Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Geometria kartezjańska

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
SplitShire - id. 407242/ CC0 Public Domain; BruceEmmerling - id. 240380/ CC0 Public Domain; Ben_Kerckx - id. 575085/ CC0 Public Domain; PublicDomainPictures - id. 2261/ CC0 Public Domain; Flachovatereza - id. 670327/ CC0 Public Domain; IRAKIT - id. 633371/ CC0 Public Domain; Unsplash - id. 768812/ CC0 Public Domain

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-12-8

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

8

Geometria kartezjańska

„Cogito, ergo sum” (łac.), czyli „myślę, więc jestem”, to najsłynniejsze twierdzenie francuskiego filozofa René Descartes’a (1596 –1650), w Polsce znanego jako Kartezjusz, stanowiące dla niego punkt wyjścia w budowaniu sądów o świecie. Pragnieniem tego myśliciela, który całkowicie oddał się poznawaniu prawdy i doskonaleniu umysłu, było, aby wszystkie nauki stały się wiedzą rzetelną i sprawdzalną jak matematyka. Uważał, że całą przyrodę można opisywać matematycznie, ponieważ można ujmować ilościowo przestrzeń i ruch. To jemu zawdzięczamy swoiste połączenie algebry z geometrią. Bez jego dokonań trudno byłoby nam uchwycić istotę funkcji i ich własności. Możemy je lepiej rozumieć, dysponując prostokątnym układem współrzędnych, wprowadzonym właśnie przez Kartezjusza, stąd nazywanym układem kartezjańskim. Kartezjusz uważał, że w geometrii nie ma ogólnej metody postępowania, a algebra bez geometrii jest nieintuicyjna. Opisanie punktu na płaszczyźnie za pomocą dwóch liczb było nowatorskie. Możliwość ścisłego, matematycznego określenia położenia obiektów na płaszczyźnie jest niesłychanie użyteczna — chociażby w odczytywaniu map. Jeżeli wiemy, że położenie pewnej miejscowości na mapie to pole o współrzędnych A8, to dzięki tej informacji możemy uniknąć przeszukiwania całej mapy i skoncentrować się na poszukiwaniu tylko w obrębie tego pola. Bez geometrii kartezjańskiej, zwanej również analityczną, byłoby niemożliwe funkcjonowanie współczesnej cywilizacji. Na geometrii tej opiera się w ogromnej mierze cała dzisiejsza technika. Na przykład nowoczesny telewizor nie mógłby wyświetlić właściwego obrazu, gdyby poszczególnym pikselom nie można było przypisać odpowiednich informacji cyfrowych, m.in. o ich położeniu. Każdy piksel ekranu to przecież punkt z dwoma współrzędnymi, które ponad 450 lat temu wymyślił Kartezjusz — dzięki istnieniu tej matematycznej koncepcji możesz oglądać swój ulubiony serial ☺.

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA — ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że...	dodatkowe informacje i ciekawostki

8.1 ▶ Wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)

Prostą na płaszczyźnie można opisać równaniami:			PRZYKŁAD
kierunkowym $y = ax + b$	a, b — współczynniki liczbowe a — współczynnik kierunkowy b — wyraz wolny	To równanie opisuje wszystkie proste, które są funkcjami, czyli za pomocą równania w postaci kierunkowej nie można opisać prostej prostopadłej do osi OX.	$y = 2x - 3$ $a = 2, b = -3$ $y = 4$ $a = 0, b = 4$
ogólnym $Ax + By + C = 0$	A, B, C — współczynniki liczbowe $A, B, C \in \boldsymbol{R}$ $A^2 + B^2 > 0$ — współczynniki A i B nie mogą być jednocześnie zerami	To równanie opisuje wszystkie proste na płaszczyźnie.	$2x + 3y - 1 = 0$ $A = 2, B = 3, C = -1$ $3x - 4 = 0$ $A = 3, B = 0, C = -4$ $y + 2 = 0$ $A = 0, B = 1, C = 2$

▶ Zamiana równania prostej z postaci kierunkowej na ogólną

P.8.1.1

PRZYKŁAD 1

Dana jest prosta o równaniu $y = 2x - 4$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

Zauważmy, że $a = 2$ i $b = -4$. Aby to równanie zapisać w postaci ogólnej, należy wszystkie wyrażenia i liczby przenieść na jedną stronę.

$y = 2x - 4$

$-2x + y + 4 = 0$

Wówczas $A = -2, B = 1, C = 4$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dana jest prosta o równaniu $y = -3x + 6$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

PRZYKŁAD 3. Dana jest prosta o równaniu $y = -2x$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

PRZYKŁAD 4. Dana jest prosta o równaniu $y = 8x + 4$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

PRZYKŁAD 5. Dana jest prosta o równaniu $y = -x - 3$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

PRZYKŁAD 6. Dana jest prosta o równaniu $y = -2$. Zapisz wzór prostej w postaci ogólnej.

► Zamiana równania prostej z postaci ogólnej na kierunkową

P.8.1.2

PRZYKŁAD 1

Dana jest prosta o równaniu $12x + 4y - 8 = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

Zauważmy, że $A = 12$, $B = 4$, $C = -8$. Aby to równanie zapisać w postaci kierunkowej, należy wyznaczyć ze wzoru zmienną y.

$12x + 4y - 8 = 0$

$4y = -12x + 8 \quad |: 4$

$y = -3x + 2$

Wówczas $a = -3$, $b = 2$.

UWAGA: Równanie prostej podane w postaci ogólnej $Ax + By + C = 0$ można przedstawić w postaci kierunkowej, gdy $B \neq 0$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dana jest prosta o równaniu $3x + y - 6 = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

PRZYKŁAD 3. Dana jest prosta o równaniu $10x + 5y = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

PRZYKŁAD 4. Dana jest prosta o równaniu $16x - 2y + 8 = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

PRZYKŁAD 5. Dana jest prosta o równaniu $-x - y - 3 = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

PRZYKŁAD 6. Dana jest prosta o równaniu $-4x + 2y + 6 = 0$. Zapisz wzór prostej w postaci kierunkowej.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.1.1. Dana jest prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$. Zapisz wzór tej prostej w postaci ogólnej o współczynnikach całkowitych.

8.1.2. Dana jest prosta o równaniu $1\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y - 4 = 0$. Zapisz wzór tej prostej w postaci kierunkowej.

► Wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty

Jeśli znamy współrzędne dwóch punktów należących do prostej, to możemy wyznaczyć jej równanie. Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty o różnych odciętych sprowadza się najczęściej do rozwiązania układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

PRZYKŁAD 1

P.8.1.3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty: $A(3;5)$ i $B(2;1)$.

1° Zauważmy, że $x_A \neq x_B$, zatem oba punkty spełniają równanie kierunkowe $y = ax + b$, więc podstawiamy za x i y odpowiednie współrzędne, tworząc układ równań, który rozwiązujemy.

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 3 + b \\ 1 = a \cdot 2 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = 3a + b & | \cdot (-1) \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -5 = -3a - b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

$$-4 = -a \quad | : (-1)$$

$$a = 4$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ 5 - 3a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ 5 - 3 \cdot 4 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -7 \end{cases}$$

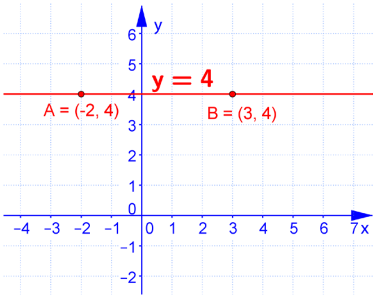
2° Zapisujemy równanie prostej AB, podstawiając za a i b otrzymane wartości.

$$y = 4x - 7$$

PRZYKŁAD 2

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty: $A(-2; 4)$ i $B(3; 4)$.

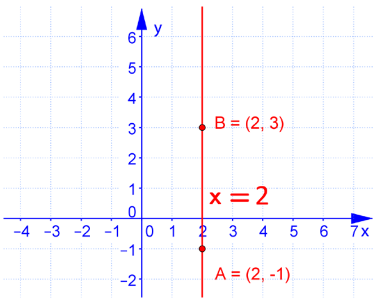
Zauważmy, że $x_A \neq x_B$, więc równanie prostej możemy zapisać w postaci kierunkowej, a $y_A = y_B$, więc prosta AB jest równoległa do osi OX i jej równanie ma postać $y = 4$.



PRZYKŁAD 3

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkty: $A(2; -1)$ i $B(2; 3)$.

Zauważmy, że $x_A = x_B$, więc równania prostej nie możemy zapisać w postaci kierunkowej, tylko w ogólnej. Prosta AB jest prostopadła do osi OX i jej równanie ma postać $x = 2$, czyli w postaci ogólnej $x - 2 = 0$.



WNIOSEK

Jeżeli mamy $A(x_A; x_B)$ i $B(x_B; y_B)$ oraz:

$x_A \neq x_B$, to równanie prostej AB możemy zapisać w postaci kierunkowej i ogólnej.

$x_A = x_B$, to równanie prostej AB możemy zapisać tylko w postaci ogólnej.

► Współczynnik kierunkowy prostej

Jeśli punkty $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$ należą do prostej $y = ax + b$ i $x_A \neq x_B$, to jej współczynnik kierunkowy obliczamy ze wzoru: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

DOWÓD:

1° Oba punkty spełniają równanie kierunkowe prostej, więc podstawiamy odpowiednie współrzędne, tworząc układ równań.

$$-\begin{cases} y_B = ax_B + b \\ y_A = ax_A + b \end{cases}, \text{ gdzie } x_A \neq x_B$$

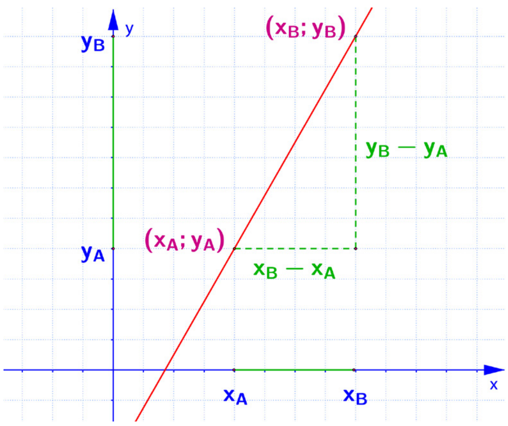
2° Odejmujemy równania stronami.

$$y_B - y_A = ax_B - ax_A$$

$$y_B - y_A = a(x_B - x_A) \quad |: (x_B - x_A)$$

3° Wyznaczamy a.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



PRZYKŁAD 1 P.8.1.4

Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(1; 5)$ i $B(3; -7)$.

$x_A = 1, y_A = 5, x_B = 3, y_B = -7$

Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-7 - 5}{3 - 1} = \frac{-12}{2} = -6$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(3;-2)$ i $B(2;-4)$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(2;-1)$ i $B(-2;-5)$.

PRZYKŁAD 4. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(-5;2)$ i $B(3;0)$.

► Wyznaczanie równania prostej ze wzoru

Równanie prostej o współczynniku kierunkowym a przechodzącej przez punkt $(x_A; y_A)$ można zapisać w postaci:

$$y-y_A=a(x-x_A)$$

Skoro $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, to równanie prostej przechodzącej przez punkt $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$ przyjmuje postać:

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$$

PRZYKŁAD 1

P.8.1.5

Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(1;5)$ i $B(3;-7)$.

1° Korzystamy ze wzoru: $y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$.

2° Podstawiamy odpowiednie współrzędne.

$$y-5=\frac{-7-5}{3-1}(x-1)$$

3° Wykonujemy działania i wyznaczamy zmienną y.

$$y-5=\frac{-12}{2}(x-1)$$
$$y-5=-6(x-1)$$
$$y=-6x+6+5$$
$$y=-6x+11$$

4° Wzór prostej ma postać $y=-6x+11$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(3;-2)$ i $B(2;-3)$.

PRZYKŁAD 3. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(2;1)$ i $B(-2;5)$.

PRZYKŁAD 4. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(-8;3)$ i $B(-4;5)$.

PRZYKŁAD 5. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(-2;10)$ i $B(2;-6)$.

PRZYKŁAD 6. Wyznacz wzór prostej przechodzącej przez punkty: $A(-6;1)$ i $B(3;-2)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.1.3. Wyznacz wzór prostej w postaci ogólnej przechodzącej przez punkty: $K(-2;6)$ i $L(12;-1)$.

8.1.4. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkt $A(100;200)$ oraz przez początek układu współrzędnych.

8.1.5. Oblicz współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty: $A(1;m)$ i $B(m;1)$, gdzie $m \neq 1$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.8.1

8.1.6. Dana jest prosta o równaniu $2x+3y-4=0$. Prosta ta w postaci kierunkowej ma równanie:

A. $y=-\frac{2}{3}x+2$ **B.** $y=-\frac{2}{3}x+1\frac{1}{3}$ **C.** $y=-2x+4$ **D.** $3y=-2x+4$

8.1.7. Prosta o równaniu $4x+2y-5=0$ przecina oś OY w punkcie:

A. $(0;5)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $(0;2{,}5)$ **D.** $\left(0;\frac{5}{4}\right)$

8.1.8. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(2;3)$ i $(4;-1)$ jest równy:

A. 2 **B.** -2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

8.1.9. Równanie prostej przechodzącej przez punkty $(-1;2)$ i $(3;4)$ ma postać:

A. $2x-5y=-1$ **C.** $-x+2y-5=0$

B. $-x-5y-12=0$ **D.** $x+2{,}5y-6=0$

8.1.10. Dane są punkty $P(-3;4)$ i $Q(2;4)$. Prosta przechodząca przez te punkty ma równanie:

A. $y=-x+1$ **B.** $y=4$ **C.** $x=4$ **D.** $y=2x$

8.1.11. Prosta przechodząca przez punkt $A(-5;10)$ oraz przez początek układu współrzędnych przechodzi również przez punkt:

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ **C.** $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

8.1.12. Prosta przechodzi przez punkty $K(p;2p)$ i $L(2p;3p)$, gdzie $p \neq 0$. Współczynnik kierunkowy tej prostej jest liczbą:

A. pierwszą, **B.** ujemną, **C.** wymierną, **D.** parzystą.

8.2 ▶ Badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych

▶ Proste równoległe

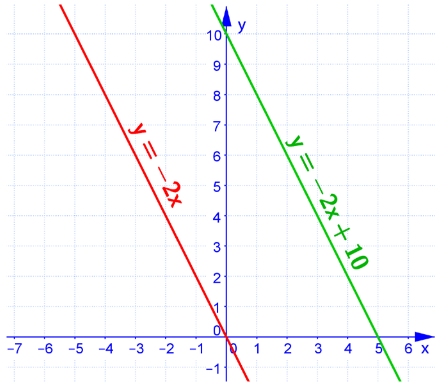
P.8.2.1

TWIERDZENIE

Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1x + b_1$ oraz $l: y = a_2x + b_2$, to prosta k jest równoległa do l, jeśli $a_1 = a_2$, czyli oba współczynniki kierunkowe są takie same.

PRZYKŁAD

Proste $y = -2x$ i $y = -2x + 10$ są równoległe, ponieważ ich współczynniki kierunkowe są sobie równe.



PRZYKŁAD 1

P.8.2.2

Wskaż prostą równoległą do danej $y = 2x + 4$.

A. $y = 2x - 10$ B. $y = -0{,}5x$ C. $y = -2x + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x + 3$

Współczynnik kierunkowy $a = 2$, więc szukamy prostej, w której współczynnik kierunkowy jest również równy 2. Poprawna jest odpowiedź A.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wskaż prostą równoległą do danej $y = -x + 4$.

A. $y = x - 1$ B. $y = 2x + 8$ C. $y = -x + \frac{3}{4}$ D. $y = \frac{1}{4}x$

PRZYKŁAD 3. Wskaż prostą równoległą do danej $y = -\frac{1}{2}x - 5$.

A. $y = \frac{1}{2}x + 5$ B. $y = 0{,}5x$ C. $y = 2x + 1$ D. $y = -0{,}5x + 4$

PRZYKŁAD 4. Wskaż prostą równoległą do danej $4x + y - 3 = 0$.

A. $y = -\frac{1}{4}x - 1$ B. $y = -4x + 1$ C. $y = 4x - 3$ D. $y = \frac{1}{4}x$

PRZYKŁAD 5. Wskaż prostą równoległą do danej $-16x + 4y - 1 = 0$.

A. $y = 4x - 1$ B. $y = -16x - 4$ C. $y = 16x + 5$ D. $y = -4x$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

8.2.1. Wyznacz wartość parametru p tak, aby proste k i l były równoległe.

wzór prostej k	wzór prostej l	wartość p
$y=px+2$	$y=3x-1$	3
$y=(p+2)x-1$	$y=-x+4$	
$y=4x-2$	$y-px=0$	
$3x+y-5=0$	$y=(2p-1)x+3$	
$-x+2y+1=0$	$y=(p+4)x$	

► Proste prostopadłe

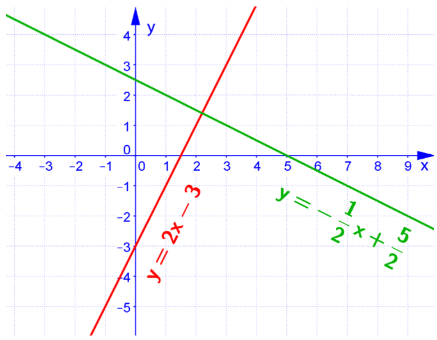
P.8.2.3

TWIERDZENIE

Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y=a_1x+b_1$ oraz $l: y=a_2x+b_2$, to prosta k jest prostopadła do l, jeśli $a_2=-\frac{1}{a_1}$, czyli jeden współczynnik kierunkowy jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem, co oznacza, że iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 $(a_1 \cdot a_2=-1)$.

PRZYKŁAD

Proste $y=2x-3$ i $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ są prostopadłe, ponieważ odwrotnością liczby 2 z przeciwnym znakiem jest $-\frac{1}{2}$.



PRZYKŁAD 1

P.8.2.4

Wskaż prostą prostopadłą do danej $y=3x+1$.

A. $y=-\frac{1}{3}x-1$ B. $y=3x+2$ C. $y=-3x+1$ D. $y=\frac{1}{3}x+4$

Współczynnik kierunkowy $a=3$, więc szukamy prostej, w której współczynnik kierunkowy jest liczbą odwrotną z przeciwnym znakiem, czyli $-\frac{1}{3}$. Poprawna jest odpowiedź A.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wskaż prostą prostopadłą do danej $y = -4x + 5$.

A. $y = -4x + 2$ B. $y = 4x + 7$ C. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ D. $y = -\frac{1}{4}x$

PRZYKŁAD 3. Wskaż prostą prostopadłą do danej $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

A. $y = \frac{1}{2}x + 4$ B. $y = -2x$ C. $y = -0{,}5x + 2$ D. $y = 2x + 1$

PRZYKŁAD 4. Wskaż prostą prostopadłą do danej $3x + y - 1 = 0$.

A. $y = -\frac{1}{3}x + 8$ B. $y = \frac{1}{3}x - 4$ C. $y = 3x - 3$ D. $y = -3x - 4$

PRZYKŁAD 5. Wskaż prostą prostopadłą do danej $-4x + 8y - 5 = 0$.

A. $y = -2x + 4$ B. $y = \frac{1}{4}x - 6$ C. $y = 2x + 5$ D. $y = -\frac{1}{4}x - 8$

ZADANIE UTRWALAJĄCE

8.2.2. Wyznacz wartość parametru p tak, aby proste k i l były prostopadłe.

wzór prostej k	wzór prostej l	wartość p
$y = \frac{1}{p}x$	$y = 2x - 1$	-2
$y = px + 4$	$y = -\frac{3}{2}x$	
$y - 2px = 3$	$y = x + 5$	
$2x - 4y + 1 = 0$	$y = (p+1)x$	
$-x + 3y - 2 = 0$	$(p+4)x + y = 0$	

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

8.2.3. Prosta $y=-\frac{1}{2}x+3$ jest prostopadła do prostej:

A. $y=-2x-\frac{1}{3}$ **B.** $y=-\frac{1}{2}x-1$ **C.** $y=\frac{1}{2}x+4$ **D.** $y=2x-12$

8.2.4. Prosta $2x+y-3=0$ nie jest równoległa do prostej:

A. $4y+8x+1=0$ **B.** $3x+2y-2=0$ **C.** $6x=-3y+5$ **D.** $y=-2x$

8.2.5. Dana jest prosta k o równaniu $y=(p+1)x+2$ oraz prosta l o równaniu $y=(2p-3)x-5$. Proste k i l będą równoległe wtedy, gdy:

A. $p=\frac{3}{4}$ **B.** $p=-4$ **C.** $p=4$ **D.** $p=\frac{4}{3}$

8.2.6. Dana jest prosta $k: y=(a+2)x+4$ oraz prosta $l: y=-\frac{2}{5}x+a$. Proste k i l będą prostopadłe wtedy, gdy:

A. $a=\frac{5}{2}$ **B.** $a=\frac{1}{2}$ **C.** $a=-\frac{1}{2}$ **D.** $a=-\frac{5}{2}$

8.2.7. Dane są proste: $k: y=x-3$, $l: y-x-1=0$, $m: y=-x$, $n: x+y-1=0$. Prawdą jest, że:

A. $k \parallel m$ **B.** $m \perp n$ **C.** $m \parallel l$ **D.** $k \perp n$

8.2.8. Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y=-4x+2$ jest równy:

A. $-\frac{1}{4}$ **B.** -4 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 4

8.2.9. Prosta o równaniu $y=\frac{3}{m}x+2$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y=-4x+2$. Wtedy:

A. $m=-12$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=4$ **D.** $m=12$

8.2.10. Równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $2x-6y+9=0$ to:

A. $y=3x$ **B.** $y=-\frac{1}{3}x$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=\frac{1}{3}x$

8.3 ▶ Wyznaczanie równania prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt

PRZYKŁAD 1

P.8.3.1

Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = -2x + 3$ przechodzącej przez punkt $A(3; -2)$.

1° Wyznaczamy współczynnik prostej równoległej. $a_{\parallel} = -2$

2° Prosta przyjmuje postać: $y = -2x + b$

3° Do równania podstawiamy współrzędne punktu $A(3; -2)$, aby obliczyć współczynnik b.

$$-2 = -2 \cdot 3 + b$$
$$-2 = -6 + b$$
$$-2 + 6 = b$$
$$b = 4$$

4° Prosta równoległa ma wzór $y = -2x + 4$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = -3x + 1$ i przechodzącej przez punkt $A(1; 4)$.

PRZYKŁAD 3. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = -4x + 2$ i przechodzącej przez punkt $A(-1; 5)$.

PRZYKŁAD 4. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = 2x - 1$ i przechodzącej przez punkt $A(3; -2)$.

PRZYKŁAD 5. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = x - 4$ i przechodzącej przez punkt $A(10; -1)$.

PRZYKŁAD 6. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $y = -x + 3$ i przechodzącej przez punkt $A(6; 0)$.

PRZYKŁAD 1

P.8.3.2

Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -2x + 3$ przechodzącej przez punkt $A(3; -2)$.

1° Wyznaczamy współczynnik prostej prostopadłej. $a_{\perp} = \frac{1}{2}$

2° Prosta przyjmuje postać: $y = \frac{1}{2}x + b$

3° Do równania podstawiamy współrzędne punktu $A(3; -2)$, aby obliczyć współczynnik b.

$$-2 = \frac{1}{2} \cdot 3 + b$$
$$-2 = 1\frac{1}{2} + b$$
$$-2 - 1\frac{1}{2} = b$$
$$b = -3\frac{1}{2}$$

4° Prosta prostopadła ma wzór $y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -3x + 1$ i przechodzącej przez punkt $A(6; -1)$.

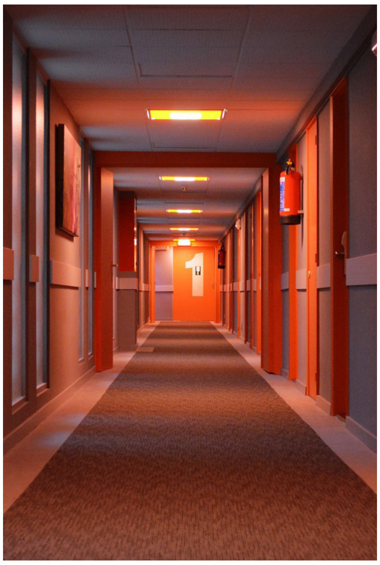
PRZYKŁAD 3. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 2x + 1$ i przechodzącej przez punkt $A(2; 1)$.

PRZYKŁAD 4. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = x + 1$ i przechodzącej przez punkt $A(-1; 0)$.

PRZYKŁAD 5. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = 5x - 1$ i przechodzącej przez punkt $A(-1; -2)$.

PRZYKŁAD 6. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -4x + 2$ i przechodzącej przez punkt $A(4; -1)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE



8.3.1. Znajdź prostą równoległą do prostej $3x + 2y - 1 = 0$ przechodzącą przez punkt $P(3; -8)$.

8.3.2. Znajdź prostą prostopadłą do prostej $2x - 3y + 5 = 0$ przechodzącą przez punkt $S\left(-1; \frac{3}{4}\right)$.

8.3.3. Wyznacz, dla jakiego parametru m prosta $k: y = \frac{3}{m}x + 2$ i prosta $l: y = -\frac{m+1}{2}x - 1$ są prostopadłe.

8.3.4. Dane są proste $k: m^2x + y + 8 = 0$ oraz $l: (3m + 4)x + y - 1 = 0$. Wyznacz, dla jakich wartości parametru m proste są równoległe.

8.3.5. Wyznacz wartość parametru p, dla której prosta $m: 4p^2x + y = 0$ jest prostopadła do prostej $n: y = 2px + 2p - 1$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

8.3.6. Prosta k ma równanie $y=x+2$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k przechodzącej przez punkt $A(3;-7)$.

A. $y=-x+1$ **B.** $y=x+2$ **C.** $y=x-10$ **D.** $y=-x+4$

8.3.7. Równanie prostej równoległej do prostej o wzorze $y=-\frac{3}{4}x+5$ przechodzącej przez początek układu współrzędnych ma postać:

A. $y=\frac{3}{4}x$ **B.** $y=-\frac{3}{4}x$ **C.** $y=-\frac{3}{4}x+1$ **D.** $y=\frac{4}{3}x+5$

8.3.8. Prosta $y=-1\frac{1}{3}x+3$ nie jest prostopadła do prostej:

A. $y=0{,}75x+1$ **B.** $y=\frac{3}{4}x-2$ **C.** $y=3x$ **D.** $y=0{,}75x+\frac{3}{4}$

8.3.9. Dane są punkty $M(-4;3)$ i $N(2;6)$. Współczynnik kierunkowy prostej MN jest równy:

A. $a=-2$ **B.** $a=-\frac{1}{2}$ **C.** $a=\frac{1}{2}$ **D.** $a=2$

8.3.10. Prosta l o równaniu $y=m^2x-2$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y=(6m-9)x+2$. Wynika z tego, że:

A. $m=3$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=6$ **D.** $m=-6$

8.3.11. Prosta k o równaniu $y=(p^2+p)x+p$ jest prostopadła do prostej $y=-\frac{1}{2}x$. Wartość p może być równa:

A. 2 **B.** -1 **C.** -2 **D.** 0

8.3.12. Dane są proste $p: y=(m^2+2)x-m$ oraz $q: y=-\frac{3}{4}x+m$. Prawdą jest, że istnieje taki parametr m, dla którego proste:

A. są równoległe i nie mają punktów wspólnych,

B. są prostopadłe,

C. przecinają się w jednym punkcie pod kątem innym niż 90°,

D. są równoległe i mają punkty wspólne.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

8.3.13. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y=\frac{2}{3}x+2$ przechodzącej przez punkt $S(4;-1)$. **2 pkt**

8.3.14. Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $-4x+2y-5=0$ przechodzącej przez punkt $S(100;-200)$. **2 pkt**

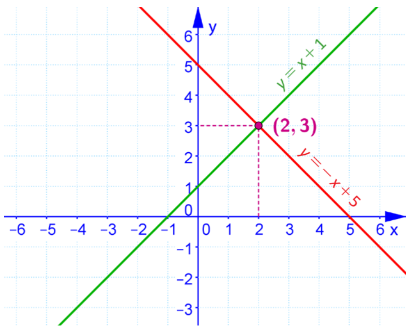
8.4 ▶ Obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych

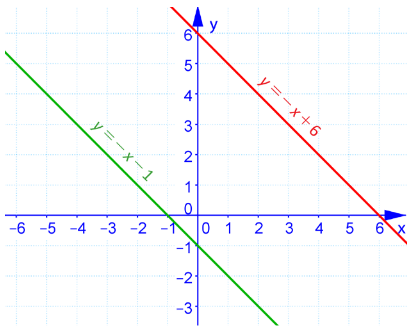
Dla dwóch prostych $y=a_1x+b_1$ i $y=a_2x+b_2$ zachodzi:

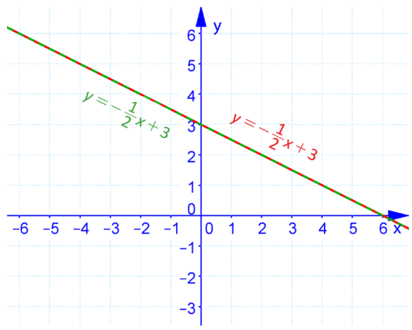
gdy $a_1 \neq a_2$	gdy $a_1 = a_2$ i $b_1 \neq b_2$	gdy $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$
proste nie są równoległe i mają dokładnie jeden punkt wspólny. Proste tworzą układ równań oznaczony.	proste są równoległe, ale rozłączne i nie mają punktów wspólnych. Proste tworzą układ równań sprzeczny.	proste są równoległe i pokrywają się — mają nieskończenie wiele punktów wspólnych. Proste tworzą układ równań nieoznaczony.

PRZYKŁAD

$+\begin{cases} y=-x+5 \\ y=x+1 \end{cases}$ $2y=6 \quad \vert :2$ $y=3$ Rozwiązanie: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$	$\begin{cases} y=-x+6 \quad \vert\cdot(-1) \\ y=-x-1 \end{cases}$ $+\begin{cases} -y=x-6 \\ y=-x-1 \end{cases}$ $0=-7$ Równość fałszywa — brak rozwiązań.	$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \quad \vert\cdot(-1) \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$ $+\begin{cases} -y=\frac{1}{2}x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$ $0=0$ Równość prawdziwa — nieskończenie wiele rozwiązań leżących na prostej.







PRZYKŁAD 1

P.8.4.1

Wyznacz punkt przecięcia prostych k i l, jeśli $k: y=2x+3$ oraz $l: y=-x+9$.

1° Punkt przecięcia prostych ma współrzędne, które spełniają oba równania.

2° W celu otrzymania tych współrzędnych należy rozwiązać układ równań powstały ze wzorów tych prostych.

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-x+9 \end{cases}$$

3° Jeżeli lewe strony równań są sobie równe, to prawe strony równań również muszą być sobie równe.

$$2x+3=-x+9$$

4° Otrzymujemy równanie liniowe z jedną niewiadomą i wyznaczamy x.

$$2x+x=9-3$$
$$3x=6 \quad \vert :3$$
$$x=2$$

5° Podstawiamy wyznaczoną wartość x do dowolnego równania i wyznaczamy y.

$y = -x + 9 = -2 + 9 = 7$

6° Proste k i l przecinają się w punkcie $(2; 7)$.

PRZYKŁAD 2

P.8.4.2

Wyznacz punkt przecięcia prostych k i l, jeśli $k: y = 4x + 7$ oraz $l: y = -2x + 1$.

1° Punkt przecięcia prostych ma współrzędne, które spełniają oba równania.

2° W celu otrzymania tych współrzędnych należy rozwiązać układ równań powstały ze wzorów tych prostych.

$$\begin{cases} y = 4x + 7 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

3° Jeżeli lewe strony równań są sobie równe, to prawe strony równań również muszą być sobie równe.

$4x + 7 = -2x + 1$

4° Otrzymujemy równanie liniowe z jedną niewiadomą i wyznaczamy x.

$$4x + 2x = 1 - 7$$
$$6x = -6 \quad |:6$$
$$x = -1$$

5° Podstawiamy wyznaczoną wartość x do dowolnego równania i wyznaczamy y.

$y = 4x + 7 = 4 \cdot (-1) + 7 = -4 + 7 = 3$

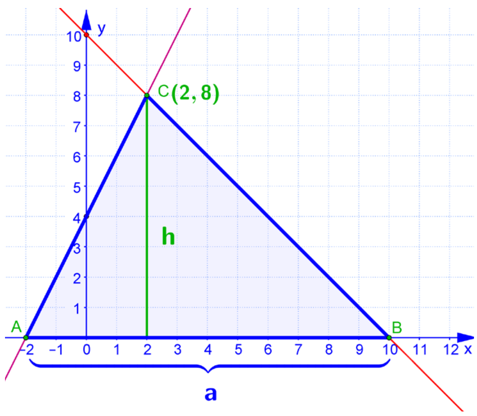
6° Proste k i l przecinają się w punkcie $(-1; 3)$.

► Zadania z wykorzystaniem obliczania punktu przecięcia dwóch prostych

PRZYKŁAD

P.8.4.3

Dane są proste o równaniach $y = 2x + 4$ oraz $y = -x + 10$. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tymi prostymi i osią OX.



1° Szukamy punktów przecięcia prostych z osiami OX i OY i rysujemy proste.

$y = 2x + 4 \rightarrow (0; 4), (-2; 0)$

$y = -x + 10 \rightarrow (0; 10), (10; 0)$

2° Obliczamy długość podstawy trójkąta ABC.

$a = 12$

3° Obliczamy punkt przecięcia prostych.

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 10 \end{cases}$$
$$2x + 4 = -x + 10$$
$$2x + x = 10 - 4$$
$$3x = 6 \quad |:3$$
$$x = 2$$
$$y = -x + 10 = -2 + 10 = 8$$

4° Obliczamy długość wysokości trójkąta.

$h = 8$

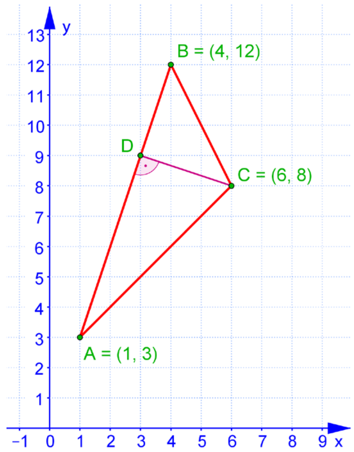
5° Obliczamy pole trójkąta. $P_{\triangle} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ j}^2$

PRZYKŁAD

P.8.4.4

Punkty $A(1;3)$, $B(4;12)$, $C(6;8)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D.

1° Wykonujemy rysunek w układzie współrzędnych.



2° Wyznaczamy równanie prostej AB ze wzoru: $y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$.

$$y - 3 = \frac{12-3}{4-1}(x-1)$$
$$y - 3 = \frac{9}{3}(x-1)$$
$$y - 3 = 3(x-1)$$
$$y - 3 = 3x - 3$$
$$y = 3x$$

3° Punkt D leży na prostej prostopadłej do prostej AB, więc jej współczynnik kierunkowy wynosi $a_{\perp} = -\frac{1}{3}$.

4° Zapisujemy wzór prostej prostopadłej. $y = -\frac{1}{3}x + b$

5° Obliczamy współczynnik b, podstawiając współrzędne punktu C do wzoru prostej.

$$8 = -\frac{1}{3} \cdot 6 + b$$
$$8 = -2 + b$$
$$b = 10$$

więc wzór prostej CD to $y = -\frac{1}{3}x + 10$

6° Współrzędne punktu D znajdziemy, rozwiązując układ równań otrzymanych prostych.

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + 10 \end{cases}$$
$$3x = -\frac{1}{3}x + 10 \quad \Big| \cdot 3$$
$$9x = -x + 30$$
$$10x = 30 \quad \Big| : 10$$
$$x = 3$$
$$y = 3x = 3 \cdot 3 = 9$$

7° Punkt D ma współrzędne $(3;9)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.4.1. Dane są proste $k: y = 2x + 8$ oraz $l: y = -x + 11$. Oblicz pole trójkąta zawartego między prostymi k i l oraz osią OX.

8.4.2. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A(-1;0)$, $B(2;-1)$, $C(5;3)$. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka B przecina podstawę AC w punkcie P. Oblicz współrzędne punktu P.

8.4.3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o wierzchołkach $A(-1;-2)$, $B(3;0)$, $C(-2;5)$. Wyznacz prostą, która jest osią symetrii tego trójkąta.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.8.4

8.4.4. Dane są proste $e: y=x+2$ oraz $f: x+y-4=0$. Punkt przecięcia prostych leży w ćwiartce:

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

8.4.5. Dany jest trójkąt zawarty między prostymi k, l oraz osią OY, gdzie $k: y=-x+2$ i $l: y=x-4$. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 18 **B.** 12 **C.** 9 **D.** 24

8.4.6. Proste o równaniach $y=mx+n-1$ oraz $y=-mx+2n$ przecinają się w punkcie $P(-2;1)$. Wynika z tego, że:

A. $m=1$ i $n=\frac{1}{2}$

B. $m=-\frac{1}{2}$ i $n=1$

C. $m=-1$ i $n=-\frac{1}{2}$

D. $m=1$ i $n=-\frac{1}{2}$

8.4.7. Dane są proste $a: y=x$, $b: y=-x+3$ i $c: y=-2$. Punkty przecięcia prostych są wierzchołkami trójkąta. Wynika z tego, że:

A. wszystkie wierzchołki leżą w I ćwiartce układu współrzędnych,

B. w II ćwiartce układu współrzędnych znajduje się jeden z wierzchołków,

C. każdy z wierzchołków trójkąta leży w innej ćwiartce układu współrzędnych,

D. argumenty wszystkich wierzchołków są liczbami dodatnimi.

8.4.8. Dane są proste $k: -2x+y+4=0$ oraz $l: x-y+1=0$. Punktem przecięcia prostych k i l jest punkt $S(a;2b-4)$. Wynika z tego, że:

A. $a=b$ **B.** $a>b$ **C.** $a<b$ **D.** $2a=b$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

8.4.9. Dane są proste o równaniach $p: y=2x$, $r: y=-x+6$ i $q: y=(a+1)x+2a$. Określ, dla jakiego parametru a proste te przecinają się w jednym punkcie. **2 pkt**

8.4.10. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(2;-3)$, $B(8;-1)$ i $C(3;4)$. Wysokość wychodząca z wierzchołka C przecina podstawę AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D. **4 pkt**

8.5 ▶ Wyznaczanie współrzędnych środka odcinka

TWIERDZENIE

P.8.5.1

Środkiem odcinka o końcach $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$ jest punkt S o współrzędnych:

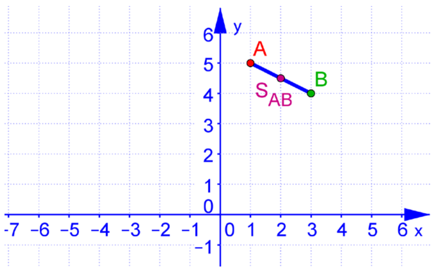
$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Oznacza to, że obie współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

PRZYKŁAD 1

Wyznacz środek odcinka AB, gdzie $A(1; 5)$ i $B(3; 4)$.

$x_A = 1$, $y_A = 5$, $x_B = 3$, $y_B = 4$



Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru.

$$S_{AB} = \left(\frac{1+3}{2}; \frac{5+4}{2}\right) = \left(2; 4\frac{1}{2}\right)$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wyznacz środek odcinka AB, gdzie $A(5; -2)$ i $B(-4; 5)$.

PRZYKŁAD 3. Wyznacz środek odcinka AB, gdzie $A(-1; -5)$ i $B(0; -4)$.

PRZYKŁAD 4. Wyznacz środek odcinka AB, gdzie $A(-4; 1)$ i $B(2; -3)$.

PRZYKŁAD

P.8.5.2

Dany jest środek S odcinka AB. Wiedząc, że $A(2; 3)$ i $S(5; 4)$, wyznacz współrzędne punktu B.

1° Korzystamy ze wzoru: $S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

2° Oznaczamy współrzędne punktu B. $B(x_B; y_B)$

3° Podstawiamy współrzędne obu punktów do wzoru i przyrównujemy do współrzędnych środka odcinka.

$$S_{AB} = \left(\frac{2 + x_B}{2}; \frac{3 + y_B}{2}\right) = (5; 4)$$

4° Układamy dwa równania.

$$\frac{2 + x_B}{2} = 5 \quad \Big| \cdot 2 \qquad \frac{3 + y_B}{2} = 4 \quad \Big| \cdot 2$$

5° Obie strony równań mnożymy przez 2 i obliczamy współrzędne.

$$2 + x_B = 10 \qquad 3 + y_B = 8$$

$$x_B = 8 \qquad y_B = 5$$

6° Współrzędne punktu $B(8; 5)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.5.1. Punkt $S(-2;-1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(-4;1)$. Oblicz współrzędne punktu B. Z.8.5.1

8.5.2. Dany jest punkt $P(-100;100)$, który jest środkiem odcinka SQ, gdzie $Q(100;-100)$. Oblicz współrzędne punktu S.

8.5.3. Dane są punkty $A(2a;3+b)$ oraz $B(a+b;3a-b)$. Punkt $M(1;3)$ jest środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktów A i B.

8.5.4. Dany jest równoległobok $ABCD$, gdzie $B(2;8)$ i $D(-4;5)$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia się przekątnych tego równoległoboku.

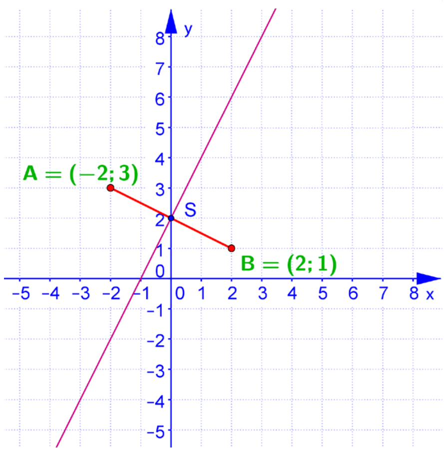
► Zadania z wykorzystaniem symetralnej odcinka

Symetralna to prosta, która dzieli odcinek na połowy i jest do niego prostopadła.

PRZYKŁAD

P.8.5.3

Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie $A(-2;3)$ i $B(2;1)$.



1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.

2° Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B ze wzoru: $a_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

$a_{AB}=\frac{1-3}{2-(-2)}=\frac{-2}{4}=$
$=-\frac{1}{2}$

3° Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej (symetralnej).

$a_{\perp}=-\frac{1}{a_{AB}}$

$a_{\perp}=2$

4° Obliczamy współrzędne środka odcinka AB ze wzoru: $S_{AB}=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

$S_{AB}=\left(\frac{-2+2}{2};\frac{3+1}{2}\right)=$
$=(0;2)$

5° Obliczamy współczynnik b symetralnej.

5.1° Zapisujemy równanie symetralnej w postaci kierunkowej.

$y=ax+b$

5.2° Skoro współczynnik kierunkowy $a=2$, to możemy podstawić go do wzoru.

$y=2x+b$

5.3° Współczynnik b obliczamy, podstawiając współrzędne środka odcinka $S(0;2)$.

$2=2\cdot 0+b$

$b=2$

6° Wzór symetralnej ma postać $y=2x+2$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.5.5. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, gdzie $A(1;3)$ i $B(2;6)$. Z.8.5.5

8.5.6. Punkty $A(2;6)$ i $C(7;7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD. Z.8.5.6

MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.8.5

8.5.7. Punkt $S(1;0)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $A(-3;4)$. Punkt B ma współrzędne:

A. $B(-1;2)$ **B.** $B(1;-2)$ **C.** $B(5;-4)$ **D.** $B(-2;4)$

8.5.8. Środkiem odcinka AB, gdzie $A(2;-5)$ i $B(-8;3)$, jest punkt S o współrzędnych:

A. $(-6;-2)$ **B.** $(-3;-1)$ **C.** $(10;-4)$ **D.** $(6;2)$

8.5.9. Punkt $S(1{,}5;6)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(1;a)$ i $B(2;a+4)$. Wtedy:

A. $a=4$ **B.** $a=6$ **C.** $a=2$ **D.** $a=3$

8.5.10. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $A(3;-5)$ i $C(-1;1)$. Punkt przecięcia przekątnych prostokąta ma współrzędne:

A. $(1;-2)$ **B.** $(2;-3)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $(-1;-2)$

8.5.11. Środkiem odcinka AB, gdzie $A(-\sqrt{2}+1;\sqrt{3}+2)$ i $B(3\sqrt{2}-3;5\sqrt{3}-4)$, jest punkt o współrzędnych:

A. $(2\sqrt{2}-2;6\sqrt{3}-2)$
C. $(\sqrt{2}-1;3\sqrt{3}-1)$
B. $(\sqrt{2}-2;3\sqrt{3}-2)$
D. $(4\sqrt{2}-4;4\sqrt{3}-6)$

MATURA — ZADANIE OTWARTE

8.5.12. Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $P(-4;3)$ i $O(-2;5)$. **4 pkt**

8.6 ▶ Obliczanie odległości dwóch punktów

TWIERDZENIE

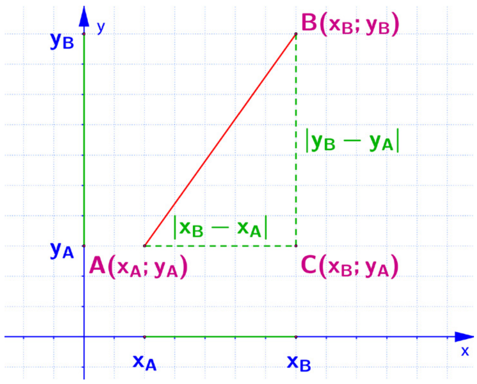
Odległość między punktami o współrzędnych $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$, czyli długość odcinka AB, obliczamy ze wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

DOWÓD:

Wyznacz długość odcinka AB, jeśli $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

Budujemy trójkąt ABC tak jak na rysunku. Możemy zauważyć, że trójkąt ABC jest prostokątny, więc długość odcinka AB obliczamy z użyciem twierdzenia Pitagorasa.



Współrzędne punktu C to $(x_B; y_A)$ oraz $|AC| = |x_B - x_A|$ i $|BC| = |y_B - y_A|$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, więc $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

PRZYKŁAD 1

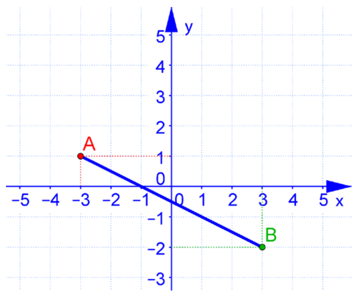
P.8.6.1

Oblicz długość odcinka AB, gdzie $A(-3; 1)$, $B(3; -2)$.

$x_A = -3$, $y_A = 1$, $x_B = 3$, $y_B = -2$

Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(3+3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$



PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz długość odcinka AB, gdzie $A(4; 2)$, $B(1; -2)$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz długość odcinka AB, gdzie $A(1; 2)$, $B(-1; 5)$.

PRZYKŁAD 4. Oblicz długość odcinka AB, gdzie $A(-4; -1)$, $B(4; 3)$.

► Zastosowanie wzoru na długość odcinka w zadaniach

PRZYKŁAD

P.8.6.2

Punkty $A(1;2)$, $B(5;0)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami rombu $ABCD$. Oblicz obwód tego rombu.

1° Obliczamy długość boku AB ze wzoru: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

2° Podstawiamy wartości. $|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3° Obwód rombu obliczamy ze wzoru: $O = 4 \cdot |AB|$. $O = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

4° Obwód rombu wynosi $8\sqrt{5}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.6.1. Punkty $A(-4;2)$, $B(3;1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego ABC. Oblicz obwód tego trójkąta. Z.8.6.1

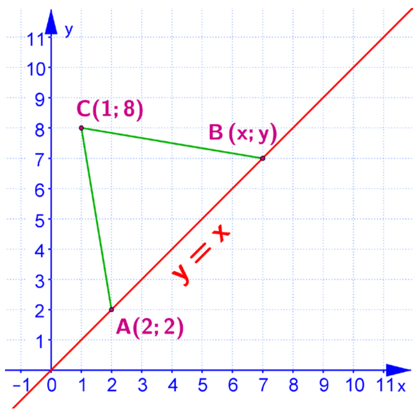
8.6.2. Punkty $B(-1;4)$, $C(5;2)$ są sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Oblicz pole tego kwadratu. Z.8.6.2

8.6.3. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach $E(1;3)$, $F(6;2)$, $G(4;5)$ jest prostokątny.

PRZYKŁAD

P.8.6.3

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A(2;2)$ i $C(1;8)$. Podstawa AB tego trójkąta zawarta jest w prostej o równaniu $y = x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.



1° Wykonujemy rysunek w układzie współrzędnych.

2° Obliczamy odległość między punktami A i C ze wzoru: $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$.

$|AC| = \sqrt{(1-2)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 6^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

3° Obliczamy odległość między punktami B i C, korzystając ze wzoru: $|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$.

$|BC| = \sqrt{(1-x)^2 + (8-x)^2}$

Zgodnie z rysunkiem punkt B ma współrzędne $B(x;y)$, a $y = x$.

4° Trójkąt ABC jest równoramienny, więc zapisujemy równanie i obliczamy x.

$$\sqrt{(1-x)^2+(8-x)^2}=\sqrt{37} \quad |^2$$
$$(1-x)^2+(8-x)^2=37$$
$$1-2x+x^2+64-16x+x^2-37=0$$
$$2x^2-18x+28=0 \quad |:2$$
$$x^2-9x+14=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$$
$$x_{1,2}=\frac{9\pm5}{2}=\begin{cases}2 \to (2;2)=A\\ 7 \to (7;7)=B\end{cases}$$

5° Wierzchołek B ma współrzędne $(7;7)$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.6.4. Dane są proste $y=x+2$, $y=-x+4$, $y=\frac{1}{2}x-2$. Punkty przecięcia prostych są wierzchołkami trójkąta ABC. Oblicz obwód tego trójkąta.

8.6.5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, gdzie $A(0;0)$, $B(-7;11)$ oraz $|AB|=|BC|$. Punkt C leży na prostej $y=2x$. Oblicz współrzędne punktu C.

8.6.6.* Dane są naprzeciwległe wierzchołki kwadratu: $A(2;1)$, $C(-4;3)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków B i D kwadratu.

► Odległość punktu od prostej

TWIERDZENIE

Odległość d punktu $P(x_0;y_0)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie A i B nie są jednocześnie zerami, obliczamy za pomocą wzoru:

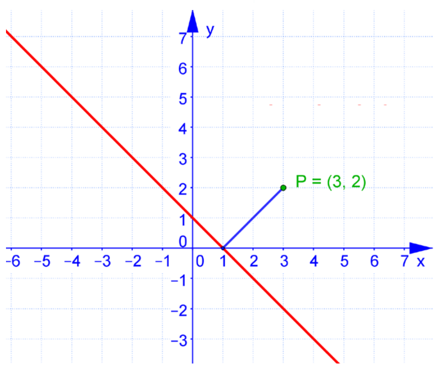
$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

PRZYKŁAD 1

P.8.6.4

Oblicz odległość punktu $P(3;2)$ od prostej $-x-y+1=0$.

Odległość punktu od prostej to długość odcinka prostopadłego do danej prostej, którego jednym z końców jest dany punkt.



$x_0=3$, $y_0=2$, $A=-1$, $B=-1$, $C=1$

Podstawiamy odpowiednie wartości do wzoru.

$$d=\frac{|-1\cdot3-1\cdot2+1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz odległość punktu $P(6;-7)$ od prostej $2x-y+1=0$.

PRZYKŁAD 3. Oblicz odległość punktu $P(-2;4)$ od prostej $4x-2y+1=0$.

PRZYKŁAD 4. Oblicz odległość punktu $P(3;6)$ od prostej $4x+3y+5=0$.

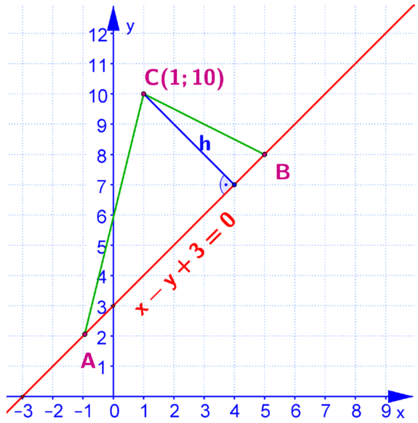
PRZYKŁAD

P.8.6.5

Podstawa AB trójkąta ABC zawarta w prostej o równaniu $x-y+3=0$ ma długość $6\sqrt{2}$. Oblicz pole trójkąta ABC, jeżeli wierzchołek $C(1;10)$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy w układzie współrzędnych, wyznaczając punkty przecięcia prostej $y=x+3$ z osiami układu współrzędnych.

$(0;3)$ i $(-3;0)$



2° Obliczamy wysokość h trójkąta, czyli odległość punktu C od prostej ze wzoru:
$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$h=\frac{|1\cdot 1-1\cdot 10+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=$$
$$=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

3° Obliczamy pole trójkąta ze wzoru: $P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h$.

$$P=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=9\cdot 2=18$$

4° Pole trójkąta ABC wynosi 18 j^2.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.6.7. Oblicz pole trójkąta KLM, gdzie $K(1;1)$, $L(7;4)$ i $M(4;5)$.

8.6.8. Punkty $A(-1;-5)$, $B(3;-1)$, $C(3;3)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Z.8.6.8

Czy wiesz, że...

P.8.6.6

Istnieje wiele innych sposobów obliczania pola trójkąta w układzie współrzędnych. Oto przykład takiej instrukcji.

1° Dane są trzy punkty niewspółliniowe: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$

2° Tworzymy następującą tablicę: $\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$

3° Obliczamy pole trójkąta ABC w sposób: $P_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \left| (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A) \right|$

PRZYKŁAD 1

Oblicz pole trójkąta ABC, gdzie $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-2; 5)$.

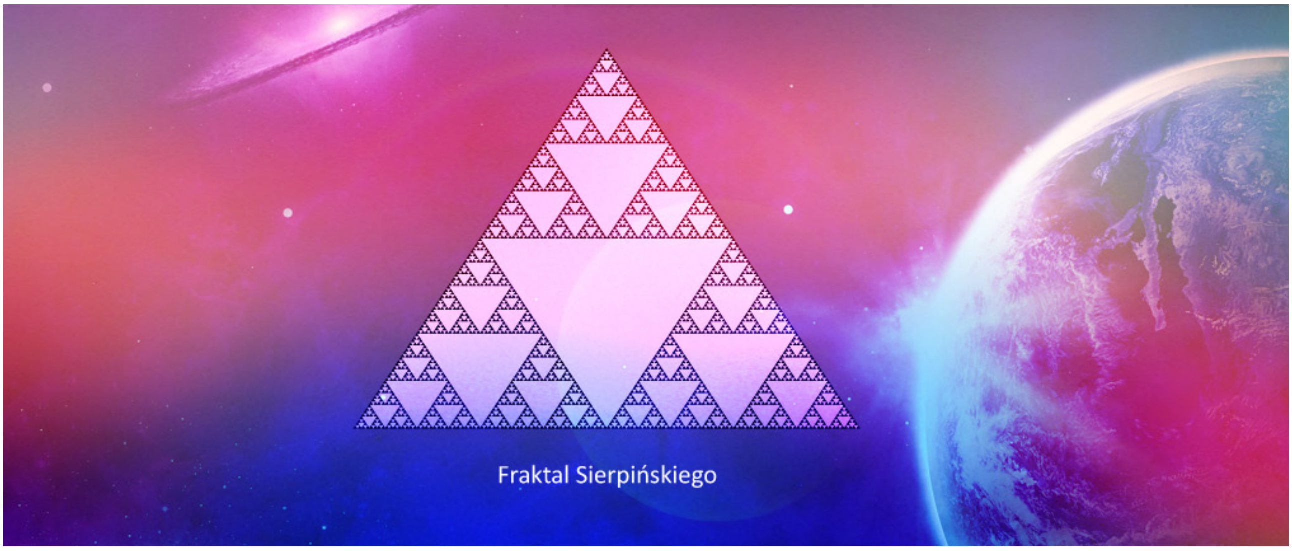
1° Tworzymy tablicę. $\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-1 & 4-2 \\ -2-1 & 5-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}$

2° Obliczamy pole trójkąta ABC. $P_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \left| (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A) \right| =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| 2 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 6 + 6 \right| = 6 \text{ j}^2$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz pole trójkąta ABC, gdzie $A(-1; 3)$, $B(2; -4)$, $C(4; 0)$.


Fraktal Sierpińskiego

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

8.6.9. Dane są punkty $A(2;-5)$ i $B(6;-1)$. Długość odcinka AB wynosi:

A. 10 **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{5}$

8.6.10. Punkty $K(-2;1)$ i $L(4;-1)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego KLM. Obwód tego trójkąta jest równy:

A. 120 **B.** $30\sqrt{4}$ **C.** $12\sqrt{10}$ **D.** $6\sqrt{10}$

8.6.11. Punkty $B(-1;5)$ i $D(-7;7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

A. 20 **B.** 40 **C.** 80 **D.** 60

8.6.12. Obwód rombu o boku AB, gdzie $A(1;1)$ i $B(4;5)$, wynosi:

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $4\sqrt{2}$ **C.** 20 **D.** 10

8.6.13. Trójkąt ABC, gdzie $A(0;0)$, $B(2;2)$, $C(-1;5)$, jest trójkątem:

A. prostokątnym, **C.** równoramiennym,

B. równobocznym, **D.** rozwartokątnym.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

8.6.14. Oblicz pole trójkąta EFG, wiedząc, że podstawa EF o długości $8\sqrt{2}$ zawiera się w prostej o równaniu $x-y+2=0$, a wierzchołek ma współrzędne $G(2;9)$. **2 pkt**

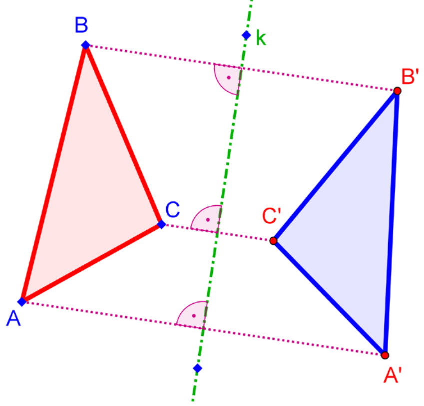
8.6.15. Oblicz pole rombu $ABCD$, gdzie $A(0;0)$, $B(8;3)$ i $C(5;6)$. **4 pkt**

8.6.16. Oblicz pole trójkąta ABC, gdzie $A(2;2)$, $B(-6;3)$, a punkt C leży na przecięciu prostych $y=x+6$ i $y=-x+8$. **5 pkt**

8.7 ► Znajdowanie obrazów niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych

► Symetria osiowa względem prostej

P.8.7.1

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Jeżeli k jest ustaloną prostą na płaszczyźnie, a A dowolnym punktem i A' obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej k, to: ► jeśli punkt A należy do prostej k, to $A = A'$; ► jeśli punkt A nie należy do prostej k, to A' jest takim punktem, że prosta k jest symetralną odcinka AA'. Oznacza to, że odcinek AA' jest prostopadły do prostej k i prosta k przechodzi przez środek odcinka AA'.	

WNIOSKI	
W symetrii osiowej:	
Obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości.	Aby znaleźć obraz odcinka, wystarczy znaleźć obrazy jego końców.
Obrazem trójkąta jest trójkąt przystający.	Aby znaleźć obraz trójkąta, wystarczy znaleźć obrazy jego wierzchołków.
Obrazem prostej jest prosta.	Aby znaleźć obraz prostej, wystarczy znaleźć obrazy dwóch dowolnych punktów prostej.
Obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu.	Aby znaleźć obraz okręgu, wystarczy znaleźć obraz środka, długość promienia pozostanie bez zmian.

► Symetria osiowa względem osi układu współrzędnych

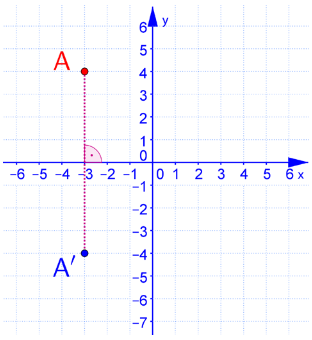
TWIERDZENIE	
Jeśli punkt $A(x; y)$ jest dowolnym punktem w układzie współrzędnych, to :	
► $S_{OX}A(x; y) = A'(x; -y)$ symetria względem osi OX	► $S_{OY}A(x; y) = A'(-x; y)$ symetria względem osi OY

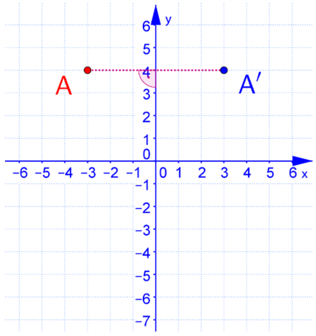
PRZYKŁAD

P.8.7.2

$S_{OX}A(-3;4) = A'(-3;-4)$

$S_{OY}A(-3;4) = A'(3;4)$





PRZYKŁAD 1

Znajdź równanie prostej $k: \ y = 3x - 1$ w symetrii względem osi OX.

1° Zauważmy, że do prostej k należą na przykład punkty: $A(0;-1)$ i $B(1;2)$.

2° Szukamy obrazów tych punktów w symetrii względem osi OX.

$$S_{ox}A(0;-1) = A'(0;1)$$
$$S_{ox}B(1;2) = B'(1;-2)$$

3° Gdy mamy dwa punkty, możemy napisać równanie prostej, korzystając ze wzoru: $y - y_{A'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}(x - x_{A'})$.

$$y - 1 = \frac{-2-1}{1-0}(x-0)$$
$$y - 1 = -3x$$
$$y = -3x + 1$$

4° Równanie prostej w symetrii względem osi OX ma postać $y = -3x + 1$.

PRZYKŁAD 2

Znajdź równanie prostej $k: \ y = 4x - 3$ w symetrii względem osi OY.

1° Zauważmy, że do prostej k należą na przykład punkty: $A(1;1)$ i $B(2;5)$.

2° Szukamy obrazów tych punktów w symetrii względem osi OY.

$$S_{OY}A(0;-3) = A'(0;-3)$$
$$S_{OY}B(2;5) = B'(-2;5)$$

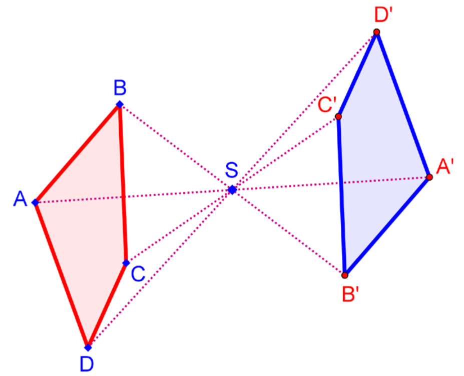
3° Gdy mamy dwa punkty, możemy napisać równanie prostej, korzystając ze wzoru: $y - y_{A'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}(x - x_{A'})$.

$$y - (-3) = \frac{5-(-3)}{-2-0}(x-0)$$
$$y + 3 = -4x$$
$$y = -4x - 3$$

4° Równanie prostej w symetrii względem osi OY ma postać $y = -4x - 3$.

► Symetria środkowa względem punktu

P.8.7.3

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Jeżeli S jest ustalonym punktem na płaszczyźnie, a A dowolnym punktem i A' obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu S, to: ► jeśli $A = S$, to $A' = A$; ► jeśli $A \neq S$, to A' jest takim punktem, że punkt S jest środkiem odcinka AA'.	

WNIOSKI	
W symetrii środkowej:	
Obrazem odcinka jest odcinek równoległy o tej samej długości.	Aby znaleźć obraz odcinka, wystarczy znaleźć obrazy jego końców.
Obrazem trójkąta jest trójkąt przystający.	Aby znaleźć obraz trójkąta, wystarczy znaleźć obrazy jego wierzchołków.
Obrazem prostej jest prosta równoległa.	Aby znaleźć obraz prostej, wystarczy znaleźć obrazy dwóch dowolnych punktów prostej.
Obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu.	Aby znaleźć obraz okręgu, wystarczy znaleźć obraz środka, długość promienia pozostanie bez zmian.

► Symetria środkowa względem początku układu współrzędnych

TWIERDZENIE

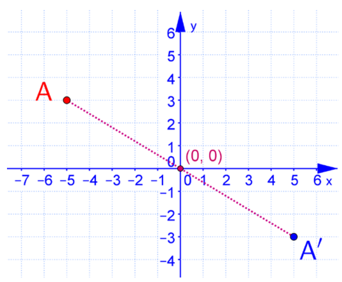
Jeśli punkt $A(x; y)$ jest dowolnym punktem w układzie współrzędnych, to :

► $S_{(0;0)}A(x;y) = A'(-x;-y)$ symetria względem punktu $(0;0)$

PRZYKŁAD

P.8.7.4

$$S_{(0;0)}A(-5;3) = A'(5;-3)$$



PRZYKŁAD

Znajdź równanie prostej $k: y = 2x + 4$ w symetrii względem początku układu współrzędnych.

1° Zauważmy, że do prostej k należą na przykład punkty: $A(0;4)$ i $B(-1;2)$.

2° Szukamy obrazów tych punktów w symetrii względem początku układu współrzędnych.

$$S_{(0;0)}A(0;4) = A'(0;-4)$$
$$S_{(0;0)}B(-1;2) = B'(1;-2)$$

3° Mając dwa punkty, możemy napisać równanie prostej, korzystając ze wzoru: $y - y_{A'} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}}(x - x_{A'})$.

$$y - (-4) = \frac{-2-(-4)}{1-0}(x-0)$$
$$y + 4 = 2x$$
$$y = 2x - 4$$

4° Równanie prostej w symetrii względem początku układu współrzędnych ma postać $y = 2x - 4$.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

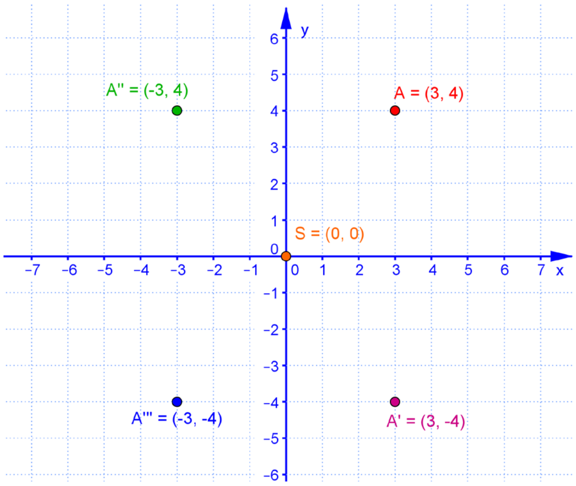
8.7.1. Punkt A przekształcono i otrzymano punkt A', który jest obrazem punktu A. Uzupełnij tabelę.

Punkt A	Punkt A'	Rodzaj przekształcenia		
		symetria osiowa względem osi OX	symetria osiowa względem osi OY	symetria środkowa względem punktu $(0;0)$
$(5;-3)$	$(-5;-3)$	*NIE*	*TAK*	*NIE*
$(-2;1)$	$(2;-1)$			
	$(-2;-8)$	*TAK*	*NIE*	*NIE*
$(0;3)$	$(0;-3)$			
$(3;4)$		*NIE*	*NIE*	*TAK*
$(0;0)$	$(0;0)$			
$(-1;6)$		*NIE*	*TAK*	*NIE*

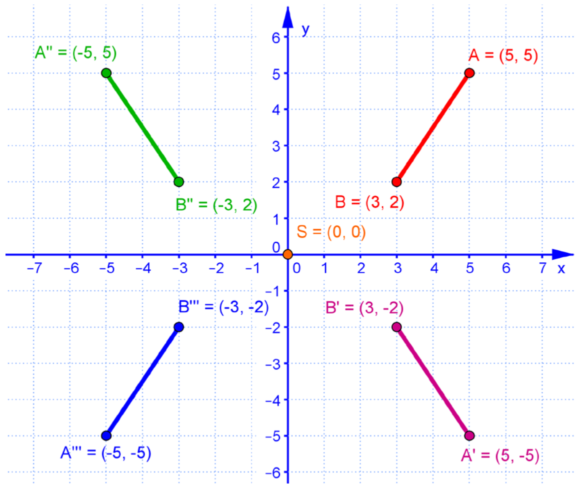
► Podsumowanie

P.8.7.5

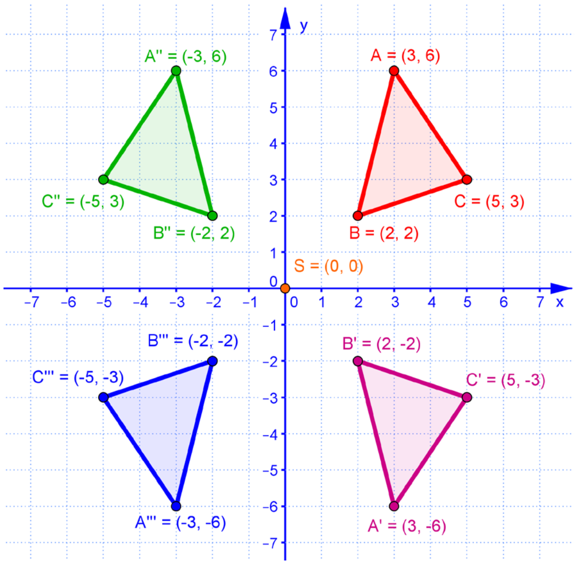
Punkt



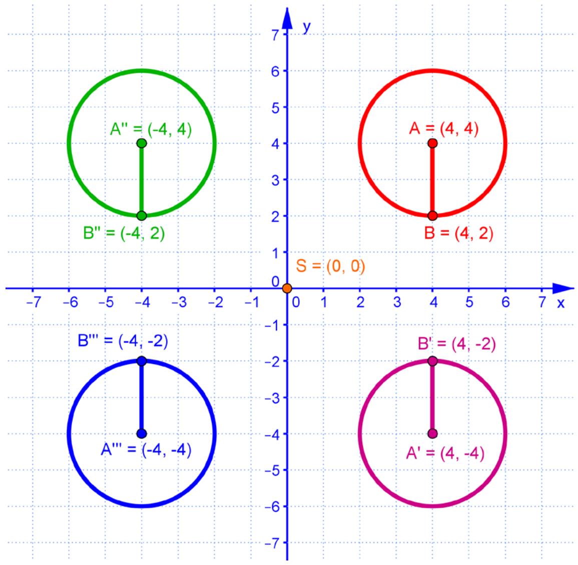
Odcinek



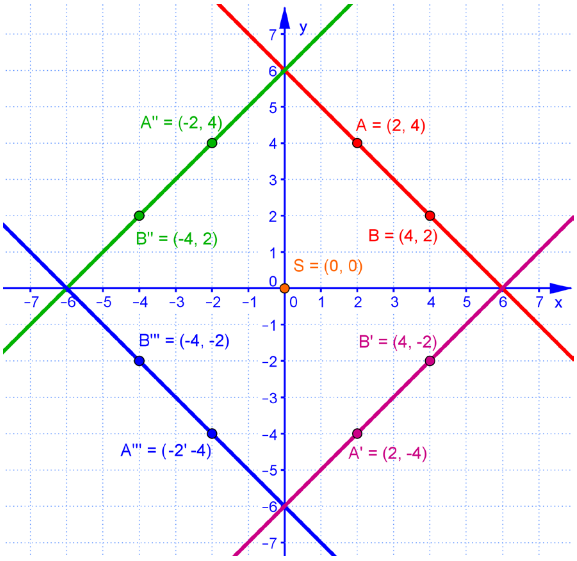
Trójkąt



Okrąg



Prosta



— *figura wyjściowa*
— *symetria osiowa względem osi OX*
— *symetria osiowa względem osi OY*
— *symetria środkowa względem początku układu współrzędnych*

ZADANIA UTRWALAJĄCE

8.7.2. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(1;2)$, $B(4;3)$ i $C(3;7)$. Znajdź obraz tego trójkąta po przekształceniu w symetrii: Z.8.7.2

a. osiowej względem osi OX,

b. osiowej względem osi OY,

c. środkowej względem punktu $(0;0)$.

8.7.3. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(0;1)$, $B(5;2)$, $C(4;4)$ i $D(0;2)$. Znajdź obraz tego czworokąta w symetrii osiowej względem: Z.8.7.3

a. osi OX,

b. osi OY.

8.7.4. Dany jest kwadrat $ABCD$, gdzie $A(-2;-2)$, $B(0;-4)$, $C(2;-2)$. Wyznacz współrzędne punktu D oraz znajdź obraz tego kwadratu w symetrii: Z.8.7.4

a. osiowej względem osi OX,

b. osiowej względem osi OY,

c. środkowej względem punktu $(0;0)$.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.8.7

8.7.5. Punkt $A(-2015;2016)$ przekształcono w symetrii osiowej względem osi OX i otrzymano punkt B. Współrzędne tego punktu to:

A. $(2015;2016)$

B. $(2015;-2016)$

C. $(-2015;-2016)$

D. $(-2015;2016)$

8.7.6. Środek okręgu leży w punkcie $S(-7;8)$. Okrąg ten przekształcono symetrycznie względem początku układu współrzędnych i otrzymano okrąg o środku P. Punkt P ma współrzędne:

A. $(8;-7)$ **B.** $(7;-8)$ **C.** $(-7;-8)$ **D.** $(7;8)$

8.7.7. Punkt $K(2015;2016)$ przekształcono w symetrii osiowej względem osi OY i otrzymano punkt L. Następnie punkt L przekształcono w symetrii środkowej względem punktu $(0;0)$ i otrzymano punkt M. Wynika z tego, że punkt M ma współrzędne:

A. $(2015;2016)$ **B.** $(-2015;2016)$ **C.** $(-2015;-2016)$ **D.** $(2015;-2016)$

8.7.8. Punkty $A(2;-7)$ i $A'(a+2;2b-1)$ są symetryczne względem osi OX. Wynika z tego, że:

A. $a=0,\ b=4$ **B.** $a=0,\ b=3$ **C.** $a=-2,\ b=-3$ **D.** $a=2,\ b=4$

8.7.9. Okrąg o środku $A(-2;5)$ i promieniu długości 5 przekształcono w symetrii osiowej względem osi OX. Otrzymano okrąg o środku A'. Odległość między środkami tych okręgów wynosi:

A. -4 **B.** 4 **C.** 10 **D.** 8

8.7.10. Punkt $A(-1;1)$ przekształcono symetrycznie względem osi OY, otrzymując punkt B. Punkt B przekształcono symetrycznie względem osi OX, otrzymując punkt C. Obwód trójkąta ABC wynosi:

A. 3 **B.** 6 **C.** $4+\sqrt{2}$ **D.** $2(2+\sqrt{2})$

8.7.11. Punkt $K(-15;10)$ przekształcono w symetrii względem osi OX oraz OY, a także w symetrii względem punktu $(0;0)$, otrzymując odpowiednio punkty L, M i N. Przekątna czworokąta $KLMN$ ma długość:

A. $5\sqrt{13}$ **B.** $10\sqrt{13}$ **C.** $13\sqrt{10}$ **D.** $13\sqrt{5}$

8.7.12. Odcinek AB, gdzie $A(0;3)$ i $B(4;0)$, przekształcono jednocześnie w symetrii osiowej względem osi OX i OY, a także w symetrii względem punktu $(0;0)$. Czworokąt utworzony z odcinka AB oraz uzyskanych odcinków nie jest:

A. rombem,
B. trapezem,
C. prostokątem,
D. deltoidem.

8.7.13. Okrąg o środku w punkcie $S(4;-1)$ i promieniu $r=3$ przekształcono w symetrii względem osi OX, otrzymując okrąg o środku w punkcie S'. Okręgi o środkach S i S':

A. są rozłączne,
B. są styczne zewnętrznie,
C. są styczne wewnętrznie,
D. przecinają się w dwóch punktach.

8.7.14. Kwadrat $ABCD$, gdzie $A(-1;1)$, $B(2;1)$, $C(2;-2)$ i $D(-1;-2)$, przekształcono w symetrii środkowej względem punktu $(0;0)$. Pole figury złożonej z kwadratu $ABCD$ oraz kwadratu otrzymanego po przekształceniu wynosi:

A. 18 **B.** 12 **C.** 14 **D.** 9

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

P.8.1.1 PRZYKŁAD 2. $3x+y-6=0$ PRZYKŁAD 3. $2x+y=0$ PRZYKŁAD 4. $-8x+y-4=0$ PRZYKŁAD 5. $x+y+3=0$ PRZYKŁAD 6. $y+2=0$

P.8.1.2 PRZYKŁAD 2. $y=-3x+6$ PRZYKŁAD 3. $y=-2x$ PRZYKŁAD 4. $y=8x+4$ PRZYKŁAD 5. $y=-x-3$ PRZYKŁAD 6. $y=2x-3$

8.1.1. np. $-6x+8y+5=0$

8.1.2. $y=-\frac{35}{8}x+10$

P.8.1.4 PRZYKŁAD 2. $a=2$ PRZYKŁAD 3. $a=1$ PRZYKŁAD 4. $a=-\frac{1}{4}$

P.8.1.5 PRZYKŁAD 2. $y=x-5$ PRZYKŁAD 3. $y=-x+3$ PRZYKŁAD 4. $y=\frac{1}{2}x+7$ PRZYKŁAD 5. $y=-4x+2$ PRZYKŁAD 6. $y=-\frac{1}{3}x-1$

8.1.3. $\frac{1}{2}x+y-5=0$

8.1.4. $a=2$

8.1.5. $a=-1$

8.1.6. B **8.1.7.** C **8.1.8.** B **8.1.9.** C **8.1.10.** B
8.1.11. B **8.1.12.** C

P.8.2.2 PRZYKŁAD 2. C PRZYKŁAD 3. D PRZYKŁAD 4. B PRZYKŁAD 5. A

8.2.1.

wzór prostej k	wzór prostej l	wartość p
$y=px+2$	$y=3x-1$	3
$y=(p+2)x-1$	$y=-x+4$	-3
$y=4x-2$	$y-px=0$	4
$3x+y-5=0$	$y=(2p-1)x+3$	-1
$-x+2y+1=0$	$y=(p+4)x$	$-3\frac{1}{2}$

P.8.2.4 PRZYKŁAD 2. C PRZYKŁAD 3. D PRZYKŁAD 4. B PRZYKŁAD 5. A

8.2.2.

wzór prostej k	wzór prostej l	wartość p
$y=\frac{1}{p}x$	$y=2x-1$	-2
$y=px+4$	$y=-\frac{3}{2}x$	$\frac{2}{3}$
$y-2px=3$	$y=x+5$	$-\frac{1}{2}$
$2x-4y+1=0$	$y=(p+1)x$	-3
$-x+3y-2=0$	$(p+4)x+y=0$	-1

8.2.3. D **8.2.4.** B **8.2.5.** C **8.2.6.** B **8.2.7.** D
8.2.8. B **8.2.9.** D **8.2.10.** D

P.8.3.1 PRZYKŁAD 2. $y=-3x+7$
PRZYKŁAD 3. $y=-4x+1$
PRZYKŁAD 4. $y=2x-8$
PRZYKŁAD 5. $y=x-11$
PRZYKŁAD 6. $y=-x+6$

P.8.3.2 PRZYKŁAD 2. $y=\frac{1}{3}x-3$
PRZYKŁAD 3. $y=-\frac{1}{2}x+2$
PRZYKŁAD 4. $y=-x-1$
PRZYKŁAD 5. $y=-\frac{1}{5}x-2\frac{1}{5}$
PRZYKŁAD 6. $y=\frac{1}{4}x-2$

8.3.1. $y=-\frac{3}{2}x-3\frac{1}{2}$

8.3.2. $y=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$

8.3.3. $m=-3$

8.3.4. $m\in\{-1;4\}$

8.3.5. $p=\frac{1}{2}$

8.3.6. C **8.3.7.** B **8.3.8.** C **8.3.9.** C **8.3.10.** A
8.3.11. C **8.3.12.** C

8.3.13. $y=-\frac{3}{2}x+5$ **8.3.14.** $y=2x-400$

8.4.1. $P_{\triangle}=75\ \mathrm{j}^2$

8.4.2. $P(1;1)$

8.4.3. $y=-2x+1$

8.4.4. A **8.4.5.** C **8.4.6.** B **8.4.7.** C **8.4.8.** A

8.4.9. $a=\frac{1}{2}$ **8.4.10.** $D(5;-2)$

P.8.5.1 PRZYKŁAD 2. $S_{AB}=\left(\frac{1}{2};1\frac{1}{2}\right)$
PRZYKŁAD 3. $S_{AB}=\left(-\frac{1}{2};-4\frac{1}{2}\right)$
PRZYKŁAD 4. $S_{AB}=(-1;-1)$

8.5.1. $B(0;-3)$

8.5.2. $S(-300;300)$

8.5.3. $A(2;2), B(0;4)$

8.5.4. $\left(-1; 6\frac{1}{2}\right)$

8.5.5. $y = -\frac{1}{3}x + 5$

8.5.6. $y = -5x + 29$

8.5.7. C **8.5.8.** B **8.5.9.** A **8.5.10.** A **8.5.11.** C

8.5.12. $y = -x + 1$

P.8.6.1 PRZYKŁAD 2. $|AB| = 5$ PRZYKŁAD 3. $|AB| = \sqrt{13}$ PRZYKŁAD 4. $|AB| = 4\sqrt{5}$

8.6.1 $O = 15\sqrt{2}$

8.6.2. $P = 40$ j^2

8.6.3. $|EF| = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

$|FG| = \sqrt{(4-6)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|EG| = \sqrt{(4-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa:

$$\sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 \stackrel{?}{=} \sqrt{26}^2$$

$$13 + 13 \stackrel{?}{=} 26$$

$$26 = 26$$

$L = P$ Zatem trójkąt jest prostokątny.

8.6.4. $O = 6(2\sqrt{2} + \sqrt{5})$

8.6.5. $C(6; 12)$

8.6.6.* $B(0; 5), D(-2; 1)$

P.8.6.4 PRZYKŁAD 2. $d = 4\sqrt{5}$ PRZYKŁAD 3. $d = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ PRZYKŁAD 4. $d = 7$

8.6.7. $P = 7{,}5$ j^2

8.6.8. $P = 16$ j^2

P.8.6.6 PRZYKŁAD 2. $P_{\triangle} = 13$ j^2

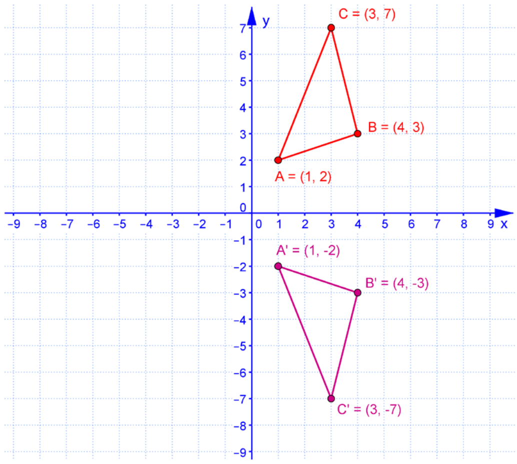
8.6.9. B **8.6.10.** D **8.6.11.** A **8.6.12.** C **8.6.13.** A

8.6.14. $P = 20$ j^2 **8.6.15.** $P = 33$ j^2 **8.6.16.** $P = 19{,}5$ j^2

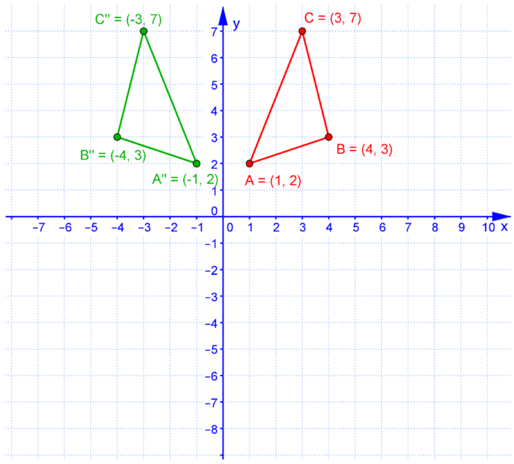
8.7.1

Punkt A	Punkt A'	Rodzaj przekształcenia		
		symetria osiowa względem osi OX	symetria osiowa względem osi OY	symetria środkowa względem punktu $(0; 0)$
$(5; -3)$	$(-5; -3)$	*NIE*	*TAK*	*NIE*
$(-2; 1)$	$(2; -1)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*
$(-2; 8)$	$(-2; -8)$	*TAK*	*NIE*	*NIE*
$(0; 3)$	$(0; -3)$	*TAK*	*NIE*	*TAK*
$(3; 4)$	$(-3; -4)$	*NIE*	*NIE*	*TAK*
$(0; 0)$	$(0; 0)$	*TAK*	*TAK*	*TAK*
$(-1; 6)$	$(1; 6)$	*NIE*	*TAK*	*NIE*

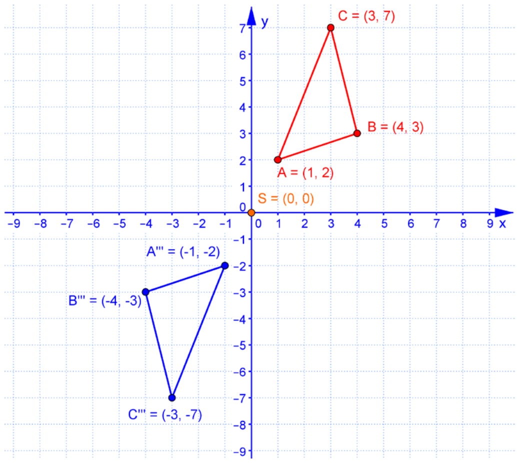
8.7.2. **a.**



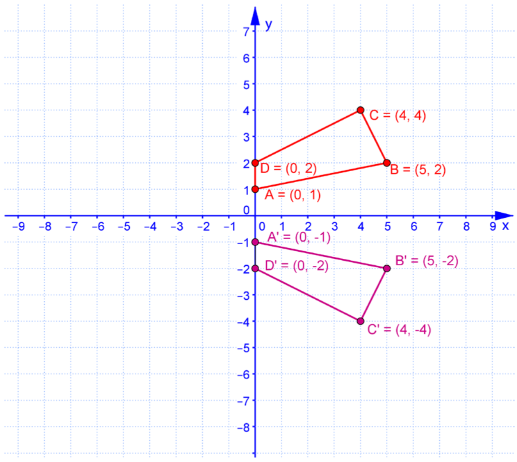
b.



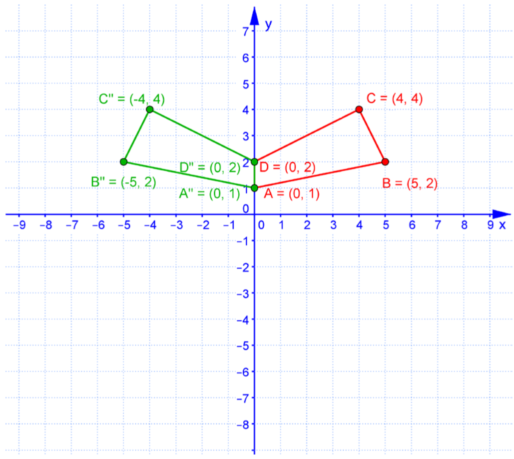
c.



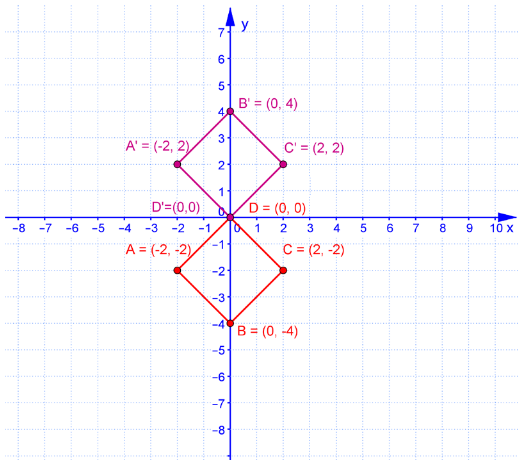
8.7.3. **a.**



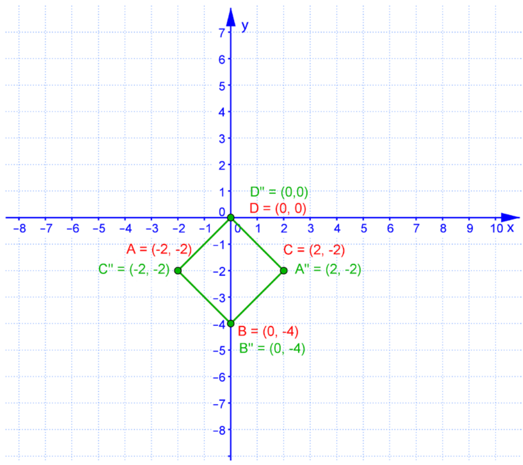
b.



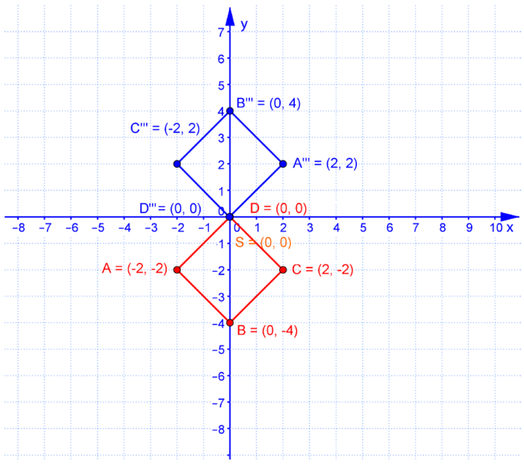
8.7.4. **a.**



b.



c.



8.7.5.	C	**8.7.6.**	B	**8.7.7.**	D	**8.7.8.**	A	**8.7.9.**	C
8.7.10.	D	**8.7.11.**	B	**8.7.12.**	C	**8.7.13.**	D	**8.7.14.**	C

ISBN: 978-83-63975-12-8

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego