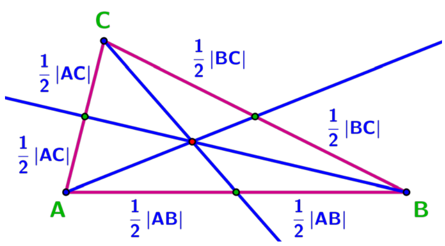
► Trójkąty i ich najważniejsze własności

FIGURA	Trójkąt różnoboczny 
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P=\frac{1}{2}a\cdot h$ $\quad$ $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; p — połowa obwodu
WZÓR NA OBWÓD	$O=a+b+c$
WARUNEK ISTNIENIA TRÓJKĄTA	$a+b>c$ i $a+c>b$ i $b+c>a$ Suma długości dwóch boków trójkąta musi być większa od długości trzeciego boku.

► Charakterystyczne odcinki i punkty w trójkącie

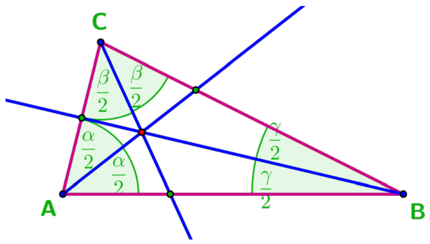
P.7.A.14

Środkowa



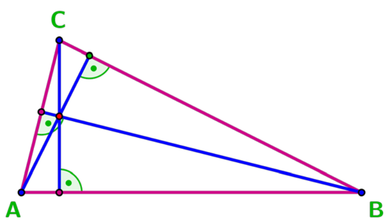
Przecięcie środkowych jest środkiem ciężkości trójkąta (barycentrum).

Dwusieczna



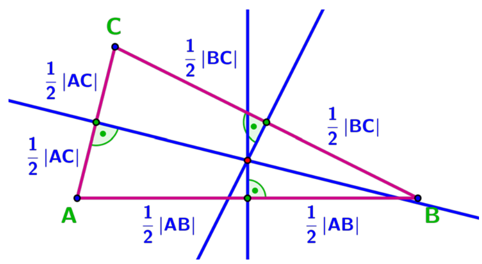
Przecięcie dwusiecznych jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

Wysokość



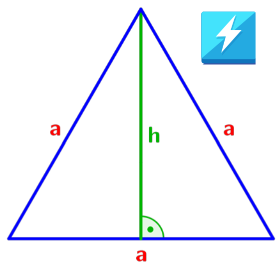
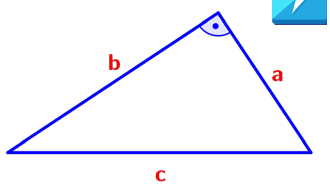
Proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie, które nazywamy ortocentrum.

Symetralna

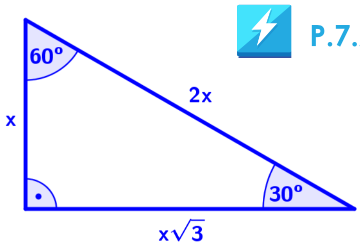


Przecięcie symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

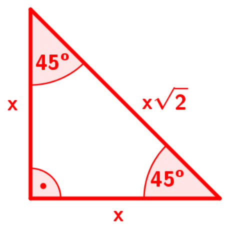
► Podział trójkątów

FIGURA	Trójkąt równoboczny	Trójkąt prostokątny
	 P.7.B.5	 P.7.B.6
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$P=\frac{1}{2}a\cdot b$
WZÓR NA OBWÓD	$O=3a$	$O=a+b+c$
INNE WAŻNE INFORMACJE	$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ h — wysokość trójkąta	$a^2+b^2=c^2$ twierdzenie Pitagorasa P.7.A.15

STOSUNEK DŁUGOŚCI BOKÓW W CHARAKTERYSTYCZNYCH TRÓJKĄTACH PROSTOKĄTNYCH



P.7.A.16



P.7.A.17

α	30°	60°	90°
boki	x	$x\sqrt{3}$	$2x$
α	45°	45°	90°
boki	x	x	$x\sqrt{2}$

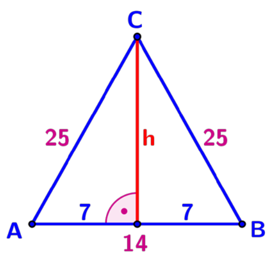
PRZYKŁAD

P.7.A.18

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 14, a ramię ma długość 25. Oblicz pole tego trójkąta.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.

2° Wysokość dzieli podstawę na dwie równe części.



3° Z twierdzenia Pitagorasa układamy równanie i obliczamy h.

$$h^2+7^2=25^2$$
$$h^2+49=625$$
$$h^2=625-49$$
$$h^2=576 \Rightarrow h=\sqrt{576}=24$$

4° Obliczamy pole trójkąta. $P_{\triangle} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 24 = 7 \cdot 24 = 168$

5° Pole trójkąta wynosi 168 j^2.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.A.12. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 36, a ramię ma długość 30. Oblicz pole tego trójkąta.

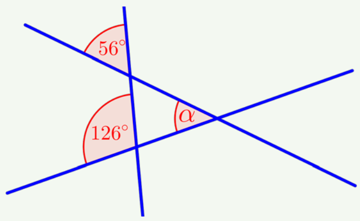
7.A.13. W okręgu poprowadzono cięciwę o długości 24, która jest oddalona od środka okręgu o 5. Oblicz obwód tego okręgu.

7.A.14. Pole sześciokąta foremnego wynosi $96\sqrt{3}$. Oblicz długości przekątnych tego sześciokąta.

7.A.15. W trójkącie drugi kąt jest dwa razy większy od pierwszego, a trzeci jest o 30° większy od drugiego. Oblicz długość boków tego trójkąta, wiedząc, że obwód jest równy $12(\sqrt{3}+1)$.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.7.A

7.A.16. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, można stwierdzić, że kąt α ma miarę:



A. 70° **C.** 74°

B. 80° **D.** 110°

7.A.17. Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu:

A. symetralnych, **B.** środkowych, **C.** wysokości, **D.** dwusiecznych.

7.A.18. Kąt wewnętrzny dwunastokąta foremnego ma miarę:

A. 135° **B.** 180° **C.** 150° **D.** 165°

7.A.19. Liczba przekątnych ośmiokąta foremnego wynosi:

A. 32 **B.** 14 **C.** 40 **D.** 20

7.A.20. W trójkącie jeden z kątów ma miarę 45°. Z pozostałych dwóch kątów tego trójkąta jeden jest cztery razy mniejszy od drugiego. Miary pozostałych kątów to:

A. 20° i 80° **B.** 15° i 60° **C.** 27° i 108° **D.** 35° i 105°

7.A.21. Suma kątów dziewięciokąta foremnego wynosi:

A. 1260° **B.** 1440° **C.** 1620° **D.** 1080°

7.A.22. W trójkącie równoramiennym podstawa ma długość 48, a ramię ma długość 25. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość:

A. 7 **B.** $\sqrt{1201}$ **C.** 24 **D.** $\sqrt{674}$

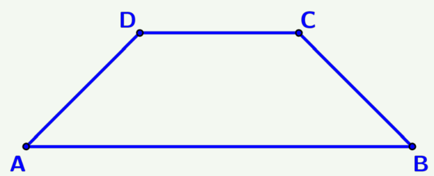
7.A.23. Obwód prostokąta jest równy 36. Jeżeli stosunek długości jego boków jest równy $5 : 4$, to krótszy bok tego prostokąta jest równy:

A. 8 **B.** 10 **C.** 9 **D.** 12

7.A.24. Dany jest sześciokąt foremny, którego krótsza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$. Pole tego sześciokąta jest równe:

A. 48 **B.** $4\sqrt{3}$ **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** $24\sqrt{3}$

7.A.25. Dany jest trapez równoramienny (zobacz rysunek), w którym $|BC| = |AD| = |DC| = 29$, a wysokość trapezu jest równa 21. Długość $|AB|$ wynosi:



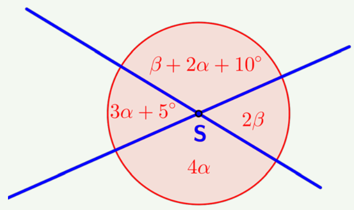
A. 20 **C.** 71

B. 40 **D.** 69

ZADANIA OTWARTE

7.A.26. Stosunek kątów pięciokąta wypukłego wynosi $3 : 4 : 5 : 7 : 8$. Oblicz kąty tego pięciokąta. **2 pkt**

7.A.27. Dwie proste przecięły się w punkcie S. Oblicz α i β, posługując się danymi z rysunku. **2 pkt**



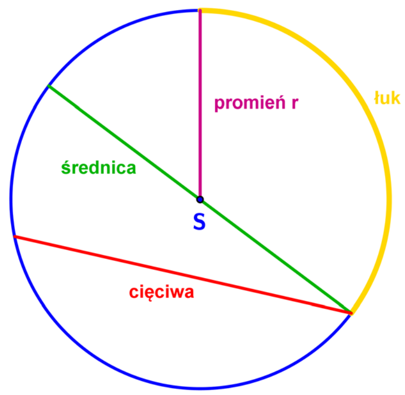
7.1 ► Stosowanie zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym

► Okrąg i koło

DEFINICJE

P.7.1.1

Okrąg	Okręgiem o środku w punkcie S i promieniu r, $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest równa r. Okrąg będziemy oznaczać $o(S,r)$.
Koło	Kołem o środku w punkcie S i promieniu r, $r > 0$ nazywamy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza lub równa r. Koło będziemy oznaczać $k(S,r)$.

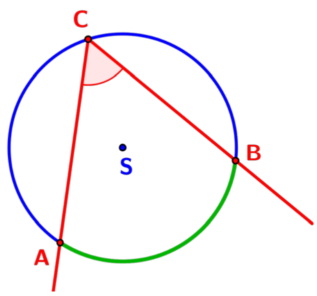


► Zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym

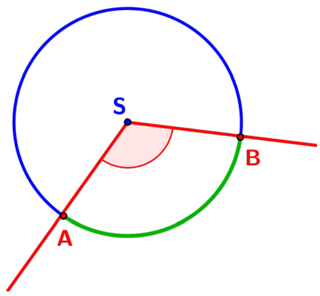
DEFINICJA

PRZYKŁAD

Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt na okręgu, a w ramionach tego kąta zawierają się cięciwy.



Kątem środkowym nazywamy kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu.



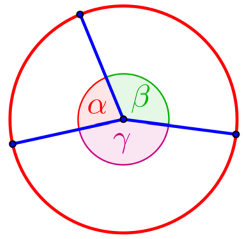
W praktyce stosujemy skrócony sposób zaznaczania obu kątów — zamiast rysować półproste CA i CB oraz SA i SB, zaznaczamy jedynie cięciwy (w przypadku kąta wpisanego) lub promienie (w przypadku kąta środkowego). Mówimy również, że kąt (środkowy lub wpisany) opiera się na danym łuku (w naszym przypadku łuku AB).

Miara kąta środkowego jest wprost proporcjonalna do długości łuku, na którym oparty jest ten kąt. Oznacza to, że np. kątowi trzy razy większemu odpowiada trzy razy dłuższy łuk, a kątowi dwa razy mniejszemu odpowiada dwa razy krótszy łuk.

PRZYKŁAD — P.7.1.2

Trzy punkty podzieliły okrąg na trzy łuki, których długości są w stosunku $2 : 3 : 4$. Oblicz miary kątów środkowych opartych na poszczególnych łukach.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.
α, β, γ to kąty środkowe oparte na poszczególnych łukach.



2° Jeśli łuki pozostają w stosunku $2 : 3 : 4$, to również kąty pozostają w takim stosunku.

$$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$$

3° Wprowadzamy zmienną x, $(x > 0)$, która oznacza pewien kąt i zapisujemy wartości kątów z wykorzystaniem tej zmiennej.

$$\alpha = 2x$$
$$\beta = 3x$$
$$\gamma = 4x$$

4° Wszystkie trzy kąty tworzą kąt pełny, więc możemy zapisać równanie.

$$2x + 3x + 4x = 360^\circ$$
$$9x = 360^\circ$$
$$x = 40^\circ$$

5° Obliczamy miary poszczególnych kątów.

$$\alpha = 2x = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$$
$$\beta = 3x = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ$$
$$\gamma = 4x = 4 \cdot 40^\circ = 160^\circ$$

6° Kąty środkowe mają miary $80^\circ, 120^\circ, 160^\circ$.

PRZYKŁAD — P.7.1.3

Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku, którego długość jest równa $\frac{4}{9}$ długości okręgu.

1° Skoro długość łuku, na którym oparty jest kąt, to $\frac{4}{9}$ długości całego okręgu, to miara kąta wynosi $\frac{4}{9}$ kąta pełnego (360°).

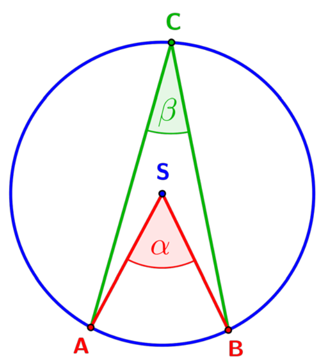
$$\alpha = \frac{4}{\cancel{9}_{1}} \cdot \cancel{360^\circ}^{40} = 160^\circ$$

2° Kąt środkowy wynosi 160°.

TWIERDZENIE

Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.

PRZYKŁAD — P.7.1.4



Kąt wpisany
$\beta = 27^\circ$

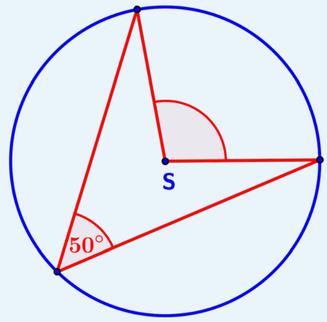
Kąt środkowy
$\alpha = 54^\circ$

czyli $\alpha = 2\beta$

PRZYKŁAD 1

P.7.1.5

Uzupełnij miarę kąta środkowego, posługując się rysunkiem.

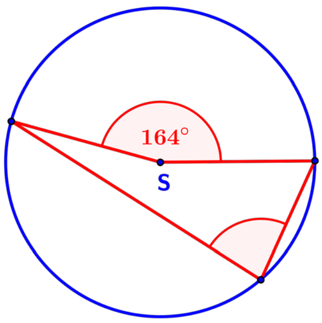


Kąt środkowy $= 100^\circ$, kąt wpisany $= 50^\circ$.

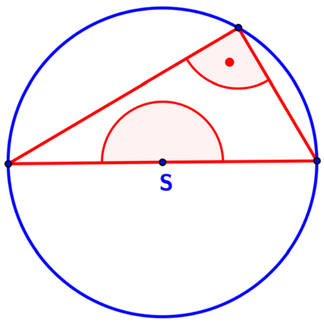
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

Uzupełnij wartości miar kąta środkowego lub kąta wpisanego, posługując się rysunkiem.

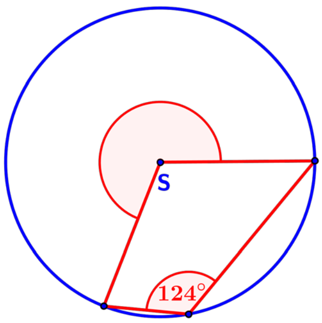
PRZYKŁAD 2.



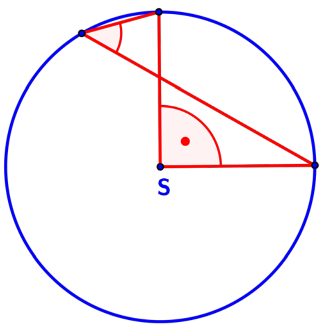
PRZYKŁAD 3.



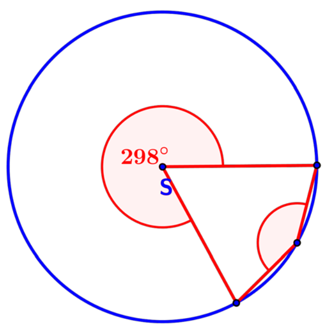
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.



PRZYKŁAD 6.



PRZYKŁAD

P.7.1.6

Oblicz miarę kąta wpisanego opartego na łuku, którego długość jest równa $\frac{5}{18}$ długości okręgu.

1° Obliczamy miarę kąta środkowego.

$$\alpha = \frac{5}{\cancel{18}_{1}} \cdot \cancel{360^\circ}^{20} = 100^\circ$$

2° Obliczamy miarę kąta wpisanego, który jest połową kąta środkowego.

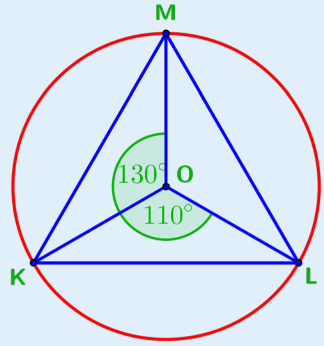
$$\frac{\alpha}{2} = 100^\circ : 2 = 50^\circ$$

3° Kąt wpisany ma miarę 50°.

PRZYKŁAD

P.7.1.7

Punkt O jest środkiem okręgu (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta LKM.



1° Obliczamy miarę kąta LOM.

$$|\sphericalangle LOM| = 360^\circ - 110^\circ - 130^\circ = 120^\circ$$

2° Kąt LOM jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy LKM, więc jest dwa razy mniejszy.

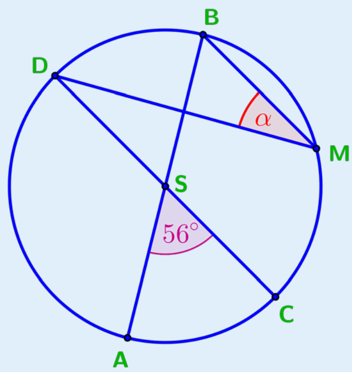
$$|\sphericalangle LKM| = 120^\circ : 2 = 60^\circ$$

3° Szukany kąt ma miarę 60°.

PRZYKŁAD

P.7.1.8

Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 56° (zobacz rysunek). Podaj miarę kąta α.



1° Kąt ASC jest wierzchołkowy do kąta DSB, więc możemy obliczyć jego miarę.

$$|\sphericalangle ASC| = |\sphericalangle DSB| = 56^\circ$$

2° Można zauważyć, że na łuku DB oparte są kąty DSB oraz DMB (α).

3° Z twierdzenia o kątach środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że kąt α jest połową kąta DSB.

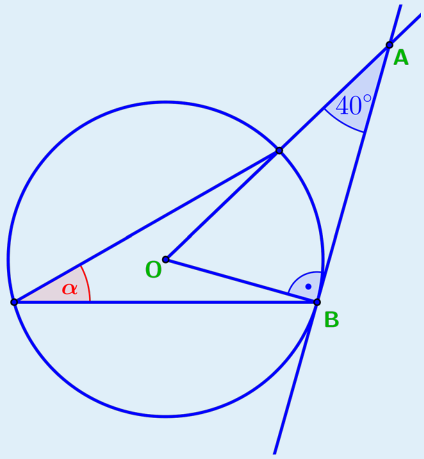
$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle DSB| = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ$$

4° Miara kąta α wynosi 28°.

PRZYKŁAD

P.7.1.9

Punkt O jest środkiem okręgu. Oblicz kąt α zaznaczony na rysunku.



1° Obliczamy kąt AOB z sumy kątów w trójkącie. $|\sphericalangle AOB| = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$

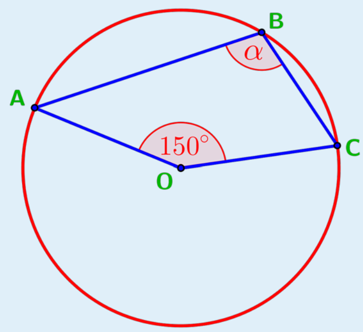
2° Kąt α jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt 50°, więc jest dwa razy mniejszy. $\alpha = 50^\circ : 2 = 25^\circ$

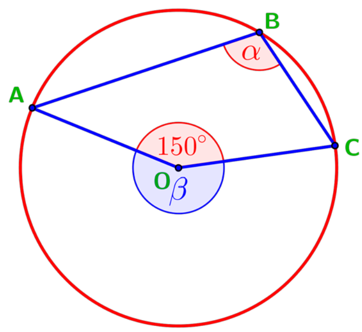
3° Kąt α ma miarę 25°.

PRZYKŁAD

P.7.1.10

Punkt O jest środkiem okręgu. Oblicz miarę kąta α.





1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, zaznaczając dodatkowy kąt.

2° Obliczamy kąt wklęsły β (patrz rysunek), wiedząc, że ten kąt razem z kątem 150° tworzy kąt pełny o wartości 360°.

$$\beta + 150^\circ = 360^\circ$$
$$\beta = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

3° Korzystamy z twierdzenia o kącie środkowym β i kącie wpisanym α opartych na tym samym łuku.

$$\alpha = \beta : 2 = 210^\circ : 2 = 105^\circ$$

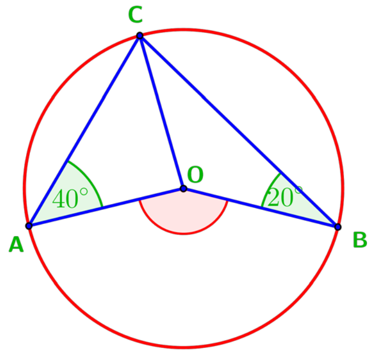
4° Kąt α ma miarę 105°.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.1.1. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na $\frac{7}{8}$ długości okręgu.

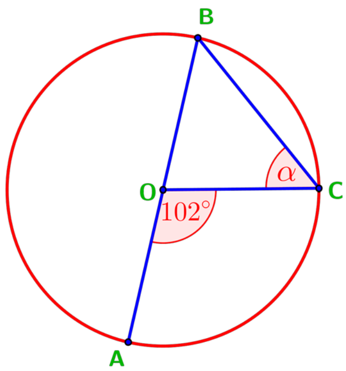
7.1.2. Oblicz miarę kąta wpisanego opartego na $\frac{7}{12}$ długości okręgu.

7.1.3. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Oblicz zaznaczony na rysunku kąt środkowy AOB.

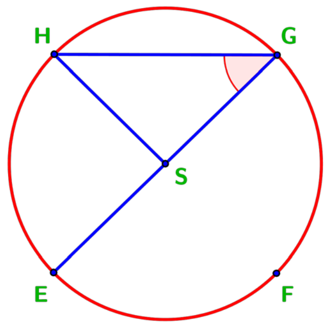


Z.7.1.3

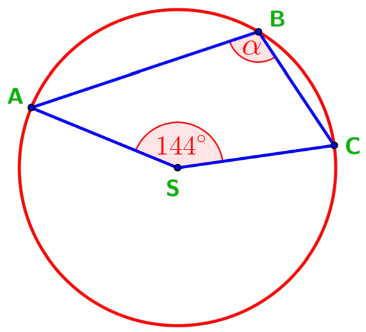
7.1.4. Punkt O jest środkiem okręgu o średnicy AB (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta α.



7.1.5. Punkty E, F, G, H dzielą okrąg na 4 równe łuki. Oblicz miarę kąta wpisanego EGH zaznaczonego na rysunku.

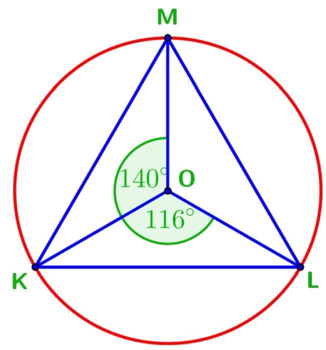


7.1.6. Punkt S jest środkiem okręgu. Oblicz miarę kąta wpisanego α zaznaczonego na rysunku.



7.1.7. Punkt O jest środkiem okręgu (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta LKM.

Z.7.1.7



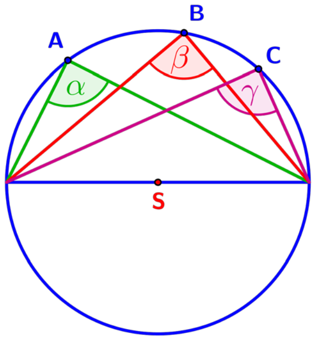
7.1.8. Kąt wpisany jest o 38° mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku co kąt wpisany. Oblicz miary obu tych kątów.

W szczególnym przypadku, jeśli kąt środkowy ma miarę 180°, czyli jest oparty na półokręgu (mówimy również, że jest oparty na średnicy), to kąt wpisany, oparty na tym samym łuku, ma miarę 90°.

TWIERDZENIE

P.7.1.11

Kąt wpisany, oparty na półokręgu, jest kątem prostym.



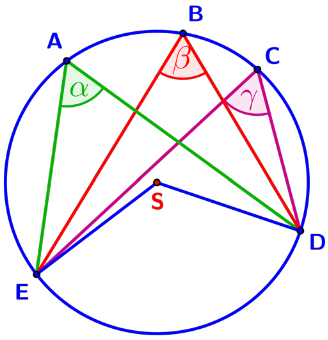
$\alpha = 90^\circ$
$\beta = 90^\circ$
$\gamma = 90^\circ$

TWIERDZENIE

P.7.1.12

Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równe.

Możemy również uogólnić, że kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



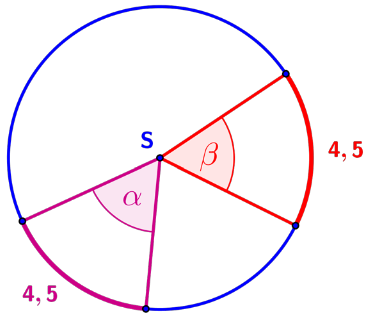
$\alpha = \beta = \gamma$

Powyższa zależność wynika z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym.
Skoro $|\sphericalangle ESD| = 2\alpha = 2\beta = 2\gamma$, to $\alpha = \beta = \gamma$.

TWIERDZENIE

P.7.1.13

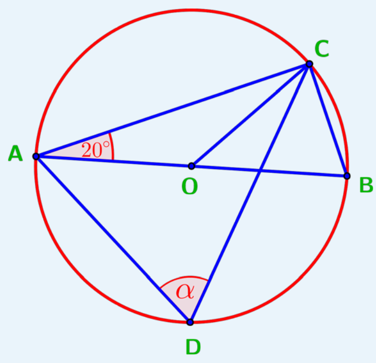
Kąty środkowe oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



$\alpha = \beta$

PRZYKŁAD

Na okręgu o środku O leżą punkty A, B, C, D. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu, a kąt między tą średnicą a cięciwą AC jest równy 20° (zobacz rysunek). Kąt α zawarty jest między cięciwami AD i CD. Oblicz miarę kąta α.



1° Trójkąt AOC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle CAO| = |\sphericalangle ACO| = 20^\circ$.

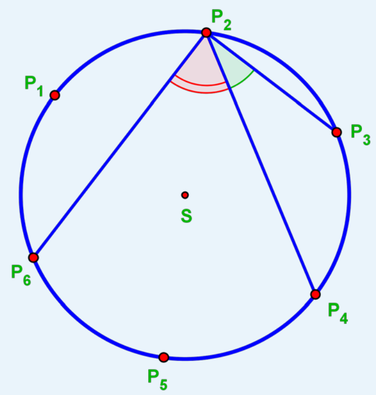
2° Korzystamy z sumy kątów w trójkącie i obliczamy kąt AOC. $|\sphericalangle AOC| = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$

3° Kąt AOC jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku co kąt wpisany α, więc α jest połową tego kąta. $\alpha = |\sphericalangle AOC| : 2 = 140^\circ : 2 = 70^\circ$

4° Miara kąta α wynosi 70°.

PRZYKŁAD

Okrąg o środku S podzielono punktami $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ na sześć równych łuków. Uzasadnij, że $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = 2 \cdot |\sphericalangle P_4P_2P_3|$.



1° Obliczamy miarę kąta środkowego P_6SP_4 opartego na $\frac{2}{6}$ długości całego okręgu. $|\sphericalangle P_6SP_4| = \frac{2}{\cancel{6}_{1}} \cdot \cancel{360^\circ}^{60} = 120^\circ$

2° Kąt wpisany $P_6P_2P_4$ jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy P_4SP_3.

$|\sphericalangle P_6P_2P_4| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle P_4SP_3| =$

$= \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

3° Obliczamy miarę kąta środkowego P_4SP_3 opartego na $\frac{1}{6}$ długości całego okręgu. $|\sphericalangle P_4SP_3| = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$

4° Kąt wpisany $P_4P_2P_3$ jest oparty na tym samym łuku co kąt środkowy P_4SP_3.

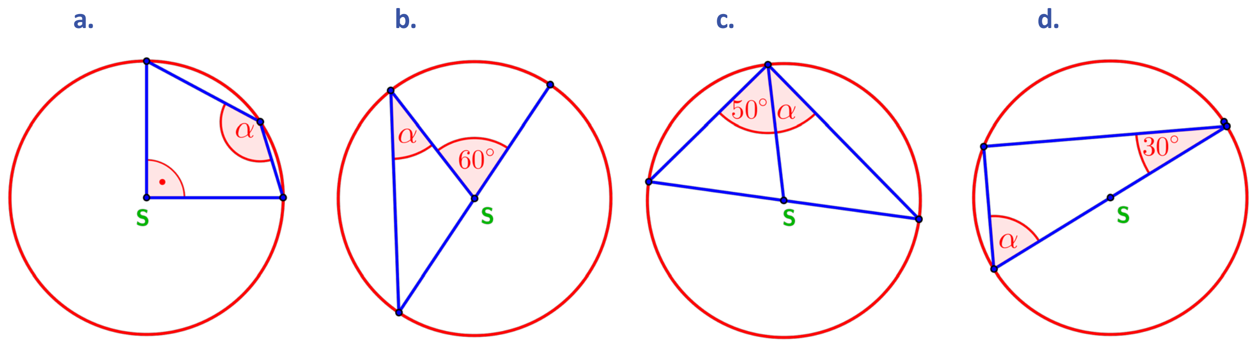
$|\sphericalangle P_4P_2P_3| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle P_4SP_3| =$

$= \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

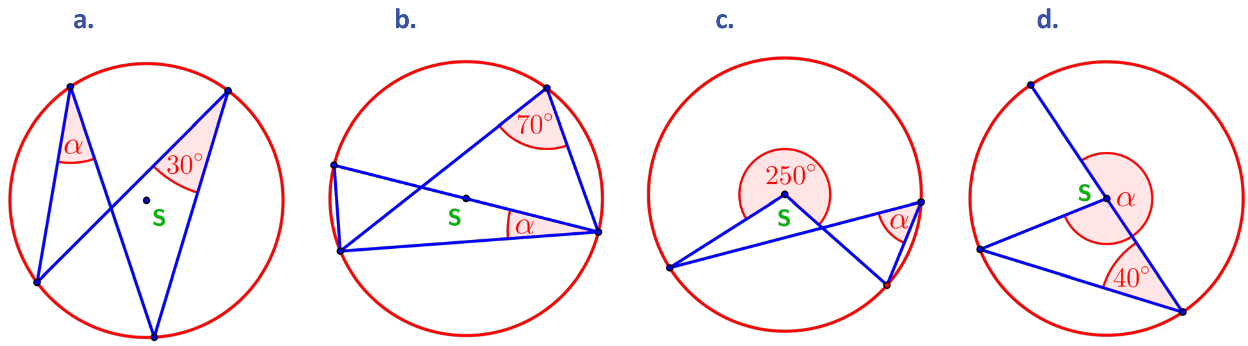
5° Zatem $|\sphericalangle P_6P_2P_4| = 2 \cdot |\sphericalangle P_4P_2P_3|$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

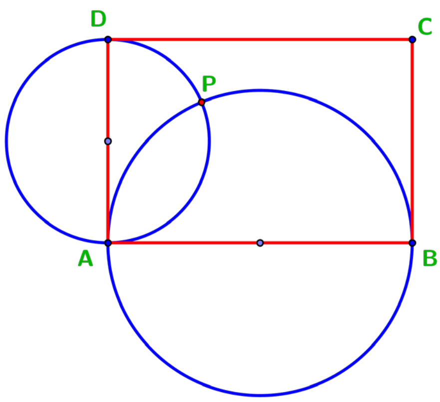
7.1.9. Dany jest okrąg o środku S. Oblicz miarę kąta α.



7.1.10. Dany jest okrąg o środku S. Oblicz miarę kąta α.



7.1.11. Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D są współliniowe.



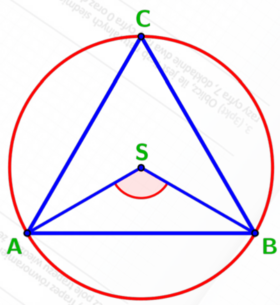
Z.7.1.11

MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.1

7.1.12. W okrąg o środku S wpisano trójkąt równoboczny ABC (zobacz rysunek). Miara kąta środkowego ASB jest równa:



A. 60°

B. 120°

C. 150°

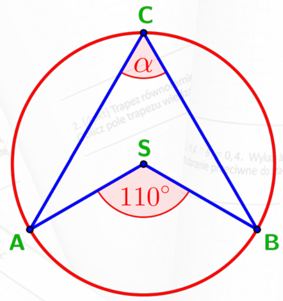
D. 30°

MATURA

7.1.13. Kąt wpisany oparty na $\frac{7}{18}$ długości okręgu ma miarę:

A. 139° **B.** 140° **C.** 70° **D.** 35°

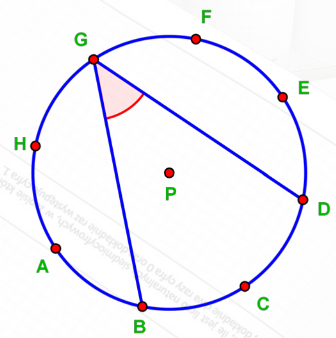
7.1.14. Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę:



A. 70° **C.** 130°

B. 220° **D.** 55°

7.1.15. Okrąg o środku P został podzielony punktami na osiem równych łuków. Miara kąta wpisanego BGD zaznaczonego na rysunku wynosi:



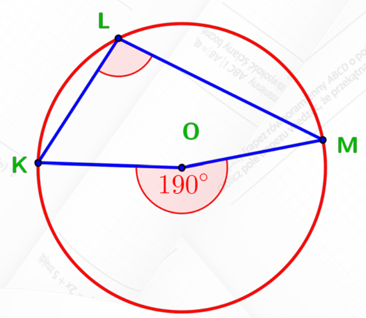
A. 45° **C.** 75°

B. 60° **D.** 90°

7.1.16. Kąt środkowy oparty na $\frac{3}{4}$ długości okręgu ma miarę:

A. 135° **B.** $67{,}5^\circ$ **C.** 270° **D.** 120°

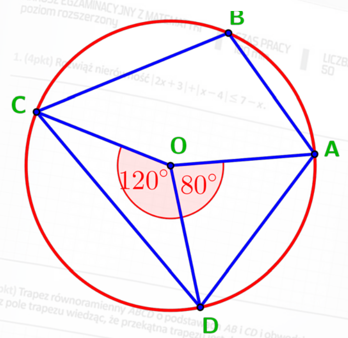
7.1.17. Punkty K, L, M leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego KLM jest równa:



A. 85° **C.** 170°

B. 95° **D.** 120°

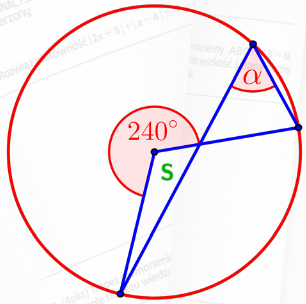
7.1.18. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany CDA ma miarę:



A. 160° **C.** 120°

B. 60° **D.** 80°

7.1.19. Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt α zaznaczony na rysunku ma miarę:



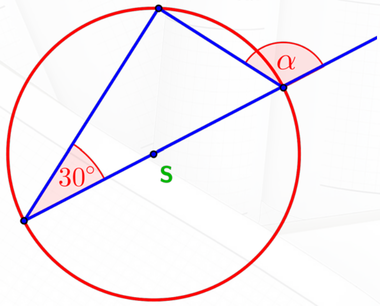
A. 120°

B. 60°

C. 240°

D. 80°

7.1.20. Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt α zaznaczony na rysunku ma miarę:



A. 60°

B. 90°

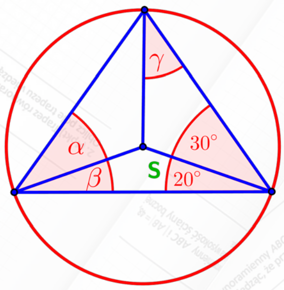
C. 120°

D. 240°

7.1.21. Suma kątów: środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku wynosi 231°. Miara kąta wpisanego jest równa:

A. $115,5^\circ$ **B.** 77° **C.** 154° **D.** 231°

7.1.22. Punkt S jest środkiem okręgu. Prawdą jest, że:



A. $\alpha < \beta < \gamma$

B. $\beta < \gamma < \alpha$

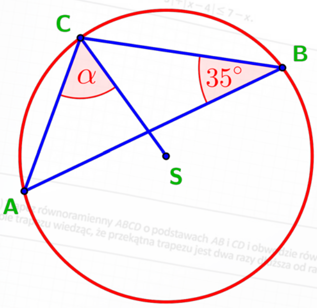
C. $\alpha = \beta + \gamma$

D. $\beta \leq \alpha \leq \gamma$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

7.1.23. Oblicz miary kątów: środkowego i wpisanego opartych na $\frac{31}{72}$ długości okręgu. **2 pkt**

7.1.24. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku w punkcie S. Miara kąta ABC jest równa 35° (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta α zaznaczonego na rysunku. **2 pkt**



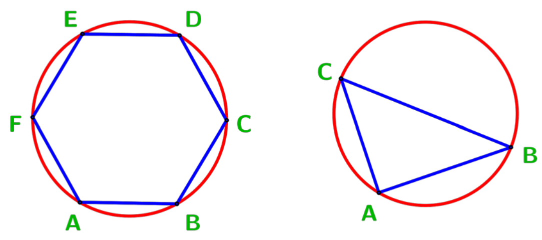
7.B ▶ Okręgi wpisane w wielokąt i opisane na wielokącie, w szczególności wpisane w trójkąt i opisane na trójkącie

▶ Okręgi opisane na wielokącie

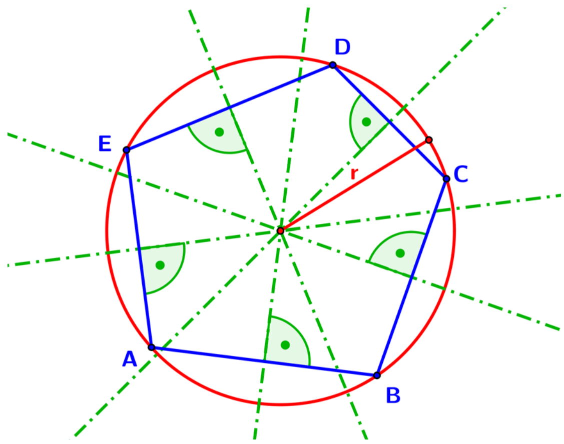
DEFINICJA

P.7.B.1

Okrąg jest opisany na wielokącie (lub wielokąt jest wpisany w okrąg), gdy każdy wierzchołek tego wielokąta jest punktem okręgu.



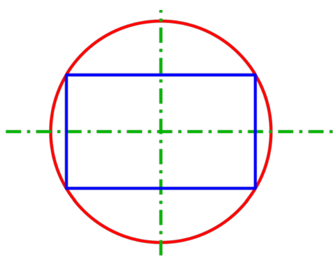
Na wielokącie można opisać okrąg, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.



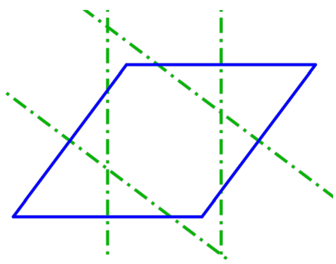
PRZYKŁAD

Dane są dwa czworokąty: prostokąt oraz romb (niebędące kwadratami). Czy można na nich opisać okrąg?

Symetralne boków prostokąta będą się parami pokrywać, a dwie proste zawsze się przecinają — zatem na prostokącie można opisać okrąg.



Symetralne równoległych boków rombu będą do siebie równoległe i rozłączne — zatem na rombie nie da się opisać okręgu.



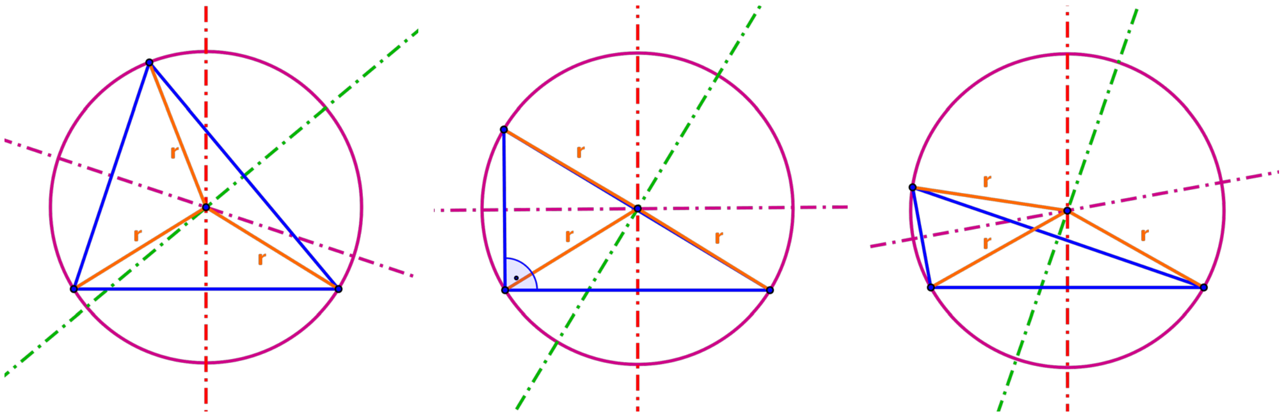
TWIERDZENIE

P.7.B.2

Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środek tego okręgu powstaje w przecięciu symetralnych boków trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie może znajdować się:

- ▶ wewnątrz trójkąta — gdy trójkąt jest ostrokątny
- ▶ na boku trójkąta — gdy trójkąt jest prostokątny (środek znajduje się w połowie przeciwprostokątnej)
- ▶ na zewnątrz trójkąta — gdy trójkąt jest rozwartokątny

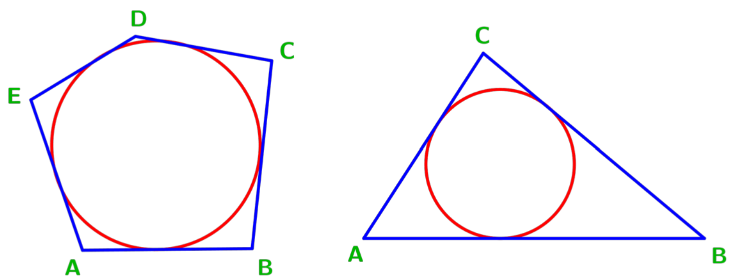


▶ Okręgi wpisane w wielokąt

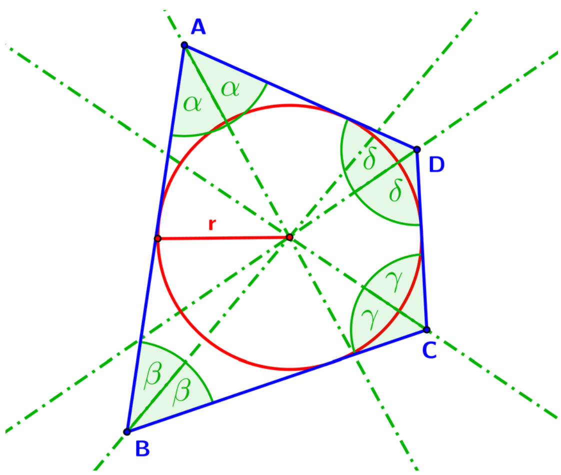
DEFINICJA

P.7.B.3

Okrąg jest wpisany w wielokąt (lub wielokąt jest opisany na okręgu), gdy każdy bok wielokąta zawiera się w stycznej do tego okręgu i ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.



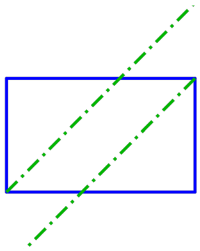
W wielokąt można wpisać okrąg, gdy dwusieczne wszystkich kątów tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.



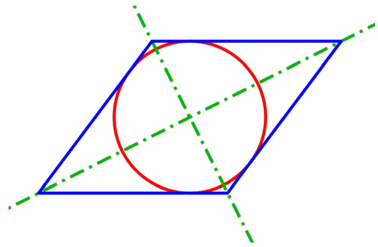
PRZYKŁAD

Dane są dwa czworokąty: prostokąt oraz romb (niebędące kwadratami). Czy można w nie wpisać okrąg?

Dwusieczne kątów wewnętrznych prostokąta będą półprostymi równoległymi rozłącznymi — zatem w prostokąt nie można wpisać okręgu.



Natomiast dwusieczne kątów wewnętrznych w rombie będą zawierać w sobie odpowiednie przekątne — czyli w romb można wpisać okrąg.

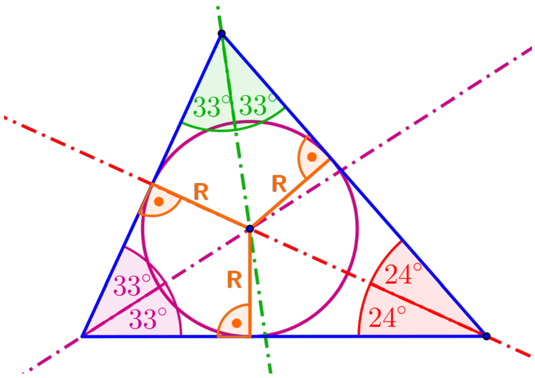


TWIERDZENIE

P.7.B.4

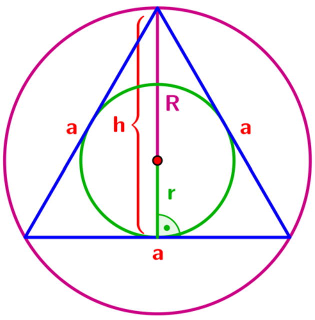
W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środek tego okręgu powstaje w przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt zawsze znajduje się wewnątrz wielokąta.



Trójkąt równoboczny

P.7.B.5



$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

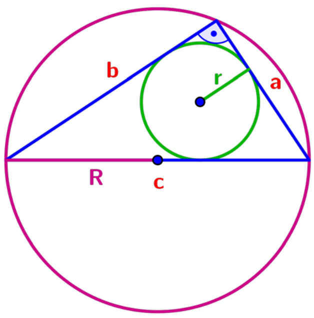
r — promień okręgu wpisanego w trójkąt

$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

R — promień okręgu opisanego na trójkącie

Trójkąt prostokątny

P.7.B.6



$r = \frac{a+b-c}{2}$

r — promień okręgu wpisanego w trójkąt

$R = \frac{c}{2}$

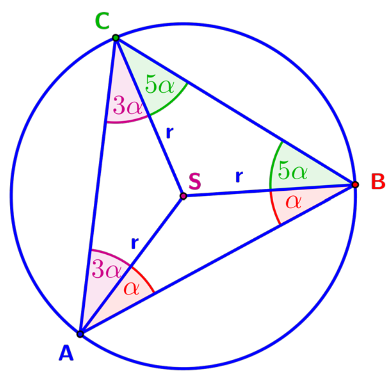
R — promień okręgu opisanego na trójkącie

PRZYKŁAD

P.7.B.7

Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest pięć razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Łączymy środek S z wierzchołkami trójkąta (promienie).

3° Kąt BAS oznaczamy jako α. Kąt SBA jest równy kątowi BAS, ponieważ $\triangle BAS$ jest równoramienny.

4° Kąt ACS równy jest CAS i oznaczamy go jako 3α.

5° Kąt CBS jest równy BCS i oznaczamy go jako 5α.

6° Układamy równanie, wiedząc, że suma kątów w trójkącie wynosi 180°.

$$\alpha + \alpha + 5\alpha + 5\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$
$$18\alpha = 180^\circ \quad |:18 \;\Rightarrow\; \alpha = 10^\circ$$

7° Obliczamy kąty trójkąta.

$$|\sphericalangle CAB| = \alpha + 3\alpha = 4\alpha = 4 \cdot 10^\circ = 40^\circ$$
$$|\sphericalangle ACB| = 3\alpha + 5\alpha = 8\alpha = 8 \cdot 10^\circ = 80^\circ$$
$$|\sphericalangle ABC| = \alpha + 5\alpha = 6\alpha = 6 \cdot 10^\circ = 60^\circ$$

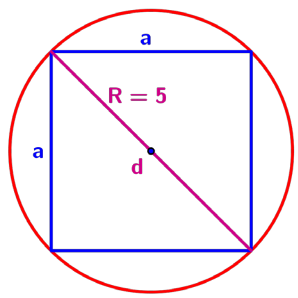
8° Kąty trójkąta mają miary $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

PRZYKŁAD

P.7.B.8

Oblicz pole kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, pamiętając, że przekątna kwadratu jest średnicą okręgu.



2° Obliczamy długość przekątnej kwadratu.

$$d = 2R = 2 \cdot 5 = 10$$

3° Obliczamy bok kwadratu a, pamiętając, że przekątna kwadratu o boku a ma wzór: $d = a\sqrt{2}$.

$$a\sqrt{2} = 10 \quad |:\sqrt{2}$$
$$a = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

4° Obliczamy pole kwadratu.

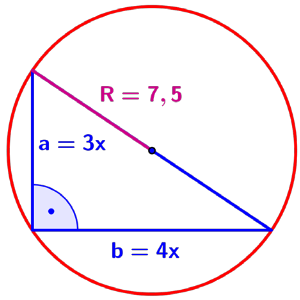
$$P_{\square} = a^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{100}{2} = 50 \text{ j}^2$$

5° Pole kwadratu wynosi 50 j^2.

PRZYKŁAD P.7.B.9

Dany jest trójkąt, w którym stosunek długości przyprostokątnych wynosi $3 : 4$, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 7,5. Oblicz długość przyprostokątnych trójkąta.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy i ze stosunku długości oznaczamy długości przyprostokątnych: $a = 3x$, $b = 4x$, $x > 0$.



2° Obliczamy długość przeciwprostokątnej c.

$$c = 2R = 2 \cdot 7{,}5 = 15$$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy x.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(3x)^2 + (4x)^2 = 15^2$$
$$9x^2 + 16x^2 = 225$$
$$25x^2 = 225 \quad |: 25$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} = 3$$

4° Obliczamy długości przyprostokątnych.

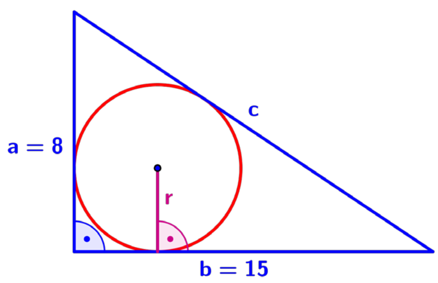
$$a = 3x = 3 \cdot 3 = 9$$
$$b = 4x = 4 \cdot 3 = 12$$

5° Długości przyprostokątnych wynoszą 9 i 12.

PRZYKŁAD P.7.B.10

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych 8 i 15.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i obliczamy c.

$$c^2 = 8^2 + 15^2$$
$$c^2 = 64 + 225$$
$$c = \sqrt{289} = 17$$

3° Korzystamy z zależności pomiędzy długością promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny a długościami boków: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

$$r = \frac{8+15-17}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

4° Długość promienia wynosi 3.

PRZYKŁAD

P.7.B.11

Długość boku trójkąta równobocznego jest równa $24\sqrt{3}$. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

1° Korzystamy z zależności w trójkącie równobocznym pomiędzy bokiem trójkąta a promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

$$r = \frac{\overset{4}{\cancel{24}}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 4\cdot 3 = 12$$

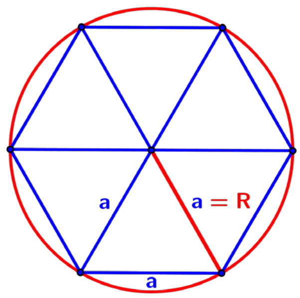
2° Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi 12.

PRZYKŁAD

P.7.B.12

Pole sześciokąta foremnego wynosi $24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym sześciokącie.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.



2° Promień okręgu jest krawędzią sześciokąta foremnego.

3° Skoro znamy pole sześciokąta, to możemy obliczyć a ze wzoru na pole: $P = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}$.

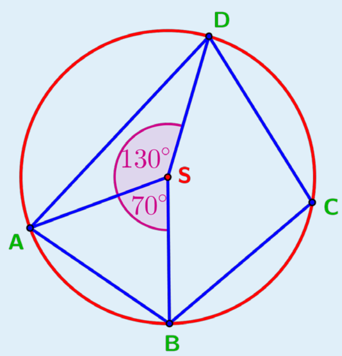
$$\frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \quad |\cdot 4$$
$$6a^2\sqrt{3} = 96\sqrt{3} \quad |:6\sqrt{3}$$
$$a^2 = 16\ (a > 0)$$
$$a = 4,\ \text{czyli}\ R = 4$$

4° Długość promienia wynosi 4.

PRZYKŁAD

P.7.B.13

Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg o środku S. Oblicz kąty tego czworokąta, posługując się danymi z rysunku oraz wiedząc, że $|BC| = |DC|$.



1° Trójkąty ASD i ASB są równoramienne, ponieważ $|SD| = |SA| = |SB| = r$, więc korzystamy z sumy kątów w trójkącie.

$|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SDA| = (180^\circ - 130^\circ) : 2 = 50^\circ : 2 = 25^\circ$

$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA| = (180^\circ - 70^\circ) : 2 = 110^\circ : 2 = 55^\circ$

2° Kąt BCD jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy BSD.

$|\sphericalangle BCD| = (130^\circ + 70^\circ) : 2 = 200^\circ : 2 = 100^\circ$

3° Niech $\sphericalangle SDC = \sphericalangle SBC = \alpha$. Korzystamy z sumy kątów w czworokącie i obliczamy α.

$2\alpha + 2 \cdot 25^\circ + 2 \cdot 55^\circ + 100^\circ = 360^\circ$

$2\alpha = 360^\circ - 50^\circ - 110^\circ - 100^\circ$

$2\alpha = 100^\circ \quad |: 2$

$\alpha = 50^\circ$

4° Mając wszystkie dane, obliczamy miary poszczególnych kątów czworokąta.

$|\sphericalangle BAD| = 25^\circ + 55^\circ = 80^\circ$

$|\sphericalangle ABC| = 55^\circ + 50^\circ = 105^\circ$

$|\sphericalangle BCD| = 100^\circ$

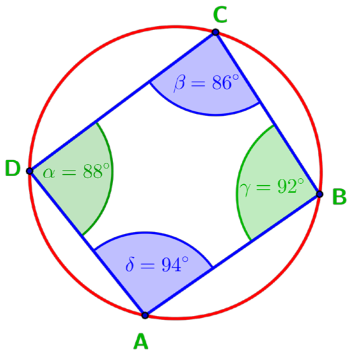
$|\sphericalangle CDA| = 25^\circ + 50^\circ = 75^\circ$

5° Kąty tego czworokąta to: $75^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 105^\circ$.

Czy wiesz, że...

TWIERDZENIE | **PRZYKŁAD** — P.7.B.14

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.

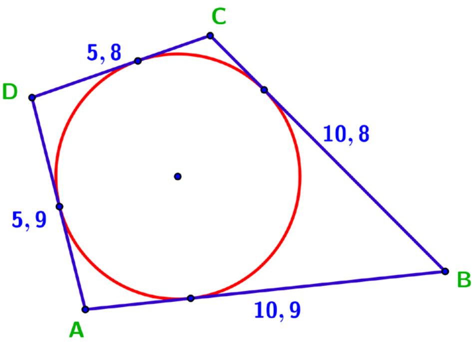


$\alpha + \gamma = 88^\circ + 92^\circ = 180^\circ$

$\beta + \delta = 86^\circ + 94^\circ = 180^\circ$

P.7.B.15

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

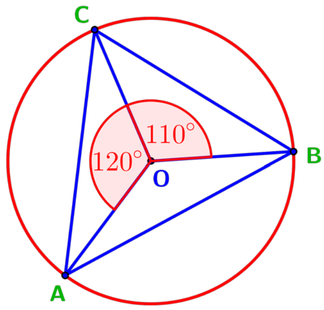


$|AB| + |CD| = 10{,}9 + 5{,}8 = 16{,}7$

$|AD| + |BC| = 5{,}9 + 10{,}8 = 16{,}7$

ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.B.1. Punkt O jest środkiem okręgu, w który wpisano trójkąt ABC. Oblicz miary kątów tego trójkąta, posługując się danymi z rysunku.



7.B.2. Na kwadracie o polu 64 opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

7.B.3. Dany jest trójkąt o bokach długości 5, 12, 13. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

7.B.4. Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ opisano koło. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

7.B.5. Promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest równy 8. Oblicz obwód tego trójkąta.

7.B.6. Obwód sześciokąta foremnego wynosi 72. Oblicz obwód okręgu wpisanego w ten sześciokąt.

7.B.7. Na trójkącie równoramiennym ABC o ramionach AC i BC opisano okrąg o środku w punkcie S. Miara $|\sphericalangle ASB| = 68^\circ$. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

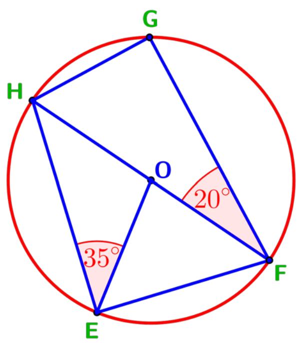
7.B.8. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi $2\sqrt{3}$. Oblicz pole tego trójkąta.

7.B.9. Stosunek długości boków trójkąta wpisanego w koło wynosi $8 : 15 : 17$. Oblicz pole koła, jeżeli wiadomo, że obwód trójkąta wynosi 80.

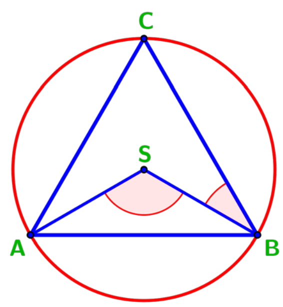
7.B.10. Najdłuższa przekątna sześciokąta foremnego ma długość 18. Oblicz pole koła opisanego na tym sześciokącie.

7.B.11. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wpisany w okrąg tak, że podstawa AB jest średnicą tego okręgu. Oblicz pole tego trapezu, wiedząc, że przekątna $|BD| = 16$, a obwód okręgu równy jest 20π.

7.B.12. Dany jest czworokąt $EFGH$ wpisany w okrąg o środku O (zobacz rysunek). Oblicz miary kątów tego czworokąta, posługując się danymi z rysunku.

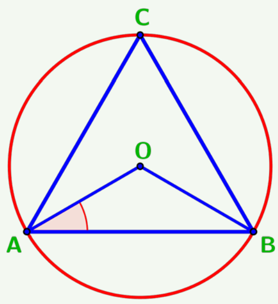


7.B.13. W okrąg o środku S wpisano trójkąt równoramienny ABC, gdzie $|AB| = |BC|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|\sphericalangle ASB| = 4 \cdot |\sphericalangle CBS|$.



ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. **T.7.B**

7.B.14. Punkty A, B, C leżące na okręgu o środku O są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta OAB jest równa:



A. 40° **C.** 60°

B. 15° **D.** 30°

7.B.15. Promień okręgu opisanego na kwadracie wynosi $5\sqrt{2}$. Pole kwadratu jest równe:

A. 25 **B.** 100 **C.** 125 **D.** 50

7.B.16. Okrąg opisany na trójkącie równobocznym ma promień 6. Wtedy obwód tego trójkąta ma długość:

A. 18 **B.** $18\sqrt{3}$ **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** $12\sqrt{3}$

7.B.17. Na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości 8 i 6, opisano okrąg. Promień tego okręgu jest równy:

A. $\sqrt{28}$ **B.** 10 **C.** 5 **D.** 20

7.B.18. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi $4\sqrt{3}$. Długość boku tego trójkąta wynosi:

A. $24\sqrt{3}$ **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** 12 **D.** 24

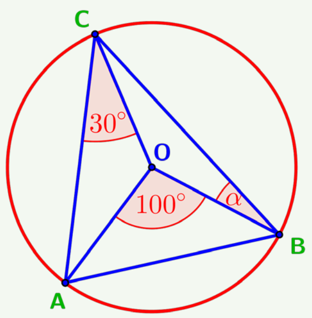
7.B.19. Długość boku trójkąta równobocznego wynosi $18\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

A. 18 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 6

7.B.20. W sześciokąt foremny wpisano okrąg o promieniu $4\sqrt{3}$. Obwód tego sześciokąta wynosi:

A. 72 **B.** 24 **C.** 48 **D.** $36\sqrt{2}$

7.B.21. Dany jest okrąg o środku O, w który wpisano trójkąt ABC (zobacz rysunek). Miara kąta α wynosi:



A. 30° **C.** 45°

B. 15° **D.** 20°

7.B.22. W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 7 i 24 wpisano okrąg. Obwód tego okręgu wynosi:

A. 6π **B.** 9π **C.** 12π **D.** $4{,}5\pi$

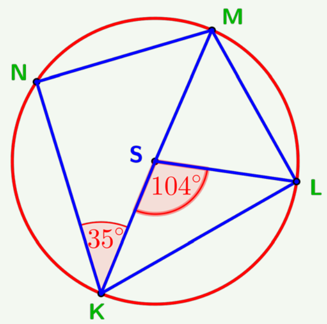
7.B.23. Środek okręgu wpisanego w pięciokąt leży na przecięciu:

A. środkowych, **B.** dwusiecznych, **C.** wysokości, **D.** symetralnych.

ZADANIA OTWARTE

7.B.24. Dany jest trójkąt o przyprostokątnych 9 i 40. Oblicz średnicę okręgu wpisanego w ten trójkąt. **2 pkt**

7.B.25. Dany jest czworokąt $KLMN$ wpisany w okrąg o środku S (zobacz rysunek). Oblicz miary kątów tego czworokąta. **2 pkt**

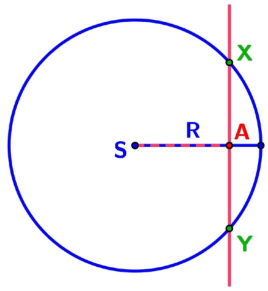
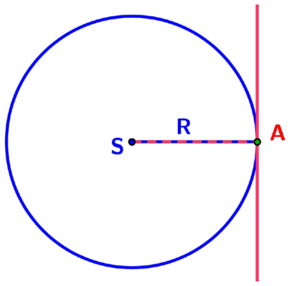
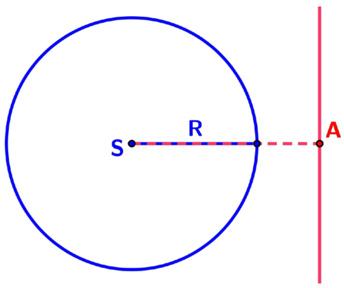


7.B.26. Pole koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 16π. Oblicz pole koła wpisanego w ten sześciokąt. **2 pkt**

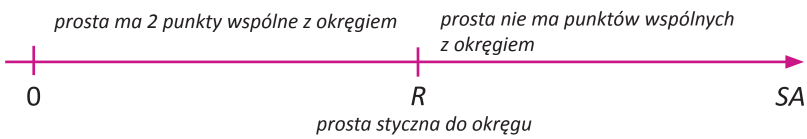
7.B.27. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg, który jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie K. Oblicz promień okręgu, jeśli wiadomo, że $|AK| = 5$ i $|KB| = 12$. **4 pkt**

7.2 ► Własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych

► Wzajemne położenie prostej i okręgu

Prosta	Rysunek i warunek	P.7.2.1
Prosta przecinająca okrąg (w dwóch punktach)		$\|SA\| < R$
Prosta styczna do okręgu (w jednym punkcie)		$\|SA\| = R$
Prosta rozłączna z okręgiem (nie ma punktu wspólnego)		$\|SA\| > R$

PODSUMOWANIE



PRZYKŁAD

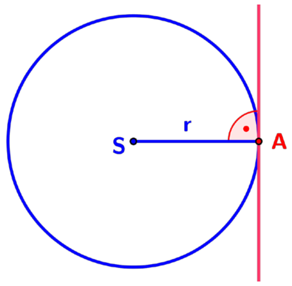
Dany jest okrąg o promieniu $R = 10$. Jakie jest wzajemne położenie prostej i okręgu, jeśli odległość prostej od środka okręgu wynosi 12?

Skoro odległość środka okręgu od prostej jest większa niż długość promienia, to prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem.

TWIERDZENIE

Prosta styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności.

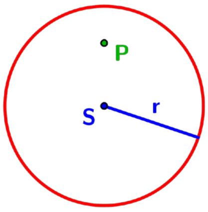
PRZYKŁAD

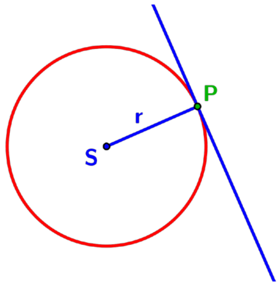


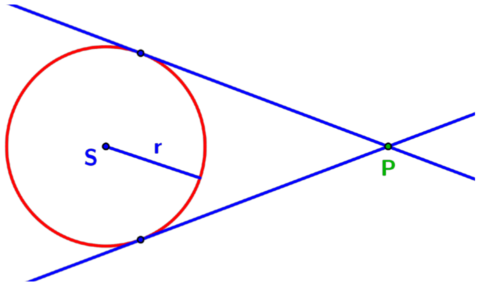
A — punkt styczności
$|SA| = r$

Dany jest dowolny punkt P i okrąg $o(S, r)$. Jeżeli:

$\lvert SP \rvert < r$, to nie istnieje styczna do okręgu przechodząca przez P	$\lvert SP \rvert = r$, to istnieje jedna styczna do okręgu przechodząca przez P	$\lvert SP \rvert > r$, to istnieją dwie styczne do okręgu przechodzące przez P





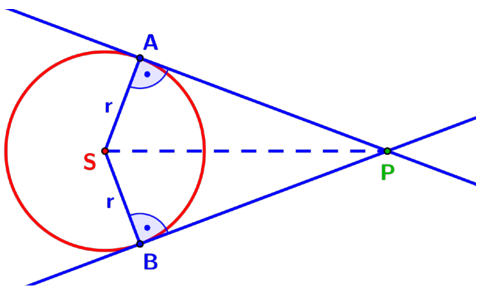


TWIERDZENIE

Jeżeli z punktu P leżącego poza okręgiem poprowadzimy dwie proste styczne do tego okręgu w punktach A i B, to $|PA| = |PB|$.

UZASADNIENIE

Równość $|PA| = |PB|$ wynika z faktu, że trójkąty prostokątne PSA oraz PSB mają wspólną przeciwprostokątną, a boki SA i SB mają tę samą długość (ponieważ są to promienie).
Zatem boki PA i PB też mają tę samą długość.

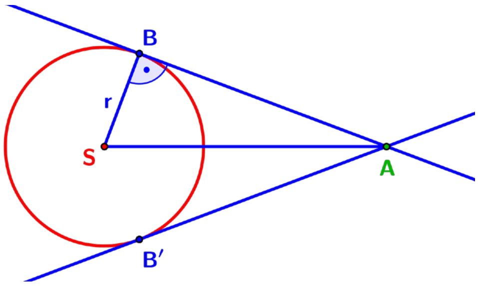


Odcinki PA i PB nazywamy odcinkami stycznymi, a wypukły kąt APB — kątem między stycznymi.

PRZYKŁAD

Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu $r = 5$ oraz punkt A odległy od punktu S o 15. Z punktu A poprowadzono styczną do okręgu. Niech punkt styczności to B. Oblicz długość odcinka AB.

1° Zauważmy najpierw, że z punktu A można poprowadzić dwie styczne do okręgu. Ponadto trójkąt ASB jest trójkątem prostokątnym (bo styczna jest prostopadła do promienia w punkcie styczności). Zatem możemy do obliczenia długości odcinka AB wykorzystać twierdzenie Pitagorasa.



2° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa.

$$|SB|^2 + |AB|^2 = |SA|^2$$
$$5^2 + |AB|^2 = 15^2$$
$$|AB|^2 = 225 - 25 = 200$$
$$|AB| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

3° Długość odcinka AB wynosi $10\sqrt{2}$.

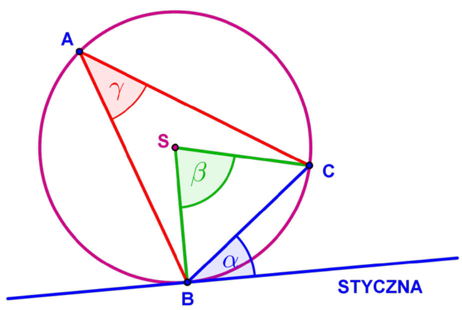
ZADANIE UTRWALAJĄCE

7.2.1. Dana jest prosta k styczna do okręgu o środku S i promieniu 8 w punkcie P. Oblicz długość odcinka PQ, jeżeli wiadomo, że odległość między środkiem okręgu a punktem Q wynosi 17, a punkt Q jest położony na stycznej k.

TWIERDZENIE

P.7.2.2

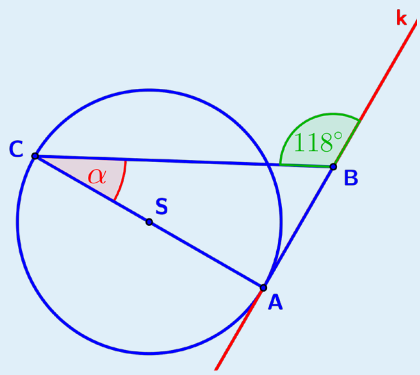
Kąt α między styczną a cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności równy jest kątowi wpisanemu opartemu na łuku zawartym między ramionami kąta α i połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



PRZYKŁAD 1

P.7.2.3

Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.



1° Obliczamy kąt ABC, wiedząc, że ten kąt razem z kątem 118° tworzy kąt półpełny, którego miara wynosi 180°.

$$|\sphericalangle ABC| + 118^\circ = 180^\circ$$
$$|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

2° Trójkąt ABC jest prostokątny, ponieważ prosta k jest styczna do okręgu w punkcie A. Zatem $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$. Korzystając z własności sumy kątów w trójkącie, obliczamy kąt α.

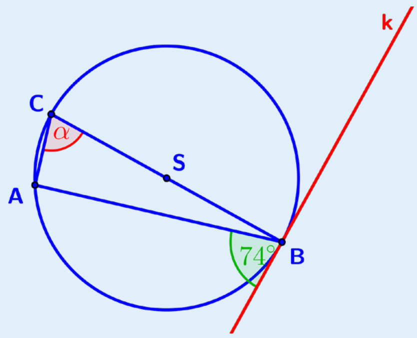
$$\alpha + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$$
$$\alpha + 62^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$$

3° Kąt α ma miarę 28°.

PRZYKŁAD 2

P.7.2.3

Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.



1° Kąt ABC oraz kąt 74° tworzą kąt prosty, ponieważ prosta k jest styczna do okręgu w punkcie B. Zatem możemy zapisać równość, obliczając kąt ABC.

$$|\sphericalangle ABC| + 74^\circ = 90^\circ$$
$$|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$$

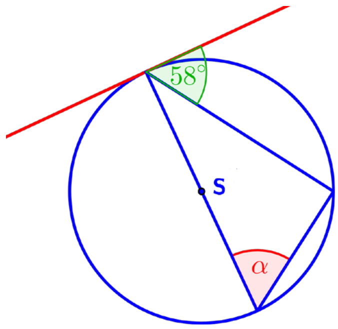
2° Trójkąt ABC jest prostokątny, ponieważ środek okręgu (punkt S) znajduje się w połowie odcinka BC, czyli przeciwprostokątnej. Korzystając z własności sumy kątów w trójkącie, obliczamy kąt α.

$$\alpha + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CAB| = 180^\circ$$
$$\alpha + 16^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$$

3° Kąt α ma miarę 74°.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

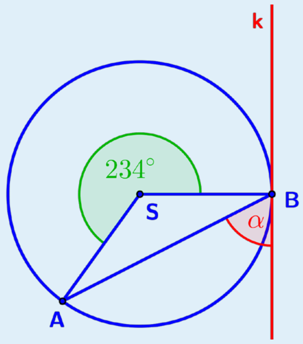
PRZYKŁAD 3. Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.



PRZYKŁAD 4

P.7.2.3

Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.



1° Obliczamy kąt wypukły ASB, wiedząc, że ten kąt razem z kątem 234° tworzy kąt pełny, którego miara wynosi 360°.

$$|\sphericalangle ASB| + 234^\circ = 360^\circ$$
$$|\sphericalangle ASB| = 360^\circ - 234^\circ = 126^\circ$$

2° Odcinki AS oraz BS są promieniami okręgu, więc trójkąt ASB jest równoramienny, co oznacza, że kąty przy podstawie tego trójkąta mają taką samą miarę.

$$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle ABS| = \frac{180^\circ - 126^\circ}{2} = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$$

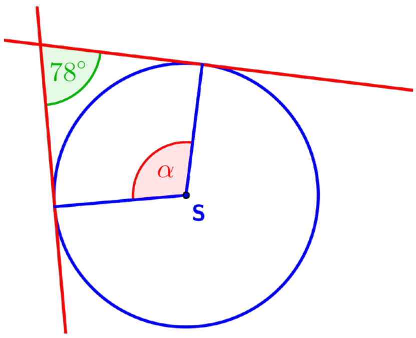
3° Prosta k jest styczna do okręgu w punkcie B i razem z odcinkiem BS tworzy kąt prosty.

$$\alpha + |\sphericalangle ABS| = 90^\circ$$
$$\alpha + 27^\circ = 90^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$$

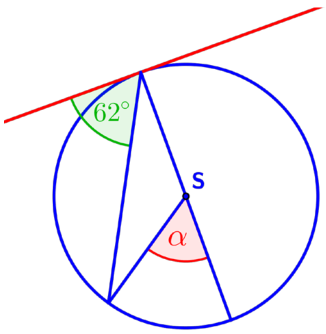
4° Kąt α ma miarę 63°.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 5. Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.



PRZYKŁAD 6. Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.

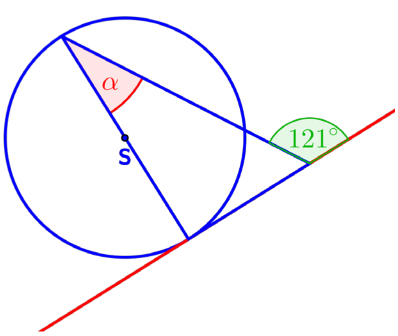


ZADANIA UTRWALAJĄCE

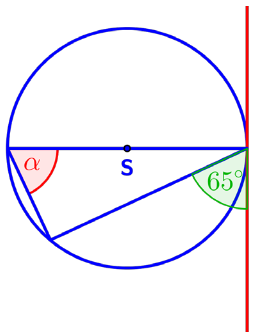
7.2.2. Dana jest styczna do okręgu o środku S. Posługując się danymi z rysunku, podaj wartość kąta α.

Z.7.2.2

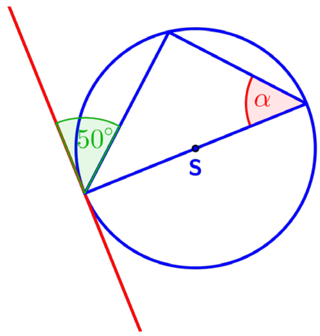
a.



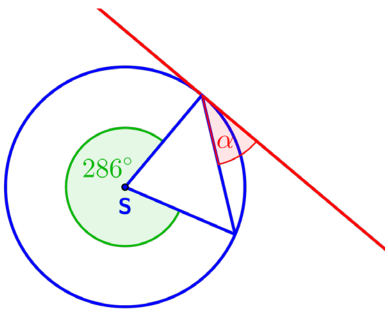
b.



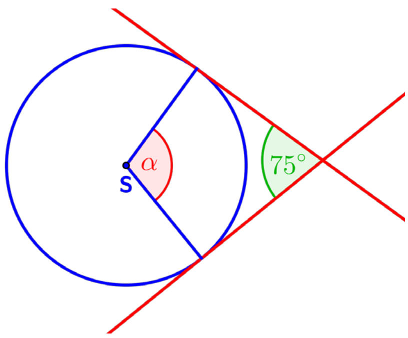
c.



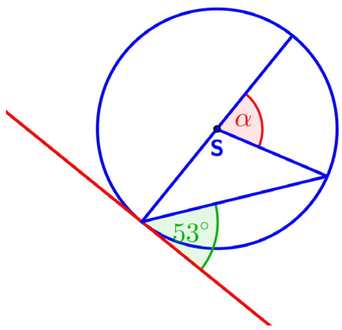
d.



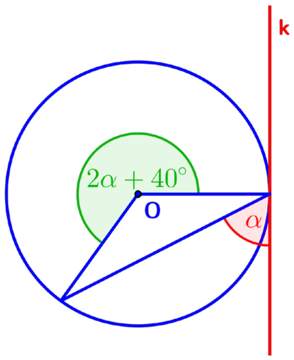
e.



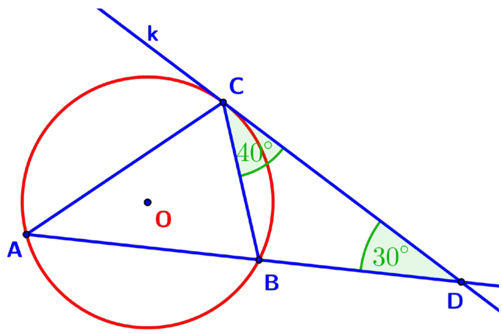
f.



7.2.3. Dane są okrąg o środku O i prosta k styczna do okręgu. Korzystając z rysunku, oblicz miarę kąta α.

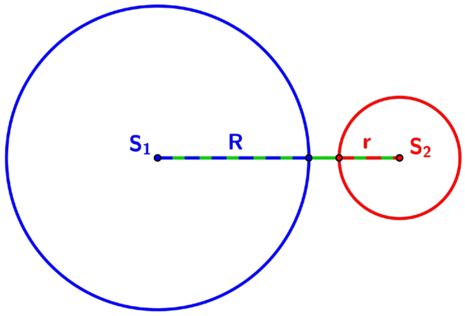
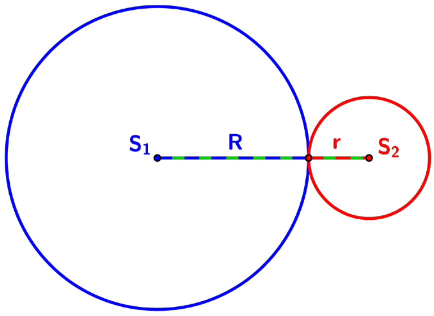
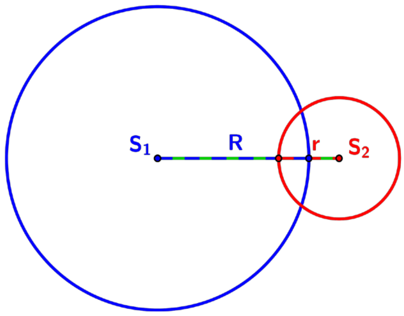
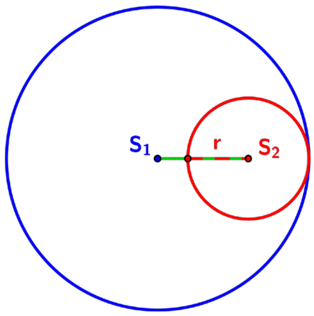
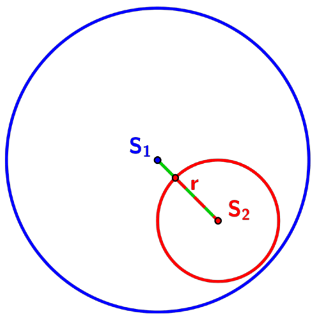


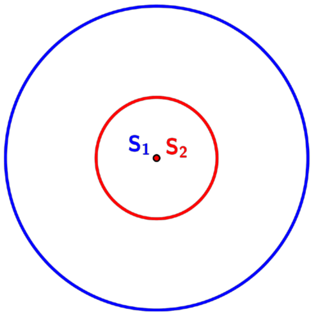
7.2.4. Dane są okrąg o środku O i prosta k styczna do okręgu. Wyznacz miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC, posługując się danymi z rysunku.



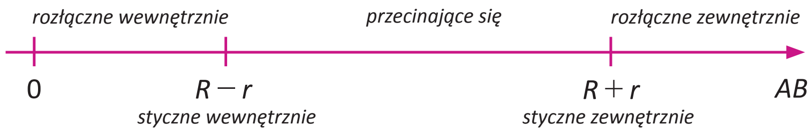
► Wzajemne położenie dwóch okręgów: $o(A,R)$ i $o(B,r)$ w zależności od odległości ich środków i od promieni

P.7.2.4

<table>
<tr><th>Nazwa</th><th colspan="2">Rysunek i warunek, gdy $R > r$</th></tr>
<tr><td>Okręgi rozłączne zewnętrznie</td><td>
</td><td>$|S_1S_2| > R + r$</td></tr>
<tr><td>Okręgi styczne zewnętrznie</td><td>
</td><td>$|S_1S_2| = R + r$</td></tr>
<tr><td>Okręgi przecinające się</td><td>
</td><td>$R - r < |S_1S_2| < R + r$</td></tr>
<tr><td>Okręgi styczne wewnętrznie</td><td>
</td><td>$|S_1S_2| = R - r$</td></tr>
<tr><td>Okręgi rozłączne wewnętrznie</td><td>
</td><td>$|S_1S_2| < R - r$</td></tr>
</table>

Okręgi współśrodkowe		$\vert S_1S_2\vert = 0$

PODSUMOWANIE



PRZYKŁAD

Dane są dwa okręgi: $o(A,R)$, $o(B,r)$. Wiedząc, że $R=14$, $r=8$, wyznacz położenie tych okręgów, jeśli:

a. $|AB|=6$

b. $|AB|=30$

c. $|AB|=22$

d. $|AB|=0$

Aby sprawdzić wzajemne położenie obu okręgów, obliczmy pomocniczo: $R+r=22$ oraz $R-r=6$. Zatem:

a. $|AB|=6$ — okręgi styczne wewnętrznie (bo $|AB|=R-r$),

b. $|AB|=30$ — okręgi rozłączne zewnętrznie (bo $|AB|>R+r$),

c. $|AB|=22$ — okręgi styczne zewnętrznie (bo $|AB|=R+r$),

d. $|AB|=0$ — okręgi rozłączne wewnętrznie, współśrodkowe (bo $|AB|<R-r$).

PRZYKŁAD

Dane są dwa okręgi: $o(A,R)$, $o(B,r)$, przy czym $R>r$. Wiedząc, że $|AB|=10$ oraz $R=12$, wyznacz r, aby okręgi były:

a. styczne zewnętrznie,

b. styczne wewnętrznie.

Aby znaleźć odpowiedź, należy skorzystać z warunków:

a. styczne zewnętrznie: $|AB|=R+r$, czyli $10=12+r$, zatem $r=-2$, a to jest niemożliwe, bo $r>0$, więc nie ma takiego r, aby okręgi były styczne zewnętrznie.

b. styczne wewnętrznie: $|AB|=R-r$, czyli $10=12-r$, zatem $r=2$.

PRZYKŁAD 1

P.7.2.5

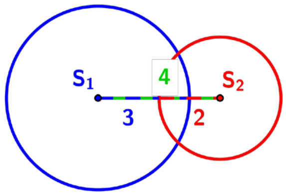
Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ za pomocą konstrukcji wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 4$.

1° Rysujemy środki okręgów S_1 i S_2 tak, aby odległość między nimi wynosiła 4.

2° Na odcinku S_1S_2 zaznaczamy promień $r_1 = 3$ i rysujemy okrąg.

3° Analogicznie postępujemy w przypadku $r_2 = 2$.

4° Na podstawie rysunku możemy stwierdzić, że są to okręgi przecinające się.



PRZYKŁAD 2

P.7.2.5

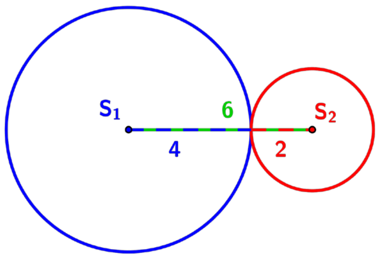
Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ za pomocą konstrukcji wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 6$.

1° Rysujemy środki okręgów S_1 i S_2 tak, aby odległość między nimi wynosiła 6.

2° Na odcinku S_1S_2 zaznaczamy promień $r_1 = 4$ i rysujemy okrąg.

3° Analogicznie postępujemy w przypadku $r_2 = 2$.

4° Na podstawie rysunku możemy stwierdzić, że są to okręgi styczne zewnętrznie.



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 7$.

PRZYKŁAD 4. Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 2$.

PRZYKŁAD 5. Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 5$, $r_2 = 2$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 2$.

PRZYKŁAD 6. Dane są dwa okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$. Określ wzajemne położenie okręgów, jeśli promienie mają długość $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, a odległość między środkami $|S_1S_2| = 0$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.2.5. Dane są okręgi $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$, gdzie r_1 i r_2 to promienie tych okręgów, a S_1 i S_2 — środki okręgów. Uzupełnij tabelę według wzoru.

Długość promienia r_1	Długość promienia r_2	Odległość $\|S_1S_2\|$ między środkami okręgów	Rodzaj wzajemnego położenia
5	3	1	*okręgi rozłączne wewnętrznie*
8	4		*okręgi styczne wewnętrznie*
7	2	10	
4	3		*okręgi współśrodkowe*
10	11	4	
	2	13	*okręgi styczne zewnętrznie*

7.2.6. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Odległość między ich środkami wynosi 12 cm. Wyznacz promienie tych okręgów, wiedząc, że jeden z nich jest o 40% dłuższy od drugiego.

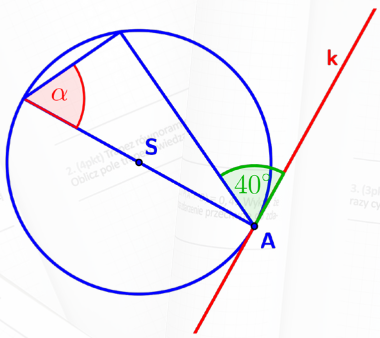
7.2.7. Dane są dwa okręgi: $o(S_1, r_1)$ oraz $o(S_2, r_2)$, gdzie S_1, S_2 — środki okręgów, a r_1, r_2 — długości promieni. Określ wzajemne położenie okręgów w zależności od parametru k, jeśli $r_1 = 3$, $r_2 = 5$ oraz $|S_1S_2| = k$.

MATURA MATURA MATURA MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.2

7.2.8. Dany jest okrąg o środku w punkcie S. Prosta k jest styczną do okręgu w punkcie A. Posługując się danymi z rysunku, można stwierdzić, że:



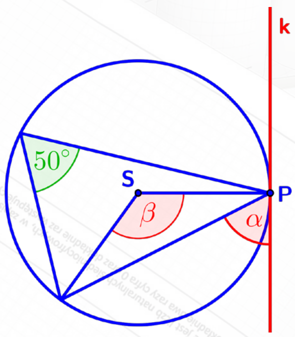
A. $\alpha = 60^\circ$

B. $\alpha = 30^\circ$

C. $\alpha = 40^\circ$

D. $\alpha = 50^\circ$

7.2.9. Dany jest okrąg o środku S i prosta k styczna do okręgu w punkcie P. Posługując się danymi z rysunku, można stwierdzić, że:



A. $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 100^\circ$

B. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 100^\circ$

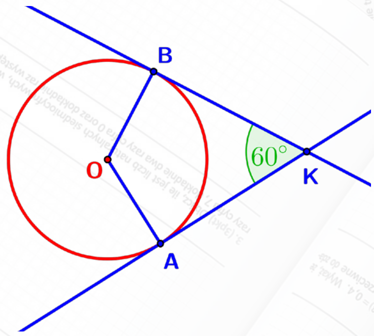
C. $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 25^\circ$

D. $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 50^\circ$

7.2.10. Dane są okrąg o środku w punkcie A i promieniu r oraz prosta k położona w odległości d od środka okręgu. Prosta k będzie przecinać okrąg w dwóch punktach, jeśli:

A. $r < d$ **B.** $r = d$ **C.** $r > d$ **D.** $r \leq d$

7.2.11. Z punktu K poprowadzono styczne do okręgu o środku O. Posługując się danymi z rysunku oraz wiedząc, że $|AK| = 15\sqrt{3}$, można stwierdzić, że pole czworokąta $AKBO$ jest równe:



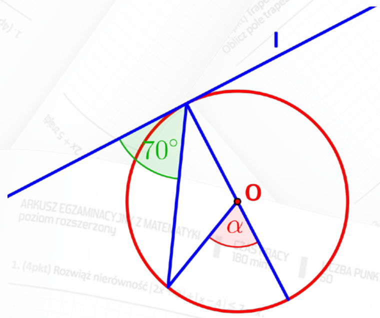
A. 225 **C.** 450

B. $450\sqrt{3}$ **D.** $225\sqrt{3}$

7.2.12. Dane są dwa okręgi: pierwszy — o środku w punkcie A i promieniu 9 i drugi — o środku w punkcie B i promieniu 7. Okręgi są styczne wewnętrznie. Wynika z tego, że odległość $|AB|$ wynosi:

A. 16, **B.** mniej niż 2, **C.** 2, **D.** więcej niż 2.

7.2.13. Prosta l jest styczna do okręgu o środku O (zobacz rysunek). Kąt α ma wartość:



A. 40° **C.** 140°

B. 20° **D.** 70°

MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA

7.C ▶ Figury przystające, w szczególności trójkąty przystające

DEFINICJA

Dwie figury są przystające, gdy jedna z nich jest obrazem drugiej w symetrii, obrocie lub przesunięciu (możemy powiedzieć, że figury są przystające, gdy można je na siebie nałożyć „ruchem sztywnym” w taki sposób, by się pokrywały).

PRZYKŁAD

Figury przystające:

- dwa koła o tym samym promieniu,
- dwa kwadraty o tym samym boku,
- dwie proste,
- dwa punkty,
- dwa trójkąty równoboczne o tym samym boku,
- dwa pięciokąty foremne o tym samym boku.

WYJAŚNIENIE

Figury przystające mają te same wymiary i kształty. Wielokąty są przystające, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

PRZYKŁAD

Kiedy dwa prostokąty będą przystające?

Dwa prostokąty będą przystające, gdy:

- odpowiednie boki będą tej samej długości ($a = x$ oraz $b = y$)

- przekątne będą tej samej długości oraz kąt między przekątnymi będzie tej samej miary ($a = x$ oraz $\alpha = \beta$)

ZADANIE UTRWALAJĄCE

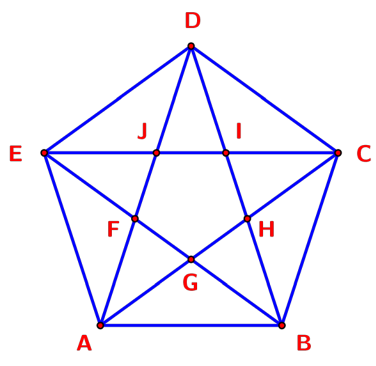
7.C.1. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Korzystając z rysunku, wypisz wszystkie figury przystające do:

a. trójkąta ABC,

b. trójkąta AGF,

c. trójkąta ABG,

d. czworokąta $ABIJ$.

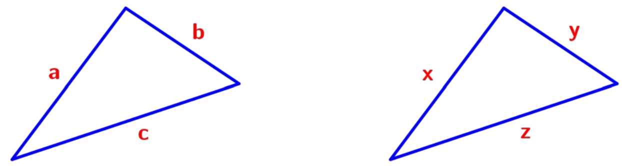


► Cechy przystawania trójkątów

TWIERDZENIA

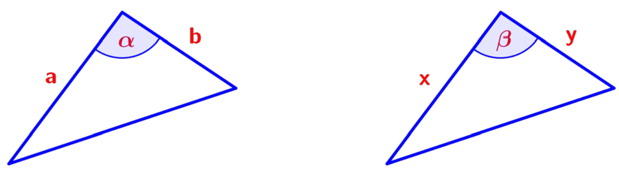
CECHA *bbb*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są tej samej długości: $a = x$, $b = y$, $c = z$.



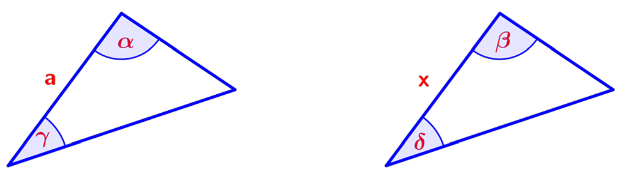
CECHA *bkb*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są tej samej długości oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $a = x$, $b = y$, $\alpha = \beta$.



CECHA *kbk*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa kąty są tej samej miary oraz bok przyległy do obu kątów jest tej samej długości: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $a = x$.



Jeśli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, to oznaczamy je: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

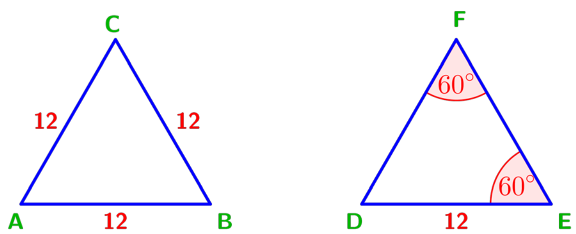
PRZYKŁAD

Dane są dwa trójkąty: ABC i DEF. Na podstawie poniższych danych określ, czy te trójkąty są przystające:

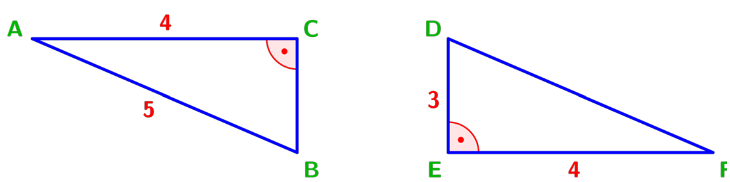
a. $|AB| = |BC| = |CA| = 12$, $|DE| = 12$, $|\sphericalangle DEF| = |\sphericalangle EFD| = 60^\circ$

b. $|AB| = 5$, $|AC| = 4$, $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, $|DE| = 3$, $|EF| = 4$, $|\sphericalangle DEF| = 90^\circ$

a. Oba trójkąty są przystające, ponieważ $\sphericalangle EDF$ również ma miarę 60°, zatem trójkąt DEF jest równoboczny, a jego bok ma długość 12. Cecha *bbb*.



b. Oba trójkąty również są przystające, bo są trójkątami prostokątnymi o tych samych długościach boków: 3, 4, 5. Cecha *bkb*.

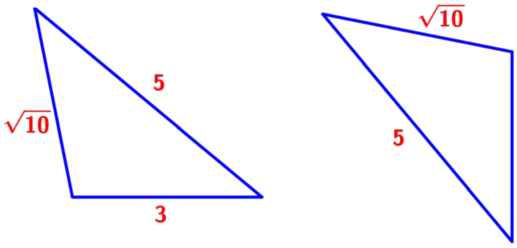


ZADANIE UTRWALAJĄCE

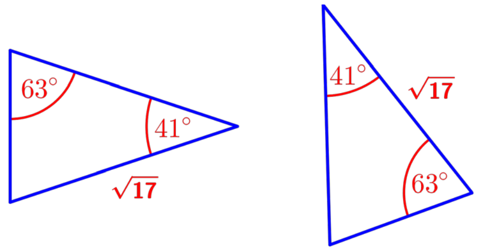
7.C.2. Wskaż, czy podana para trójkątów jest przystająca. Jeśli tak, to określ, na podstawie jakiej cechy.

Z.7.C.2

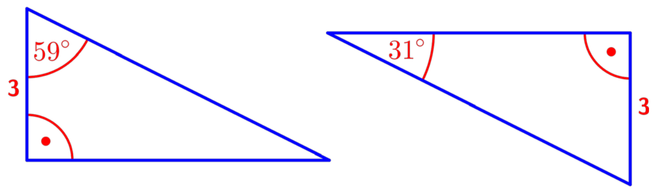
a.



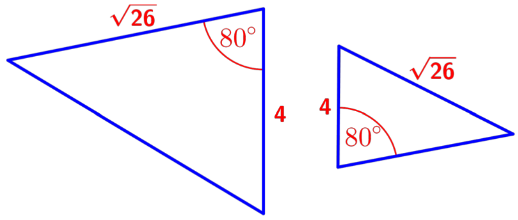
b.



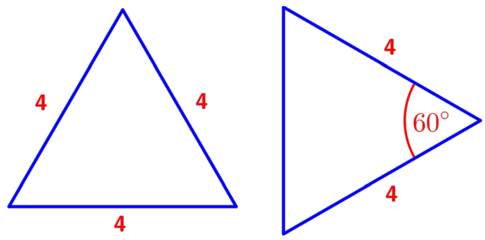
c.



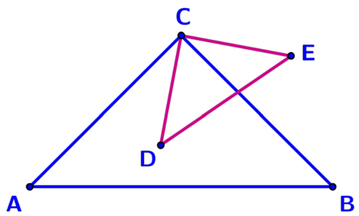
d.



e.

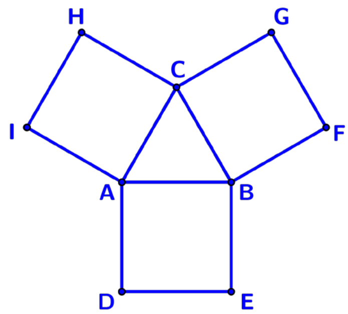


7.C.3. Dane są trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE (zobacz rysunek) oraz wiadomo, że $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = 90^\circ$. Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



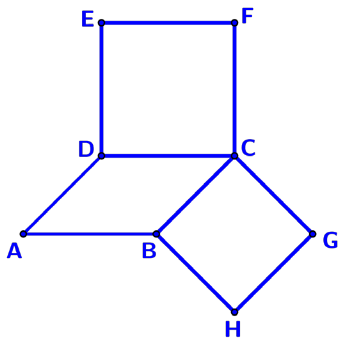
Z.7.C.3

7.C.4. Na bokach trójkąta równobocznego ABC zbudowano kwadraty $ABED$, $CBFG$ i $ACHI$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt HDF jest równoboczny.



Z.7.C.4

7.C.5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach BC i CD zbudowano kwadraty $DCFE$ i $BHGC$. Wykaż, że $|AC| = |FG|$.

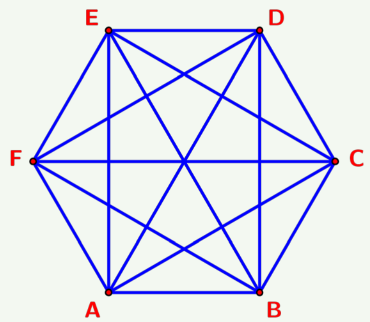


Z.7.C.5

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.C

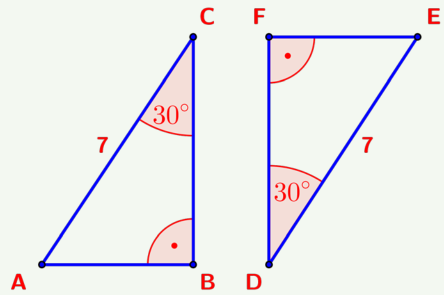
7.C.6. Dany jest sześciokąt foremny *ABCDEF* (zobacz rysunek). Trójkątem przystającym do trójkąta *BCE* jest trójkąt:



A. *ABC* **C.** *FAD*

B. *FBD* **D.** *ECA*

7.C.7. Dane są trójkąty *ABC* i *DEF*. Trójkąty te są przystające na mocy cechy:



A. bok-bok-bok, **C.** kąt-bok-kąt,

B. bok-kąt-bok, **D.** kąt-kąt.

7.C.8. Przystające mogą nie być:

A. dwie proste, **C.** dwa pięciokąty foremne o tym samym boku,

B. dwa trójkąty równoboczne, **D.** dwa koła o tym samym promieniu.

7.C.9. Trójkąt równoboczny podzielono wszystkimi możliwymi osiami symetrii na trójkąty przystające. Trójkątów takich jest:

A. dziewięć, **B.** cztery, **C.** sześć, **D.** dwanaście.

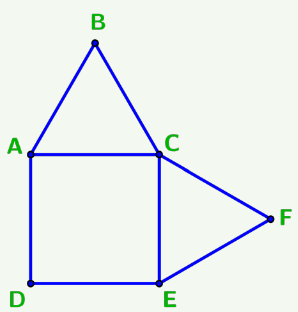
7.C.10. Dane są trójkąty przystające *ABC* i *DEF*, gdzie $|AB|=|BC|=6$, $|DF|=12\sqrt{3}$, $|\sphericalangle ABC|=|\sphericalangle DFE|=120^\circ$. Wynika z tego, że:

A. $|DE|=36$ **B.** $|AB|=6\sqrt{3}$ **C.** $|DE|=18$ **D.** $|EF|=6\sqrt{3}$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

7.C.11. Na boku trójkąta równobocznego *ABC* zbudowano kwadrat, a na boku kwadratu zbudowano kolejny trójkąt równoboczny (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt *BDF* jest równoboczny.

4 pkt



7.D ▶ Twierdzenie Talesa

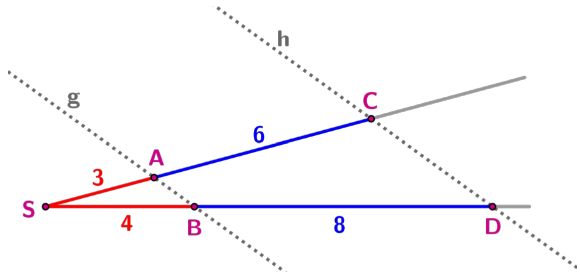
▶ Twierdzenie Talesa

P.7.D.1

TWIERDZENIE

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu.

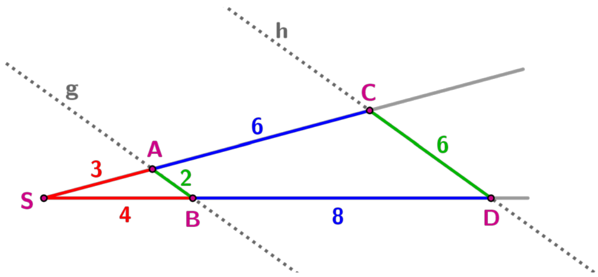
PRZYKŁAD



$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Z twierdzenia Talesa wynikają również następujące własności:



$$\frac{|SA|}{|SA|+|AC|} = \frac{|SB|}{|SB|+|BD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

$$\frac{3}{3+6} = \frac{4}{4+8} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

▶ Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

TWIERDZENIE

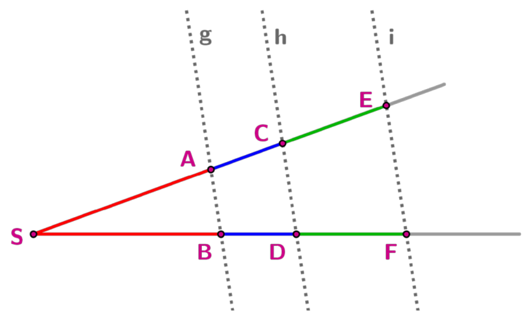
Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi oraz odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu, to te proste są równoległe.

PRZYKŁAD

Jeśli $\frac{|SA|}{|AC|} = \frac{|SB|}{|BD|}$, to proste g, h są równoległe.

Jeśli $\frac{|SA|}{|CE|} = \frac{|SB|}{|DF|}$, to proste g, h, i są równoległe.

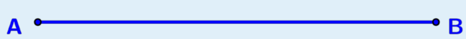
Jeśli $\frac{|SC|}{|CE|} = \frac{|SD|}{|DF|}$, to proste h, i są równoległe.



PRZYKŁAD

P.7.D.2

Podziel dany odcinek AB na trzy równe części (zobacz rysunek).



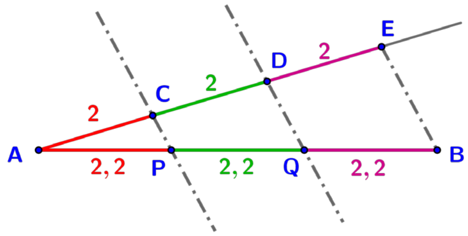
1° Kreślimy półprostą AC.

2° Zaznaczamy na niej trzy równe odcinki: $|AC| = |CD| = |DE|$.

3° Rysujemy odcinek EB.

4° Kreślimy proste równoległe do odcinka EB i przechodzące przez punkty C oraz D.

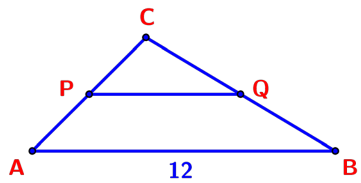
5° Proste te przecinają odcinek AB w dwóch punktach P i Q.
Na mocy twierdzenia Talesa odcinki AP, PQ, QB są równej długości.



PRZYKŁAD

Dany jest dowolny trójkąt ABC. Punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC. Wiedząc, że $|AB| = 12$, oblicz $|PQ|$.

1° Zauważmy, że $|PA| = |CP|$ oraz $|QB| = |CQ|$.
Zatem $\frac{|CP|}{|PA|} = 1 = \frac{|CQ|}{|QB|}$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że odcinki AB i PQ są równoległe.



2° Możemy więc zapisać proporcję .

$$\frac{|CP|}{|PQ|} = \frac{|CA|}{|AB|}$$

3° Przekształcając proporcję, otrzymujemy:

$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|PQ|}{|AB|}$$

4° Skoro P jest środkiem boku AC, to $\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{1}{2}$.

5° Podstawiamy odpowiednie wartości i obliczamy długość odcinka PQ.

$$\frac{1}{2} = \frac{|PQ|}{12}$$

$$2|PQ| = 12 \quad |: 2$$

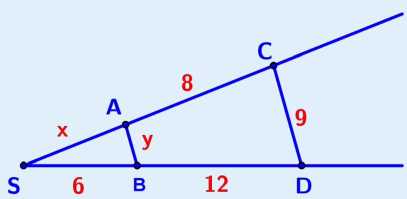
$$|PQ| = 6$$

6° Długość odcinka PQ wynosi 6.

PRZYKŁAD 1

P.7.D.3

Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



1° Korzystamy z twierdzenia Talesa i zapisujemy proporcję. $\frac{|SA|}{|SB|}=\frac{|AC|}{|BD|}$

2° Podstawiamy odpowiednie długości odcinków i obliczamy x, korzystając z własności proporcji.

$$\frac{x}{6}=\frac{8}{12}$$
$$12x=8\cdot 6$$
$$12x=48 \quad |:12$$
$$x=4$$

3° W celu obliczenia długości y postępujemy analogicznie, zaczynając od zapisania proporcji. $\frac{|SA|}{|AB|}=\frac{|SC|}{|CD|}$

4° Podstawiamy odpowiednie długości odcinków i obliczamy y, korzystając z własności proporcji.

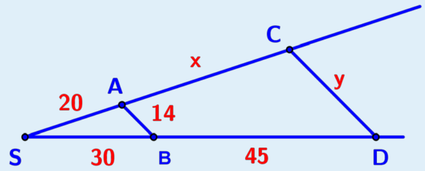
$$\frac{4}{y}=\frac{4+8}{9}$$
$$\frac{4}{y}=\frac{12}{9}$$
$$12y=36 \quad |:12$$
$$y=3$$

5° Brakujące długości odcinków to $x=4$ i $y=3$.

PRZYKŁAD 2

P.7.D.3

Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



1° Korzystamy z twierdzenia Talesa i zapisujemy proporcję. $\frac{|SA|}{|SB|}=\frac{|AC|}{|BD|}$

2° Podstawiamy odpowiednie długości odcinków i obliczamy x, korzystając z własności proporcji.

$$\frac{20}{30}=\frac{x}{45}$$
$$30x=20\cdot 45$$
$$30x=900 \quad |:30$$
$$x=30$$

3° W celu obliczenia długości y postępujemy analogicznie, zaczynając od zapisania proporcji. $\frac{|SA|}{|AB|}=\frac{|SC|}{|CD|}$

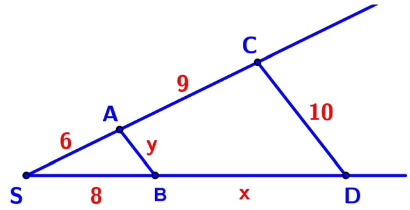
4° Podstawiamy odpowiednie długości odcinków i obliczamy y, korzystając z własności proporcji.

$$\frac{20}{14}=\frac{20+30}{y}$$
$$\frac{20}{14}=\frac{50}{y}$$
$$20y=700 \quad |:20$$
$$y=35$$

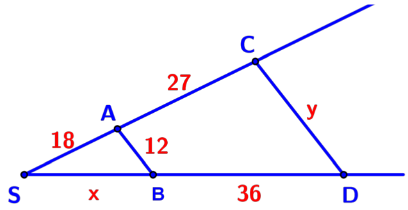
5° Brakujące długości odcinków to $x=30$ i $y=35$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

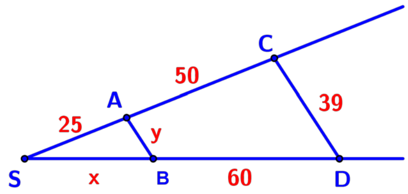
PRZYKŁAD 3. Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



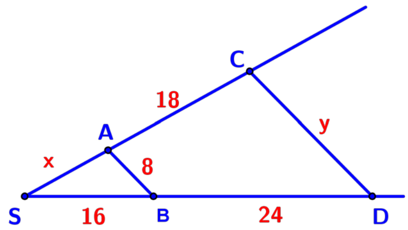
PRZYKŁAD 4. Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



PRZYKŁAD 5. Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



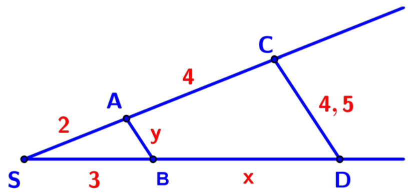
PRZYKŁAD 6. Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$.



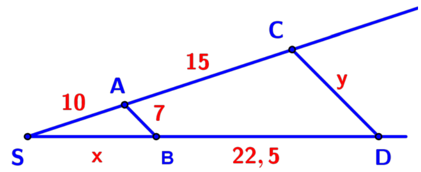
ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.D.1. Oblicz brakujące długości odcinków, wiedząc, że $AB \parallel CD$. **Z.7.D.1**

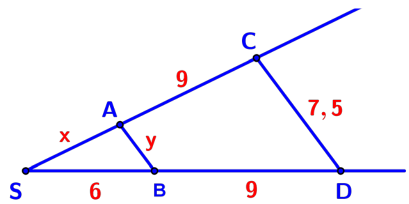
a.



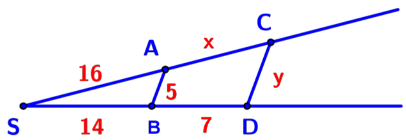
b.



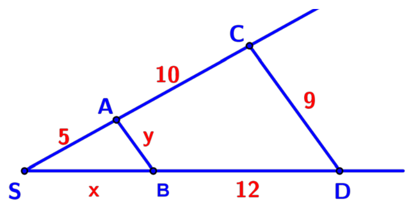
c.



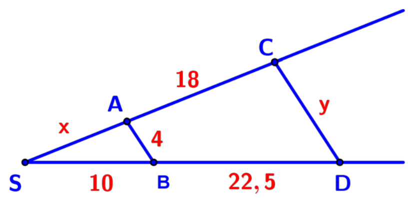
d.



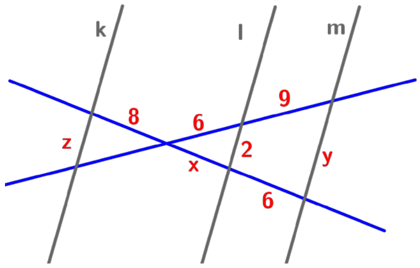
e.



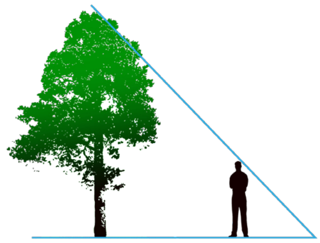
f.



7.D.2. Proste k, l, m są równoległe. Oblicz długości odcinków x, y, z.

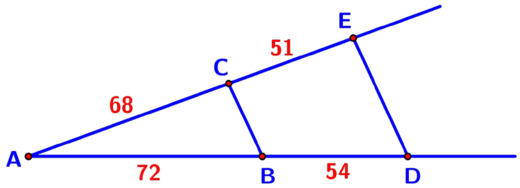


7.D.3. Cień drzewa ma długość 12 m, a cień człowieka o wysokości 180 cm ma długość 2,7 m. Oblicz wysokość drzewa.



7.D.4. Drabina o długości 4 metrów oparta o ścianę pod pewnym kątem sięga na wysokość 3 metrów. Oblicz, na jaką wysokość sięgnie drabina o długości 5 metrów oparta o ścianę pod tym samym kątem.

7.D.5. Sprawdź, wykorzystując dane z rysunku, czy odcinki BC i DE są równoległe.

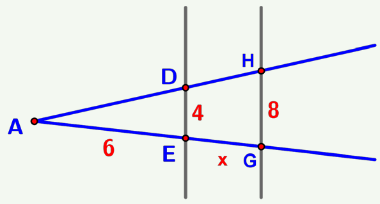


ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. **T.7.D**

7.D.6. Jeśli proste DE i GH są równoległe, to odcinek x ma długość (zobacz rysunek):

A. 12 **C.** 4

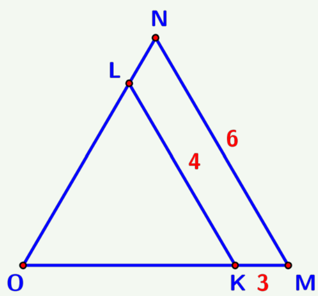
B. 6 **D.** 8



7.D.7. Odcinki KL i MN są równoległe i $|KL| = 4, |KM| = 3, |MN| = 6$ (zobacz rysunek). Długość odcinka OK jest równa:

A. 1 **C.** 3

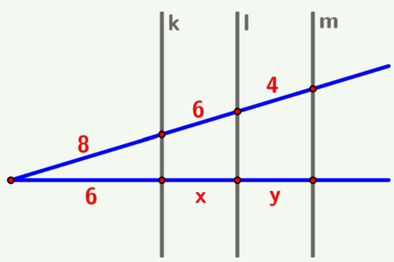
B. 2 **D.** 6



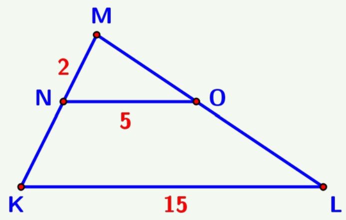
7.D.8. Ramiona kąta przecięto prostymi równoległymi k, l, m. Prawdą jest, że:

A. $3x = 2y$ **C.** $x = y - 1\frac{1}{2}$

B. $2x = 3y$ **D.** $3x = 4y$



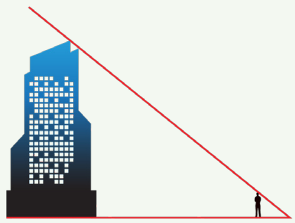
7.D.9. Odcinki KL i NO są równoległe. Długości odcinków MN, NO, KL są odpowiednio równe 2, 5 i 15. Długość odcinka KN jest równa:



A. 6 **C.** 3

B. 4 **D.** 2

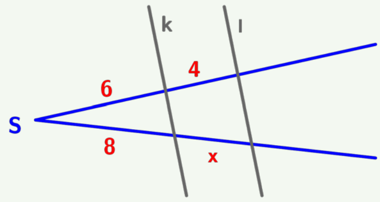
7.D.10. Cień wieżowca ma długość 60 metrów, a cień człowieka o wysokości 160 centymetrów ma długość 12 decymetrów. Wysokość wieżowca wynosi:



A. 120 m **C.** 100 m

B. 130 m **D.** 80 m

7.D.11. Ramiona kąta przecięto dwiema równoległymi prostymi k i l (zobacz rysunek). Długość odcinka x jest więc równa:

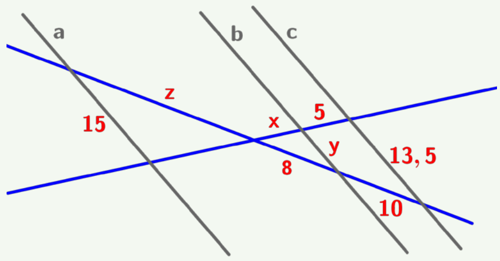


A. 12 **C.** 10

B. $5\frac{1}{3}$ **D.** 6

ZADANIA OTWARTE

7.D.12. Oblicz brakujące długości x, y, z, wiedząc, że proste a, b, c są równoległe.



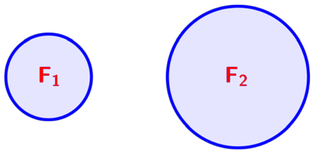
4 pkt

7.E ► Figury podobne

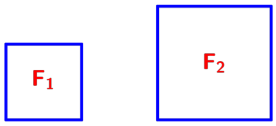
TWIERDZENIE

Dwie figury są podobne, gdy jedna z nich powstała z drugiej poprzez narysowanie jej w skali $k > 0$.

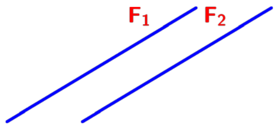
PRZYKŁADY FIGUR PODOBNYCH



dwa koła

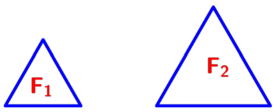


dwa kwadraty

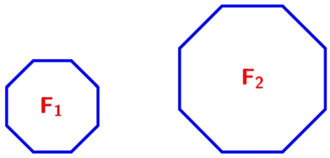


dwie proste

dwa punkty



dwa trójkąty równoboczne



dwa ośmiokąty foremne

WYJAŚNIENIE

► Skala k nosi nazwę skali podobieństwa. Można ją obliczyć jako iloraz odpowiednich wielkości obu figur podobnych, np.

– dla kwadratów skala podobieństwa to iloraz ich boków,

– dla kół skala podobieństwa to iloraz ich promieni.

► Jeśli $k = 1$, to figury będą przystające.

► Skala k zmienia takie wymiary, jak: długość, pole, objętość, natomiast nie zmienia miar kątów.

TWIERDZENIE

Dwa wielokąty są podobne w skali k $(k > 0)$, gdy mają odpowiednie kąty równe i odpowiednie boki proporcjonalne.

$$\frac{|AD|}{|A'D'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = k$$

$F_1 \sim F_2$ czytamy:
figura F_1 jest podobna do figury F_2

$ABCD \sim A'B'C'D'$ czytamy:
czworokąt $ABCD$ jest podobny do czworokąta $A'B'C'D'$

Figura F_1

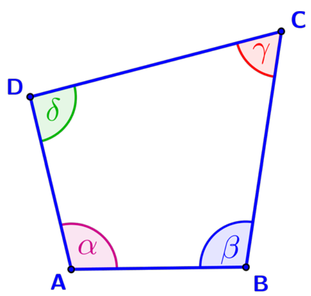
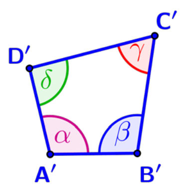


Figura F_2



W zależności od skali figura zmienia swoją wielkość w następujący sposób:

- jeśli $k \in (0; 1)$, to następuje „zmniejszenie figury”,
- jeśli $k = 1$, to wielkość figury się nie zmienia,
- jeśli $k \in (1; \infty)$, to następuje „zwiększenie figury”.

Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k, to figura F_2 jest podobna do figury F_1 w skali $\frac{1}{k}$.

Jeżeli wielokąty są podobne w skali k, to:

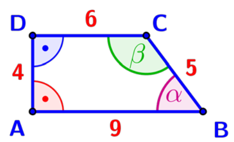
- stosunek ich obwodów jest równy skali podobieństwa k,
- stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa, czyli k^2.

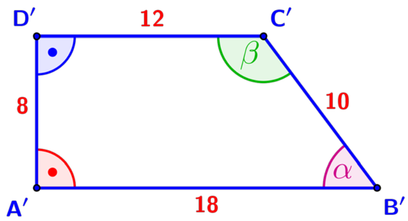
TWIERDZENIE

Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 i figura F_2 jest podobna do figury F_3, to figura F_1 jest podobna do figury F_3.

PRZYKŁAD

Trapez $A'B'C'D'$ jest podobny do trapezu $ABCD$ w skali $k = 2$. Porównaj pola obu figur.





1° Obliczamy pola obu trapezów.

$$P_{\square ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{9+6}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{4}^{2} = 15 \cdot 2 = 30 \text{ j}^2$$

$$P_{\square A'B'C'D'} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{12+18}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{8}^{4} = 30 \cdot 4 = 120 \text{ j}^2$$

2° Porównujemy pola obu figur.

$$\frac{P_{\square ABCD}}{P_{\square A'B'C'D'}} = \frac{120 \text{ j}^2}{30 \text{ j}^2} = 4 = 2^2 = k^2$$

WNIOSEK:

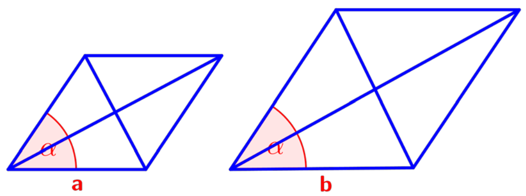
Pole P' jest cztery razy większe od pola P, czyli $P' = k^2 \cdot P$.

PRZYKŁAD

Kiedy dwa romby będą podobne?

Dwa romby będą podobne, gdy mają takie same kąty wewnętrzne.

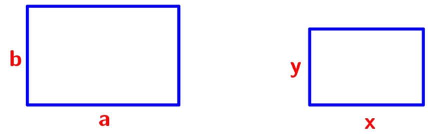
Wówczas skala podobieństwa wynosi: $k = \frac{b}{a}$.



PRZYKŁAD

Kiedy dwa prostokąty będą podobne?

Prostokąty mają wszystkie kąty wewnętrzne po 90°, zatem o ich podobieństwie będą decydować boki.
Dwa prostokąty będą podobne, gdy odpowiednie boki będą do siebie proporcjonalne: $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.



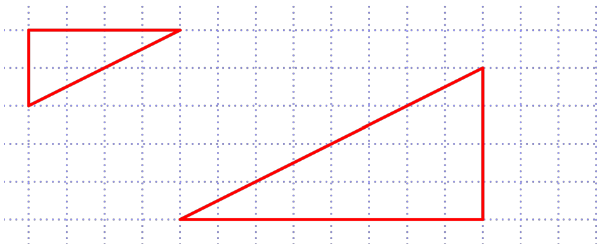
Wówczas skala podobieństwa wynosi: $k = \frac{a}{x}$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

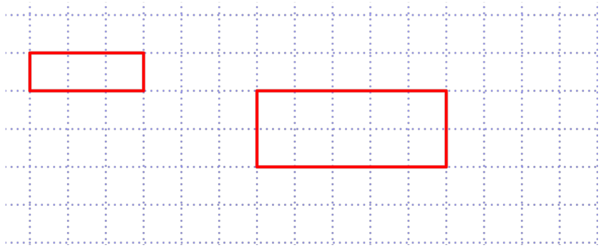
7.E.1. Wskaż, czy podane figury są podobne.

Z.7.E.1

a.

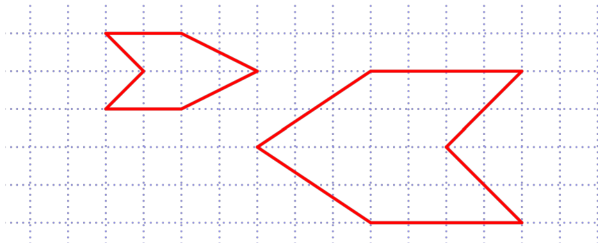


b.

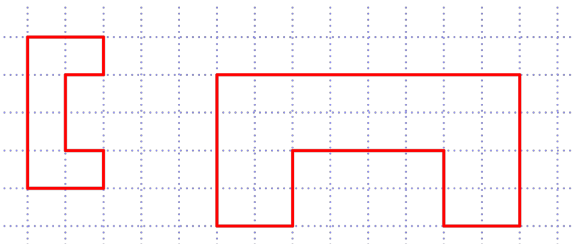


c.

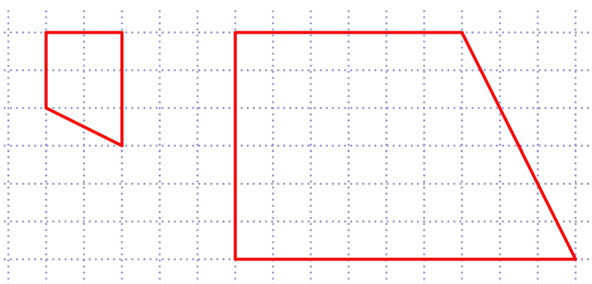
d.



e.

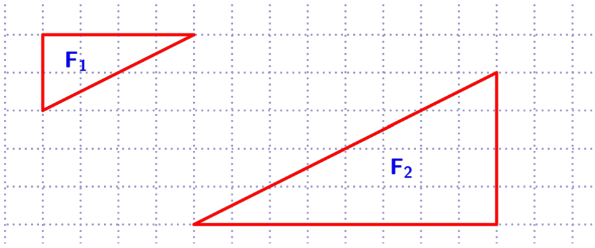


f.

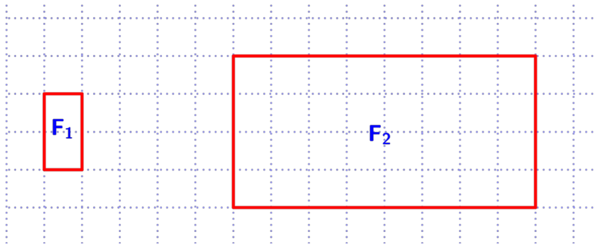


7.E.2. Figura F_2 jest podobna do figury F_1. Podaj skalę podobieństwa. **Z.7.E.2**

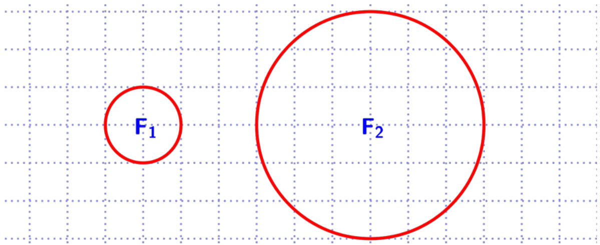
a. skala =



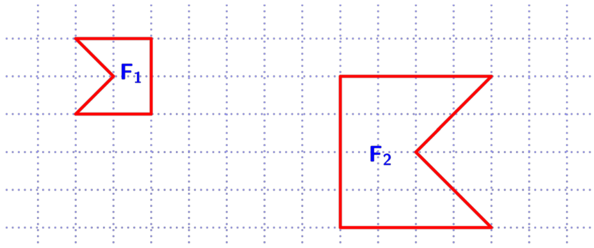
b. skala =



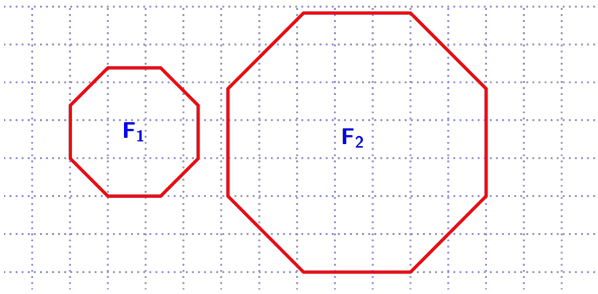
c. skala =



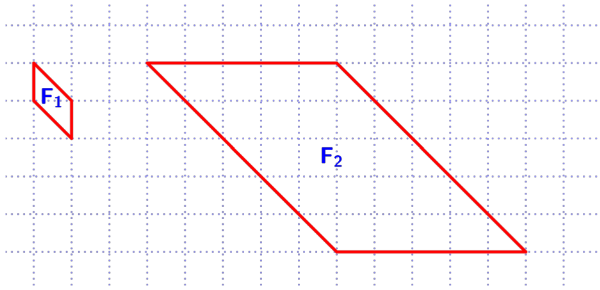
d. skala =



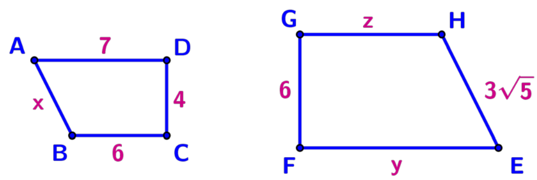
e. skala =



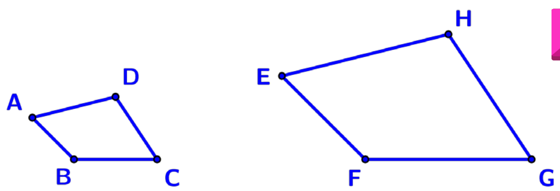
f. skala =



7.E.3. Czworokąty *ABCD* i *EFGH* są podobne (zobacz rysunek). Oblicz długości odcinków x, y, z. **Z.7.E.3**

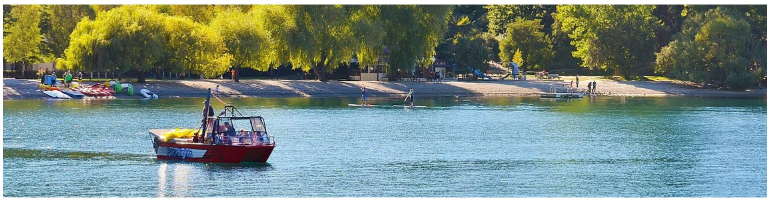


7.E.4. Dany jest czworokąt *ABCD* o obwodzie 25 i polu powierzchni 40 oraz czworokąt *EFGH* o obwodzie 100 podobny do czworokąta *ABCD*. Oblicz pole czworokąta *EFGH*. **Z.7.E.4**



7.E.5. Pole prostokąta *EFGH* wynosi 35 cm^2. Oblicz pole prostokąta podobnego do prostokąta *EFGH*, jeśli wiadomo, że skala podobieństwa wynosi $2\sqrt{5}$.

7.E.6. Jezioro na mapie w skali 1 : 20 000 ma powierzchnię 7,8 cm^2. Oblicz rzeczywistą powierzchnię jeziora i podaj ją w hektarach.



7.E.7. Dane jest koło o polu powierzchni 576π oraz koło o obwodzie 96π, które podobne jest do pierwszego. Oblicz skalę podobieństwa.

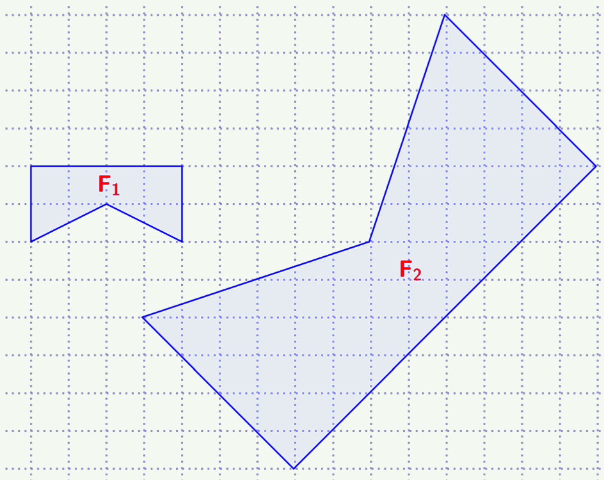
7.E.8. Przekątna prostokąta $ABCD$ ma długość 20 cm, a przekątna prostokąta $EFGH$, który jest podobny do prostokątna $ABCD$, ma długość 30 cm. Oblicz pole prostokąta $EFGH$, jeżeli wiadomo, że stosunek boków prostokąta $ABCD$ wynosi $3:4$.

7.E.9. Odległość między miastami A i B wynosi 40 km. Tomek zmierzył odległość między miastami na mapie i otrzymał wartość 2,5 cm. Oblicz skalę tej mapy.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.E

7.E.10. Figura F_2 jest podobna do figury F_1 (zobacz rysunek). Skala podobieństwa wynosi:



A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{2}$

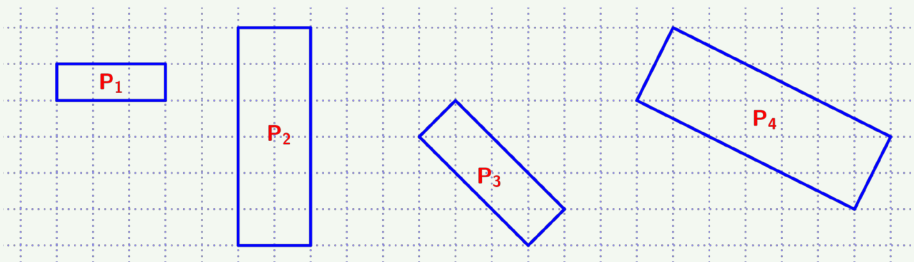
7.E.11. Na rysunku przedstawiono prostokąty P_1, P_2, P_3, P_4. Wśród tych prostokątów:

A. dwa są podobne,

B. nie ma prostokątów podobnych,

C. są trzy podobne,

D. są cztery podobne.



7.E.12. Figurami podobnymi są zawsze dwa:

A. prostokąty, **B.** trójkąty, **C.** ośmiokąty, **D.** kwadraty.

7.E.13. Czworokąt $A'B'C'D'$ o polu powierzchni 245 jest podobny do czworokąta $ABCD$ o polu 49. Skala podobieństwa wynosi:

A. 5 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7.E.14. Pole powierzchni pięciokąta P wynosi 27. Zwiększono trzykrotnie długość każdego boku pięciokąta i otrzymano pięciokąt S. Pole powstałego pięciokąta wynosi:

A. 9 **B.** 3 **C.** 81 **D.** 243

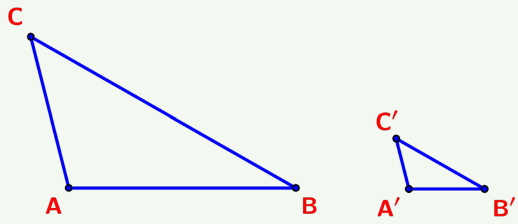
7.E.15. Odległość na mapie w skali $1 : 50\,000$ między miastem X a miastem Y wynosi 12,5 cm. Rzeczywista odległość między tymi miastami wynosi:

A. 62,5 km **B.** 4 km **C.** 40 km **D.** 6,25 km

7.E.16. Dane są trójkąty podobne ABC i $A'B'C'$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta $A'B'C'$ wynosi 108, a stosunek $\frac{|AB|}{|A'B'|} = 3$. Pole trójkąta ABC wynosi:

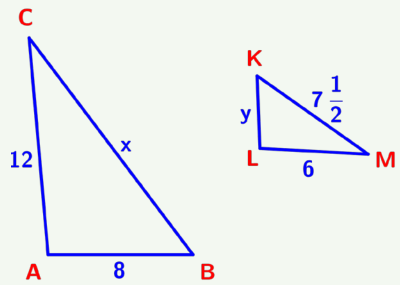
A. 36 **C.** 324

B. 12 **D.** 972



ZADANIA OTWARTE

7.E.17. Dany jest trójkąt KLM podobny do trójkąta ABC. Posługując się danymi z rysunku, oblicz długość boków x i y. **2 pkt**

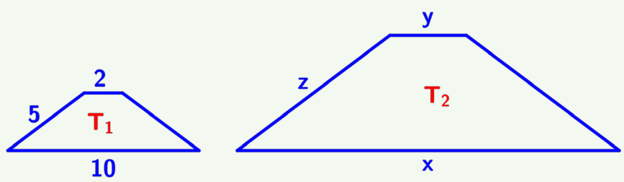


7.E.18. Dany jest prostokąt P o długościach boków a i b oraz prostokąt P' podobny do prostokąta P w skali $k = 1{,}5$. Oblicz: **2 pkt**

a. pole prostokąta P oraz prostokąta P',

b. o ile procent pole prostokąta P' jest większe od pola prostokąta P.

7.E.19. Trapezy równoramienne T_1 i T_2 są podobne (zobacz rysunek). Pole trapezu T_2 wynosi 288. Oblicz długość x, y, z. **4 pkt**



7.3 ▶ Rozpoznawanie trójkątów podobnych i wykorzystanie (także w kontekstach praktycznych) cech podobieństwa trójkątów

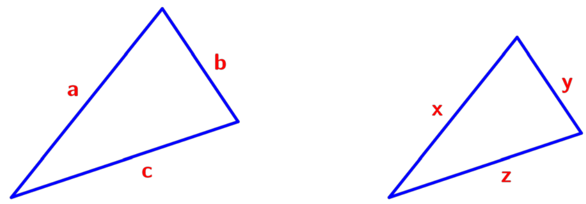
▶Cechy podobieństwa trójkątów

TWIERDZENIA

P.7.3.1

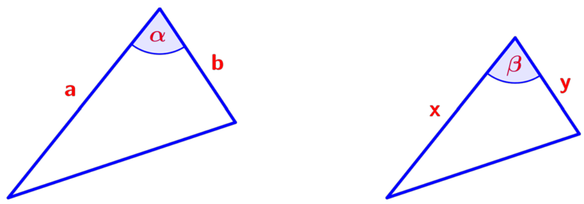
CECHA *bbb*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są proporcjonalne (lub stosunki odpowiednich boków są stałe): $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.



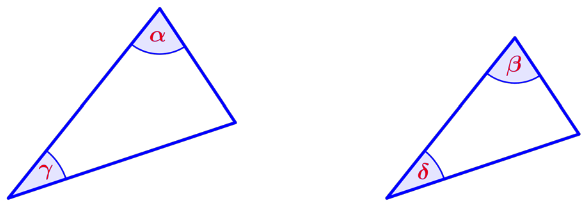
CECHA *bkb*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są proporcjonalne oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ oraz $\alpha = \beta$.



CECHA *kk*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie kąty są tej samej miary: $\alpha = \beta, \gamma = \delta$.



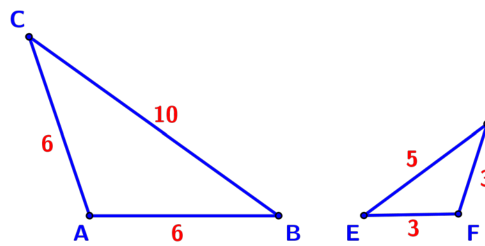
PRZYKŁAD

Dane są dwa trójkąty: ABC i DEF. Na podstawie poniższych danych określ, czy trójkąty te są podobne:

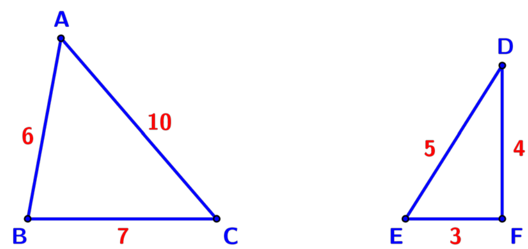
a. $|AB| = 6, |BC| = 6, |CA| = 10, |DE| = 5, |EF| = 3, |FD| = 3$

b. $|AB| = 6, |BC| = 7, |CA| = 10, |DE| = 5, |EF| = 3, |FD| = 4$

a. Oba trójkąty są równoramienne oraz $\frac{6}{3} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$, zatem te trójkąty są podobne, a skala podobieństwa wynosi 2.



b. Trójkąt DEF jest trójkątem prostokątnym (bo $5^2 = 3^2 + 4^2$), natomiast trójkąt ABC nie jest trójkątem prostokątnym (bo $10^2 \neq 7^2 + 6^2$), więc trójkąty nie są podobne.



PRZYKŁAD

Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Oblicz długości boków x i y.

1° Skoro $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, to obliczamy skalę podobieństwa.

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$$

2° Znając skalę, możemy zapisać równanie, aby obliczyć x.

$$\frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$

$$\frac{7{,}5}{x} = 2{,}5$$

$$2{,}5x = 7{,}5 \quad |: 2{,}5x$$

$$x = 3$$

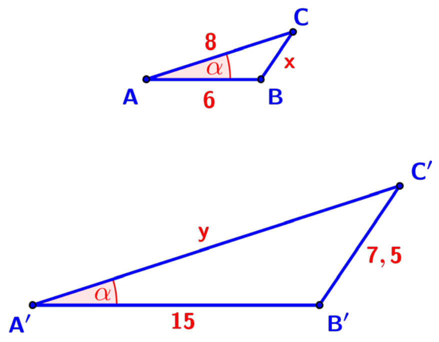
3° Zapisujemy drugie równanie i obliczamy y.

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$

$$\frac{y}{8} = 2{,}5$$

$$y = 2{,}5 \cdot 8 = 20$$

4° Długości boków wynoszą $x = 3$ i $y = 20$.

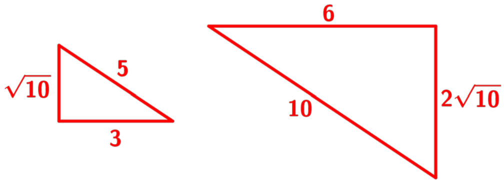


ZADANIA UTRWALAJĄCE

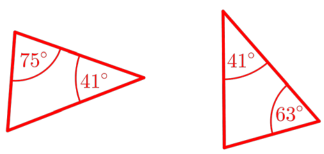
7.3.1. Wskaż, czy podana para trójkątów jest podobna. Jeśli tak, to określ, na podstawie jakiej cechy.

Z.7.3.1

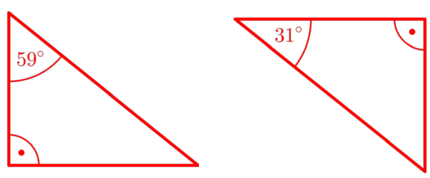
PRZYKŁAD 1.



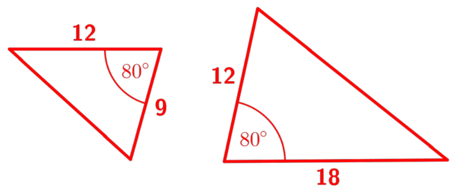
PRZYKŁAD 2.



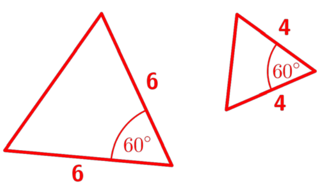
PRZYKŁAD 3.



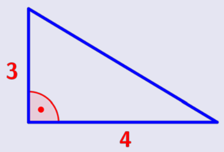
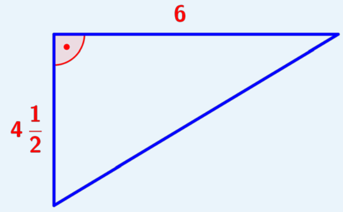
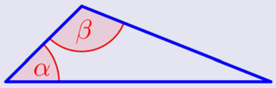
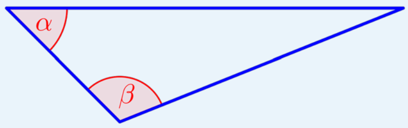
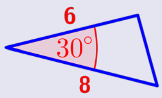
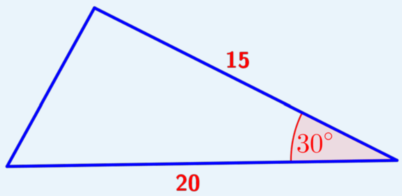
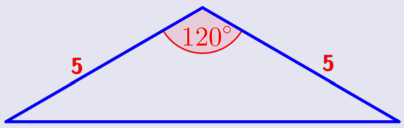
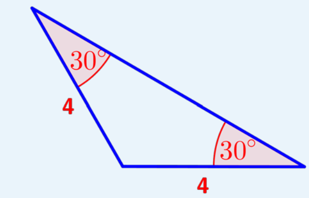
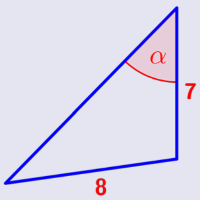
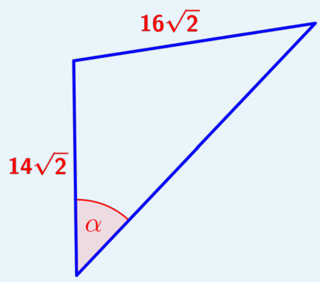
PRZYKŁAD 4.



PRZYKŁAD 5.

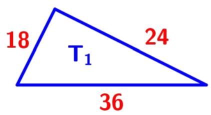


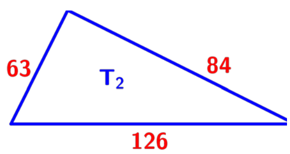
7.3.2. Wiedząc, że trójkąty F_1 i F_2 są podobne, uzupełnij tabelę, wpisując cechę podobieństwa.

F_1	F_2	Cecha podobieństwa
		
		
		
		
		

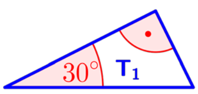
7.3.3. Posługując się danymi z rysunku, sprawdź, czy trójkąty T_1 i T_2 są podobne.

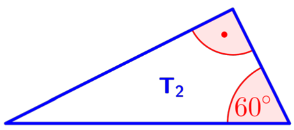
a.





b.





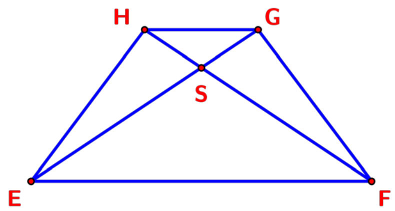
7.3.4. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne. Boki trójkąta ABC mają długość 10 cm, 15 cm i 20 cm. Obwód trójkąta $A'B'C'$ wynosi 135 cm. Oblicz długość boków trójkąta $A'B'C'$.

7.3.5. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD długości 2,4, która podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki BD i DA. Oblicz obwód trójkąta ABC, wiedząc, że $|DA| = 3{,}2$.

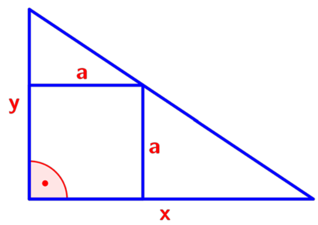
7.3.6. W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$, ramiona AD i BC mają odpowiednio długości 24 cm i 36 cm, a krótsza podstawa $|DC| = 10$ cm. Przedłużono boki AD i BC tak, że przecięły się w punkcie P. Oblicz obwód trójkąta ABP, wiedząc, że odcinek PC jest o 4 cm dłuższy od odcinka PD.

Z.7.3.6

7.3.7. W trapezie równoramiennym $EFGH$ poprowadzono przekątne, które przecinają się w punkcie S w stosunku $2 : 5$. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że $|\sphericalangle SGH| = 60^\circ$, a wysokość trapezu opuszczona na podstawę EF ma długość $14\sqrt{3}$.



7.3.8. Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych x i y. W trójkąt wpisano kwadrat o boku a (zobacz rysunek). Wykaż, że $a = \frac{xy}{x+y}$.



Z.7.3.8

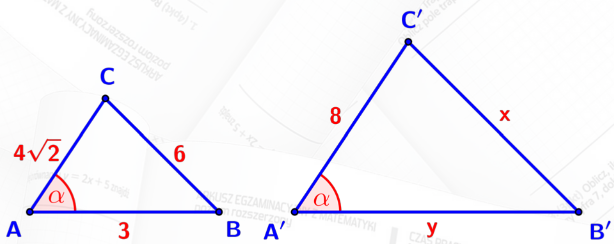
MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.3

7.3.9. Trójkąt o bokach 7, 8, 9 jest podobny do trójkąta o bokach:

A. 71, 81, 91 **B.** 17, 18, 19 **C.** $2\sqrt{7}, 2\sqrt{8}, 2\sqrt{9}$ **D.** $2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3$

7.3.10. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Posługując się danymi z rysunku, można stwierdzić, że:



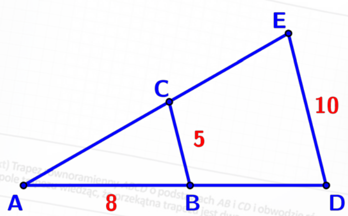
A. $x = 12$, $y = 6$

B. $x = 6\sqrt{2}$, $y = 3\sqrt{2}$

C. $x = 8\sqrt{2}$, $y = 6\sqrt{2}$

D. $x = 4\sqrt{2}$, $y = 8\sqrt{2}$

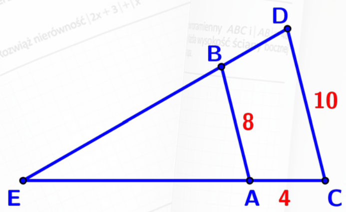
7.3.11. Odcinki BC i DE są równoległe. Długości AB, BC i DE są odpowiednio równe 8, 5 i 10. Długość odcinka BD jest równa:



A. 16 **C.** 4

B. 8 **D.** 6

7.3.12. Jeżeli $AB \parallel CD$ i $|AB| = 8$, $|AC| = 4$, $|CD| = 10$, to długość odcinka AE wynosi:



A. $|AE| = 6$ **C.** $|AE| = 8$

B. $|AE| = 12$ **D.** $|AE| = 16$

7.3.13. W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ oraz $|AB| > |DC|$ poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie P. Trójkątami podobnymi są trójkąty:

A. ABC i ACD **B.** ABP i APD **C.** APD i BCP **D.** ABP i CDP

7.3.14. Obwód trójkąta KLM wynosi 120, a obwód trójkąta PQR, podobnego do KLM, wynosi 48. Pole trójkąta KLM jest większe od pola trójkąta PQR:

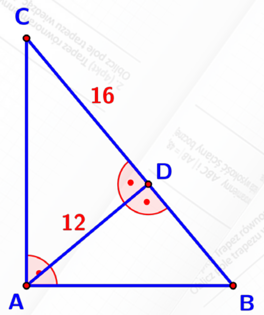
A. 6,5 raza, **B.** 2,5 raza, **C.** 6,25 raza, **D.** 5 razy.

7.3.15. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Jeśli $|AB| = 12$, $|BC| = 14$, $|AC| = 16$, a obwód trójkąta $A'B'C'$ wynosi 189, to skala podobieństwa jest równa:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{2}{9}$ **C.** 4 **D.** $\frac{1}{4}$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

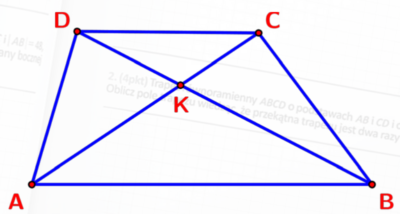
7.3.16. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość AD (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = 12$ i $|DC| = 16$, oblicz pole trójkąta ABC. **2 pkt**



7.3.17. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, gdzie wysokość $|CD| = h$. Wysokość CD podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach k i l. Wykaż, że $h = \sqrt{kl}$. **2 pkt**

7.3.18. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$. Pole powierzchni tego trapezu wynosi 48. Ramiona trapezu przedłużono tak, aby przecięły się w punkcie O. Wiedząc, że $|AD| = 2|DO|$ oraz $|AB| = 18$, oblicz obwód i pole trójkąta ABO. **4 pkt**

7.3.19. Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. W trapezie poprowadzono przekątne przecinające się w punkcie K. Wiedząc, że $|AB| = 12$, $|CD| = 8$ oraz pole trójkąta CDK równe jest 16, wykaż, że trójkąty AKD i BKC mają równe pola o wartości 24. **5 pkt**



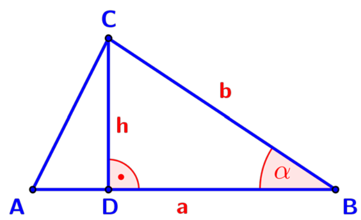
7.4 ▶ Wykorzystanie własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi

TWIERDZENIE

Pole dowolnego trójkąta możemy obliczyć, korzystając ze wzoru: $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie a, b — to długości boków trójkąta, a α — to miara kąta pomiędzy tymi bokami.

WYJAŚNIENIE

1° Pole trójkąta obliczamy ze wzoru: $P = \frac{1}{2}ah$.



2° Zauważmy, że w trójkącie CDB możemy obliczyć $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$
$$h = b \cdot \sin\alpha$$

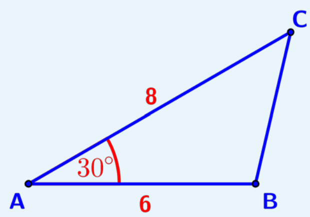
3° Otrzymaną wartość h podstawiamy do wyjściowego wzoru na pole.

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

PRZYKŁAD 1

P.7.4.1

Oblicz pole trójkąta, posługując się danymi z rysunku.

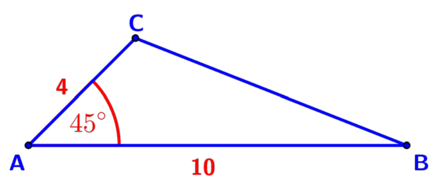


1° Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta: $P_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

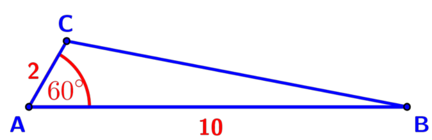
$$P_\triangle = \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \overset{12}{\cancel{24}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 12$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz pole trójkąta, posługując się danymi z rysunku.



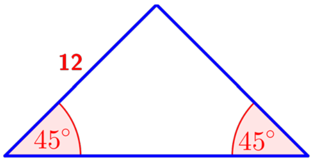
PRZYKŁAD 3. Oblicz pole trójkąta, posługując się danymi z rysunku.



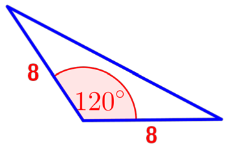
ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.4.1. Oblicz pola figur, posługując się danymi z rysunku.

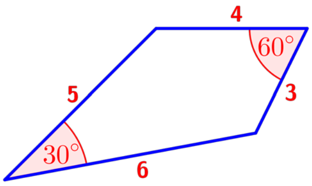
a.



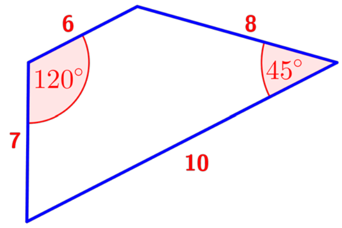
b.



c.



d.



7.4.2. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym ramię o długości 16 tworzy z podstawą kąt 75°. Oblicz pole tego trójkąta.

7.4.3. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|CD| = 10$, $|AD| = 4$. Wiedząc, że $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle CDA| = 45^\circ$, oblicz pole tego czworokąta.

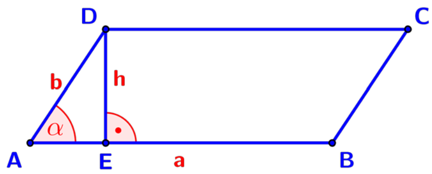
7.4.4. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $|AB| = 20$, $|BC| = 12$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 70^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 50^\circ$. Oblicz pole tego trójkąta.

TWIERDZENIE

Pole równoległoboku możemy obliczyć, korzystając ze wzoru: $P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$, gdzie a, b — to długości dwóch boków mających wspólny koniec, a α — to miara kąta pomiędzy tymi bokami.

WYJAŚNIENIE

1° Pole równoległoboku obliczamy ze wzoru: $P = ah$.



2° Zauważmy, że w trójkącie AED możemy obliczyć $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \sin\alpha$$

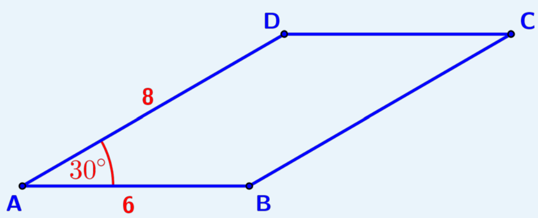
3° Otrzymaną wartość h podstawiamy do wyjściowego wzoru na pole.

$$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

PRZYKŁAD 1

P.7.4.2

Oblicz pole równoległoboku, posługując się danymi z rysunku.

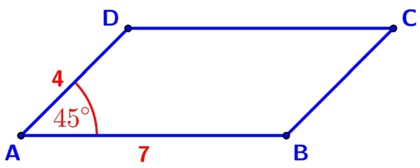


1° Korzystamy ze wzoru na pole równoległoboku:
$P = ab \sin \alpha$

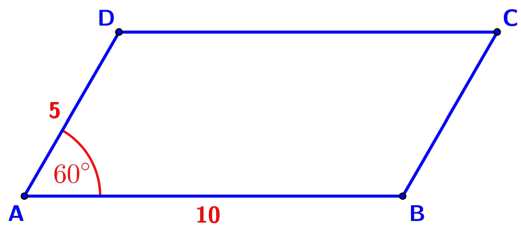
$$P = 6 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = \overset{24}{\cancel{48}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 24$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz pole równoległoboku, posługując się danymi z rysunku.



PRZYKŁAD 3. Oblicz pole równoległoboku, posługując się danymi z rysunku.



ZADANIA UTRWALAJĄCE

7.4.5. Obwód równoległoboku wynosi 24. Oblicz pole tego równoległoboku, wiedząc , że kąt ostry ma miarę 45°, a jeden bok jest dwa razy większy od drugiego.

7.4.6. W równoległoboku o polu 125 stosunek długości boków wynosi $2 : 5$. Oblicz obwód tego równoległoboku, jeżeli kąt rozwarty ma miarę 150°.

7.4.7. Jedna z przekątnych równoległoboku o długości 9 tworzy z bokiem kąt prosty. Oblicz pole równoległoboku, wiedząc, że kąty ostry równoległoboku jest pięć razy mniejszy od kąta rozwartego.

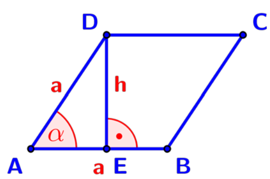
7.4.8. Pole równoległoboku wynosi 42, a kąt ostry ma miarę 30°. Oblicz długości boków równoległoboku, jeśli obwód jest równy 40.

TWIERDZENIE

Pole rombu możemy obliczyć, korzystając ze wzoru: $P = a^2 \cdot \sin \alpha$, gdzie a — to długość boku, a α — to miara kąta pomiędzy tymi bokami.

WYJAŚNIENIE

1° Pole rombu obliczamy ze wzoru: $P = ah$.



2° Zauważmy, że w trójkącie AED możemy obliczyć $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{a}$$

$$h = a \cdot \sin \alpha$$

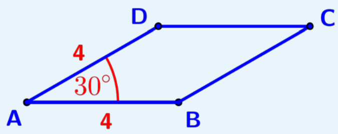
3° Otrzymaną wartość h podstawiamy do wyjściowego wzoru na pole.

$$P = a \cdot a \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \sin\alpha$$

PRZYKŁAD 1

P.7.4.3

Oblicz pole rombu, posługując się danymi z rysunku.

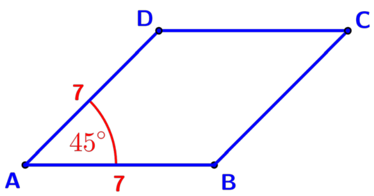


1° Korzystamy ze wzoru na pole rombu: $P = a^2 \sin\alpha$

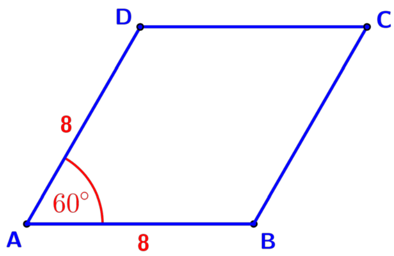
$$P = 4^2 \cdot \sin 30^\circ = \overset{8}{\cancel{16}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 8$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz pole rombu, posługując się danymi z rysunku.



PRZYKŁAD 3. Oblicz pole rombu, posługując się danymi z rysunku.

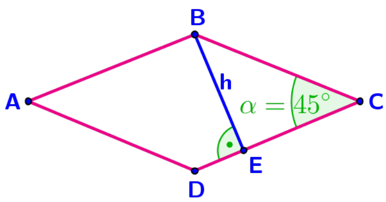


PRZYKŁAD

P.7.4.4

Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $72\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

1° Rysujemy romb i zaznaczamy w nim wysokość oraz kąt 45°.



2° Jeżeli jest podana wartość pola rombu, to możemy przyrównać podaną wartość do wzoru na pole: $P = a^2 \sin\alpha$.

3° Układamy równanie, podstawiając za $\alpha = 45^\circ$.

$$a^2 \sin 45^\circ = 72\sqrt{2}$$

4° Wstawiamy wartość sinusa dla 45° i obliczamy a.

$$a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2} \quad |\cdot 2$$

$$a^2\sqrt{2} = 144\sqrt{2} \quad |:\sqrt{2}$$

$$a^2 = 144 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12$$

5° Pole rombu można również obliczyć ze wzoru $P = a \cdot h$, więc możemy ułożyć równanie.

$$a \cdot h = 72\sqrt{2}$$

6° Wstawiamy za $a = 12$ i obliczamy wysokość h.

$$12h = 72\sqrt{2} \quad |:12$$
$$h = 6\sqrt{2}$$

7° Wysokość rombu wynosi $6\sqrt{2}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

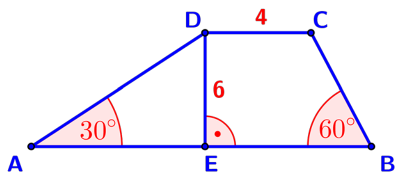
7.4.9. Pole rombu wynosi $72\sqrt{3}$. Oblicz miary kątów tego rombu, wiedząc, że jego obwód wynosi 48.

7.4.10. Pole rombu wynosi $18\sqrt{2}$. Oblicz wysokość rombu, jeżeli jeden z kątów ma miarę 135°.

7.4.11. Obwód rombu wynosi 96. Oblicz pole rombu, wiedząc, że kąt rozwarty rombu jest dwa razy większy od kąta ostrego.

7.4.12. Przekątne rombu mają długość 12 cm i 16 cm. Oblicz sinus kąta ostrego rombu.

7.4.13. Oblicz pole trapezu $ABCD$, wykorzystując informacje z rysunku.



7.4.14. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $|BC| = 4$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle BCA| = 75^\circ$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

7.4.15. Przekątne równoległoboku o długościach 20 i 30 przecinają się pod kątem 120°. Oblicz pole równoległoboku.

7.4.16. W trapezie równoramiennym $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, wysokość o długości $6\sqrt{3}$ tworzy z ramieniem kąt 30°. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że przekątna BD trapezu jest prostopadła do ramienia AD.

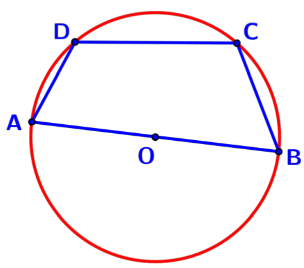
7.4.17. W trapezie prostokątnym podstawy mają długości 8 i 12, a tangens jego kąta ostrego jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz pole tego trapezu.

ZADANIA UTRWALAJĄCE — DOWODY

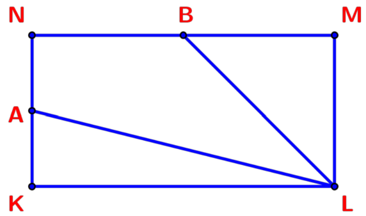
7.4.18. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B, które przecinają się w punkcie S. Uzasadnij, że kąt ASB jest rozwarty. Z.7.4.18

7.4.19. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty. Z.7.4.19

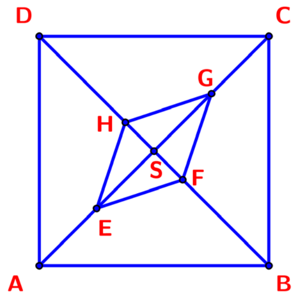
7.4.20. Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg. Bok AB jest średnicą tego okręgu. Udowodnij, że $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.



7.4.21. W prostokącie $KLMN$ punkt A jest środkiem boku KN, a punkt B środkiem boku NM (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM}$.



7.4.22. Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie S. Punkty E i G są środkami odcinków odpowiednio AS i SC, a punkty F i H leżą na przekątnej DB i spełniają warunki: $|DH| = 2|HS|$ i $|FB| = 2|SF|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$.



MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.7.4

7.4.23. Wysokość rombu o boku długości 8 i kącie ostrym 30° ma długość:

A. $4\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{3}$ D. 6

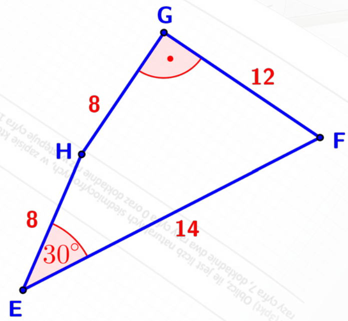
7.4.24. Krótszy bok prostokąta ma długość 10. Kąt między przekątną prostokąta i tym bokiem ma miarę 60°. Dłuższy bok prostokąta ma długość:

A. $5\sqrt{2}$ B. $10\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $10\sqrt{2}$

7.4.25. Pole czworokąta $EFGH$ (zobacz rysunek) wynosi:

A. 152 C. 52

B. 76 D. 104



7.4.26. W trapezie prostokątnym podstawy mają długości 2 i 3, a ramię nachylone jest do podstawy pod kątem 60°. Pole tego trapezu wynosi:

A. $6\sqrt{3}$ B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{5}{2}$

7.4.27. W równoległoboku o polu 16 jeden bok jest dwa razy większy od drugiego, a kąt między tymi bokami wynosi 150°. Długość dłuższego boku jest równa:

A. 4 B. 16 C. 8 D. 2

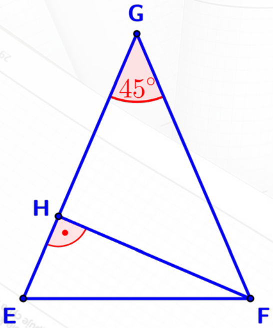
7.4.28. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC| = 10$ oraz $|\sphericalangle BCA| = 45^\circ$. Wysokość $|BD|$ ma długość:

A. $10\sqrt{2}$ **B.** 5 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $5\sqrt{3}$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

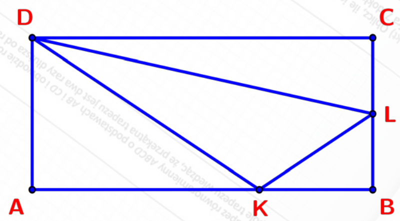
7.4.29. Dany jest trójkąt równoramienny, w którym ramię ma długość 8, a kąt między ramionami wynosi 120°. Oblicz pole i obwód trójkąta. **2 pkt**

7.4.30. W trójkącie równoramiennym EFG dane są: $|EG| = |FG| = 8$ i $|\sphericalangle EGF| = 45^\circ$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość FH trójkąta oraz jego pole. **2 pkt**



7.4.31. Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 30°, a pole jest równe 32. Oblicz obwód tego rombu. **2 pkt**

7.4.32. W prostokącie $ABCD$ punkt K leży na boku AB w taki sposób, że $|AK| = 2|KB|$, a punkt L jest środkiem boku BC (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = x$ i $|CD| = y$, wykaż, że $P_{\triangle DKL} = \frac{1}{3} P_{\square ABCD}$. **2 pkt**



7.4.33. Przekątne równoległoboku o długościach 6 i 8 przecinają się pod kątem 120°. Oblicz pole równoległoboku. **4 pkt**

7.4.34. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$, a wysokość o długości $4\sqrt{3}$ tworzy z ramieniem kąt 30°. Oblicz pole trapezu, wiedząc, że przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC. **4 pkt**

7.4.35. Pole równoległoboku o kącie ostrym 30° wynosi 10. Oblicz długość boków równoległoboku, wiedząc, że jego obwód ma długość 18. **4 pkt**

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

7.A.1. $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$

7.A.2. $\alpha = 70^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 50^\circ$

7.A.3. $41^\circ, 58^\circ, 81^\circ$

7.A.4. $54^\circ, 81^\circ, 108^\circ, 135^\circ, 162^\circ$

7.A.5. 900°

7.A.6. 144°

7.A.7. 27

7.A.8. $P = 60$ j^2, $O = 34$

7.A.9. $P = 125$ j^2

7.A.10. $O = 40$

7.A.11. $P = 54\sqrt{3}$ j^2

7.A.12. $P = 432$ j^2

7.A.13. $O = 26\pi$

7.A.14. $8\sqrt{3}, 16$

7.A.15. $4\sqrt{3}, 12, 8\sqrt{3}$

7.A.16. A **7.A.17.** D **7.A.18.** C **7.A.19.** D **7.A.20.** C

7.A.21. A **7.A.22.** A **7.A.23.** A **7.A.24.** D **7.A.25.** D

7.A.26. $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 160^\circ$ **7.A.27.** $\alpha = 25^\circ, \beta = 40^\circ$

P.7.1.5 PRZYKŁAD 2. 82°

PRZYKŁAD 3. 180°

PRZYKŁAD 4. 248°

PRZYKŁAD 5. 45°

PRZYKŁAD 6. 149°

7.1.1. 315°

7.1.2. 105°

7.1.3. 120°

7.1.4. $\alpha = 51^\circ$

7.1.5. 45°

7.1.6. $\alpha = 108^\circ$

7.1.7. 52°

7.1.8. kąt środkowy $= 76^\circ$, kąt wpisany $= 38^\circ$

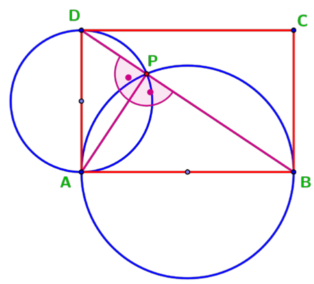
7.1.9. **a.** $\alpha = 135^\circ$ **b.** $\alpha = 30^\circ$ **c.** $\alpha = 40^\circ$ **d.** $\alpha = 60^\circ$

7.1.10. **a.** $\alpha = 30^\circ$ **b.** $\alpha = 20^\circ$ **c.** $\alpha = 55^\circ$ **d.** $\alpha = 280^\circ$

7.1.11. 1° Rysujemy kąt *DPA*, który jest oparty na średnicy *AD* okręgu, więc jest kątem prostym.

2° Rysujemy kąt *BPA*, który jest oparty na średnicy *AB* okręgu, więc jest kątem prostym.

3° Dorysowane kąty proste są kątami przyległymi, więc tworzą w sumie kąt 180°. Wynika z tego, że punkty *B*, *P* i *D* są współliniowe.



7.1.12. B **7.1.13.** C **7.1.14.** D **7.1.15.** A **7.1.16.** C

7.1.17. B **7.1.18.** D **7.1.19.** B **7.1.20.** C **7.1.21.** B

7.1.22. B **7.1.23.** kąt środkowy$= 155^\circ$, kąt wpisany$= 77,5^\circ$

7.1.24. $\alpha = 55^\circ$

7.B.1. $55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$

7.B.2. $r = 4\sqrt{2}$

7.B.3. $r = 2$

7.B.4. $P = \frac{13}{4}\pi$ j^2

7.B.5. $O = 24\sqrt{3}$

7.B.6. $O = 12\sqrt{3}\pi$

7.B.7. $34^\circ, 73^\circ, 73^\circ$

7.B.8. $P = 36\sqrt{3}\ \mathrm{j}^2$

7.B.9. $P = 36\pi\ \mathrm{j}^2$

7.B.10. $P = 81\pi\ \mathrm{j}^2$

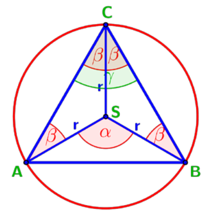
7.B.11. $P = 122{,}88\ \mathrm{j}^2$

7.B.12. $75^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 105^\circ$

7.B.13. 1° $|SA| = |SB| = |SC| = r$ i niech α — kąt środkowy, γ — kąt wpisany.

2° Przystające trójkąty $\triangle ASC$ i $\triangle BSC$ są więc równoramienne, czyli kąty przy podstawie mają tę samą miarę β.

3° Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym:
$\alpha = 2\gamma \rightarrow \alpha = 2(\beta + \beta) \rightarrow \alpha = 2(2\beta) \rightarrow \alpha = 4\beta$



7.B.14. D **7.B.15.** B **7.B.16.** B **7.B.17.** C **7.B.18.** D
7.B.19. B **7.B.20.** C **7.B.21.** D **7.B.22.** A **7.B.23.** B
7.B.24. 8 **7.B.25.** $73^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 107^\circ$
7.B.26. 12π **7.B.27.** $r = 3$

P.7.2.3 PRZYKŁAD 3. $\alpha = 58^\circ$ PRZYKŁAD 6. $\alpha = 56^\circ$

PRZYKŁAD 5. $\alpha = 102^\circ$

7.2.1. $|PQ| = 15$

7.2.2.
a. $\alpha = 31^\circ$ **c.** $\alpha = 50^\circ$ **e.** $\alpha = 105^\circ$
b. $\alpha = 65^\circ$ **d.** $\alpha = 37^\circ$ **f.** $\alpha = 74^\circ$

7.2.3. $\alpha = 80^\circ$

7.2.4. $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$

P.7.2.5 PRZYKŁAD 3. okręgi rozłączne zewnętrznie PRZYKŁAD 5. okręgi rozłączne wewnętrznie

PRZYKŁAD 4. okręgi styczne wewnętrznie PRZYKŁAD 6. okręgi współśrodkowe

7.2.5.

Długość promienia r_1	Długość promienia r_2	Odległość $\vert S_1S_2\vert$ między środkami okręgów	Rodzaj wzajemnego położenia
5	3	1	okręgi rozłączne wewnętrznie
8	4	4	okręgi styczne wewnętrznie
7	2	10	okręgi rozłączne zewnętrznie
4	3	0	okręgi współśrodkowe
10	11	4	okręgi przecinające się
11	2	13	okręgi styczne zewnętrznie

7.2.6. $r_1 = 5, r_2 = 7$

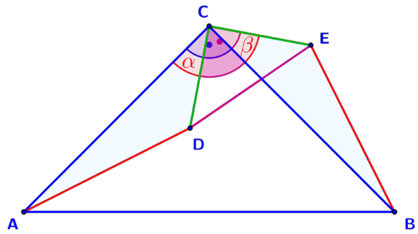
7.2.7.
$k > 8$ — okręgi rozłączne zewnętrznie
$k = 8$ — okręgi styczne zewnętrznie
$2 < k < 8$ — okręgi przecinające się
$k = 2$ — okręgi styczne wewnętrznie
$k < 2$ — okręgi rozłączne wewnętrznie
$k = 0$ — okręgi współśrodkowe

7.2.8. C **7.2.9.** B **7.2.10.** C **7.2.11.** D **7.2.12.** C
7.2.13. A

7.C.1.
a. *ABE, CDE, ADE, BCD* **c.** *AEF, DEJ, CDI, BCH*
b. *EFJ, DIJ, CHI, BGH* **d.** *AEHI, DEGH, CDFG, BCJF*

7.C.2.
a. Tak, *bbb* **c.** Tak, *kbk* **e.** Tak, *bkb*, *bbb*
b. Nie **d.** Nie

7.C.3. 1° Oznaczamy kąty proste oraz rysujemy odcinki AD, BE.



2° Rozważmy, czy przystające są trójkąty ADC i BEC.

3° Długości boków $|AC| = |CB|$ są równe.

4° Długości boków $|CD| = |CE|$ są równe.

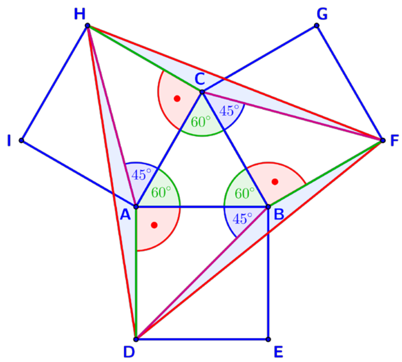
5° Oznaczamy kąty: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle BCE = \beta$.

6° Jeśli udowodnimy, że $\alpha = \beta$, to $\triangle ADC$ będzie przystający do $\triangle BCE$.

7° Zauważmy, że $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \alpha$ oraz $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ - \beta$, więc $90^\circ - \alpha = 90^\circ - \beta \rightarrow \alpha = \beta$

8° Na podstawie cechy bok-kąt-bok (bkb) $\triangle ADC$ i $\triangle BEC$ są przystające $\triangle ADC \equiv \triangle BEC$, więc $|AD| = |BE|$.

7.C.4. 1° Rysujemy trójkąt HDF i odcinki HA, DB, FC — przekątne kwadratów.



2° Powstały trzy trójkąty HDA, DFB, FHC. Każdy z nich ma dwa równe boki, więc gdyby każdy miał jeden równy kąt, to trójkąty te byłyby podobne na mocy cechy bok-kąt-bok (bkb).

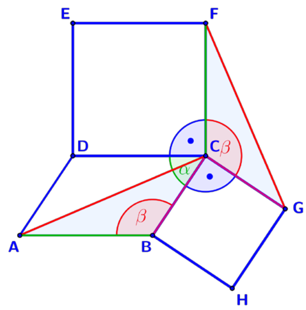
3° Zaznaczamy kąty, które potrafimy określić z własności kwadratu i trójkąta równobocznego $(90^\circ, 45^\circ, 60^\circ)$.

4° Zauważmy, że przy każdym wierzchołku trójkąta (A, B, C) znajdują się trzy takie same kąty 90°, 45°, 60°. Oznacza to, że zachodzi równość: $|\sphericalangle HAD| = |\sphericalangle DBF| = |\sphericalangle FCH|$.

5° Można więc stwierdzić, że trójkąty są przystające (bkb): $\triangle HDA \equiv \triangle DFB \equiv \triangle FHC$

6° Jeśli trójkąty są przystające, to odcinki HD, DF, FH są równe, więc trójkąt HDF jest równoboczny.

7.C.5. 1° Rysujemy odcinki AC i FG.



2° Wskazujemy równe długości: $|AB| = |FC|$ i $|BC| = |CG|$.

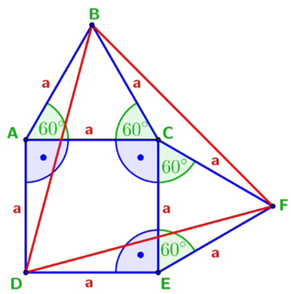
3° Trójkąty ABC i FCG mają dwa równe boki i mogą być przystające, jeśli znajdziemy równy kąt między odpowiednimi dwoma bokami.

4° Zaznaczamy wszystkie kąty przy wierzchołku C i układamy równanie: $\alpha + \beta + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$

5° Suma kątów przy ramieniu równoległoboku wynosi 180°, więc kąt przy wierzchołku B musi mieć wartość β. Wynika z tego, że $\triangle ABC \equiv \triangle FCG$, więc $|AC| = |FG|$.

7.C.6. C **7.C.7.** C **7.C.8.** B **7.C.9.** C **7.C.10.** A

7.C.11. 1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, zaznaczając poszczególne odcinki i kąty.



2° Obliczamy miarę kąta BAD: $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

3° Obliczamy miarę kąta DEF: $|\sphericalangle DEF| = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

4° Obliczamy miarę kąta BCF: $|\sphericalangle BCF| = 360^\circ - (90^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 150^\circ$

5° Trójkąty BAD, DEF i BCF są trójkątami równoramiennymi, a kąt między ramionami w tych trójkątach wynosi 150°. Są to więc trójkąty przystające, stąd $|DB| = |DF| = |BF|$, a więc trójkąt BDF jest równoboczny.

P.7.D.3 PRZYKŁAD 3. $x = 12, y = 4$ PRZYKŁAD 5. $x = 30, y = 13$

PRZYKŁAD 4. $x = 24, y = 30$ PRZYKŁAD 6. $x = 12, y = 20$

7.D.1. **a.** $x = 6, y = 1{,}5$ **c.** $x = 6, y = 3$ **e.** $x = 6, y = 3$

b. $x = 15, y = 17{,}5$ **d.** $x = 8, y = 7{,}5$ **f.** $x = 8, y = 13$

7.D.2. $x = 4, y = 5, z = 4$

7.D.3. 8 m

7.D.4. 3,75 m

7.D.5. Są równoległe, ponieważ $\frac{68}{72} = \frac{51}{54}$

7.D.6. B **7.D.7.** D **7.D.8.** B **7.D.9.** B **7.D.10.** D

7.D.11. B **7.D.12.** $x = 4, y = 6, z = 20$

7.E.1. **a.** Podobne **c.** Podobne **e.** Podobne

b. Nie są podobne **d.** Nie są podobne **f.** Podobne

7.E.2. **a.** skala = 2 **c.** skala = 3 **e.** skala = 2

b. skala = 4 **d.** skala = 2 **f.** skala = 5

7.E.3. $x = 2\sqrt{5}, y = 10,5, z = 9$

7.E.4. $P = 640$ j^2

7.E.5. $P = 700$ cm^2

7.E.6. 31,2 ha

7.E.7. $k = 2$

7.E.8. $P = 432$ cm^2

7.E.9. 1 : 1 600 000

7.E.10. D **7.E.11.** D **7.E.12.** D **7.E.13.** C **7.E.14.** D

7.E.15. D **7.E.16.** D **7.E.17.** $x = 15, y = 4$

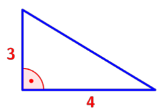
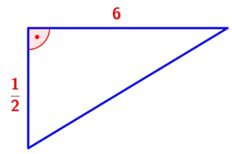
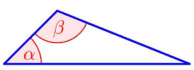
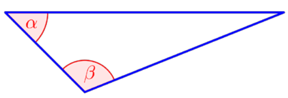
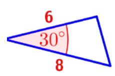
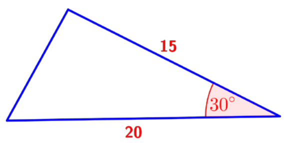
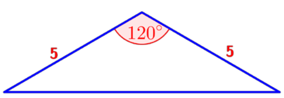
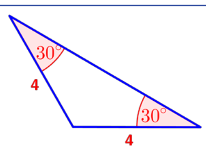
7.E.18. **a.** $P_P = ab$ j^2, $P_{P'} = 2,25ab$ j^2 **b.** o 125%

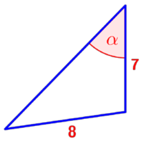
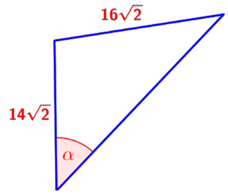
7.E.19. $x = 40, y = 8, z = 20$

7.3.1. **a.** Tak, *bbb* **c.** Tak, *kk* **e.** Tak, *bkb*

b. Nie **d.** Nie

7.3.2

F_1	F_2	Cecha podobieństwa
		*bkb*
		*kk*
		*bkb*
		*bkb*

		*bkb*

7.3.3 **a.** Podobne na mocy cechy *bbb*. **b.** Podobne na mocy cechy *kk*.

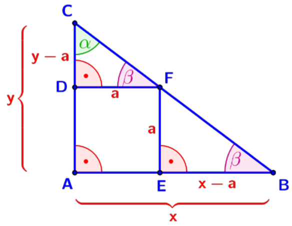
7.3.4 30 cm, 45 cm, 60 cm

7.3.5 $O = 12$

7.3.6 $O = 120$

7.3.7 $P = 196\sqrt{3}$ j^2

7.3.8 1° Wykonujemy rysunek pomocniczy, wprowadzając oznaczenia.



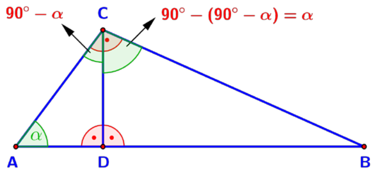
2° $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle DFC$ to kąty odpowiadające, więc mają takie same miary.

3° Na mocy cechy kąt-kąt trójkąt $\triangle ABC$ jest podobny do trójkąta $\triangle DFC$: $\triangle ABC \sim \triangle DFC$.

4° Zapisujemy odpowiednią proporcję: $\dfrac{y-a}{a} = \dfrac{y}{x}$ i po przekształceniu otrzymujemy: $a = \dfrac{xy}{x+y}$

7.3.9. D **7.3.10.** B **7.3.11.** B **7.3.12.** D **7.3.13.** D
7.3.14. C **7.3.15.** A **7.3.16.** $P = 150$ j^2

7.3.17. 1° Kąty $\sphericalangle ADC$ i $\sphericalangle CDB$ mają miarę 90°.



2° Z rysunku wynika, że kąty $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle BCD$ mają tę samą miarę.

3° Na mocy cechy kąt-kąt trójkąt $\triangle ACD$ jest podobny do trójkąta $\triangle BCD$. Zatem możemy zapisać proporcję: $\dfrac{l}{h} = \dfrac{h}{k} \rightarrow h^2 = kl$

4° Zatem $h = \sqrt{kl}$

7.3.18. $P = 54$ j^2, $O = 6(3+\sqrt{13})$

7.3.19. 1° Ze wzoru na pole trójkąta obliczamy wysokość trójkąta CDK: $16 = \dfrac{8 \cdot h_1}{2} \rightarrow h_1 = 4$

2° Wiedząc, że trójkąty ABK i CDK są podobne na mocy kąt-kąt (kąty $\sphericalangle CKD$ i $\sphericalangle AKB$ są wierzchołkowe, a kąty $\sphericalangle CDK$ i $\sphericalangle ABK$ są odpowiadające), obliczamy wysokość trójkąta ABK: $\dfrac{8}{4} = \dfrac{12}{h_2} \rightarrow h_2 = 6$

3° Obliczamy wysokość trójkąta $\triangle ABD$ i $\triangle ABC$: $h = h_1 + h_2 = 4 + 6 = 10$.

4° Obliczamy pola trójkątów ADK oraz BKC:

$$P_{\triangle ADK} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 60 - 36 = 24$$

$$P_{\triangle BKC} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABK} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 60 - 36 = 24$$

5° Zatem trójkąty ADK i BKC mają równe pola o wartości 24.

P.7.4.1 PRZYKŁAD 2. $P = 10\sqrt{2}$ j^2 PRZYKŁAD 3. $P = 5\sqrt{3}$ j^2

7.4.1. **a.** $P = 72$ j^2 **c.** $P = 7{,}5 + 3\sqrt{3}$ j^2

b. $P = 16\sqrt{3}$ j^2 **d.** $P = \dfrac{21\sqrt{3} + 40\sqrt{2}}{2}$ j^2

7.4.2. $P = 64$ j^2

7.4.3. $P = 2(5\sqrt{2} + 6\sqrt{3})$ j^2

7.4.4. $P = 60\sqrt{3}$ j^2

P.7.4.2 PRZYKŁAD 2. $P = 14\sqrt{2}\ \text{j}^2$

PRZYKŁAD 3. $P = 25\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.5. $P = 16\sqrt{2}\ \text{j}^2$

7.4.6. $O = 70$

7.4.7. $P = 81\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.8. Długości boków wynoszą 6 i 14.

P.7.4.3 PRZYKŁAD 2. $P = \dfrac{49\sqrt{2}}{2}\ \text{j}^2$

PRZYKŁAD 3. $P = 32\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.9. $60^\circ, 120^\circ$

7.4.10. $h = 3\sqrt{2}$

7.4.11. $P = 288\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.12. $\sin\alpha = \dfrac{24}{25}$

7.4.13. $P = 24(\sqrt{3}+1)\ \text{j}^2$

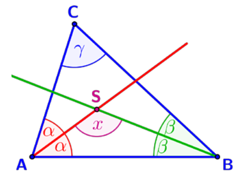
7.4.14. $P = 2(3+\sqrt{3}),\ O = 2(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})$

7.4.15. $P = 150\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.16. $P = 108\sqrt{3}\ \text{j}^2$

7.4.17. $P = 60\ \text{j}^2$

7.4.18. 1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.
Niech kąt $\sphericalangle ASB = x$.



2° Układamy równanie z sumy kątów w trójkącie ASB i wyznaczamy kąt x: $\alpha + \beta + x = 180^\circ \rightarrow x = 180^\circ - (\alpha+\beta)$

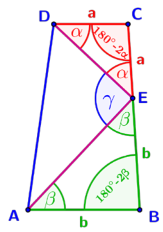
3° Układamy równanie z sumy kątów w trójkącie ABC i wyznaczamy sumę kątów $\alpha+\beta$:

$2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ \quad |:2$ więc $\alpha + \beta + \dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$

4° Wyznaczoną wartość podstawiamy do pierwszego równania i obliczamy kąt x:

$x = 180^\circ - (\alpha+\beta) \rightarrow x = 180^\circ - \left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right) \rightarrow x = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2} > 90^\circ$

7.4.19. 1° Rysujemy trapez oraz oznaczamy równe długości a i b i kąt γ.



2° Trójkąt DEC jest równoramienny, czyli kąty przy podstawie są równe, więc oznaczamy $\sphericalangle CDE = \sphericalangle DEC = \alpha$. Zatem kąt $|\sphericalangle DCE| = 180^\circ - 2\alpha$.

3° Analogicznie trójkąt ABE jest równoramienny, więc $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEB = \beta$. Zatem kąt $|\sphericalangle ABE| = 180^\circ - 2\beta$.

4° Korzystamy z sumy kątów przy jednym ramieniu w trapezie:

$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ \rightarrow -2\alpha - 2\beta = -180^\circ \rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

5° Kąty α, β, γ tworzą łącznie kąt półpełny (180°), więc

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \rightarrow 90^\circ + \gamma = 180^\circ \rightarrow \gamma = 90^\circ$

7.4.20. 1° Skoro AB jest średnicą, to kąty ADB i ACB są proste, a trójkąty $\triangle ABD$ oraz $\triangle ABC$ są prostokątne.

2° Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wynika, że: $|AD|^2 + |BD|^2 = |AB|^2$ i $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

3° Zatem $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.

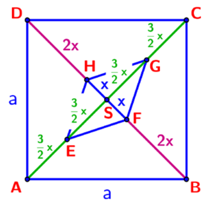
7.4.21. Niech: $|KN| = |LM| = x$ i $|KL| = |NM| = y$

$P_{\triangle ABN} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{1}{2}y = \dfrac{1}{8}xy,\quad P_{\triangle BLM} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}y\cdot x = \dfrac{1}{4}xy,\quad P_{\triangle AKL} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}x\cdot y = \dfrac{1}{4}xy$

$P_{\triangle ABL} = xy - \left(\dfrac{1}{8}xy + \dfrac{1}{4}xy + \dfrac{1}{4}xy\right) = xy - \left(\dfrac{1}{8}xy + \dfrac{2}{8}xy + \dfrac{2}{8}xy\right) = xy - \dfrac{5}{8}xy = \dfrac{3xy}{8}$

$P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM} = \dfrac{1}{8}xy + \dfrac{1}{4}xy = \dfrac{3}{8}xy$, zatem $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM}$

7.4.22. Z rysunku wynika, że: $6x = a\sqrt{2} \rightarrow a = 3\sqrt{2}x$



$P_{ABCD} = a^2 = (3\sqrt{2}x)^2 = 18x^2$,

$$P_{EFGH} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{2x \cdot 3x}{2} = \frac{6x^2}{2} = 3x^2$$

Zatem $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$

7.4.23. B **7.4.24.** B **7.4.25.** B **7.4.26.** B **7.4.27.** C

7.4.28. C **7.4.29.** $P = 16\sqrt{3}$ j^2, $O = 8(\sqrt{3} + 2)$

7.4.30. $|FH| = 4\sqrt{2}, P_{\triangle} = 16\sqrt{2}$ j^2 **7.4.31.** $O = 32$

7.4.32. Niech: $|AD| = |BC| = x$ i $|AB| = |CD| = y$

$$P_{\triangle DKL} = P_{\square ABCD} - (P_{\triangle ADK} + P_{\triangle BKL} + P_{\triangle CDL}) = xy - \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3}y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x \cdot y\right) =$$

$$= xy - \left(\frac{2}{6}xy + \frac{1}{12}xy + \frac{1}{4}xy\right) = xy - \frac{8}{12}xy = \frac{4}{12}xy = \frac{1}{3}xy = \frac{1}{3}P_{\square ABCD}$$

7.4.33. $P = 12\sqrt{3}$ j^2 **7.4.34.** $P = 48\sqrt{3}$ j^2

7.4.35. Długości boków: 4 i 5.

ISBN: 978-83-63975-17-3

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium
matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY