9

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

laboratorium matematyczne

Stereometria

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Fotografie z www.pixabay.com:
Andy03 - id. 490669/ CC0 Public Domain; pattyjansen - id. 329546/ CC0 Public Domain; Greyerbaby - id. 447703/ CC0 Public Domain; Hans - id. 272318/ CC0 Public Domain; StockSnap - id. 698645/ CC0 Public Domain; skeeze - id. 652296/ CC0 Public Domain; PublicDomainPictures - id. 164333/ CC0 Public Domain; FrankHofmann - id. 775630/ CC0 Public Domain; PeteLinforth - id. 684983/ CC0 Public Domain; realworkhard - id. 103695/ CC0 Public Domain;

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-20-3

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

Stereometria

Według helleńskiej legendy dawno temu na greckiej wyspie Delos zapanowała straszliwa epidemia dżumy. Przerażeni mieszkańcy udali się do świątyni Apolla — opiekuna wyspy — z pytaniem, co zrobić, by uratować ludność przed zagładą. Bóg zażądał, aby dwukrotnie powiększyć ofiarny ołtarz w kształcie sześcianu. Mieszkańcy szybko wykonali zadanie, stawiając na ten ołtarz jeszcze jeden — taki sam sześcian. Mimo że żądanie zostało spełnione, dżuma dalej zbierała śmiertelne żniwo. Okazało się, że nie wolno było zmienić kształtu ołtarza — Apollo był wymagający. Problem ten, czyli to, w jaki sposób powiększyć dwukrotnie objętość danego sześcianu, zachowując jego proporcje, jest jednym z trzech tzw. problemów delijskich. Drugi problem delijski to trysekcja kąta, podzielenie kąta na trzy równe części za pomocą cyrkla i linijki. Trzeci to słynna kwadratura koła: jak, mając dane koło, skonstruować kwadrat o tym samym polu.

To znane trzy nierozwiązalne zadania świata antycznego — najsłynniejsze z nich to kwadratura koła, która przeszła do języka potocznego jako określenie zagadnienia nie do rozwiązania, rzeczy niemożliwej do osiągnięcia.

Bryły geometryczne, wielościany czy bryły obrotowe, znajdziemy na każdym kroku w otaczającym nas świecie. Niektóre z nich, jak bryły platońskie (czworościan, sześcian i ośmiościan foremny, dwunastościan foremny i dwudziestościan foremny) otaczano wręcz kultem ze względu na ich idealne piękno. Piłka futbolowa, chociaż wydaje nam się sferą, najczęściej jest dwudziestościanem ściętym, który składa się z 20 sześciokątów foremnych i 12 pięciokątów foremnych. Taka bryła jest wielościanem archimedesowym. W 1974 roku Ernő Rubik wymyślił sześcienną łamigłówkę, która stała się jedną z najsłynniejszych zabawek logicznych na świecie. Z pewnością wielu z nas próbowało układać kostkę Rubika — i albo się poddawało, albo osiągało cel po bardzo długim czasie. Okazuje się jednak, że kostkę tę można ułożyć, wykonując 20 lub nawet mniej ruchów, w zależności od ustawienia początkowego.

Wielościany czy bryły obrotowe mają zastosowanie oczywiście nie tylko w rozrywce — mnóstwo ich wykorzystujemy w rozmaitych rozwiązaniach technicznych, które ułatwiają życie.

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że…	dodatkowe informacje i ciekawostki

9.1 ► Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.). Obliczanie miar tych kątów

► Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Płaszczyznę wyznaczają:
- trzy niewspółliniowe punkty,
- dwie różne proste równoległe lub przecinające się,
- prosta i punkt poza nią.

Płaszczyzna ABC to płaszczyzna, która została wyznaczona przez punkty A, B i C.

Płaszczyzny będziemy oznaczać jako: $\pi_1, \pi_2 \ldots$

WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

P.9.1.1

Płaszczyzny równoległe $\pi_1 \parallel \pi_2$

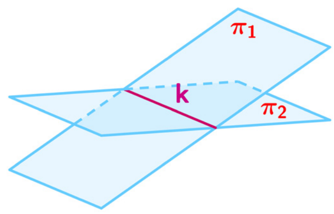
Płaszczyzny nie mające punktów wspólnych
$\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$

Płaszczyzny pokrywające się
$\pi_1 = \pi_2$

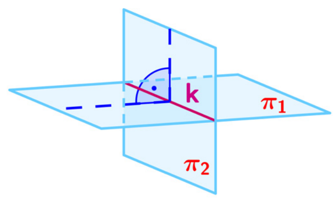
Płaszczyzny przecinające się

Częścią wspólną płaszczyzn przecinających się jest prosta, którą nazywamy krawędzią przecięcia.

Płaszczyzny przecinające się nieprostopadle
$\pi_1 \cap \pi_2 = k$



Płaszczyzny przecinające się prostopadle
$\pi_1 \cap \pi_2 = k$



DEFINICJA

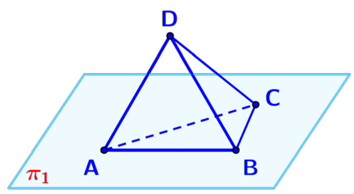
Wielościan to figura przestrzenna ograniczona wielokątami, które są wnętrzami rozłączne oraz bok każdego wielokąta jest jeszcze bokiem dokładnie jednego wielokąta.

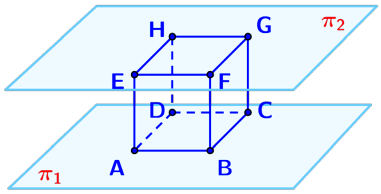
WŁASNOŚCI

Ścianami wielościanu są wielokąty, a wierzchołki każdej ściany wielościanu wyznaczają płaszczyznę.

PRZYKŁAD

Każde trzy wierzchołki czworościanu foremnego $ABCD$ wyznaczają w sumie cztery płaszczyzny: ABD, BCD, CAD, ABC

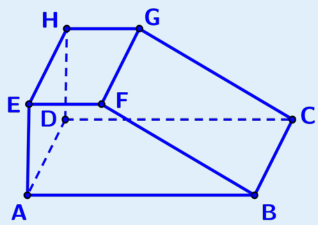


	Wierzchołki sześcianu *ABCDEFGH* wyznaczają wiele płaszczyzn; niektóre z nich to: *ABC*, *BCF*, *EFG*, *CDH*, *ADH*, *ACF*, *EHB*. Wśród nich są płaszczyzny przecinające się (w tym prostopadłe) oraz równoległe (w tym pokrywające się).	

Ściany w wielościanie, które zawarte są w płaszczyznach równoległych, nazywamy ścianami przeciwległymi.

PRZYKŁAD

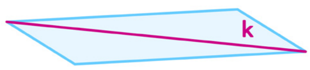
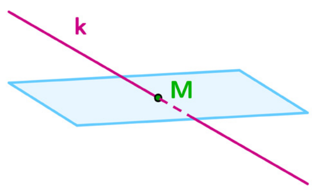
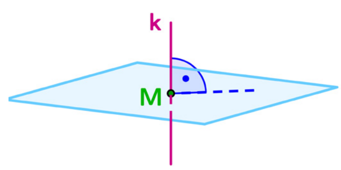
Na podstawie rysunku określ ściany przeciwległe wielościanu.



Płaszczyzny równoległe to *ABFE* i *DCGH* oraz *ABCD* i *EFGH*.
Skoro ściany przeciwległe są zawarte w równoległych płaszczyznach, to pary ścian przeciwległych to: *ABFE* i *DCGH* oraz *ABCD* i *EFGH*.

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

P.9.1.2

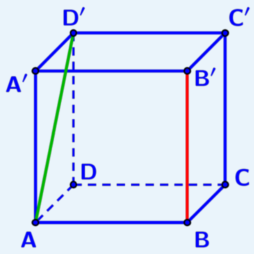
Prosta jest równoległa do płaszczyzny	Prosta jest zawarta w płaszczyźnie — ma wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną	
	Brak punktów wspólnych prostej z płaszczyzną	
Prosta przecina płaszczyznę — ma jeden punkt wspólny z płaszczyzną	Prosta nie jest prostopadła do płaszczyzny	
	Prosta jest prostopadła do płaszczyzny	

Prosta *k* jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.

Jeśli prosta *k* jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, to jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

PRZYKŁAD

Opisz położenie prostej AD' i BB' względem płaszczyzn wyznaczonych przez ściany sześcianu.



a. Prosta AD' jest równoległa do płaszczyzny:
$ADD'A'$ — jest zawarta w tej płaszczyźnie
$BCC'B'$ — nie ma z tą płaszczyzną punktu wspólnego

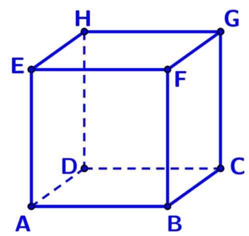
Prosta AD' przecina płaszczyznę:
$ABCD$ — w punkcie A
$A'B'C'D'$ — w punkcie D'
$ABB'A'$ — w punkcie A
$DCC'D'$ — w punkcie D'

b. Prosta BB' jest równoległa do płaszczyzny:
$BCC'B'$ — jest zawarta w tej płaszczyźnie
$ABB'A'$ — jest zawarta w tej płaszczyźnie
$CC'D'D$ — nie ma z tą płaszczyzną punktu wspólnego
$ADD'A'$ — nie ma z tą płaszczyzną punktu wspólnego

Prosta BB' jest prostopadła do płaszczyzny:
$ABCD$ — w punkcie B
$A'B'C'D'$ — w punkcie B'

ZADANIE UTRWALAJĄCE

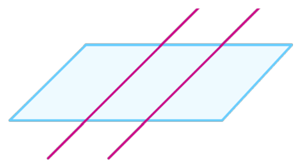
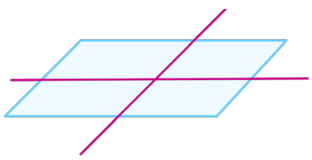
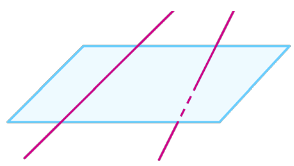
9.1.1. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek).



a. Wypisz pary płaszczyzn zawierających ściany prostopadłościanu, które są równoległe.

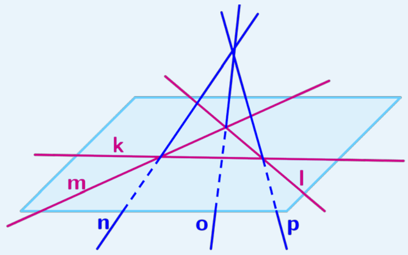
b. Wypisz pary płaszczyzn zawierających ściany prostopadłościanu, które są prostopadłe.

WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI

Proste współpłaszczyznowe	Proste równoległe	leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się	
	Proste przecinające się	leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny	
	Proste skośne	nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc nie mają punktów wspólnych	

PRZYKŁAD

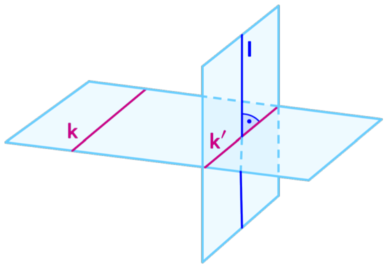
Wypisz wszystkie pary prostych skośnych przedstawionych na rysunku.



Pary prostych skośnych: k i o, m i p, l i n.

DEFINICJA

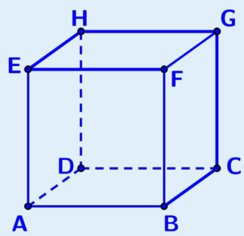
Prosta k jest prostopadła do prostej l w przestrzeni $(k \perp l)$, jeśli istnieje prosta k' równoległa do prostej k i przecinająca prostą l pod kątem prostym.



PRZYKŁAD 1

P.9.1.3

Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek). Wypisz odcinki równoległe do odcinka AB.



Odcinki równoległe do odcinka AB to odcinek DC, EF, HG.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek powyżej). Wypisz odcinki prostopadłe do odcinka EA.

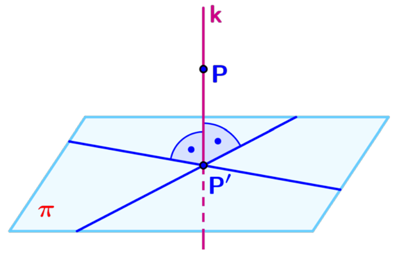
PRZYKŁAD 3. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek powyżej). Wypisz odcinki równoległe do odcinka FG.

PRZYKŁAD 4. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek powyżej). Wypisz odcinki prostopadłe do odcinka GH.

DEFINICJA

Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π jest taki punkt P', należący do płaszczyzny π, że prosta PP' jest prostopadła do płaszczyzny π.

Odległością punktu P od płaszczyzny π jest długość odcinka PP'.



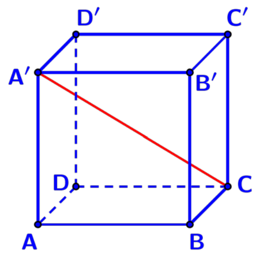
Rzutem prostokątnym figury P na płaszczyznę π jest figura wyznaczona przez rzuty prostokątne wszystkich punktów tworzących tę figurę.

ZADANIE UTRWALAJĄCE

9.1.2. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ (zobacz rysunek). Wskaż proste zawierające krawędzie sześcianu, które:

a. są skośne z prostą zawierającą odcinek $A'C$,

b. przecinają prostą zawierającą odcinek $A'C$.



► Graniastosłupy

DEFINICJE

Figurę nazywamy wypukłą, gdy cały odcinek łączący dwa dowolne punkty tej figury jest w niej zawarty.

Wielościanem wypukłym nazywamy taką figurę wypukłą, której powierzchnię stanowi skończona liczba wielokątów.

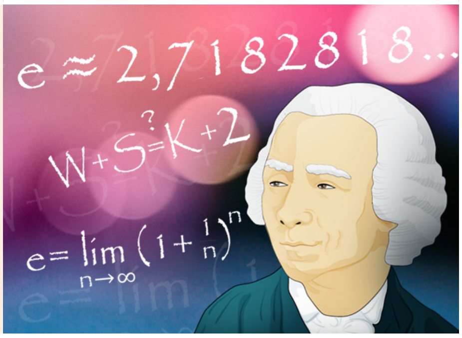
Czy wiesz, że...

TWIERDZENIE

W wielościanie wypukłym liczba wierzchołków w, liczba ścian s i liczba krawędzi k spełniają równość:

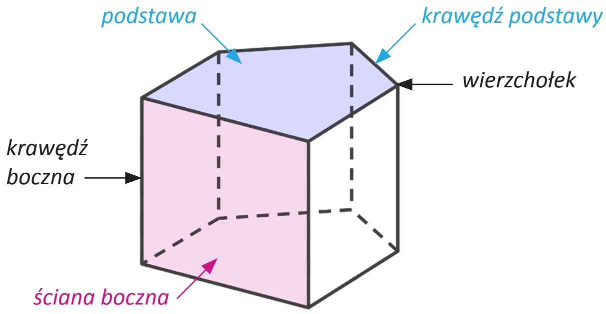
$$w + s = k + 2$$

Równość ta została sformułowana i udowodniona przez Leonharda Eulera (matematyka, fizyka i astronoma szwajcarskiego, żyjącego w latach 1707–1783), dlatego nazywana jest wzorem Eulera.



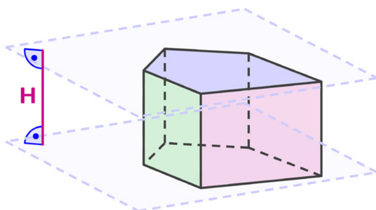
DEFINICJE

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



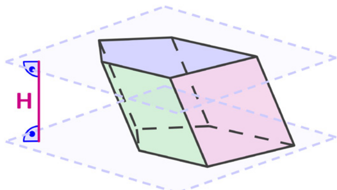
Graniastosłup prosty to graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy.

Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami.



P.9.1.4

Graniastosłup pochyły to graniastosłup, którego krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy.

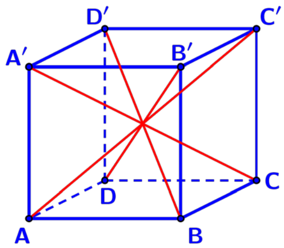


P.9.1.5

Wysokość graniastosłupa (H) to dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły.

Powierzchnię boczną graniastosłupa tworzą jego ściany boczne.

Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.



Przekątne tego graniastosłupa to odcinki: AC', CA', BD', DB'.

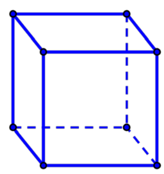
W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, wyróżniamy graniastosłupy trójkątne, czworokątne, pięciokątne itd.

Graniastosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny, nazywamy prawidłowym.

P.9.1.6

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.1.3. Zaznacz przekątne ścian odcinkiem czerwonym, a przekątne graniastosłupa odcinkiem zielonym.



Z.9.1.3

9.1.4. Uzupełnij tabelkę według wzoru.

GRANIASTOSŁUP	Liczba			
	ścian	wierzchołków	krawędzi	przekątnych graniastosłupa
TRÓJKĄTNY	5	6	9	0
CZWOROKĄTNY				
PIĘCIOKĄTNY				
SZEŚCIOKĄTNY				
OŚMIOKĄTNY				
DZIESIĘCIOKĄTNY				
n-KĄTNY*				

9.1.5. Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: **a.** 21 **b.** 33
Uzasadnij odpowiedź.

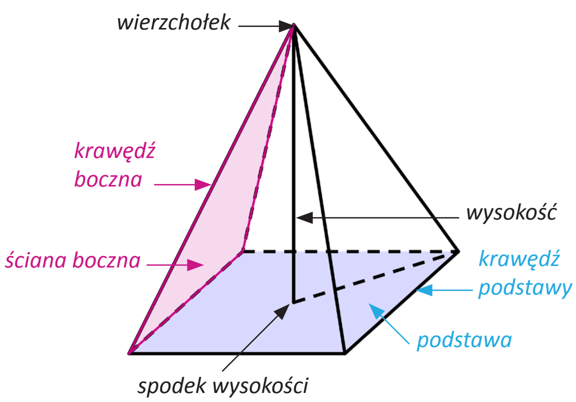
9.1.6. Czy istnieje graniastosłup, którego liczba wierzchołków wynosi: **a.** 50 **b.** 41
Uzasadnij odpowiedź.

9.1.7. Graniastosłup ma 42 krawędzie. Oblicz liczbę jego: **a.** wierzchołków, **b.** ścian.

► Ostrosłupy

DEFINICJE

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.

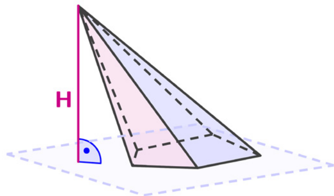


Ostrosłup prosty to ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne mają tę samą długość lub spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie.

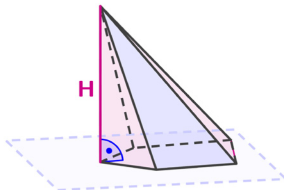
Wysokość ostrosłupa to odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy (spodek wysokości).

P.9.1.7

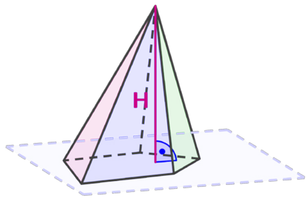
Wysokość położona poza ostrosłupem



Wysokość pokrywająca się z krawędzią boczną ostrosłupa



Wysokość położona wewnątrz ostrosłupa



W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa ostrosłupa, wyróżniamy ostrosłupy trójkątne, czworokątne, pięciokątne itd.

Ostrosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny, nazywamy prawidłowym.

Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego jego ścianą boczną.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.1.8. Uzupełnij tabelkę według wzoru.

OSTROSŁUP	Liczba		
	Ścian	Wierzchołków	Krawędzi
TRÓJKĄTNY			
CZWOROKĄTNY	5	5	8
PIĘCIOKĄTNY			
SZEŚCIOKĄTNY			
OŚMIOKĄTNY			
DWUNASTOKĄTNY			
n-KĄTNY*			

9.1.9. Czy istnieje ostrosłup, który ma: **a.** 7 wierzchołków, **b.** 15 ścian, **c.** 5 krawędzi?
Uzasadnij odpowiedź.

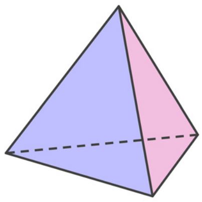
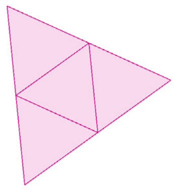
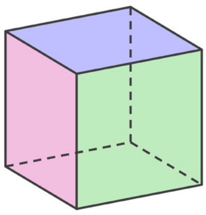
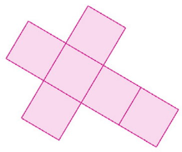
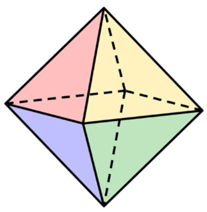
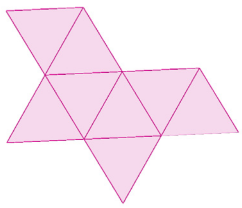
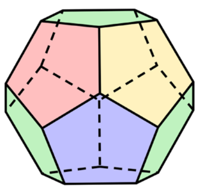
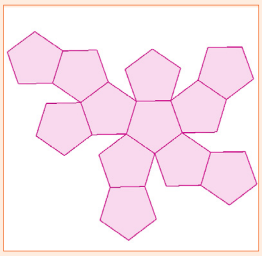
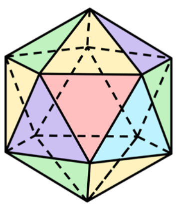
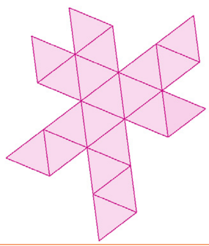
9.1.10. Ostrosłup ma 18 krawędzi. Oblicz liczbę jego: **a.** wierzchołków, **b.** ścian.

Czy wiesz, że…

Wielościanem foremnym nazywamy wielościan wypukły, w którym wszystkie ściany są wielokątami foremnymi o tej samej liczbie boków i w którego wierzchołkach zbiega się taka sama liczba krawędzi.

Wyróżniamy pięć wielościanów foremnych.

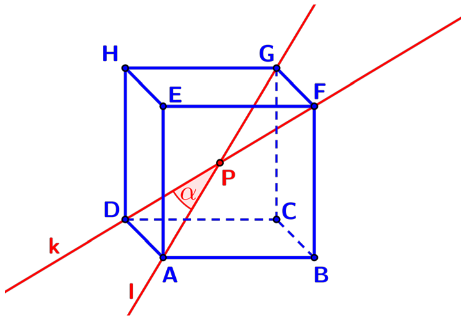
WIELOŚCIANY FOREMNE

NAZWA	RYSUNEK	SIATKA	ŚCIANY	
czworościan foremny			trójkąty równoboczne	P.9.1.8
sześcian			kwadraty	P.9.1.9
ośmiościan			trójkąty równoboczne	P.9.1.10
dwunastościan			pięciokąty foremne	P.9.1.11
dwudziestościan			trójkąty równoboczne	P.9.1.12

Wielościany foremne nazywamy również bryłami platońskimi. Platon uważał, że materię tworzą idealne całostki, które są figurami geometrycznymi.

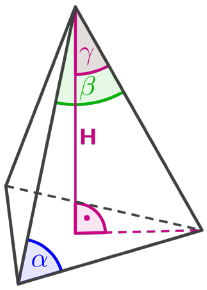
► Kąty między odcinkami w graniastosłupach i ostrosłupach

Kątem między dwiema prostymi k i l przecinającymi się w punkcie P nazywamy kąt ostry lub prosty, o wierzchołku w punkcie P i ramionach zawartych w prostych k i l.



α — kąt między prostymi DF i AG

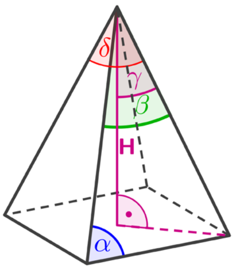
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI



Kąty w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym:

α — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy
β — kąt między krawędziami bocznymi
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną

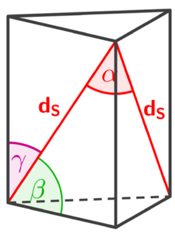
P.9.1.13



Kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:

α — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy
β — kąt między krawędziami bocznymi
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
δ — kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi

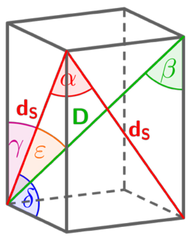
P.9.1.14



Kąty w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym:

α — kąt między przekątnymi ścian bocznych
β — kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy
γ — kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną

P.9.1.15



Kąty w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym:

α — kąt między przekątnymi ścian bocznych
β — kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną
γ — kąt między przekątną ściany a krawędzią boczną
δ — kąt między przekątną ściany a krawędzią podstawy
ε — kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka

P.9.1.16

WYJAŚNIENIE

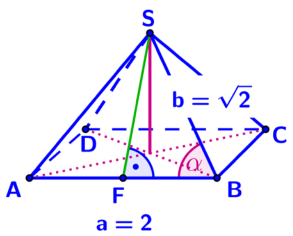
W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów (i potem obliczać ich miary) pomiędzy prostymi zawierającymi odcinki tych wielościanów: krawędzie, przekątne itp. Aby znaleźć taki kąt (np. pomiędzy krawędziami, krawędzią a przekątną), należy najpierw poszukać wspólnego punktu takich odcinków, a potem zbudować trójkąt — najczęściej prostokątny.

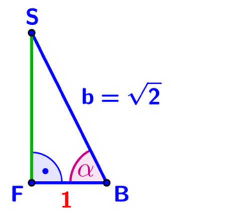
PRZYKŁAD

P.9.1.17

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Krawędź podstawy wynosi $a = 2$, a krawędź boczna $b = \sqrt{2}$. Znajdź miarę kąta pomiędzy krawędzią boczną a krawędzią podstawy.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.





2° Poszukiwany kąt α to jeden z kątów trójkąta ABS.

3° Rysujemy wysokość trójkąta ABS.

4° Trójkąt FBS jest prostokątny, więc korzystamy z funkcji cosinus, aby wyznaczyć miarę kąta α.

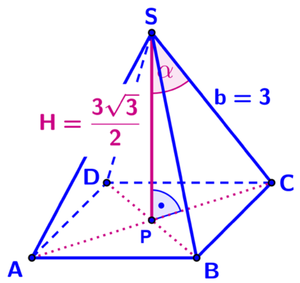
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } \alpha = 45^\circ$$

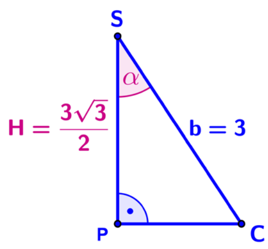
5° Szukany kąt ma miarę 45°.

PRZYKŁAD

Znajdź kąt pomiędzy wysokością ostrosłupa prawidłowego czworokątnego a krawędzią boczną, wiedząc, że wysokość ma długość $H = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, a krawędź boczna $b = 3$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.





2° Poszukiwany kąt α to jeden z kątów trójkąta PCS.

3° Trójkąt PCS jest prostokątny, więc korzystamy z funkcji cosinus, aby wyznaczyć miarę kąta α.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ więc } \alpha = 30^\circ$$

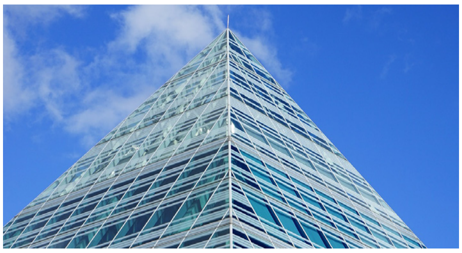
4° Szukany kąt ma miarę 30°.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.1.11. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny. Oblicz miarę kąta pomiędzy przekątną tego graniastosłupa a wysokością, jeśli wiadomo, że jej długość wynosi $h = 2$, a krawędź podstawy $a = \sqrt{2}$.

9.1.12. Znajdź kąt pomiędzy krawędzią boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego a krawędzią podstawy, wiedząc, że wysokość ściany bocznej ma długość 6, a krawędź boczna ma długość $4\sqrt{3}$.

9.1.13. Dany jest prostopadłościan o długościach podstawy 5 i 12 oraz krawędzi bocznej równej 13. Oblicz kąt między przekątną prostopadłościanu a krawędzią boczną.



MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.9.1

9.1.14. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny ma:

A. trzy pary ścian równoległych,
B. cztery pary ścian równoległych,
C. dziesięć par ścian prostopadłych,
D. sześć par ścian prostopadłych.

9.1.15. Wysokość ostrosłupa prawidłowego może być:

A. położona wewnątrz ostrosłupa,
B. położona na krawędzi ostrosłupa,
C. położona poza ostrosłupem,
D. równoległa do krawędzi bocznej ostrosłupa.

9.1.16. Graniastosłup prawidłowy czworokątny nie może mieć:

A. dwóch identycznych ścian,
B. sześciu identycznych ścian,
C. pięciu identycznych ścian,
D. czterech identycznych ścian.

9.1.17. Jeżeli graniastosłup ma 36 krawędzi, to liczba wierzchołków tego graniastosłupa wynosi:

A. 24 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 36

9.1.18. Ostrosłup ma 20 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

A. 12 **B.** 20 **C.** 40 **D.** 38

9.1.19. Graniastosłup ma 12 wierzchołków. Liczba krawędzi tego graniastosłupa wynosi:

A. 24 **B.** 12 **C.** 18 **D.** 36

9.1.20. Liczba wszystkich krawędzi ostrosłupa, który ma 21 wierzchołków, jest równa:

A. 21 **B.** 14 **C.** 20 **D.** 40

9.1.21. Liczba ścian graniastosłupa prawidłowego wynosi 18. Podstawą tego graniastosłupa jest:

A. ośmiokąt foremny,

B. dziewięciokąt foremny,

C. szesnastokąt foremny,

D. osiemnastokąt foremny.

9.1.22. Liczba ścian bocznych ostrosłupa wynosi 12. Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

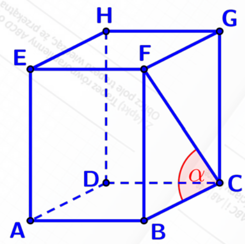
A. 12 **B.** 13 **C.** 24 **D.** 26

9.1.23. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma W wierzchołków i K krawędzi. Prawdziwa więc jest zależność:

A. $W-K=5$ **B.** $W+K=17$ **C.** $K=W+3$ **D.** $K=2W-2$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

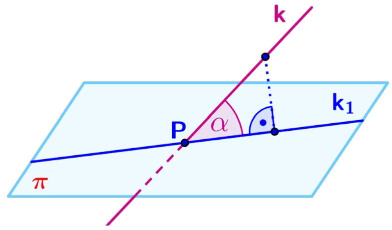
9.1.24. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AB|=2\sqrt{3}$ oraz $|AE|=2$, oblicz miarę kąta α. **2 pkt**



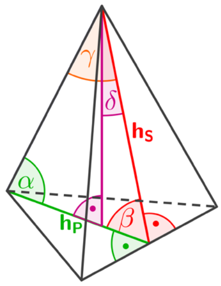
9.1.25. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Oblicz kąt między dwoma sąsiednimi krawędziami bocznymi, wiedząc, że krawędź boczna ma długość 2, a obwód podstawy $8\sqrt{2}$. **2 pkt**

9.2 ▶ Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami). Obliczanie miar tych kątów

Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny π, gdzie prosta k nie jest prostopadła do płaszczyzny π, jest kąt ostry α utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę π.

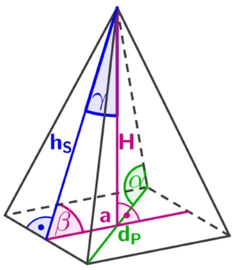


PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI



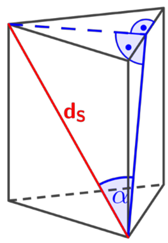
Kąty w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym:
α — kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
β — kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
γ — kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną ściany bocznej
δ — kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej

P.9.2.1



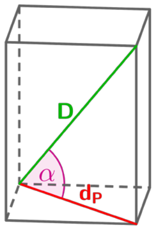
Kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
β — kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej

P.9.2.2



Kąty w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym:
α — kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną

P.9.2.3



Kąty w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

P.9.2.4

WYJAŚNIENIE

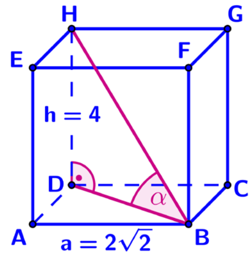
W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów (i potem obliczać ich miary) pomiędzy prostymi zawierającymi odcinki tych wielościanów (np. krawędzie, wysokości, przekątne) a płaszczyznami. Aby znaleźć taki kąt (np. pomiędzy krawędzią a płaszczyzną ściany bocznej, przekątną a płaszczyzną podstawy), należy najpierw poszukać wspólnego punktu odcinka i płaszczyzny, a następnie utworzyć odpowiedni trójkąt — najczęściej prostokątny.

PRZYKŁAD

P.9.2.5

Wyznacz miarę kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu a płaszczyzną podstawy, wiedząc, że w podstawie jest kwadrat o boku $a = 2\sqrt{2}$, a wysokość prostopadłościanu ma długość $h = 4$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Szukany kąt α to kąt DBH, czyli jeden z kątów trójkąta prostokątnego DBH.

3° Obliczamy długość odcinka BD, korzystając ze wzoru na przekątną kwadratu: $d = a\sqrt{2}$.

$|BD| = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$

4° Korzystamy z funkcji tangens w trójkącie DBH, aby wyznaczyć miarę kąta α.

$\text{tg}\alpha = \frac{4}{4} = 1$, więc $\alpha = 45^\circ$

5° Szukany kąt ma miarę 45°.

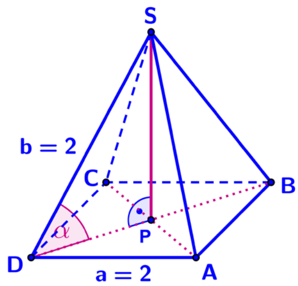
PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Wyznacz miarę kąta pomiędzy przekątną prostopadłościanu a płaszczyzną podstawy, wiedząc, że w podstawie jest kwadrat o boku $a = \sqrt{2}$, a wysokość prostopadłościanu ma długość $h = 2\sqrt{3}$.

PRZYKŁAD

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o boku podstawy $a = 2$ oraz krawędzi bocznej $b = 2$. Wyznacz miarę kąta pomiędzy krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Szukany kąt α to kąt SDP, czyli jeden z kątów trójkąta prostokątnego DPS.

3° Obliczamy długość odcinka DP, pamiętając, że jest to połowa przekątnej kwadratu, a przekątną obliczamy ze wzoru: $d = a\sqrt{2}$.

$|DP| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

4° Korzystamy z funkcji cosinus w trójkącie DPS, aby wyznaczyć miarę kąta α.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\alpha = 45^\circ$

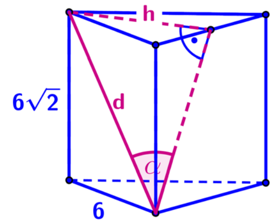
5° Szukany kąt ma miarę 45°.

PRZYKŁAD

P.9.2.6

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy wynosi 6, a wysokość $6\sqrt{2}$. Oblicz miarę kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.
Kąt α jest jednym z kątów trójkąta prostokątnego.



2° Obliczamy długość przekątnej ściany bocznej, czyli d, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$d^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$$
$$d^2 = 36 + 72$$
$$d = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

3° Podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc wysokość h obliczamy ze wzoru: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

4° Korzystamy z funkcji sinus, aby wyznaczyć miarę kąta α.

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} = \frac{\cancelto{1}{3}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancelto{2}{6}\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}, \text{ więc } \alpha = 30^\circ$$

5° Szukany kąt ma miarę 30°.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

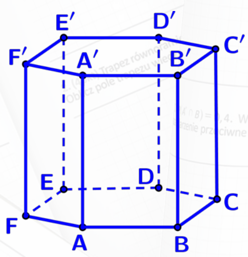
9.2.1. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy równych 6 i 8 oraz krawędzi bocznej równej 24. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna prostopadłościanu z płaszczyzną podstawy.

9.2.2. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość ma długość 3, a krawędź podstawy równa jest $3\sqrt{3}$. Oblicz kąt, jaki tworzy krawędź boczna z podstawą.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.9.2

9.2.3. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny (zobacz rysunek). Kąt między najdłuższą przekątną a płaszczyzną podstawy to:



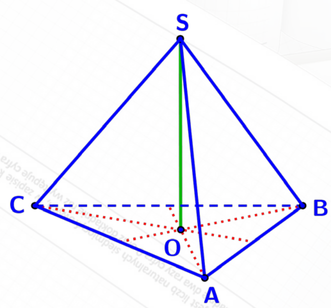
A. $\sphericalangle ADD'$

B. $\sphericalangle E'AD$

C. $\sphericalangle E'BC$

D. $\sphericalangle D'AD$

9.2.4. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Kąt między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy to:



A. $\sphericalangle CSB$

B. $\sphericalangle BAS$

C. $\sphericalangle SOC$

D. $\sphericalangle SAO$

9.2.5. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego równa jest 8, a krawędź podstawy ma długość 4. Kąt między przekątną a podstawą ma miarę:

A. 45° **B.** 60° **C.** 75° **D.** 30°

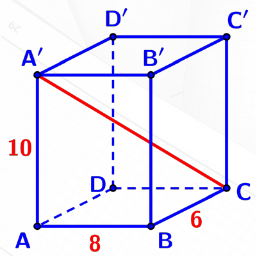
9.2.6. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzi są równej długości. Kąt, jaki tworzy krawędź boczna z podstawą, ma miarę:

A. 30° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 90°

9.2.7. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Korzystając z danych podanych na rysunku, można stwierdzić, że kąt między przekątną prostopadłościanu a podstawą ma miarę:

A. 45° **C.** 90°

B. 30° **D.** 60°



9.2.8. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości 6 nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{2}$, można stwierdzić, że:

A. $\alpha = 30^\circ$ **B.** $\alpha = 60^\circ$ **C.** $\alpha = 45^\circ$ **D.** $\alpha = 75^\circ$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

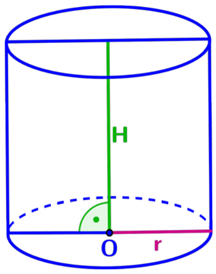
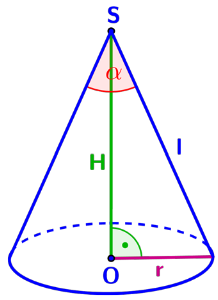
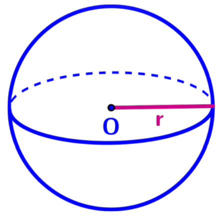
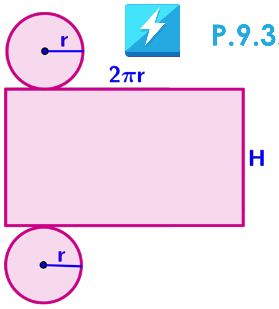
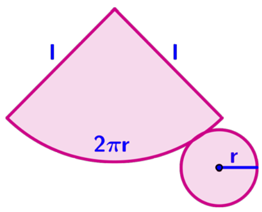
9.2.9. Dany jest graniastosłup, w którym krawędź boczna jest dwa razy krótsza od przekątnej ściany. Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną ściany a krawędzią podstawy. **2 pkt**

9.2.10. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 6 nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Oblicz wysokość ostrosłupa. **2 pkt**

9.2.11. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości $6\sqrt{2}$ tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz krawędź podstawy ostrosłupa. **2 pkt**

9.2.12. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt α. Oblicz sinus kąta α, wiedząc, że wszystkie krawędzie graniastosłupa mają długość równą 9. **4 pkt**

9.3 ▶ Rozpoznawanie w walcach i w stożkach kątów między odcinkami oraz kątów między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą). Obliczanie miar tych kątów

BRYŁA	WALEC P.9.3.1	STOŻEK P.9.3.5	KULA
			
	P.9.3.2	P.9.3.6	P.9.3.9
DEFINICJA	Walec to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół jego osi symetrii lub wokół prostej zawierającej jego bok.	Stożek to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego wokół jego osi symetrii lub trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną trójkąta.	Kula to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.
OZNACZENIA	r — promień H — wysokość O — spodek wysokości, czyli środek podstawy walca	S — wierzchołek O — spodek wysokości r — promień H — wysokość l — tworząca α — kąt rozwarcia stożka	r — promień O — środek kuli
SIATKA BRYŁY	P.9.3.3 	P.9.3.7 	Kula nie ma siatki.
JAK NARYSOWAĆ BRYŁĘ	P.9.3.4	P.9.3.8	
INNE WAŻNE INFORMACJE	Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś — jest to prostokąt o bokach H i $2r$.	Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś — jest to trójkąt równoramienny o bokach l, l i $2r$.	Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy kołem wielkim.

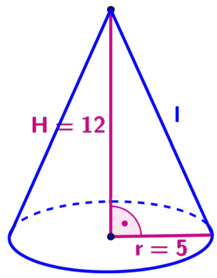
	Podstawy walca to dwa koła otrzymane w wyniku obrotu prostokąta.	Kąt między ramionami trójkąta, będącego przekrojem osiowym stożka, nazywamy kątem rozwarcia stożka. Podstawa stożka to koło otrzymane w wyniku obrotu trójkąta.	Kula o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r. Sfera o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r.

PRZYKŁAD 1

P.9.3.10

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 5 obraca się wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz tworzącą stożka.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy tworzącą.

$$l^2 = H^2 + r^2$$
$$l^2 = 12^2 + 5^2$$
$$l^2 = 144 + 25$$
$$l = \sqrt{169} = 13 \quad (l > 0)$$

3° Tworząca stożka ma długość 13.

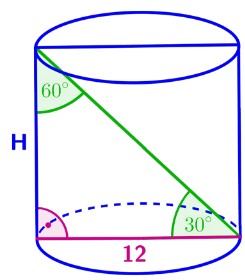
PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 8 obraca się wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz tworzącą stożka.

PRZYKŁAD

Dany jest walec o średnicy 12. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z podstawą kąt 30°. Oblicz długość wysokości walca.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z własności trójkąta o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Jeżeli naprzeciwko kąta 30° znajduje się bok o długości H, to naprzeciwko kąta 60° znajduje się bok o długości $H\sqrt{3}$. Obliczamy więc wysokość walca.

$$H\sqrt{3} = 12$$

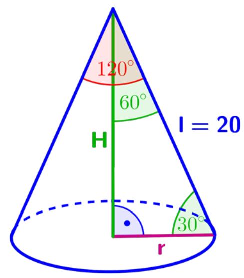
$$H = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 4\sqrt{3}$$

3° Wysokość walca wynosi $4\sqrt{3}$.

PRZYKŁAD

Kąt rozwarcia stożka wynosi 120°, a tworząca ma długość 20. Oblicz promień i wysokość stożka.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z własności trójkąta o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Jeżeli naprzeciwko kąta 30° znajduje się bok o długości H, to naprzeciwko kąta 90° znajduje się bok o długości $2H$. Obliczamy więc wysokość stożka.

$$2H = 20$$
$$H = 10$$

3° Jeżeli naprzeciwko kąta 30° znajduje się bok o długości H, to naprzeciwko kąta 60° znajduje się bok o długości $H\sqrt{3}$. Obliczamy więc promień stożka.

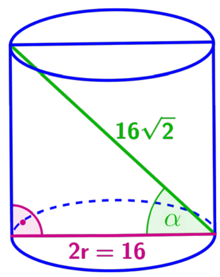
$$r = H\sqrt{3}$$
$$r = 10\sqrt{3}$$

4° Wysokość stożka wynosi 10, a promień $10\sqrt{3}$.

PRZYKŁAD

Oblicz kąt nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca o promieniu 8, jeśli wiadomo, że jej długość wynosi $16\sqrt{2}$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z funkcji cosinus, aby wyznaczyć miarę kąta α.

$$\cos\alpha = \frac{16}{16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } \alpha = 45^\circ$$

3° Szukany kąt ma miarę 45°.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.3.1. Tworząca stożka jest o 2 dłuższa od wysokości, a średnica podstawy wynosi 12. Oblicz długość tej tworzącej.

9.3.2. Kąt między wysokością a przekątną przekroju osiowego walca wynosi 60°. Oblicz długość wysokości, jeśli wiadomo, że promień podstawy równy jest $4\sqrt{3}$.

9.3.3. Oblicz kąt rozwarcia stożka o promieniu $r = 6$ i wysokości $h = 2\sqrt{3}$.

9.3.4. Prostokąt o bokach 6 i 9 obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz długość przekątnej przekroju osiowego walca.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.9.3

9.3.5. Przekątna przekroju osiowego walca o długości 8 tworzy z podstawą kąt 30°. Promień tego walca jest równy:

A. 2 **B.** 4 **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

9.3.6. Tworząca stożka ma długość 6 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45°. Wysokość tego stożka jest równa:

A. $6\sqrt{2}$ **B.** 12π **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** 6π

9.3.7. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Jeżeli średnica stożka ma długość 24, to długość tworzącej jest równa:

A. 24 **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** $12\sqrt{2}$ **D.** 12

9.3.8. Dany jest stożek, w którym tworząca i średnica podstawy mają długość równą $8\sqrt{3}$. Wysokość tego stożka wynosi:

A. 12 **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** 24 **D.** $4\sqrt{3}$

9.3.9. Tworząca stożka jest o 10 dłuższa od jego wysokości, a obwód podstawy stożka wynosi 60π. Długość wysokości tego stożka jest więc równa:

A. 30 **B.** 10 **C.** 20 **D.** 40

9.3.10. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i $2a$ obraca się wokół dłuższego boku. Długość tworzącej tego stożka wynosi:

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $5a^2$ **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

MATURA — ZADANIA OTWARTE

9.3.11. Przekątna przekroju osiowego walca o długości $8\sqrt{6}$ tworzy z wysokością kąt 60°. Oblicz długość promienia i wysokości walca. **2 pkt**

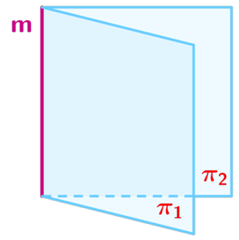
9.3.12. Kąt rozwarcia stożka wynosi 90°, a długość tworzącej jest równa $4\sqrt{5}$. Oblicz długość promienia i wysokości stożka. **2 pkt**

9.4 ▶ Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami

DEFINICJE

P.9.4.1

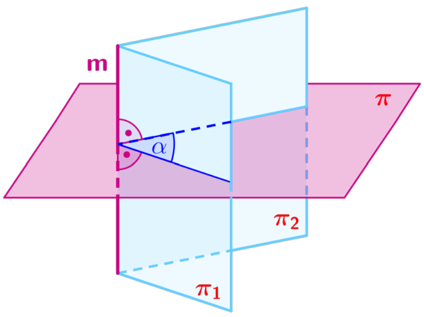
Dwie różne półpłaszczyzny π_1, π_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy kątem dwuściennym, a półpłaszczyzny — ścianami kąta dwuściennego.



Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

Aby zmierzyć kąt dwuścienny o krawędzi m, należy:
1° poprowadzić płaszczyznę π prostopadłą do prostej m,
2° zmierzyć kąt płaski, wypukły lub wklęsły, będący częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny π.

Jeden z kątów dwuściennych ma miarę α, a drugi $360^\circ - \alpha$.



WYJAŚNIENIE

W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów (i potem obliczać ich miary) pomiędzy ścianami tych wielościanów (kąt dwuścienny).

Aby znaleźć taki kąt (np. pomiędzy ścianą boczną a podstawą ostrosłupa), należy:
1° najpierw poszukać wspólnej krawędzi tych ścian,
2° wybrać dowolny (ale dogodny) punkt na tej wspólnej krawędzi,
3° z tego punktu poprowadzić dwa odcinki prostopadłe do wspólnej krawędzi — każdy w innej ścianie,
4° następnie trzeba poszukać trójkąta (często prostokątnego), w którym jednym z kątów jest poszukiwany kąt.

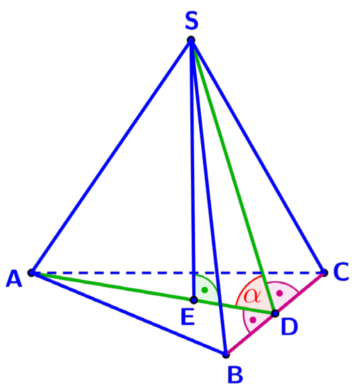
PRZYKŁAD

Znajdź kąt pomiędzy ścianą boczną a podstawą w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym.

1° Wspólną krawędzią obu ścian jest krawędź BC.

2° Prowadzimy dwa odcinki prostopadłe do tej krawędzi — jeden jest wysokością ściany bocznej, a drugi wysokością podstawy.

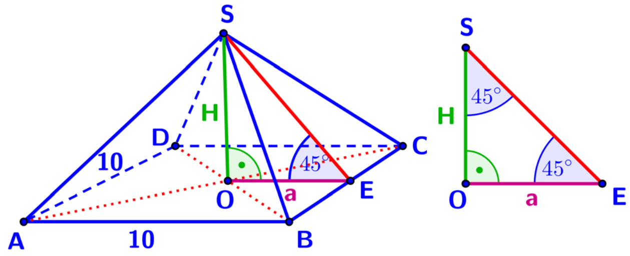
3° Dorysowujemy wysokość ostrosłupa, aby szukany kąt był jednym z kątów w trójkącie prostokątnym, czyli $\triangle EDS$.



PRZYKŁAD

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym ściana boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz wysokość ostrosłupa, wiedząc, że krawędź podstawy wynosi 10.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Trójkąt OES jest równoramienny, ponieważ $\sphericalangle OSE$ ma również miarę 45°, więc $a = H$.

3° Odcinek a jest równy połowie krawędzi podstawy, więc obliczamy wysokość H.

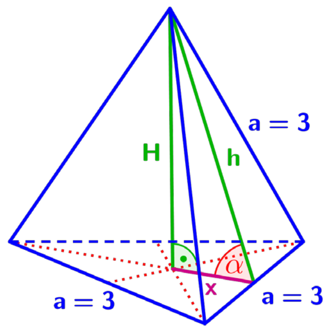
$a = H = 10 : 2 = 5$

4° Wysokość ostrosłupa jest równa 5.

PRZYKŁAD

Dany jest czworościan foremny o krawędzi 3. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Obliczamy wysokość ściany bocznej h, korzystając ze wzoru: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

3° Długość odcinka x to $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego.

$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4° Długość wysokości H obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa $(H > 0)$.

$$H^2 + x^2 = h^2$$
$$H^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$H^2 = \frac{27}{4} - \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$
$$H = \sqrt{6}$$

5° Obliczamy $\mathrm{tg}\alpha$.

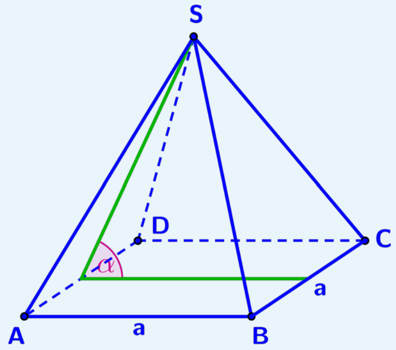
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{x} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2\sqrt{9 \cdot 2}}{3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}\sqrt{2}}{\cancel{3}} = 2\sqrt{2}$$

6° Tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $2\sqrt{2}$.

PRZYKŁAD

P.9.4.2

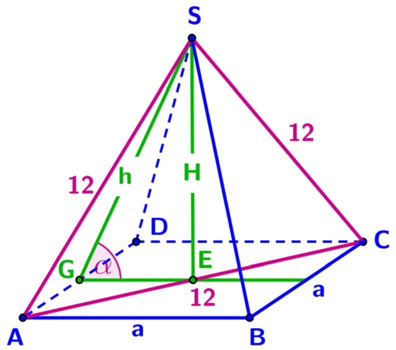
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 12. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



1° Rysujemy przekątną podstawy AC i wysokość ostrosłupa H.

2° Trójkąt ACS jest równoboczny o boku 12.

3° Do obliczenia sinusa kąta α potrzebne są długości h i H.



4° Długość H jest wysokością trójkąta równobocznego o boku 12, więc korzystamy ze wzoru: $H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$H = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

5° Skoro znamy przekątną podstawy, to możemy obliczyć długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

$$a\sqrt{2} = 12 \quad |:\sqrt{2}$$

$$a = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 6\sqrt{2}$$

6° Odcinek EG jest połową krawędzi podstawy.

$$|EG| = 3\sqrt{2}$$

7° Obliczamy h z twierdzenia Pitagorasa.

$$h^2 = (3\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{3})^2$$
$$h^2 = 9 \cdot 2 + 36 \cdot 3$$
$$h = \sqrt{126} = \sqrt{9 \cdot 14} = 3\sqrt{14}$$

8° Obliczamy $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{3}}\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{42}}{14} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

9° Sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

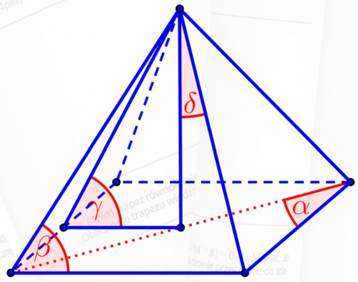
ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.4.1. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi $4\sqrt{2}$ i ściana ta tworzy z podstawą kąt 45°. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

9.4.2. Ściany boczne ostosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi o krawędzi 6. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

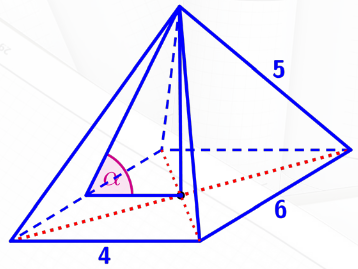
9.4.3. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny (zobacz rysunek). Posługując się danymi z rysunku, można stwierdzić, że kątem dwuściennym jest kąt:



A. α **C.** γ

B. β **D.** δ

9.4.4. Dany jest ostrosłup czworokątny o podstawie prostokąta (zobacz rysunek). Korzystając z danych na rysunku, można stwierdzić, że kąt α ma miarę:



A. 45° **C.** 30°

B. 75° **D.** 60°

9.4.5. W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi:

A. 60° **B.** 90° **C.** 45° **D.** 120°

9.4.6. Wszystkie kąty dwuścienne równej miary ma:

A. ostrosłup, **B.** graniastosłup, **C.** prostopadłościan, **D.** czworościan.

9.4.7. W ostrosłupie prawidłowym pięciokątnym można znaleźć:

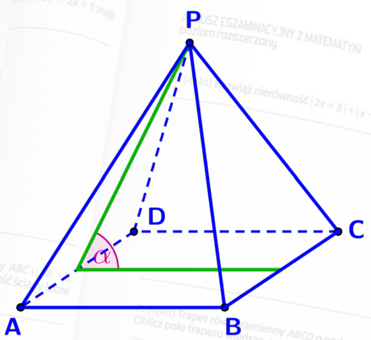
A. dwa różne kąty dwuścienne, **C.** jeden kąt dwuścienny,

B. trzy różne kąty dwuścienne, **D.** cztery różne kąty dwuścienne.

MATURA — ZADANIA OTWARTE

9.4.8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 6, a krawędź boczna 9. Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy. **4 pkt**

9.4.9. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDP* (zobacz rysunek) trójkąt *ACP* jest trójkątem równobocznym o boku długości 8. Oblicz cosinus kąta α nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa. **4 pkt**



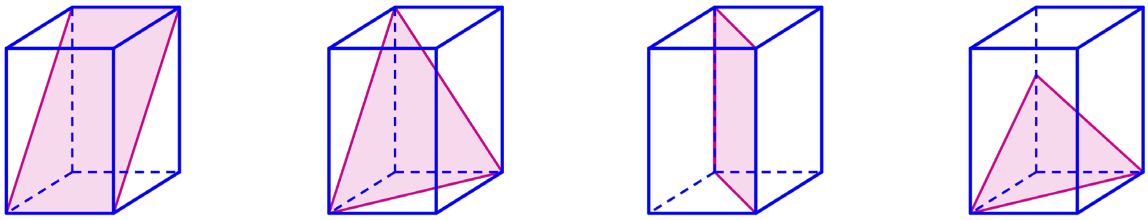
9.5 ▶ Określanie, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną

DEFINICJE

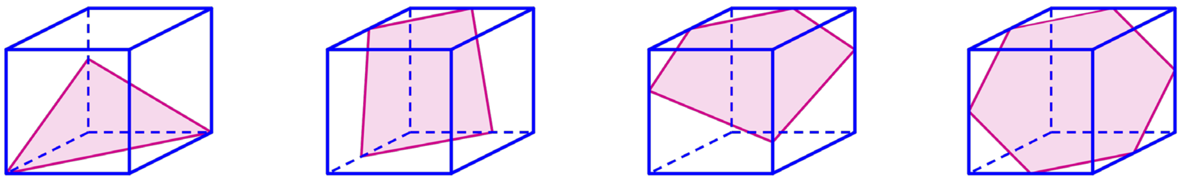
Przekrojem bryły nazywamy część wspólną bryły i płaszczyzny, która ją przecina.

W przypadku prostopadłościanu przekrojem może być punkt (wierzchołek), odcinek (krawędź) lub wielokąt zawarty w płaszczyźnie, która przecina prostopadłościan. Wierzchołki tego wielokąta należą do krawędzi prostopadłościanu.

P.9.5.1



P.9.5.2



PRZYKŁAD

P.9.5.3

Korzystając z planszy, określ, jaką figurą może być przekrój prostopadłościanu.

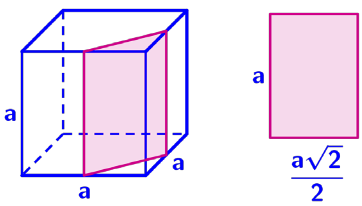
Przekrojem prostopadłościanu może być: punkt, odcinek, trójkąt, czworokąt, pięciokąt, sześciokąt.

PRZYKŁADY

P.9.5.4

Określ, jaką figurą jest przekrój sześcianu o krawędzi a przedstawiony na rysunku i jakie ma wymiary.

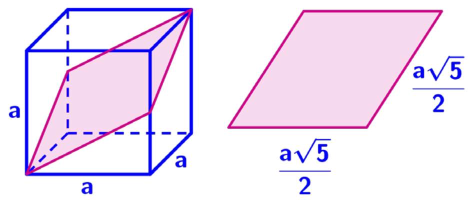
PRZYKŁAD 1



Wierzchołki przekroju są środkami krawędzi sześcianu.

Przekrojem jest prostokąt o wymiarach a i $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ponieważ jego jeden bok jest długości krawędzi sześcianu, a drugi jest przekątną kwadratu o boku $\frac{a}{2}$.

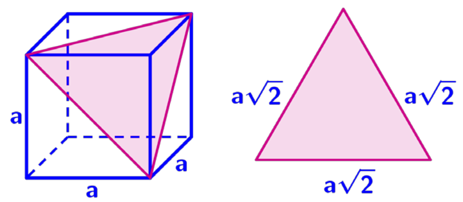
PRZYKŁAD 2



Dwa wierzchołki przekroju są środkami krawędzi sześcianu. Przekrojem jest romb o boku $\frac{a\sqrt{5}}{2}$, ponieważ każdy z nich jest przeciwprostokątną w trójkącie o bokach a i $\frac{a}{2}$, więc z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

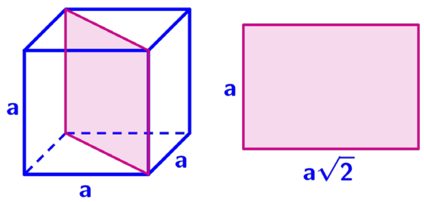
$$a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=x^2 \quad\Rightarrow\quad a^2+\frac{a^2}{4}=x^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{5a^2}{4}=x^2 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a\sqrt{5}}{2}$$

PRZYKŁAD 3



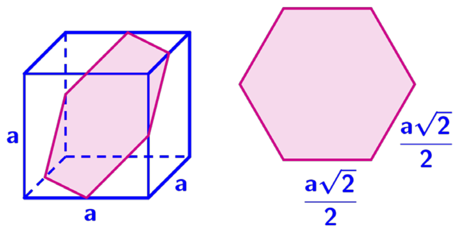
Przekrojem jest trójkąt równoboczny o boku długości $a\sqrt{2}$, ponieważ każdy jego bok jest przekątną kwadratu o boku a.

PRZYKŁAD 4



Przekrojem jest prostokąt w wymiarach a i $a\sqrt{2}$, ponieważ jego jeden bok jest krawędzią sześcianu, a drugi przekątną podstawy, czyli kwadratu o boku a.

PRZYKŁAD 5



Wierzchołki przekroju są środkami krawędzi sześcianu. Przekrojem jest sześciokąt foremny o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ponieważ każdy jego bok jest przekątną kwadratu o boku $\frac{a}{2}$.

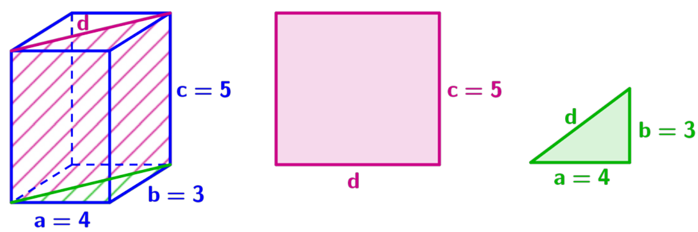
PRZYKŁAD

P.9.5.5

Prostopadłościan o wymiarach $a=4$ i $b=3$ oraz długości krawędzi bocznej $c=5$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątne obu podstaw prostopadłościanu. Oblicz pole tego przekroju.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy.

2° Przekrojem prostopadłościanu jest prostokąt.



3° Długość d, czyli przekątną podstawy obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym.

$$d^2 = 4^2 + 3^2$$
$$d^2 = 25 \quad (d > 0)$$
$$d = 5$$

4° Obliczamy pole przekroju.

$$P_{przekroju} = d \cdot c = 5 \cdot 5 = 25 \text{ j}^2$$

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

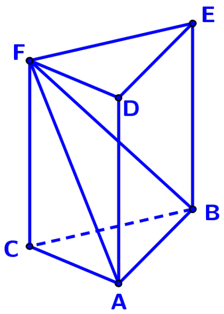
PRZYKŁAD 2. Prostopadłościan o wymiarach podstawy $a = 5$ i $b = 6$ oraz długości krawędzi bocznej $c = 8$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątne obu podstaw prostopadłościanu. Oblicz pole tego przekroju.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.5.1. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF. Oblicz pole trójkąta ABF, wiedząc, że $|AB| = 8$ i $|CF| = 11$. Narysuj ten graniastosłup i zaznacz na nim trójkąt ABF. Z.9.5.1

9.5.2. Prostopadłościan o krawędziach podstawy $a = 4$ i $b = 6$ oraz długości krawędzi bocznej $c = 8$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątne obu podstaw prostopadłościanu. Oblicz pole powstałego przekroju. Z.9.5.2

9.5.3. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 10, a pole trójkąta ABF jest równe 70. Oblicz wysokość tego graniastosłupa. Z.9.5.3



MATURA MATURA MATURA

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.9.5

9.5.4. Przekrojem sześcianu nie może być:

A. punkt, **B.** odcinek, **C.** pięciokąt, **D.** siedmiokąt.

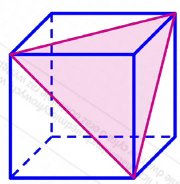
9.5.5. Sześcian o krawędzi 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez równoległe przekątne naprzeciwległych ścian. Pole powierzchni tego przekroju wynosi:

A. 16 **B.** $16\sqrt{2}$ **C.** $16\sqrt{3}$ **D.** 32

9.5.6. W sześcianie poprowadzono przekrój przez przekątne sąsiednich ścian bocznych (zobacz rysunek). Jeśli obwód tego przekroju wynosi $6\sqrt{2}$, to krawędź podstawy sześcianu ma długość:

A. 12 **C.** 6

B. 4 **D.** 2



9.5.7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S poprowadzono przekrój przez przekątną podstawy i wierzchołek. Przekrój ten jest zawsze trójkątem:

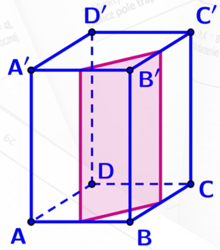
A. prostokątnym,

B. równobocznym,

C. równoramiennym,

D. różnobocznym.

9.5.8. Dany jest graniastosłup $ABCDA'B'C'D'$, który przecięto płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i przecinającą krawędzie tej podstawy w połowie (zobacz rysunek). Wiedząc, że krawędź podstawy wynosi 4, a wysokość graniastosłupa 8, można stwierdzić, że pole powierzchni tego przekroju wynosi:



A. $32\sqrt{2}$

B. 16

C. 32

D. $16\sqrt{2}$

Czy wiesz, że...

Crystal Cube jest budynkiem, w formie sześcianu, zbudowany z lustrzanego szkła. Ulokowany na szczycie góry (2596m Zwölferkopf) w pobliżu miejscowości Fiss w Tyrolu w Austrii. Znajduje się tam znakomita restauracja.

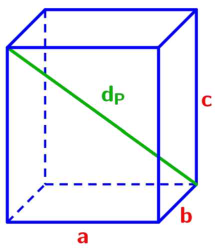
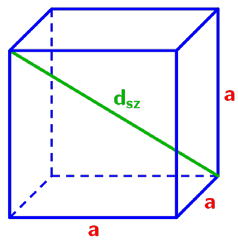
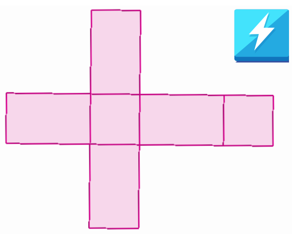
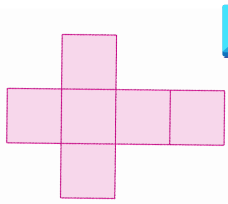
9.6 ▶ Stosowanie trygonometrii do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości

▶ Graniastosłupy — objętość i pole powierzchni

W każdym graniastosłupie pole powierzchni całkowitej oraz objętość możemy obliczyć z następujących wzorów:

WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = P_{podstawy} \cdot H$ gdzie H — wysokość graniastosłupa	P.9.6.1
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2 \cdot P_{podstawy} + P_{powierzchni\ bocznej}$	

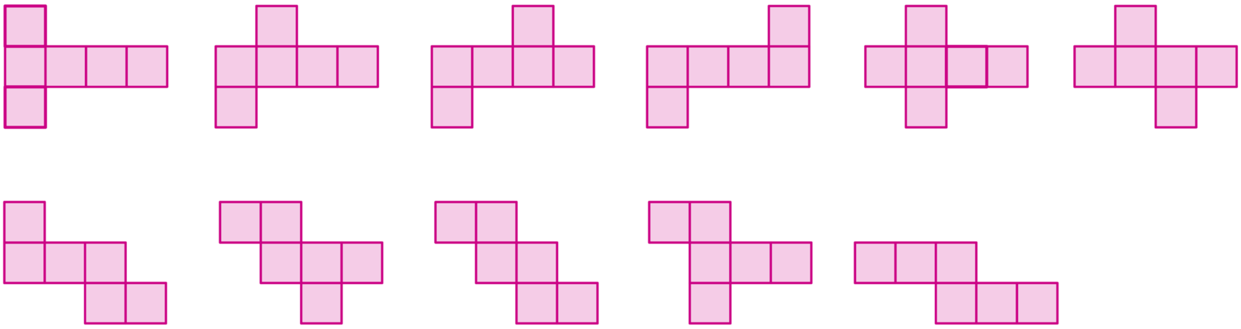
▶ Sześcian i prostopadłościan — obliczanie objętości i pól powierzchni

BRYŁA	PROSTOPADŁOŚCIAN	SZEŚCIAN
	P.9.6.2  	P.9.6.4 
DEFINICJA	Prostopadłościan to graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt.	Sześcian to prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych.
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = abc$	$V = a^3$
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$	$P_c = 6a^2$
INNE WAŻNE INFORMACJE	a, b, c — krawędzie prostopadłościanu d_p — przekątna prostopadłościanu $d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	a — krawędź sześcianu d_{sz} — przekątna sześcianu $d_{sz} = a\sqrt{3}$
SIATKA BRYŁY	 P.9.6.3	 P.9.1.9

Czy wiesz, że...

P.9.6.6

Istnieje 11 rodzajów możliwych siatek sześcianu.



PRZYKŁAD 1

P.9.6.7

Oblicz V i P_c sześcianu o krawędzi $a = 8$.

1° Korzystamy ze wzoru na pole powierzchni całkowitej sześcianu: $P_c = 6a^2$. $\quad P_c = 6 \cdot 8^2 = 6 \cdot 64 = 384$ j²

2° Korzystamy ze wzoru na objętość sześcianu: $V = a^3$ $\quad V = 8^3 = 512$ j³

3° Objętość sześcianu wynosi 512 j³, a pole powierzchni całkowitej 384 j².

PRZYKŁAD 2

P.9.6.7

Oblicz objętość sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej $P_c = 294$ j².

1° Aby obliczyć objętość sześcianu, musimy znać długość krawędzi, którą obliczymy, korzystając ze wzoru na pole powierzchni całkowitej sześcianu: $P_c = 6a^2$.

$$P_c = 6a^2 = 294$$
$$6a^2 = 294 \quad |:6$$
$$a^2 = 49 \quad (a > 0)$$
$$a = \sqrt{49} = 7$$

2° Obliczymy objętość sześcianu, korzystając ze wzoru: $V = a^3$. $\quad V = 7^3 = 343$ j³

3° Objętość sześcianu wynosi 343 j³.

PRZYKŁAD 3

P.9.6.7

Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o objętości $V = 125$ j³.

1° Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej sześcianu, musimy znać długość krawędzi, którą obliczymy, korzystając ze wzoru na objętość sześcianu: $V = a^3$.

$$V = a^3 = 125$$
$$a = \sqrt[3]{125} \quad (a > 0)$$
$$a = 5$$

2° Obliczamy pole powierzchni całkowitej sześcianu, korzystając ze wzoru: $P_c = 6a^2$. $\quad P_c = 6 \cdot 5^2 = 150$ j²

3° Pole powierzchni całkowitej sześcianu wynosi 150 j^2.

PRZYKŁAD 4

P.9.6.7

Przekątna sześcianu wynosi $d = 6\sqrt{3}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi sześcianu.

1° Korzystamy ze wzoru na przekątną sześcianu, aby obliczyć krawędź sześcianu.

$d = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \quad |: \sqrt{3}$

$a = 6$

2° Sześcian ma 12 krawędzi, więc obliczamy ich sumę.

$S_{krawędzi} = 12a = 12 \cdot 6 = 72$

3° Suma długości krawędzi sześcianu wynosi 72.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.6.1. Oblicz V i P_c sześcianu o krawędzi $a = 11$. Z.9.6.1

9.6.2. Oblicz objętość sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej $P_c = 486$ j^2. Z.9.6.2

9.6.3. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu o objętości $V = 1728$ j^3. Z.9.6.3

9.6.4. Przekątna sześcianu wynosi $d = 10\sqrt{3}$. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi sześcianu. Z.9.6.4

9.6.5. Przekątna podstawy sześcianu wynosi 20. Oblicz przekątną tego sześcianu.

9.6.6. Przekątna sześcianu jest o 4 dłuższa od jego krawędzi. Oblicz długość krawędzi sześcianu.

PRZYKŁAD 1

P.9.6.8

Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach 6, 8, 24.

1° Korzystamy ze wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2}$

$d = \sqrt{36 + 64 + 576}$

$d = \sqrt{676} = 26$

2° Długość przekątnej wynosi 26.

PRZYKŁAD 2

P.9.6.8

Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, w którym stosunek krawędzi wynosi 3 : 5 : 7, a objętość 840 j^3.

1° Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, musimy znać długość krawędzi, którą obliczymy, korzystając z objętości.

$V = abc = 840$

2° Wprowadzamy zmienną pomocniczą x i korzystamy ze stosunku długości krawędzi.

$$3x \cdot 5x \cdot 7x = 840$$
$$105x^3 = 840 \quad |: 105$$
$$x^3 = 8 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2$$
$$a = 3 \cdot 2 = 6$$
$$b = 5 \cdot 2 = 10$$
$$c = 7 \cdot 2 = 14$$

3° Obliczamy pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu ze wzoru: $P_c = 2ab + 2bc + 2ac$.

$$P_c = 2 \cdot 6 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 14 + 2 \cdot 6 \cdot 14 =$$
$$= 120 + 280 + 168 = 568 \text{ j}^2$$

4° Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi 568 j^2.

PRZYKŁAD 3

P.9.6.8

Oblicz objętość prostopadłościanu o stosunku długości krawędzi 2 : 5 : 6, wiedząc, że pole powierzchni całkowitej wynosi 936 j^2.

1° Aby obliczyć objętość prostopadłościanu, musimy znać długość krawędzi, którą obliczymy, korzystając z pola powierzchni całkowitej.

$$P_c = 2ab + 2bc + 2ac = 936$$

2° Wprowadzamy zmienną pomocniczą x $(x > 0)$ i korzystamy ze stosunku długości krawędzi.

$$2 \cdot 2x \cdot 5x + 2 \cdot 5x \cdot 6x + 2 \cdot 2x \cdot 6x = 936$$
$$20x^2 + 60x^2 + 24x^2 = 936$$
$$104x^2 = 936 \quad |: 104$$
$$x^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x = 3$$
$$a = 2 \cdot 3 = 6$$
$$b = 5 \cdot 3 = 15$$
$$c = 6 \cdot 3 = 18$$

3° Obliczamy objętość prostopadłościanu ze wzoru: $V = abc$.

$$V = 6 \cdot 15 \cdot 18 = 1620 \text{ j}^3$$

4° Objętość prostopadłościanu wynosi 1620 j^3.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.6.7. Oblicz długość przekątnej prostopadłościanu o wymiarach 9, 12, 15. Z.9.6.7

9.6.8. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, w którym stosunek krawędzi wynosi 3 : 2 : 7, a objętość 1134 j^3. Z.9.6.8

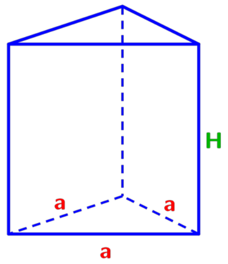
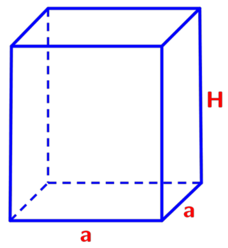
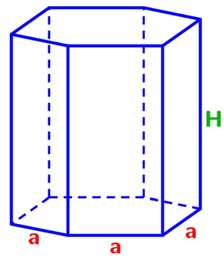
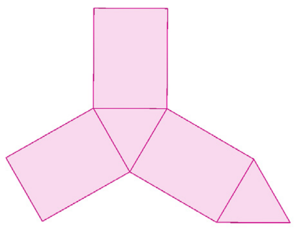
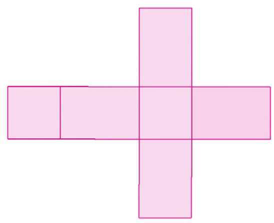
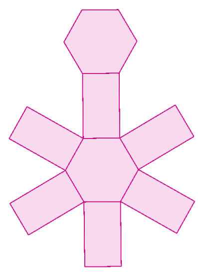
9.6.9. Oblicz objętość prostopadłościanu o stosunku długości krawędzi 3 : 4 : 8, wiedząc, że pole powierzchni całkowitej wynosi 136 j^2. Z.9.6.9

9.6.10. Krawędzie podstawy prostopadłościanu odpowiednio mają długość 3 cm i 4 cm. Oblicz objętość tego prostopadłościanu, wiedząc, że jego przekątna wynosi 13 cm.

9.6.11. Pole powierzchni prostopadłościanu wynosi 88 cm^2. Oblicz objętość tego prostopadłościanu, wiedząc, że jedna z krawędzi podstawy jest dwa razy dłuższa od drugiej, a krawędź boczna jest równa 6.

9.6.12. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi 3 : 4 : 5. Oblicz objętość tego prostopadłościanu, wiedząc, że jego przekątna ma długość $5\sqrt{2}$.

► Graniastosłupy prawidłowe — obliczanie objętości i pól powierzchni

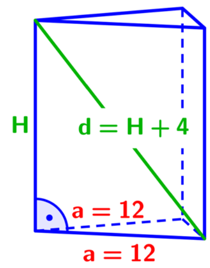
BRYŁA	GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY TRÓJKĄTNY	GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY CZWOROKĄTNY	GRANIASTOSŁUP PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY
	P.9.6.9	P.9.6.12	P.9.6.15
			
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$	$V=a^2\cdot H$	$V=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=$ $=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot H$
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3aH=$ $=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3aH$	$P_c=2a^2+4aH$	$P_c=2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+6aH=$ $=3a^2\sqrt{3}+6aH$
INNE WAŻNE INFORMACJE	a — krawędź podstawy H — wysokość graniastosłupa	a — krawędź podstawy H — wysokość graniastosłupa	a — krawędź podstawy H — wysokość graniastosłupa
SIATKA BRYŁY	P.9.6.10 	P.9.6.13 	P.9.6.16 
JAK NARYSOWAĆ BRYŁĘ	P.9.6.11	P.9.6.14	P.9.6.17

PRZYKŁAD 1

P.9.6.18

Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli przekątna ściany jest o 4 dłuższa od wysokości, a krawędź podstawy wynosi 12.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Obliczamy H, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$H^2 + 12^2 = (H+4)^2$$
$$\cancel{H^2} + 144 = \cancel{H^2} + 8H + 16$$
$$-8H = 16 - 144$$
$$-8H = -128 \quad |:(-24)$$
$$H = 16$$

3° Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa ze wzoru:
$P_c = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$

$$P_c = 2 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 12 \cdot 16 =$$
$$= 72\sqrt{3} + 576 \text{ j}^2$$

4° Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wynosi $72\sqrt{3} + 576 \text{ j}^2$.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, jeśli przekątna ściany jest o 2 dłuższa od wysokości, a krawędź podstawy wynosi 6.

PRZYKŁAD

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości 5 jest równa $20\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

1° Aby obliczyć długość krawędzi podstawy, skorzystamy ze wzoru na objętość: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$.

2° Podstawiamy wartości, które są dane, i obliczamy długość krawędzi podstawy.

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 20\sqrt{3}$$
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = 20\sqrt{3}$$
$$\frac{5a^2\sqrt{3}}{4} = 20\sqrt{3} \quad |\cdot 4$$
$$5a^2\sqrt{3} = 80\sqrt{3} \quad |: 5\sqrt{3}$$
$$a^2 = 16 \quad (a > 0)$$
$$a = \sqrt{16} = 4$$

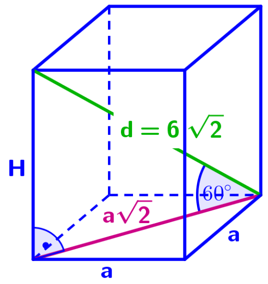
3° Długość krawędzi podstawy wynosi 4.

PRZYKŁAD 1

P.9.6.19

Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o przekątnej długości $6\sqrt{2}$ nachylonej do podstawy pod kątem 60°.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Długość przekątnej podstawy to $a\sqrt{2}$.

3° Korzystamy z funkcji cosinus, aby obliczyć długość a.

$$\cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$
$$2\sqrt{2}\,a = 6\sqrt{2} \quad |: 2\sqrt{2}$$
$$a = 3$$

4° Korzystamy z funkcji sinus, aby obliczyć długość H.

$$\sin 60^\circ = \frac{H}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2H = 6\sqrt{6} \quad |: 2$$
$$H = 3\sqrt{6}$$

5° Obliczamy objętość graniastosłupa ze wzoru: $V = a^2 \cdot H$.

$$V = 3^2 \cdot 3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}\ \text{j}^3$$

6° Objętość graniastosłupa wynosi $27\sqrt{6}\ \text{j}^3$.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

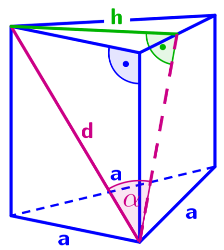
PRZYKŁAD 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym przekątna ściany bocznej o długości $8\sqrt{3}$ tworzy z podstawą kąt 30°.

PRZYKŁAD

P.9.6.20

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $36\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 72. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Korzystamy z danej objętości oraz pola powierzchni całkowitej graniastosłupa. Ze wzoru na pole wyznaczamy H i podstawiamy do wzoru na objętość, aby obliczyć długość a.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 36\sqrt{3}$$
$$P_B = 3aH = 72 \quad |: 3a$$
$$H = \frac{24}{a}$$
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{24}{a} = 36\sqrt{3}$$
$$6\sqrt{3}\,a = 36\sqrt{3} \quad |: 6\sqrt{3}$$
$$a = 6$$

3° Obliczamy długość H, czyli wysokość graniastosłupa. $H = \frac{24}{6} = 4$

4° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć długość d, czyli długość przekątnej ściany bocznej.

$$d^2 = a^2 + H^2$$
$$d^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$
$$d = 2\sqrt{13}$$

5° W podstawie graniastosłupa jest trójkąt równoboczny, więc jego wysokość h obliczamy ze wzoru: $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, gdzie $a = 6$.

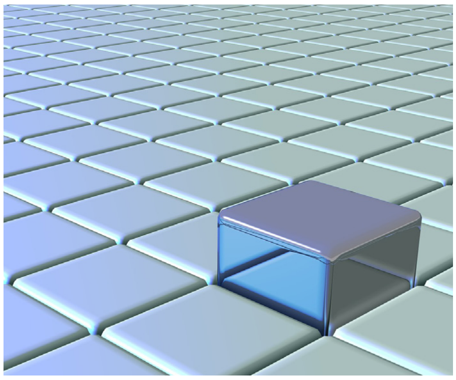
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

6° Obliczamy sinus kąta α.

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{26}$$

7° Sinus kąta wynosi $\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE



9.6.13. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy równej 5 przekątna ściany jest o 1 dłuższa od wysokości. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

9.6.14. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o długości $6\sqrt{2}$ tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

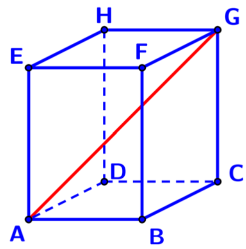
9.6.15. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej wynosi 41, a przekątna podstawy $9\sqrt{2}$. Oblicz objętość graniastosłupa.

9.6.16. Najdłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 12 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz objętość graniastosłupa.

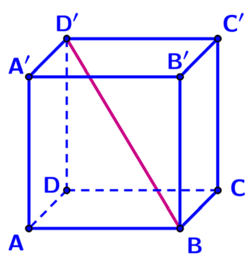
9.6.17. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym, w którym wszystkie krawędzie są równej długości, pole podstawy wynosi $16\sqrt{3}$. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

9.6.18. Objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi $144\sqrt{2}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej, jeżeli krawędź podstawy graniastosłupa wynosi $2\sqrt{6}$.

9.6.19. Przekątna AG graniastosłupa czworokątnego $ABCDEFGH$ o podstawie prostokąta ma długość 13, a stosunek krawędzi podstawy wynosi $3 : 4$ (zobacz rysunek). Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa, wiedząc, że obwód podstawy wynosi 14.



9.6.20. Podstawą graniastosłupa $ABCDA'B'C'D'$ jest prostokąt $ABCD$ (zobacz rysunek), którego krótszy bok ma długość 6, a jego przekątna tworzy z jego dłuższym bokiem kąt 30°. Przekątna BD' graniastosłupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



Z.9.6.20

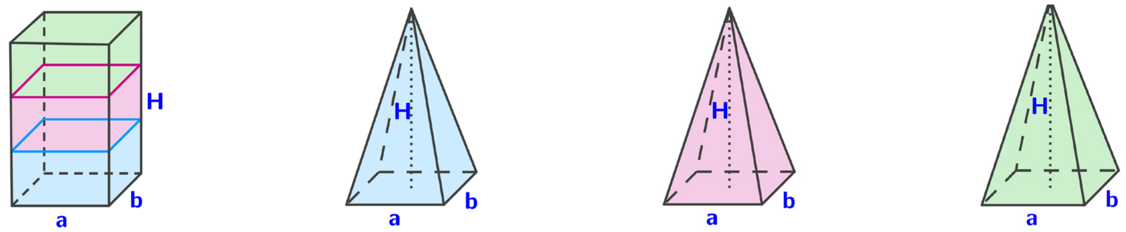
► Ostrosłupy — objętość i pole powierzchni

W każdym ostrosłupie pole powierzchni całkowitej oraz objętość możemy obliczyć z następujących wzorów:

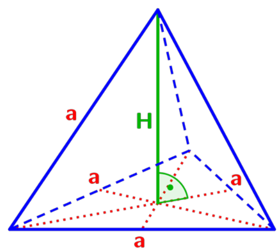
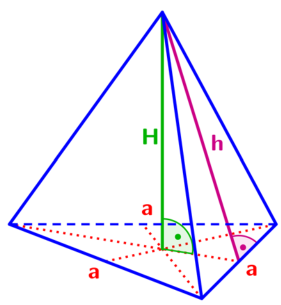
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = \frac{1}{3} P_{podstawy} \cdot H$ gdzie H — wysokość graniastosłupa
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = P_{podstawy} + P_{powierzchni\ bocznej}$

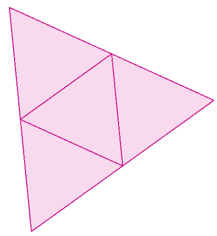
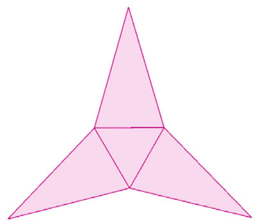
Jeżeli porównamy objętości ostrosłupów i graniastosłupów, to zauważmy, że gdy mamy ostrosłup i graniastosłup o takich samych wymiarach podstaw i wysokości, objętość graniastosłupa jest trzy razy większa od objętości ostrosłupa.

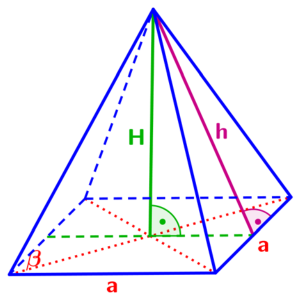
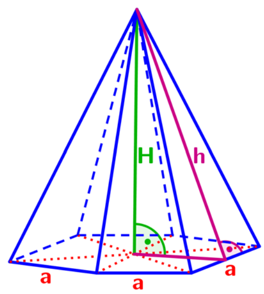
P.9.6.21



► Ostrosłupy prawidłowe — obliczanie objętości i pól powierzchni

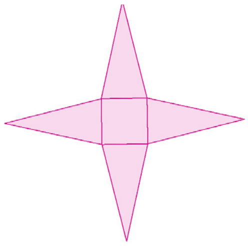
BRYŁA	CZWOROŚCIAN FOREMNY	OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY TRÓJKĄTNY
	P.9.6.22  	P.9.6.25 
DEFINICJA	Czworościan foremny to ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi.	
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot H$

<table>
<tr><td>WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ</td><td>$P_c = a^2\sqrt{3}$</td><td>$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}ah$</td></tr>
<tr><td>INNE WAŻNE INFORMACJE</td><td>a — krawędź czworościanu
H — wysokość czworościanu
$H = a\frac{\sqrt{6}}{3}$</td><td>a — krawędź podstawy
H — wysokość ostrosłupa
h — wysokość ściany bocznej</td></tr>
<tr><td>SIATKA BRYŁY</td><td>P.9.1.8
</td><td>P.9.6.26
</td></tr>
<tr><td>JAK NARYSOWAĆ BRYŁĘ</td><td>P.9.6.24</td><td>P.9.6.27</td></tr>
</table>

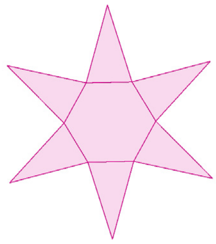
<table>
<tr><td>BRYŁA</td><td>OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY CZWOROKĄTNY
P.9.6.28

</td><td>OSTROSŁUP PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY
P.9.6.31

</td></tr>
<tr><td>WZÓR NA OBJĘTOŚĆ</td><td>$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$</td><td>$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$</td></tr>
<tr><td>WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ</td><td>$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ah =$
$= a^2 + 2ah$</td><td>$P_c = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2}ah =$
$= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$</td></tr>
<tr><td>INNE WAŻNE INFORMACJE</td><td>a — krawędź podstawy
H — wysokość ostrosłupa
h — wysokość ściany bocznej</td><td>a — krawędź podstawy
H — wysokość ostrosłupa
h — wysokość ściany bocznej</td></tr>
</table>

SIATKA BRYŁY

P.9.6.29



P.9.6.32



JAK NARYSOWAĆ BRYŁĘ

P.9.6.30

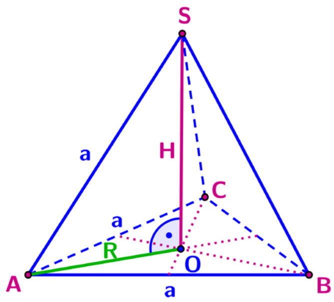
P.9.6.33

PRZYKŁAD 1

P.9.6.34

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi $a = 9$.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Obliczamy długość odcinka AO, który jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym, ze wzoru: $R = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, gdzie h_p to wysokość podstawy.

$$R = \frac{2}{3}h_p = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle AOS$, aby obliczyć długość H, czyli wysokość czworościanu.

$$H^2 + R^2 = a^2$$
$$H^2 + (3\sqrt{3})^2 = 9^2$$
$$H^2 = 81 - 27$$
$$H = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

4° Obliczamy objętość czworościanu, korzystając ze wzoru: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$.

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{9^2\sqrt{3}}{4} \cdot \cancel{3}\sqrt{6} = \frac{81\sqrt{18}}{4} = \frac{243\sqrt{2}}{4}\ \text{j}^3$$

5° Obliczamy pole powierzchni całkowitej czworościanu, korzystając ze wzoru: $P_c = a^2\sqrt{3}$.

$$P_c = 9^2\sqrt{3} = 81\sqrt{3}\ \text{j}^2$$

6° Objętość czworościanu wynosi $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ j^3, a pole powierzchni całkowitej wynosi $81\sqrt{3}$ j^2.

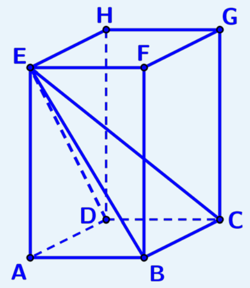
PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi $a = 6$.

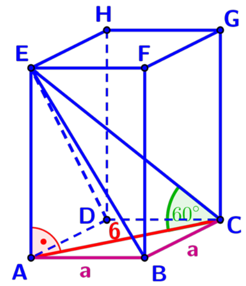
PRZYKŁAD

P.9.6.35

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 6. Kąt ACE jest równy 60°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ (zobacz rysunek).



1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Wiedząc, że przekątna kwadratu w podstawie równa jest 6, obliczamy długość boku ze wzoru: $d = a\sqrt{2}$.

$$a\sqrt{2} = 6 \quad |: \sqrt{2}$$
$$a = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

3° Korzystamy z funkcji tangens w trójkącie ACE, żeby obliczyć H.

$$\text{tg } 60^{\circ} = \frac{H}{6}$$
$$\sqrt{3} = \frac{H}{6} \quad \Big| \cdot 6$$
$$H = 6\sqrt{3}$$

4° Obliczamy objętość ostrosłupa $ABCDE$ ze wzoru: $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 6\sqrt{3} =$$
$$= \frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \overset{6}{\cancel{18}} \cdot 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ \text{j}^3$$

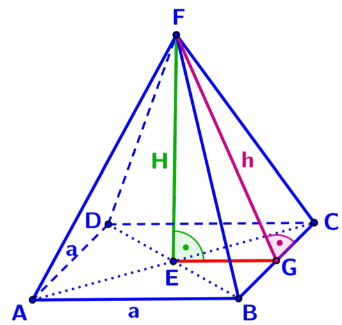
5° Objętość ostrosłupa wynosi $36\sqrt{3}\ \text{j}^3$.

PRZYKŁAD

P.9.6.36

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 256 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 544 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.



2° Obliczamy długość krawędzi podstawy, wiedząc, że podstawa jest kwadratem.

$$a^2 = 256$$
$$a = \sqrt{256} = 16$$

3° Układamy równanie, wykorzystując pole powierzchni bocznej.

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 544$$

4° Podstawiamy za $a = 16$ i obliczamy wysokość ściany bocznej.

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h = 544$$
$$32h = 544 \quad |: 32$$
$$h = 17$$

5° Obliczamy wysokość H ostrosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle EGF$, wiedząc, że $|EG| = \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

$$H^2 + 8^2 = 17^2$$
$$H^2 = 298 - 64$$
$$H^2 = 225 \quad \rightarrow \quad H = \sqrt{225} = 15$$

6° Obliczamy objętość ostrosłupa ze wzoru: $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$.

$$V = \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \cdot 256 \cdot \cancel{15}^{5} = 1280 \text{ cm}^3$$

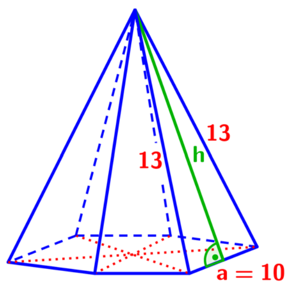
7° Objętość ostrosłupa wynosi 1280 cm^3.

PRZYKŁAD

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 10, a krawędź boczna 13. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy z oznaczeniami.

2° Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, musimy znać długość wysokości ściany bocznej h.



3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2$$
$$h^2 + 5^2 = 13^2$$
$$h^2 = 169 - 25$$
$$h^2 = 144 \quad (h > 0) \quad \rightarrow \quad h = 12$$

4° Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa ze wzoru: $P_c = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

$$P_c = \cancel{6}^{3} \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 =$$
$$= 150\sqrt{3} + 360 \text{ j}^2$$

5° Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi $150\sqrt{3} + 360 \text{ j}^2$.

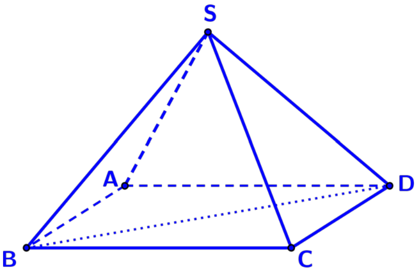
ZADANIA UTRWALAJĄCE

9.6.21. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej wynosi $144\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

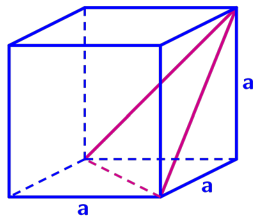
9.6.22. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź boczna o długości 8 tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45°.

9.6.23. Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 144, a krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

9.6.24. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ (zobacz rysunek) przekątna BD podstawy ma długość $6\sqrt{2}$. Kąt BSD między przeciwległymi krawędziami bocznymi ostrosłupa jest kątem prostym. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



9.6.25. Z sześcianu o krawędzi a odcięto ostrosłup (zobacz rysunek). Oblicz, ile razy objętość tego ostrosłupa jest mniejsza od pozostałej części sześcianu.



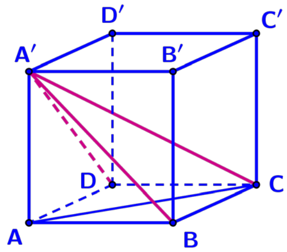
Z.9.6.25

9.6.26. Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 20, a sinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

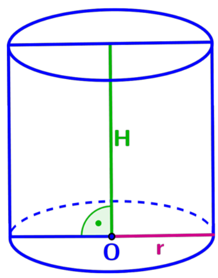
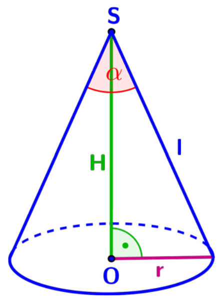
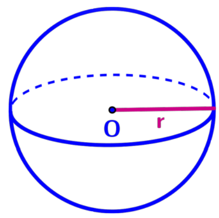
9.6.27. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DS jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AS, BS i CS mają następujące długości: $|AS| = 13$, $|BS| = 5\sqrt{10}$, $|CS| = 15$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Z.9.6.27

9.6.28. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDA'B'C'D'$ przekątna AC podstawy ma długość $4\sqrt{3}$. Kąt ACA' jest równy 30°. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDA'$ (zobacz rysunek).



► Bryły obrotowe — obliczanie objętości i pól powierzchni

BRYŁA	WALEC P.9.3.1	STOŻEK P.9.3.5	KULA P.9.3.9
			
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = \pi r^2 \cdot H$	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot H$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi r H$	$P_c = \pi r^2 + \pi r l$	$P = 4\pi r^2$
INNE WAŻNE INFORMACJE	r — promień H — wysokość	r — promień H — wysokość	r — promień

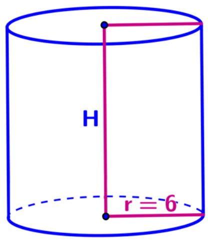
Jeżeli porównamy objętości stożka i walca o równych promieniach i wysokościach, to zauważmy, że objętość walca jest trzy razy większa od objętości stożka. P.9.6.37

PRZYKŁAD 1

P.9.6.38

Prostokąt o krótszym boku równym 6 obraca się wokół dłuższego boku. Pole powierzchni bocznej wynosi 96π. Oblicz objętość tej bryły.

1° W wyniku obrotu prostokąta otrzymujemy walec.



2° Układamy równanie, korzystając ze wzoru: $P_b = 2\pi rH$ i obliczamy H.

$$2\pi rH = 96\pi$$
$$2\pi \cdot 6 \cdot H = 96\pi$$
$$12\pi H = 96\pi \quad |: 12\pi$$
$$H = 8$$

3° Obliczamy objętość walca ze wzoru: $V = \pi r^2 \cdot H$.

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 288\pi \text{ j}^3$$

4° Objętość bryły wynosi 288π j^3.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

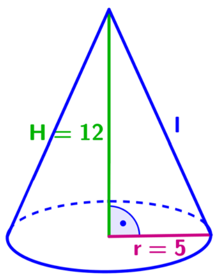
PRZYKŁAD 2. Prostokąt o krótszym boku równym 3 obraca się wokół dłuższego boku. Pole powierzchni bocznej wynosi 30π. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej bryły.

PRZYKŁAD 1

P.9.6.39

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 5 obraca się wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość powstałej bryły.

1° W wyniku obrotu trójkąta prostokątnego otrzymujemy stożek.



2° Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy tworzącą.

$$l^2 = H^2 + r^2$$
$$l^2 = 12^2 + 5^2$$
$$l^2 = 144 + 25$$
$$l = \sqrt{169} = 13$$

3° Obliczamy pole powierzchni całkowitej stożka ze wzoru: $P_c = \pi r^2 + \pi r l$.

$$P_c = \pi 5^2 + \pi 5 \cdot 13 = 25\pi + 65\pi = 90\pi \text{ j}^2$$

4° Obliczamy objętość stożka ze wzoru: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ j}^3$$

5° Pole powierzchni całkowitej stożka wynosi 90π j^2, a jego objętość 100π j^3.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 8 i 6 obraca się wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość powstałej bryły.

PRZYKŁAD 1

P.9.6.40

Oblicz pole powierzchni całkowitej kuli o objętości 288π j^3.

1° Układamy równanie, korzystając ze wzoru na objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ i obliczamy r, czyli długości promienia.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288\pi \quad |\cdot 3$$
$$4r^3\pi = 864\pi \quad |: 4\pi$$
$$r^3 = 216 \quad \rightarrow \quad r = 6$$

2° Obliczamy pole powierzchni całkowitej kuli ze wzoru: $P_c = 4\pi r^2$.

$$P_c = 4 \cdot 6^2 \cdot \pi = 144\pi \text{ j}^2$$

3° Pole powierzchni całkowitej kuli wynosi 144π j^2.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

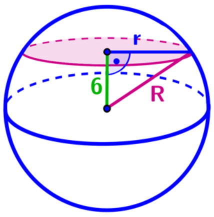
PRZYKŁAD 2. Oblicz objętość kuli o polu powierzchni całkowitej równym 324π j^2.

PRZYKŁAD

P.9.6.41

Przekrój kuli o powierzchni 64π cm^2 jest oddalony od środka kuli o 6 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej kuli.

1° Wykonujemy rysunek pomocniczy wraz z oznaczeniami.



2° Przekrój kuli jest kołem, więc układamy równanie, wykorzystując pole koła i obliczamy długość promienia przekroju r.

$$\pi r^2 = 64\pi \quad |: \pi$$
$$r = \sqrt{64} = 8$$

3° Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa, aby obliczyć długość promienia kuli R.

$$6^2 + r^2 = R^2$$
$$6^2 + 8^2 = R^2$$
$$36 + 64 = R^2$$
$$R^2 = 100$$
$$R = \sqrt{100} = 10$$

4° Obliczamy pole powierzchni całkowitej kuli ze wzoru: $P_c = 4\pi R^2$.

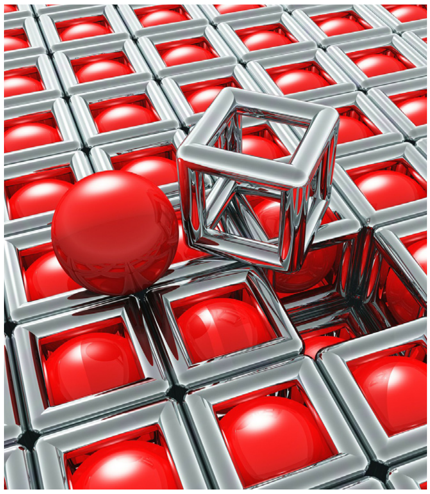
$$P_c = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi \text{ cm}^2$$

5° Obliczamy objętość kuli ze wzoru: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1000 = \frac{4000}{3}\pi =$$
$$= 1333\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^3$$

6° Objętość kuli wynosi $1333\frac{1}{3}\pi$ cm^3, a pole powierzchni całkowitej 400π cm^2.

ZADANIA UTRWALAJĄCE



9.6.29. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o przekątnej $8\sqrt{2}$. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

9.6.30. Pole powierzchni bocznej stożka wynosi 65π, a średnica tego stożka ma długość 10. Oblicz objętość stożka.

9.6.31. Kulę przecięto płaszczyzną tworzącą przekrój o największej powierzchni równej 324π cm^2. Oblicz objętość kuli.

9.6.32. Trójkąt równoramienny o podstawie długości 16 cm i ramionach o 1 cm dłuższych od podstawy obrócono wokół osi symetrii trójkąta. Oblicz pole powierzchni całkowitej powstałej w wyniku obrotu bryły.

9.6.33. Objętość walca o wysokości 7 jest równa 112π. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

9.6.34. Kąt rozwarcia stożka wynosi 120°, a długość tworzącej jest równa $8\sqrt{3}$. Oblicz objętość stożka.

9.6.35. Przekątna przekroju osiowego walca jest o 2 dłuższa od średnicy, a wysokość walca jest równa 6. Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

9.6.36. W sześcian o krawędzi 10 wpisano kulę. Oblicz pole powierzchni całkowitej tej kuli.

9.6.37. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 15 i 8 obraca się wokół dłuższej przyprostokątnej. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość powstałej bryły. Z.9.6.37

9.6.38. Prostokąt o krótszym boku równym 5 obraca się wokół dłuższego boku. Pole powierzchni bocznej powstałej bryły wynosi 70π. Oblicz objętość tej bryły. Z.9.6.38

9.6.39. Oblicz pole powierzchni całkowitej kuli o objętości $1333\frac{1}{3}\pi$ j^3. Z.9.6.39

9.6.40. Przekrój kuli jest oddalony od środka od 9 cm. Oblicz pole powierzchni tego przekroju, wiedząc, że objętość kuli wynosi 4500π cm^3.

9.6.41. Objętość sześcianu jest równa 512. Pole powierzchni całkowitej tego sześcianu jest równe:

A. 256 **B.** 384 **C.** 128 **D.** 64

9.6.42. Dany jest sześcian o krawędzi $2\sqrt{2}\,a$. Przekątna sześcianu ma długość:

A. $\sqrt{6}\,a$ **B.** $2\sqrt{3}\,a$ **C.** $\sqrt{3}\,a$ **D.** $2\sqrt{6}\,a$

9.6.43. Przekątna prostopadłościanu o krawędziach 6, 8 i 24 ma długość:

A. 25 **B.** 10 **C.** 26 **D.** $5\sqrt{26}$

9.6.44. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $2 \times 4 \times 7$ jest równe:

A. 112 **B.** 56 **C.** 50 **D.** 100

9.6.45. Długość przekątnej sześcianu, którego pole powierzchni całkowitej jest równe 96, wynosi:

A. $2\sqrt{6}$ **B.** 6 **C.** 4 **D.** $4\sqrt{3}$

9.6.46. Graniastosłup prawidłowy trójkątny ma wszystkie krawędzie tej samej długości. Suma długości wszystkich krawędzi jest równa 36. Wtedy objętość tego graniastosłupa jest równa:

A. $16\sqrt{3}$ **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** $4\sqrt{8}$ **D.** $18\sqrt{6}$

9.6.47. Pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o krawędzi 11 wynosi:

A. 44 **B.** 121 **C.** $121\sqrt{2}$ **D.** $121\sqrt{3}$

9.6.48. Objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 108, a krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 6. Wysokość tego ostrosłupa jest równa:

A. 3 **B.** 9 **C.** 12 **D.** 18

9.6.49. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 4 i wysokości trzy razy dłuższej niż krawędź podstawy. Objętość tego ostrosłupa wynosi:

A. $288\sqrt{3}$ **B.** $48\sqrt{3}$ **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** $144\sqrt{3}$

9.6.50. Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 6, jest równe:

A. 45π **B.** 48π **C.** 36π **D.** 54π

9.6.51. Kwadrat o przekątnej $5\sqrt{2}$ obracamy wokół jednego z boków. Objętość powstałego walca jest równa:

A. $31{,}25\pi$ **B.** 125π **C.** 500π **D.** $\frac{125}{3}\pi$

9.6.52. Objętość walca o promieniu podstawy 4 jest równa 96π. Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe:

A. 16π **B.** 24π **C.** 32π **D.** 48π

9.6.53. Tworząca stożka ma długość 6 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Pole powierzchni bocznej stożka jest równe:

A. 9π **B.** 18π **C.** $9\sqrt{3}\pi$ **D.** $6\sqrt{6}\pi$

9.6.54. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku c. Pole powierzchni całkowitej stożka ma postać:

A. πc^2 **B.** $\frac{\pi c^2}{2}$ **C.** $\frac{3\pi c^2}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}c^2$

9.6.55. Objętość stożka, w którym wysokość jest równa 6, a średnica podstawy 8, jest równa:

A. 144π **B.** 96π **C.** 48π **D.** 32π

9.6.56. Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 6 i 8 obracamy wokół krótszej przyprostokątnej. Objętość powstałego stożka jest równa:

A. 128π **B.** 64π **C.** 96π **D.** 48π

9.6.57. Pole powierzchni bocznej stożka o promieniu 8 wynosi 136π. Wysokość tego stożka jest równa:

A. $\sqrt{33}$ **B.** 15 **C.** 33 **D.** $\sqrt{353}$

9.6.58. Kula ma objętość $V = 36\pi$. Średnica tej kuli wynosi:

A. 3 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 18

MATURA — ZADANIA OTWARTE

9.6.59. Oblicz pole powierzchni całkowitej sześcianu, którego długość przekątnej wynosi 6. **2 pkt**

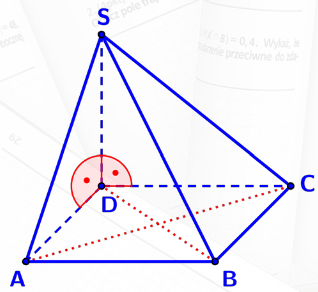
9.6.60. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $2 : 3 : 5$, a jego objętość $240\ \text{cm}^3$. Oblicz długość wszystkich krawędzi tego graniastosłupa. **2 pkt**

9.6.61. Objętość walca o wysokości 8 jest równa 72π. Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca. **2 pkt**

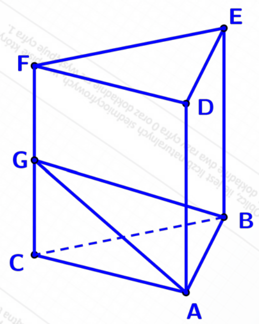
9.6.62. Stosunek długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $2 : 3 : 4$. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej wynosi $208\ cm^2$, oblicz długość przekątnej prostopadłościanu. **4 pkt**

9.6.63. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchi całkowitej, wiedząc, że objętość graniastosłupa wynosi 128. **4 pkt**

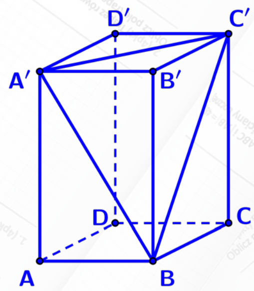
9.6.64. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$ (zobacz rysunek). Krawędź boczna DS jest wysokością tego ostrosłupa. Długości krawędzi bocznych AS, BS i CS są następujące: $|AS| = 8$, $|BS| = 8\sqrt{2}$, $|CS| = 10$. Oblicz objętość tego ostrosłupa. **4 pkt**



9.6.65. Dany jest graniatosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 6, a pole trójkąta ABG jest równe 27. Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że $|CG| = |GF|$. **4 pkt**



9.6.66. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDA'B'C'D'$, w którym wysokość jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Suma długości wszystkich krawędzi tego graniastosłupa wynosi 80. Z graniastosłupa odcięto ostrosłup trójkątny $A'B'C'B$ (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta $A'C'B$. **5 pkt**



9.6.67. Przekątna przekroju osiowego walca jest o 2 dłuższa od wysokości tego walca. Oblicz objętość walca, jeśli promień jego podstawy jest równy 4. **4 pkt**

9.6.68. Tworząca stożka ma długość 25, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 10. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka. **5 pkt**

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

9.1.1. **a.** $ABCD \parallel EFGH$, $ABFE \parallel CDGH$, $BCGF \parallel ADHE$

b. $ABFE \perp ABCD$, $ABFE \perp BCGF$, $ABFE \perp ADHE$, $ABFE \perp EFGH$,
$CDHG \perp EFGH$, $CDHG \perp BCGF$, $CDHG \perp ADHE$, $CDHG \perp ABCD$,
$BCGF \perp EFGH$, $BCGF \perp ABCD$, $ADHE \perp EFGH$, $ADHE \perp ABCD$

P.9.1.3 PRZYKŁAD 2. $AB, AD, EH, EF, HG, DC, FG, BC$

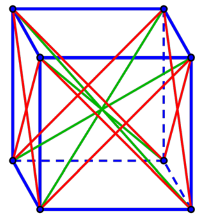
PRZYKŁAD 3. EH, BC, AD

PRZYKŁAD 4. $HE, GF, GC, HD, AD, BC, BF, AE$

9.1.2. **a.** $AB, AD, DD', BB', B'C', C'D'$

b. $BC, CD, AA', CC', A'B', A'D'$

9.1.3.



9.1.4.

GRANIASTOSŁUP	Liczba			
	Ścian	Wierzchołków	Krawędzi	Przekątnych graniastosłupa
TRÓJKĄTNY	5	6	9	0
CZWOROKĄTNY	6	8	12	4
PIĘCIOKĄTNY	7	10	15	10
SZEŚCIOKĄTNY	8	12	18	18
OŚMIOKĄTNY	10	16	24	40
DZIESIĘCIOKĄTNY	12	20	30	70
n-KĄTNY*	$n+2$	$2n$	$3n$	$n(n-3)$

9.1.5. **a.** Tak, ponieważ liczba krawędzi graniastosłupa to $3n$, a liczba 21 jest podzielna przez 3.

b. Tak, ponieważ liczba krawędzi graniastosłupa to $3n$, a liczba 33 jest podzielna przez 3.

9.1.6. **a.** Tak, ponieważ graniastosłup posiada parzystą liczbę wierzchołków.

b. Nie, ponieważ liczba 41 jest liczbą nieparzystą.

9.1.7. **a.** 28 **b.** 16

9.1.8.

OSTROSŁUP	Liczba		
	Ścian	Wierzchołków	Krawędzi
TRÓJKĄTNY	4	4	6
CZWOROKĄTNY	5	5	8
PIĘCIOKĄTNY	6	6	10
SZEŚCIOKĄTNY	7	7	12
OŚMIOKĄTNY	9	9	16
DWUNASTOKĄTNY	13	13	24
n-KĄTNY*	$n+1$	$n+1$	$2n$

9.1.9. **a.** Tak, jest to ostrosłup sześciokątny.

b. Tak, jest to ostrosłup czternastokątny.

c. Nie, ponieważ liczba krawędzi ostrosłupa to $2n$, a liczba 5 nie jest podziena przez 2.

9.1.10. **a.** 10 **b.** 10

9.1.11. $\alpha = 45^\circ$

9.1.12. $\alpha = 60^\circ$

9.1.13. $\alpha = 45^\circ$

9.1.14. B **9.1.15.** A **9.1.16.** C **9.1.17.** A **9.1.18.** D
9.1.19. C **9.1.20.** D **9.1.21.** C **9.1.22.** C **9.1.23.** D
9.1.24. $\alpha = 30^\circ$ **9.1.25.** $\alpha = 90^\circ$

P.9.2.5 PRZYKŁAD 2. $\alpha = 60^\circ$

9.2.1. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

9.2.2. $\alpha = 30^\circ$

9.2.3. D **9.2.4.** D **9.2.5.** A **9.2.6.** C **9.2.7.** A
9.2.8. B
9.2.9. $\alpha = 30^\circ$ **9.2.10.** $H = 3\sqrt{2}$
9.2.11. $a = 6$ **9.2.12.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

P.9.3.10 PRZYKŁAD 2. $l = 17$

9.3.1. $l = 10$

9.3.2. $H = 8$

9.3.3. $\alpha = 120^\circ$

9.3.4. $d = 15$

9.3.5. D **9.3.6.** C **9.3.7.** A **9.3.8.** A **9.3.9.** D
9.3.10. C
9.3.11. $H = 4\sqrt{6}$, $r = 6\sqrt{2}$ **9.3.12.** $r = H = 2\sqrt{10}$

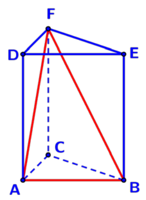
9.4.1. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

9.4.2. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9.4.3. C **9.4.4.** D **9.4.5.** D **9.4.6.** C **9.4.7.** A
9.4.8. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$ **9.4.9.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$

P.9.5.5 PRZYKŁAD 2. $P_{przekroju} = 8\sqrt{61}\ \text{j}^2$

9.5.1.



$P_{ABF} = 52\ \text{j}^2$

9.5.2. $P_{przekroju} = 16\sqrt{3}\ \text{j}^2$

9.5.3. $H = 11$

9.5.4. D **9.5.5.** B **9.5.6.** D **9.5.7.** C **9.5.8.** D

9.6.1. $V = 1331\ \text{j}^3, P_c = 726\ \text{j}^2$

9.6.2. $V = 729\ \text{j}^3$

9.6.3. $P_c = 864\ \text{j}^2$

9.6.4. Suma krawędzi wynosi 120.

9.6.5. $d_{sz} = 10\sqrt{6}$

9.6.6. $a = 2(\sqrt{3} + 1)$

9.6.7. $d = 15\sqrt{2}$

9.6.8. $P_c = 738\ \text{j}^2$

9.6.9. $V = 96\ \text{j}^3$

9.6.10. $V = 144\ \text{cm}^3$

9.6.11. $V = 48\ \text{cm}^3$

9.6.12. $V = 60\ \text{j}^3$

P.9.6.18 PRZYKŁAD 2. $V = 72\ \text{j}^3$

P.9.6.19 PRZYKŁAD 2. $P_c = 96(3 + 2\sqrt{3})\ \text{j}^2$

9.6.13. $V = 75\sqrt{3}\ \text{j}^3$

9.6.14. $P_c = 18(1 + 2\sqrt{6})\ \text{j}^2$

9.6.15. $V = 3240\ \text{j}^3$

9.6.16. $V = 243\ \text{j}^3$

9.6.17. $P_b = 192\ \text{j}^2$

9.6.18. $P_c = 48(1 + 2\sqrt{3})\ \text{j}^2$

9.6.19. $P_b = 168\ \text{j}^2$

9.6.20. $V = 1296\ \text{j}^3$

P.9.6.34 PRZYKŁAD 2. $V = 18\sqrt{2}\ \text{j}^3, P_c = 36\sqrt{3}\ \text{j}^2$

9.6.21. $V = 144\sqrt{2}\ \text{j}^3$

9.6.22. $V = \frac{256\sqrt{2}}{3}\ \text{j}^3$

9.6.23. $V = 768\ \text{j}^3$

9.6.24. $V = 36\sqrt{2}\ \text{j}^3$

9.6.25. Objętość ostrosłupa jest 5 razy mniejsza od pozostałej części sześcianu.

9.6.26. $V = 3072\ \text{j}^3$

9.6.27. $V = 180\ \text{j}^3$

9.6.28. $V = 32\ j^3$

P.9.6.38 PRZYKŁAD 2. $P_c = 48\pi\ j^2$

P.9.6.39 PRZYKŁAD 2. $P_c = 96\pi\ j^2, V = 96\pi\ j^3$

P.9.6.40 PRZYKŁAD 2. $V = 972\pi\ j^3$

9.6.29. $P_b = 64\pi\ j^2$

9.6.30. $V = 100\pi\ j^3$

9.6.31. $V = 7776\pi\ j^3$

9.6.32. $P_c = 200\pi\ cm^2$

9.6.33. $P_b = 56\pi\ j^2$

9.6.34. $V = 192\sqrt{3}\,\pi\ j^3$

9.6.35. $P_b = 48\pi\ j^2$

9.6.36. $P_c = 100\pi\ j^2$

9.6.37. $P_c = 200\pi\ j^2, V = 320\pi\ j^3$

9.6.38. $V = 175\pi\ j^3$

9.6.39. $P_c = 400\pi\ j^2$

9.6.40. $P_{przekroju} = 144\pi\ cm^2$

9.6.41. B	**9.6.42.** D	**9.6.43.** C	**9.6.44.** D	**9.6.45.** D
9.6.46. A	**9.6.47.** D	**9.6.48.** B	**9.6.49.** C	**9.6.50.** D
9.6.51. B	**9.6.52.** D	**9.6.53.** B	**9.6.54.** C	**9.6.55.** D
9.6.56. A	**9.6.57.** B	**9.6.58.** C		

9.6.59. $P_c = 72\ j^2$ **9.6.60.** 4 cm, 6 cm, 10 cm **9.6.61.** $P_b = 48\pi\ j^2$

9.6.62. $d = 2\sqrt{29}$ **9.6.63.** $P_c = 160\ j^2$ **9.6.64.** $V = 32\sqrt{7}\ j^3$

9.6.65. $V = 162\sqrt{2}\ j^3$ **9.6.66.** $P = 8\sqrt{19}\ j^2$ **9.6.67.** $V = 240\,\pi\ j^3$

9.6.68. $P_c = 600\,\pi\ j^2, V = 1500\pi\ j^3$

ISBN: 978-83-63975-20-3

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY