10

Dariusz Kulma

KOMPENDIUM WIEDZY

e laboratorium matematyczne

Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

zakres podstawowy | nowa podstawa programowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Konsultacje merytoryczne: **Witold Pająk**

Opracowanie merytoryczne i redakcyjne: **Małgorzata Zakrzewska, Katarzyna Ciok**

Korekta: **Tomasz Rycharski**

Projekt graficzny i skład komputerowy: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Grafika na okładce: **Paulina Kotomska-Lichniak**

Druk i oprawa:
Drukarnia Beltrani Sp. J.
ul. Śliwkowa 1
31-982 Kraków
tel. 012 262 91 43

Wydanie: Firma Edukacyjno – Wydawnicza ELITMAT Dariusz Kulma
pl. Kilińskiego 7/4, 05-300 Mińsk Mazowiecki
tel. 51-77777-51
e-mail: elitmat@elitmat.pl, www.elitmat.pl

Mińsk Mazowiecki 2015. Wydanie pierwsze

ISBN: 978-83-63975-21-0

Publikacja przygotowana w ramach projektu
„E-laboratorium matematyczne-małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratoriummatematyczne.pl

10

Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Gdyby ktoś zapytał nas, czym jest statystyka, pewnie trudno byłoby nam jednoznacznie odpowiedzieć i podać ścisłą definicję tego pojęcia. Może przyszłyby nam na myśl średnia szkolnych ocen albo wysokość przeciętnego wynagrodzenia, sondaże wyborcze czy zestawienia dotyczące liczby goli strzelonych przez Roberta Lewandowskiego — reprezentanta Polski w piłce nożnej. Słowo „statystyka" pochodzi od łacińskiego słowa „statisticus", które oznacza „polityczny, dotyczący polityki, państwa" (łac. „status" — „państwo, stan"). „Polityka" (od gr. „politike") to z kolei „sztuka rządzenia państwem", do czego wymagana jest strategia działania. Żeby wypracować taką strategię, trzeba obserwować zachodzące w państwie zjawiska społeczne i gospodarcze, umieć je rozpoznawać, opisywać i wyciągać wnioski z ich przebiegu. Pomocą służy tu statystyka, która pozwala analizować tylko pewną reprezentację społeczności i na podstawie tych obserwacji wyciągać wnioski dotyczące całego społeczeństwa.

O pierwszych faktach statystycznych możemy przeczytać już w Biblii. W Księdze Liczb znajdziemy informacje na temat liczebności poszczególnych rodów z uwzględnieniem liczby osób, które mogły brać udział w walkach. Rzymianie regularnie dokonywali powszechnych spisów ludności.

Statystyką posługują się rządy państw, media, przedsiębiorcy, partie polityczne, ale również nauczyciele w szkole czy specjaliści od reklamy. Dzięki statystyce możemy przewidzieć pewne zachowania lub trendy społeczne. Warto jednak wiedzieć, że badania statystyczne, chociaż są pomocne w interpretacji rzeczywistości, mogą ją również zafałszować — wskutek błędów popełnionych przez badaczy lub nawet celowych manipulacji.

Najczęściej wykorzystywanym parametrem statystycznym jest średnia arytmetyczna. Któż z nas nie liczył średniej ocen w szkole? Średnia arytmetyczna ocen 4, 5, 3, 4 to oczywiście 4. Jednak w wielu sytuacjach stosowanie średniej mocno „zaciemnia" obraz. Wyobraźmy sobie firmę, w której 10 pracowników zarabia 2000 zł, 4 — 2500 zł, 2 — 3000 zł, a jeden — 7000 zł. Średnie wynagrodzenie tych 17 osób zatrudnionych w tej firmie wynosi 2529,41 zł. Gdybyśmy teraz nie znali poszczególnych wynagrodzeń danych osób i mieli wyciągnąć wnioski na podstawie tylko średniej arytmetycznej, to można by domniemywać, że losowo wybrana osoba zarabia mniej więcej tyle, ile wynosi średnia. Naturalnie nic bardziej mylnego. 14 pracowników zarabia mniej, niż wynosi średnia arytmetyczna, a więcej zarabia tylko trzech. Rozkład wynagrodzeń nie jest równomierny. Stąd lepszym parametrem będzie mediana zarobków, czyli wartość środkowa uporządkowanych wartości. Medianą zarobków jest wartość 2000 zł. To już jest bliższe realiom. Istnieje bowiem blisko 60% szans, że losowo wybrana osoba z tej firmy będzie zarabiała właśnie taką kwotę. Czasem warto stosować również parametr zwany dominantą, czyli wartością, która występuje najczęściej. W opisywanym przypadku również byłaby to kwota 2000 zł.

Nasze rozważania potwierdzają dane Głównego Urzędu Statystycznego (GUS). Z danych za październik 2012 roku wynika, że przeciętne wynagrodzenie wyniosło 3895,72 zł (dla firm czy instytucji zatrudniających powyżej 9 osób). Jednak 66,1% zatrudnionych osób zarabiała dokładnie tyle lub mniej, a tylko ok. 1/3 więcej. Mediana wynagrodzenia wyniosła 3115,11 zł. Wartość ta dzieli pracowników na dwie równe grupy: osoby zarabiające więcej, niż wynosi mediana, i zarabiające mniej. Co ciekawe — najczęstsze wynagrodzenie (dominanta) wynosiło wtedy 2189,11 zł. Widać wyraźnie, że podawana w mediach średnia arytmetyczna wynagrodzeń osób zatrudnionych nie jest parametrem, który dostatecznie obrazuje rzeczywistość.

Statystyka i kombinatoryka, czyli zliczanie określonych zdarzeń, oraz rachunek prawdopodobieństwa, czyli obliczanie szansy, że dane zdarzenie wystąpi, to dziedziny pokrewne. Wykorzystując je wszystkie, możemy na przykład określić, że porażenie piorunem jest bardziej prawdopodobne niż trafienie szóstki w toto-lotka! A jednak niektórzy wygrywają, bo to „tylko" i „aż" prawdopodobieństwo. „Prawdopodobnie" nie znaczy „zawsze".

Spis treści

Oznaczenia:

DEFINICJA	definicje
PRZYKŁAD	przykład ilustrujący daną definicję
PRZYKŁAD 1	przykład ilustrujący sposób rozwiązania zadania określonego typu
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ	przykład (przykłady) do rozwiązania według podanego wzoru
ZADANIA UTRWALAJĄCE	zadania umożliwiające utrwalenie zdobytych wiadomości
P.1.A.1	odesłanie do planszy interaktywnej, która jest multimedialną ilustracją danej definicji, zagadnienia lub zadania
Z.1.A.1	odesłanie do zadania interaktywnego
2.B.21.*	zadania/podpunkty o podwyższonym stopniu trudności
ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
MATURA – ZADANIA TESTOWE	zadania z zakresu danego działu, opracowane na wzór zadań maturalnych, stanowiące powtórzenie i sprawdzenie wiedzy
T.1.A	odesłanie do zadań testowych dostępnych w formie interaktywnej
Czy wiesz, że…	dodatkowe informacje i ciekawostki

10.A ► Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta (moda)

► Średnia arytmetyczna

DEFINICJA

Średnią arytmetyczną n liczb nazywamy iloraz sumy tych liczb przez ich liczbę.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

n — ilość wszystkich liczb
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — kolejne liczby

PRZYKŁAD 1

P.10.A.1

Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 5, 7, 4, 9, 10, 5, 2, 3, 7, 3.

1° Korzystamy ze wzoru: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$.

2° Obliczamy sumę elementów. $S = 5 + 7 + 4 + 9 + 10 + 5 + 2 + 3 + 7 + 3 = 55$

3° Obliczamy liczbę wszystkich elementów. $n = 10$

4° Podstawiamy obliczone wartości do wzoru. $\overline{x} = \frac{55}{10} = 5{,}5$

5° Średnia arytmetyczna tych liczb to 5,5.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 8, 12, 6, 18, 2, 24, 14, 6.

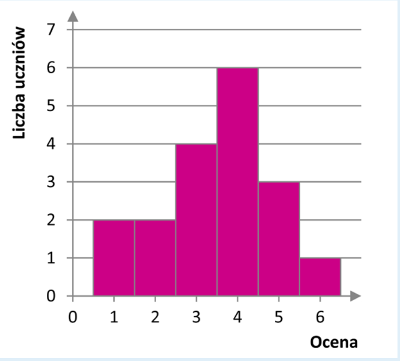
PRZYKŁAD 3. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 47, 53, 22, 15, 38, 65.

PRZYKŁAD 4. Oblicz średnią arytmetyczną liczb: 5, 4, 6, 2, 8, 1, 4, 6, 7, 9, 2, 3, 6, 2, 7.

PRZYKŁAD 1

P.10.A.2

Na diagramie przedstawiono oceny uczniów pewnej klasy ze sprawdzianu z historii. Oblicz średnią ocen uczniów tej klasy.



1° Odczytujemy dane z wykresu.

Dwóch uczniów dostało jedynki;
dwóch uczniów dostało dwójki;
czterech uczniów dostało trójki;
sześciu uczniów dostało czwórki;
trzech uczniów dostało piątki;
jeden uczeń dostał szóstkę.

2° Wszystkich uczniów jest 18, więc $n = 18$.

3° Podstawiamy dane do wzoru:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

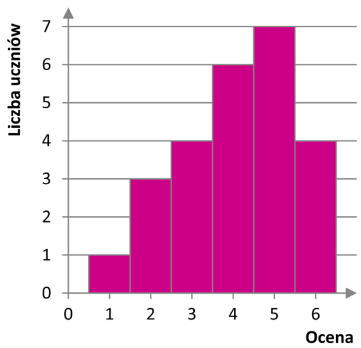
$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{18} =$$

$$= \frac{2 + 4 + 12 + 24 + 15 + 6}{18} = \frac{63}{18} = 3{,}5$$

4° Średnia arytmetyczna ocen w tej klasie to 3,5.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Na diagramie przedstawiono oceny uczniów pewnej klasy ze sprawdzianu z matematyki. Oblicz średnią ocen uczniów tej klasy.



PRZYKŁAD 1

P.10.A.3

Średnia arytmetyczna liczb x, 7, 4, 7, 8, 5, 2, 3, 7, 3 wynosi 5. Oblicz x.

1° Korzystamy ze wzoru: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

2° Określamy liczbę wszystkich elementów.

$n = 10$

3° Podstawiamy dane do wzoru, tworząc równanie, z którego obliczamy x.

$$\overline{x} = \frac{x + 7 + 4 + 7 + 8 + 5 + 2 + 3 + 7 + 3}{10} = 5$$

$$\frac{x + 46}{10} = 5 \quad | \cdot 10$$

$$x + 46 = 50 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

4° Wartość x wynosi 4.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Średnia arytmetyczna liczb 8, x, 6, 18, 2, 24, 14, 6 wynosi 11,25. Oblicz x.

PRZYKŁAD 3. Średnia arytmetyczna liczb 47, 53, x, 15, 38, 65 wynosi 40. Oblicz x.

PRZYKŁAD 4. Średnia arytmetyczna liczb 5, 4, 6, 2, 8, 1, 4, 6, 7, 7, 2, 3, x, 2 wynosi 4,5. Oblicz x.

PRZYKŁAD

W tabeli zestawiono oceny z języka angielskiego uczniów klasy III B na koniec semestru. Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 3,5. Oblicz liczbę x ocen dobrych (4) wystawionych na koniec semestru w tej klasie.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	0	5	10	x	3	1

1° Korzystamy z danych tabeli i wzoru na średnią arytmetyczną.

$$n = 19 + x$$

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 4 \cdot x + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1}{19 + x} =$$

$$= \frac{10 + 30 + 4x + 15 + 6}{19 + x} = \frac{61 + 4x}{19 + x}$$

2° Skoro średnia jest równa 3,5, to możemy zapisać równanie.

$$\frac{61 + 4x}{19 + x} = 3{,}5 \quad \Big| \cdot (19 + x)$$

$$61 + 4x = 3{,}5(19 + x)$$

$$61 + 4x = 66{,}5 + 3{,}5x$$

$$0{,}5x = 5{,}5 \quad \Big| : 0{,}5$$

$$x = 11$$

3° Ocen dobrych jest 11.

► Mediana

DEFINICJA

Dany jest zbiór n liczb uporządkowany w kolejności niemalejącej. Medianą nazywamy:

- wyraz środkowy w przypadku, gdy liczba elementów jest nieparzysta;
- średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów, gdy liczba elementów jest parzysta.

Mediana może zatem należeć do zbioru danych, ale może także do niego nie należeć.

PRZYKŁAD 1

P.10.A.4

Oblicz medianę liczb: 5, 7, 4, 9, 10, 6, 2, 3, 7, 3.

1° Porządkujemy listę elementów od najmniejszej do największej wartości.

2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 9, 10

2° Ustalamy liczbę wszystkich elementów.

$$n = 10$$

3° Mamy parzystą liczbę elementów, więc mediana jest średnią arytmetyczną dwóch środkowych elementów.

$$m_e = \frac{a_5 + a_6}{2} = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

4° Mediana tych liczb to 5,5.

PRZYKŁAD 2

P.10.A.4

Oblicz medianę liczb: 8, 12, 6, 18, 2, 24, 14.

1° Porządkujemy listę elementów od najmniejszej do największej wartości. 2, 6, 8, 12, 14, 18, 24

2° Ustalamy liczbę wszystkich elementów. $n = 7$

3° Mamy nieparzystą liczbę elementów, więc medianą jest środkowy wyraz. $m_e = a_4 = 12$

4° Mediana tych liczb to 12.

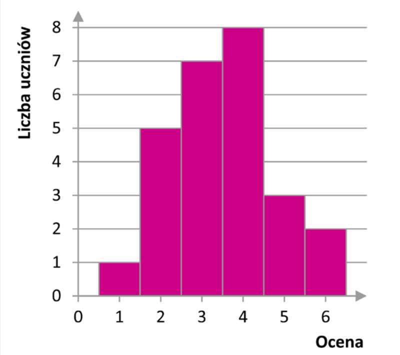
PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Oblicz medianę liczb: 47, 53, 22, 15, 38, 65.

PRZYKŁAD 4. Oblicz medianę liczb: 5, 4, 6, 2, 8, 1, 4, 6, 7, 9, 2, 3, 6, 2, 7.

PRZYKŁAD 1

Oceny ze sprawdzianu pewnej klasy z matematyki przedstawiono na diagramie (zobacz rysunek). Oblicz medianę ocen uzyskanych przez tych uczniów ze sprawdzianu.



1° Odczytujemy dane z wykresu, żeby określić liczbę wszystkich uczniów. $n = 1 + 5 + 7 + 8 + 3 + 2 = 26$

2° Skoro uczniów jest 26, czyli mamy parzystą liczbę elementów, to dwa środkowe elementy to element trzynasty i czternasty (a_{13} i a_{14}).

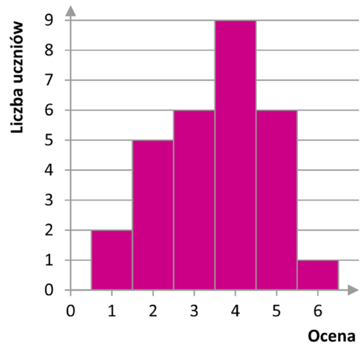
Gdy rozpiszemy elementy w następujący sposób:
1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6,
to łatwiej zauważyć, że element $a_{13} = 3$, a element $a_{14} = 4$.

3° Podstawiamy dane do wzoru: $m_e = \frac{a_{13} + a_{14}}{2}$. $m_e = \frac{a_{13} + a_{14}}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

4° Mediana ocen wynosi 3,5.

PRZYKŁAD DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Oceny ze sprawdzianu pewnej klasy z biologii przedstawiono na diagramie (zobacz rysunek). Oblicz medianę ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu.



PRZYKŁAD 1

Medianą zestawu danych 2, 3, 6, x, 1, 10 jest liczba 3,5. Wtedy x może być równe:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Przeanalizujmy kolejne odpowiedzi:

Odp. A. Jeśli $x = 2$, to otrzymujemy 1, 2, 2, 3, 6, 10, więc $m_e = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Odp. B. Jeśli $x = 3$, to otrzymujemy 1, 2, 3, 3, 6, 10, więc $m_e = \frac{3+3}{2} = 3$.

Odp. C. Jeśli $x = 4$, to otrzymujemy 1, 2, 3, 4, 6, 10, więc $m_e = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Odp. D. Jeśli $x = 5$, to otrzymujemy 1, 2, 3, 5, 6, 10, więc $m_e = \frac{3+5}{2} = 4$.

Odpowiedź C jest więc poprawna.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 2. Medianą zestawu danych 5, 1, x, 3, 4 jest liczba 3. Wtedy x może być równe:

A. 1 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 5

PRZYKŁAD 3. Medianą zestawu danych 8, 1, 4, x, 7, 8 jest liczba 7. Wtedy x może być równe:

A. 9 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 10

► Dominanta (moda)

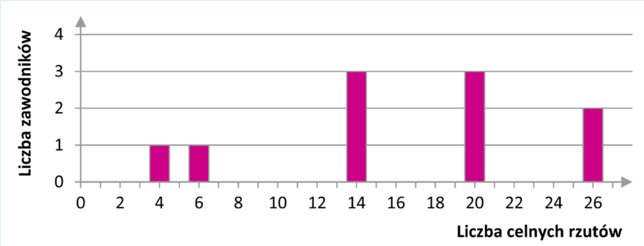
DEFINICJA

Dominanta (moda) zbioru danych to taka wartość, która w tym zbiorze występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli wszystkie wartości w zbiorze występują z tą samą częstością, to przyjmuje się, że zbiór danych nie ma dominanty.

PRZYKŁAD

W czasie meczu koszykówki odnotowano liczbę celnych rzutów do kosza oddanych przez poszczególnych zawodników. Wyniki przedstawiono na diagramie. Jaka jest dominanta celnych rzutów do kosza?



Z diagramu możemy odczytać, że najczęściej występowały dwie wartości — 14 i 20 rzutów z taką samą liczebnością (po 3 zawodników). Dominanta ma więc dwie wartości: 14 i 20.

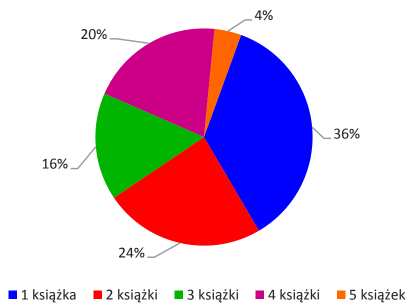
ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.A.1. Na dwóch osiedlach przeprowadzono ankietę, zadając pytanie: Ile razy w tygodniu robi Pan(i) zakupy spożywcze? Wyniki ankiety zostały przedstawione w tabelach. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę oraz dominantę dla każdego osiedla oddzielnie oraz dla obu osiedli łącznie.

	Osiedle A								Osiedle B							
Ile razy w tygodniu robione są zakupy	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
Liczba wskazań	4	20	16	1	5	3	1	0	0	10	18	13	3	3	1	2

10.A.2. W dziale kontroli jakości zważono 10 czekolad i uzyskano następujące wyniki: 100,2 g, 99,39 g, 100,2 g, 98,9 g, 99,3 g, 100,4 g, 99,8 g, 100,1 g, 98,8 g, 100,3 g. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę uzyskanych danych.

10.A.3. Na diagramie kołowym (zobacz rysunek obok) przedstawiono informacje o liczbie książek wypożyczanych miesięcznie przez 50 czytelników w pewnej bibliotece. Oblicz średnią arytmetyczną, medianę i dominantę liczby wypożyczonych książek.



10.A.4. Tabela przedstawia pewne zestawienie danych, których średnia arytmetyczna wynosi $\overline{x} = 5$. Oblicz medianę i dominantę tych danych.

Wartość x	2	3	5	6
Liczba wskazań	a	$3a$	$6a$	9

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. **T.10.A**

10.A.5. Średnia arytmetyczna liczb 7, 9, 12, 23, 14, 18, 36 jest równa:

A. 18 **B.** 17 **C.** 14 **D.** 17,5

10.A.6. Średnia arytmetyczna liczb 6, x, 8, 12, 5, 9 wynosi 10. Wtedy:

A. $x = 16$ **B.** $x = 20$ **C.** $x = 12$ **D.** $x = 8$

10.A.7. W tabeli zebrano informacje dotyczące liczby osób w rodzinach uczniów klasy III A. Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 3,8. Wtedy liczba x jest równa:

Liczba osób w rodzinie	Liczba uczniów
3	8
4	14
x	3

A. 2 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 7

10.A.8. Średnia pięciu ocen z matematyki, które uzyskała Kasia w I semestrze, wynosi 4,8. Nauczyciel zaplanował w tym semestrze, że każdy uczeń otrzyma po siedem ocen. Kasia uzyska średnią równą 5,0, gdy otrzyma jeszcze:

A. dwie piątki, **B.** piątkę i szóstkę, **C.** dwie szóstki, **D.** czwórkę i szóstkę.

10.A.9. Średnia arytmetyczna cen dziewięciu akcji na giełdzie jest równa 450 zł. Za osiem tych akcji zapłacono 3500 zł. Cena dziewiątej akcji jest równa:

A. 450 zł **B.** 550 zł **C.** 500 zł **D.** 600 zł

10.A.10. W ośmiu kolejnych rzutach kostką otrzymano następujące wyniki 5, 6, 4, 1, 2, 2, 3, 4. Mediana tych wyników jest równa:

A. 4 **B.** 3,5 **C.** 3 **D.** 1,5

10.A.11. W pewnej firmie zatrudnionych jest 8 osób. Dyrektor zarabia 4500 zł, a pensje pozostałych pracowników wynoszą: 2200 zł, 1800 zł, 2400 zł, 1700 zł, 1600 zł, 1900 zł, 2000 zł. Mediana zarobków wszystkich ośmiu osób jest równa:

A. 1850 **B.** 1750 **C.** 1950 **D.** 2150

10.A.12. Średnia arytmetyczna liczb 6, x, 8, 9, 12, 15 wynosi 11. Medianą tych liczb jest więc liczba:

A. 10 **B.** 11 **C.** 8,5 **D.** 10,5

10.A.13. Mediana uporządkowanego niemalejącego zestawu sześciu liczb: 2, 3, 4, x, 7, 8 jest równa 4. Wtedy:

A. $x = 6$ **B.** $x = 5$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 3$

ZADANIA OTWARTE

10.A.14. Średnia wieku w pewnej grupie studentów równa jest 22 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna równa jest 25 lat. Opiekun ma 49 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie. **2 pkt**

10.A.15. Średnia temperatura pierwszych dziewięciu dni marca wynosiła 5°C, a średnia temperatura pierwszych dziesięciu dni marca wynosiła $6{,}5^\circ$C. Oblicz, jaką średnią temperaturę odnotowano 10 marca. **2 pkt**

10.A.16. Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów pewnej klasy: **2 pkt**

Ocena	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	4	7	6	5	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

10.A.17. W tabeli zostały przedstawione oceny uzyskane z testu przez uczniów w pewnej klasie. **2 pkt**

Ocena	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	3	5	2	5	4	1

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

10.A.18. Tabela przedstawia oceny z matematyki uczniów jednej klasy na koniec semestru. **2 pkt**

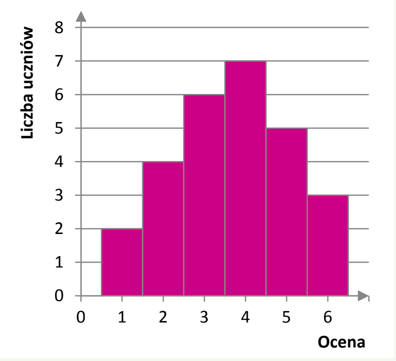
Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	3	7	x	5

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa 4,0. Oblicz liczbę ocen bardzo dobrych wystawionych na koniec semestru.

10.A.19. Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawiono na diagramie (zobacz rysunek). Podaj wartość: **3 pkt**

- **a.** średniej arytmetycznej,
- **b.** mediany,
- **c.** dominanty

ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu.



10.1 ► Obliczanie średniej ważonej i odchylenia standardowego zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych). Interpretowanie tych parametrów dla danych empirycznych

► Średnia ważona

DEFINICJA

Danych jest n dowolnych liczb $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, którym przypisano odpowiednio n dodatnich (najczęściej naturalnych) wag $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Średnią ważoną tak ustalonych danych obliczamy ze wzoru:

$$\overline{x_w} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

Jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona równa jest średniej arytmetycznej.

PRZYKŁAD

Podczas egzaminu ustnego z języka angielskiego wypowiedź ucznia miała być oceniana w trzech kategoriach. Każdej z nich egzaminator przypisał inną wagę (zobacz tabelę obok).

Kategoria	Słownictwo	Umiejętność komunikacji	Poprawność gramatyczna
Waga	2	3	1

Oto oceny zdobyte przez Bartka i Michała w poszczególnych kategoriach:

Kategoria	Słownictwo	Umiejętność komunikacji	Poprawność gramatyczna
Bartek	5	4	3
Michał	4	2	6

Oblicz, jaką końcową ocenę uzyskał każdy z nich i jaką ocenę każdy z nich by uzyskał, gdyby egzaminator nie uwzględniał wag.

1° Korzystamy ze wzoru:

$$\overline{x_w} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n},$$

aby obliczyć ocenę uzyskaną przez każdego z chłopców.

Ocena Bartka:

$$\overline{x_w} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{2 + 3 + 1} = \frac{10 + 12 + 3}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$$

Ocena Michała:

$$\overline{x_w} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{2 + 3 + 1} = \frac{8 + 6 + 6}{6} = \frac{20}{6} \approx 3{,}33$$

2° Gdyby oceny zostały policzone ze średniej arytmetycznej $\left(\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$, to byłyby takie, jak przedstawiono obok.

Ocena Bartka:

$$\overline{x} = \frac{5 + 4 + 3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Ocena Michała:

$$\overline{x} = \frac{4 + 2 + 6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

PRZYKŁAD

Oblicz brakującą wagę w, jeśli wiadomo, że średnia ważona danych w tabeli wynosi 17.

x	7	15	21	25
Waga	4	2	w	3

1° Korzystając ze wzoru na średnią ważoną, układamy równanie i obliczamy w.

$$\frac{4\cdot 7+2\cdot 15+w\cdot 21+3\cdot 25}{4+2+w+3}=17$$

$$\frac{28+30+21w+75}{9+w}=17$$

$$17(9+w)=133+21w$$

$$153+17w=133+21w$$

$$4w=20 \quad |:4$$

$$w=5$$

2° Waga w wynosi 5.

PRZYKŁAD

Państwo Zielińscy wybierają pensjonat na urlop i porównują oceny gości w dwóch pensjonatach w poszczególnych kategoriach. Goście ocenali pensjonat, przyznając w każdej kategorii ocenę od 1 do 6. Jeśli państwo Zielińscy uznają, że poszczególne kategorie mają następujące wagi: standard pokoju (5), wyżywienie (3), jakość obsługi (2), to który pensjonat uzyska wyższą ocenę końcową, liczoną jako średnia ważona ocen cząstkowych?

Pensjonat „Świerkowa Chata”			Pensjonat „Halny”		
Kategoria	Ocena	Liczba osób	Kategoria	Ocena	Liczba osób
Standard pokoju	2	6	Standard pokoju	4	3
	3	3		5	3
	4	6		6	9
Wyżywienie	5	6	Wyżywienie	3	6
	6	9		4	9
Jakość obsługi	1	2	Jakość obsługi	3	13
	2	4		4	1
	3	4		5	1
	4	5		-	-

1° Obliczamy średnie arytmetyczne punktów, jakie uzyskały oba pensjonaty w poszczególnych kategoriach.

$$\overline{x_{S_1}}=\frac{2\cdot 6+3\cdot 3+4\cdot 6}{15}=3$$

$$\overline{x_{S_2}}=\frac{5\cdot 6+6\cdot 9}{15}=5{,}6$$

$$\overline{x_{S_3}}=\frac{1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 4+4\cdot 5}{15}=2{,}8$$

$$\overline{x_{H_1}}=\frac{4\cdot 3+5\cdot 3+6\cdot 9}{15}=5{,}4$$

$$\overline{x_{H_2}}=\frac{3\cdot 6+4\cdot 9}{15}=3{,}6$$

$$\overline{x_{H_3}}=\frac{3\cdot 13+4\cdot 1+5\cdot 1}{15}=3{,}2$$

2° Obliczamy średnie ważone liczb z odpowiednimi wagami.

$$\overline{x_{w_1}} = \frac{5 \cdot 3 + 3 \cdot 5{,}6 + 2 \cdot 2{,}8}{5 + 3 + 2} = \frac{15 + 16{,}8 + 5{,}6}{10} = 3{,}74$$

$$\overline{x_{w_2}} = \frac{5 \cdot 5{,}4 + 3 \cdot 3{,}6 + 2 \cdot 3{,}2}{5 + 3 + 2} = \frac{27 + 10{,}8 + 6{,}4}{10} = 4{,}42$$

3° Pensjonat „Świerkowa Chata” uzyskał końcową ocenę równą 3,74, a pensjonat „Halny” ocenę końcową równą 4,42, więc pensjonat „Halny” uzyskał ocenę wyższą.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.1.1. Oblicz średnie ważone poniższych danych, jeśli x oznacza wyniki, a w przypisane im wagi.

a.

x	4	5	6	7
w	0,3	0,4	0,2	0,1

b.

x	5	3	8
w	2	3	4

c.

x	4	6	8	10
w	2	2	2	2

d.

x	-2	-1	0	1
w	3	4	5	6

10.1.2. Średnia ważona liczby 50 z wagą a i liczby 26 z wagą b jest równa 32. Podaj dwa przykłady liczb a i b spełniających tę zależność.

10.1.3. Pewna uczelnia przyjmuje na studia na podstawie średniej ważonej ocen z wybranych przedmiotów maturalnych, przyznając im następujące wagi: matematyka (waga 0,3), fizyka (waga 0,3), chemia (waga 0,2), język polski (waga 0,1), język obcy (waga 0,1). Oblicz średnią ważoną ocen kandydatów na studia, których stopnie są zamieszczone w tabeli.

	Matematyka	Fizyka	Chemia	Język polski	Język obcy
Kandydat 1	6	5	3	3	3
Kandydat 2	3	2	4	5	6

10.1.4. W sprawozdaniu finansowym pewnej firmy zapisano, że 55% akcji firmy sprzedano po 100 zł za sztukę, 35% akcji po 110 zł, a 10% akcji po 120 zł. Jaka była średnia cena sprzedanych akcji?

10.1.5. Oblicz brakującą wagę m, jeśli wiadomo, że średnia ważona danych w tabeli wynosi 20.

x	8	16	24	28	32
Waga	3	2	m	2	1

10.1.6. Kamil zastanawia się nad wyborem szkoły językowej. Ma do wyboru 3 szkoły. Zebrał oceny swoich znajomych dotyczące różnych kategorii: lokalizacji, ceny i nauczycieli. Dane zebrał w tabeli obok. Każdej kategorii nadał stopień ważności (wagę). Którą szkołę powinien wybrać Kamil?

	Lokalizacja (waga 0,2)	Cena kursu (waga 0,3)	Nauczyciele (waga 0,5)
Szkoła A	10	5	3
Szkoła B	4	6	8
Szkoła C	6	7	5

► Odchylenie standardowe

DEFINICJA

Danych jest n dowolnych liczb $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Niech $\overline{x}$ oznacza średnią arytmetyczną tych liczb. Wówczas odchylenie standardowe obliczamy według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

WYJAŚNIENIE

Odchylenie standardowe jest parametrem statystycznym informującym o rozproszeniu danych względem średniej arytmetycznej. Im większe odchylenie standardowe, tym bardziej dane są odległe od siebie i od średniej arytmetycznej.

PRZYKŁAD

Dane są następujące liczby: 5, 8, 10, 12, 15. Oblicz odchylenie standardowe tych liczb.

1° Obliczamy średnią arytmetyczną liczb ze wzoru: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

$$\overline{x} = \frac{5+8+10+12+15}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

2° Obliczamy odchylenie standardowe ze wzoru: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(5-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(15-10)^2}{5}} = \sqrt{\frac{25+4+4+25}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{58}{5}} \approx 3{,}41$$

To odchylenie informuje nas o dość dużym rozproszeniu liczb między sobą oraz względem średniej arytmetycznej.

PRZYKŁAD

Czterech uczniów otrzymało następujące oceny:

- Uczeń 1: bdb, db, dst, cel, dop
- Uczeń 2: db, db, db, db, db
- Uczeń 3: bdb, bdb, db, dst, dst
- Uczeń 4: cel, cel, db, dop, dop

Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dla poszczególnych uczniów.

Dla ucznia 1:

$$\overline{x_1} = \frac{5+4+3+6+2}{5} = 4$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(6-4)^2+(2-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+1+4+4}{5}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

Dla ucznia 2:

$$\overline{x_2} = \frac{4+4+4+4+4}{5} = 4$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{0}{5}} = 0$$

Dla ucznia 3:

$$\overline{x_3} = \frac{5+5+4+3+3}{5} = 4$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{(5-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+1+1+1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0{,}89$$

Dla ucznia 4:

$$\overline{x_4} = \frac{6+6+4+2+2}{5} = 4$$

$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{(6-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(2-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+4+4+4}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} \approx 1{,}79$$

Otrzymane wyniki wskazują, że wszyscy uczniowie mają te same średnie arytmetyczne, jednak rozproszenia ich ocen od średniej arytmetycznej (oraz samych ocen) są zróżnicowane: od zera (czyli identyczne oceny) do 1,79 — można powiedzieć, że uczeń 4 okazał się uczniem bardzo „nierównym”.

PRZYKŁAD

Na pewnym osiedlu, gdzie mieszka 115 rodzin, zbadano liczbę dzieci w każdej rodzinie i uzyskano następujące wyniki.

Liczba dzieci	0	1	2	3	4
Liczba rodzin	17	30	58	8	2

Oblicz odchylenie standardowe tych danych.

1° Obliczamy średnią arytmetyczną liczby dzieci ze wzoru: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

$$\overline{x} = \frac{17\cdot 0+30\cdot 1+58\cdot 2+8\cdot 3+2\cdot 4}{115} = \frac{30+116+24+8}{115} = \frac{178}{115} \approx 1{,}55$$

2° Obliczamy odchylenie standardowe ze wzoru: $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{17(0-1{,}55)^2+30(1-1{,}55)^2+58(2-1{,}55)^2+8(3-1{,}55)^2+2(4-1{,}55)^2}{115}} =$$

$$= \sqrt{\frac{40{,}84+9{,}07+11{,}75+16{,}82+12}{115}} = \sqrt{\frac{90{,}48}{115}} \approx 0{,}89$$

3° Odchylenie standardowe wynosi 0,89.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.1.7. Zmierzono wysokości dwunastu zawodników w drużynie siatkarskiej i uzyskano następujące wyniki: 1,86 m, 2,05 m, 1,9 m, 1,78 m, 2,11 m, 1,76 m, 1,93 m, 1,86 m, 1,78 m, 2,05 m, 1,86 m, 1,94 m.

a. Wyznacz średnią wysokość zawodnika.

b. Wskaż medianę i modę zestawu danych.

c. Oblicz odchylenie standardowe wysokości.

10.1.8. W tabeli poniżej podano informacje dotyczące wieku studentów na pewnej uczelni.

Wiek [lata]	20	21	22	23	24
Liczba studentów	2378	8612	11 881	15 266	8653

a. Wyznacz średni wiek studentów.

b. Oblicz odchylenie standardowe dla wieku studentów.

10.1.9. Zgodnie z danymi podanymi w *Roczniku Statystycznym* obroty na głównym rynku Giełdy Papierów Wartościowych w czterech wybranych latach kształtowały się następująco:

Rok	2005	2010	2013	2014
Obrót akcjami i prawami do akcji [mln zł]	98 517	234 288	256 146	232 865

a. Oblicz średni obrót.

b. Wyznacz odchylenie standardowe przedstawionych danych.

10.1.10. W loterii przygotowano 1200 losów. Wśród nich są 3 losy z nagrodami po 1000 zł, 10 losów z nagrodami po 500 zł, 50 losów z nagrodami po 250 zł, 100 losów z nagrodami po 125 zł oraz 500 losów z nagrodami po 50 zł.

a. Wyznacz średnią wartość wygranych.

b. Wskaż medianę i dominantę.

c. Oblicz odchylenie standardowe wygranych.

10.1.11. Tabela poniżej przedstawia przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto w poszczególnych województwach.

Województwo	**Liczba pracujących [tys.]**	**Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto [w zł]**	**Województwo**	**Liczba pracujących [tys.]**	**Przeciętne miesięczne wynagrodzenie brutto [w zł]**
dolnośląskie	1035,2	4049	podkarpackie	796	3414
kujawsko-pomorskie	686,4	3440	podlaskie	404,5	3533
lubelskie	802,7	3608	pomorskie	763,5	4018
lubuskie	326,5	3429	śląskie	1642,2	4105
łódzkie	936,1	3621	świętokrzyskie	455,7	3438
małopolskie	1277	3703	warmińsko-mazurskie	422,8	3390
mazowieckie	2309,4	4934	wielkopolskie	1395,6	3600
opolskie	312,8	3638	zachodniopomorskie	509,9	3653

a. Wyznacz średnie wynagrodzenie miesięczne w kraju.

b. Oblicz odchylenie standardowe dla przedstawionych danych.

10.1.12. Pewne zawody sportowe składają się z 2 etapów. Wynik końcowy ustalany jest jako średnia ważona liczby punktów zdobytych przez drużynę w każdym etapie, przy czym suma wag wynosi 1. W tabeli przedstawione są liczby punktów zdobytych przez dwie drużyny w poszczególnych etapach. Drużyna I uzyskała wynik końcowy równy 35,5 punktu. Drużyna II uzyskała więc wynik końcowy równy:

Drużyna	Etap 1	Etap 2
I	60	25
II	45	35

A. 38 punktów, **C.** 36 punktów,
B. 40 punktów, **D.** 37 punktów.

10.1.13. Ogrodnik sprzedał jabłka różnych gatunków w stosunku 1 : 3 : 5. Cena 1 kg pierwszego gatunku jabłek wynosiła 1,50 zł, drugiego 2,20 zł, a trzeciego 2,50 zł. Średni przychód ze sprzedaży 1 kg jabłek można obliczyć następująco:

A. $1 \cdot 1{,}50 + 2 \cdot 2{,}20 + 3 \cdot 2{,}50$ **C.** $0{,}1 \cdot 1{,}50 + 0{,}3 \cdot 2{,}20 + 0{,}5 \cdot 2{,}50$

B. $\frac{1{,}50 + 2{,}20 + 2{,}50}{3}$ **D.** $\frac{1{,}50 + 3 \cdot 2{,}20 + 5 \cdot 2{,}50}{9}$

10.1.14. Średnia ważona liczby 7 z wagą 3 i liczby 19 z wagą x jest równa 17. Wtedy:

A. $x = 13$ **B.** $x = 15$ **C.** $x = 7$ **D.** $x = 12$

10.1.15. Jeśli średnia ważona danych w tabeli wynosi 4,2, to:

x	2	3	4	8
Waga	5	6	a	5

A. $a = 0{,}4$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 4$ **D.** $a = 8$

10.1.16. Ocena końcowa z matematyki jest wystawiana jako średnia ważona następujących wartości: ocen z testów (z wagą 3), ocen z prac domowych (z wagą 2), ocen ze sprawdzianów (z wagą 4). W tabeli przedstawione są oceny trzech uczennic. Jeśli ocena końcowa Ani to a, Magdy m, a Oli o, to prawdziwa jest zależność:

	Testy	Prace domowe	Sprawdziany
Ania	3, 4, 5	5, 5	2, 5, 5
Magda	2, 5, 5	4, 5	4, 5, 5
Ola	4, 4, 4	3, 4	3, 4, 5

A. $o < a < m$ **B.** $a < o < m$ **C.** $a = 0 < m$ **D.** $m = a > o$

10.1.17. Tomek otrzymał następujące oceny z matematyki: 4, 3, 5, 5, 4. Odchylenie standardowe otrzymanych przez niego ocen wynosi około:

A. 0,56 **B.** 0,75 **C.** 0,42 **D.** 0,65

10.1.18. Sprawdzono cenę pewnego modelu telefonu komórkowego. Ceny z ośmiu kolejnych sklepów są następujące: 750 zł, 730 zł, 780 zł, 790 zł, 850 zł, 810 zł, 815 zł, 795 zł. Odchylenie standardowe cen tego telefonu jest równe:

A. 790 zł **B.** 35,27 zł **C.** 47,52 zł **D.** 85 zł

MATURA — ZADANIA OTWARTE

10.1.19. Kasia rzucała siedem razy symetryczną kostką do gry. Otrzymała następujące wyniki $\{1, 2, 4, 3, 2, 6, x\}$. Oblicz odchylenie standardowe otrzymanych wyników, jeśli średnia arytmetyczna otrzymanych wyników wynosi 3. **2 pkt**

10.1.20. W pewnej klasie sporządzono ankietę, pytając uczniów o liczbę osób w ich rodzinach. Wyniki przedstawiono w tabeli. **4 pkt**

Liczba osób w rodzinie	3	4	5	6	7
Liczba uczniów	7	8	4	2	1

Oblicz:

a. średnią osób w rodzinie,

b. medianę,

c. dominantę,

d. odchylenie standardowe.

10.B ► Gromadzenie i analizowanie prostych danych empirycznych

WPROWADZENIE

Chcąc uzyskać odpowiedzi na różne pytania dotyczące życia codziennego, można posłużyć się metodami statystycznymi. Polegają one na zbieraniu danych (informacji), a następnie na analizie zebranego materiału: ilościowej i jakościowej. Przystępując do zbierania danych empirycznych, należy postępować według określonych zasad.

Zasady przeprowadzania badania

1° Określić cel badania (w jakim celu zbieramy dane, jaki problem rozstrzygamy, na jakie pytania badawcze chcemy uzyskać odpowiedzi).

2° Dobrać respondentów (czyli osoby badane), ustalić ich liczebność — określić ich interesujące cechy, np. wiek, płeć, pochodzenie, miejsce zamieszkanie (np. miasto lub wieś) itp.

3° Sformułować pytania tak, aby były trafne i zrozumiałe dla badanych.

4° Przeprowadzić badanie.

5° Dokonać analizy ilościowej: pogrupować odpowiedzi, przedstawić uzyskane dane na wykresach.

6° Dokonać analizy jakościowej — sformułować wnioski i odpowiedzieć na postawione pytania badawcze.

PRZYKŁAD

Postawmy pytanie badawcze: Jakie są ulubione kolory 19-latków w zależności od płci?

To proste z pozoru pytanie może mieć wpływ np. na to, jakie kolory odzieży wybiera młodzież, jakie kolory preferuje na okładkach czasopism czy w spotach reklamowych. Aby uzyskać odpowiedź na to pytanie badawcze, należy:

1° Określić liczbę badanych 19-latków z podziałem na płeć.

2° Ustalić miejsce ich zamieszkania (miasto, wieś) — można się posłużyć informacjami z rocznika statystycznego (dane procentowe dotyczące zamieszkania młodzieży na wsi i w mieście).

3° Sformułować pytania, np.:

- Wolisz kolory ciepłe czy zimne?
- Czy Twoje preferencje dotyczące ulubionych kolorów zmieniają się wraz z porami roku?
- Czy zabiegasz o to, by w wystroju Twojego pokoju, ubioru itp. dominował Twój ulubiony kolor?

4° Przeprowadzić badanie, uwzględniając wcześniej poczynione założenia co do płci, zamieszkania itp.

5° Dokonać analizy ilościowej: przedstawić wyniki procentowe w formie tabel, wykresów.

6° Sformułować wnioski końcowe i odpowiedzieć na pytanie badawcze.

► Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

PRZYKŁAD

Załóżmy, że badanie dotyczące ulubionego koloru wśród młodzieży przeprowadzono na grupie 1000 osób. Każda osoba wskazywała tylko jeden kolor. Uzyskano następujące wyniki:

- kolor niebieski wybrało 300 osób;
- kolor czerwony wybrało 250 osób;
- kolor pomarańczowy wybrało 75 osób;
- kolor zielony wybrało 125 osób;
- kolor czarny wybrało 200 osób;
- kolor żółty wybrało 50 osób.

Zebrane dane możemy przedstawić na różne sposoby.

TABELA

Suma liczb w prawej kolumnie jest równa 1000. Przy przedstawianiu danych w tabeli mówimy, że tabela zawiera wyniki mierzonej cechy (koloru) i jej liczebności (liczby uczniów, którzy wskazali dany kolor).

Kolor	Liczba osób
niebieski	300
czerwony	250
pomarańczowy	75
zielony	125
czarny	200
żółty	50

DIAGRAM KOLUMNOWY

Każda z kolumn przedstawionych na diagramie odpowiada jednemu kolorowi. Wysokość kolumny odpowiada liczbie osób, które wskazywały dany kolor.

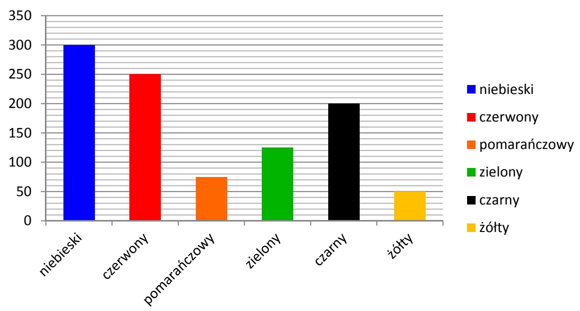


DIAGRAM SŁUPKOWY

Oś pozioma informuje o liczbie osób, a poszczególne słupki odpowiadają wybranym kolorom.

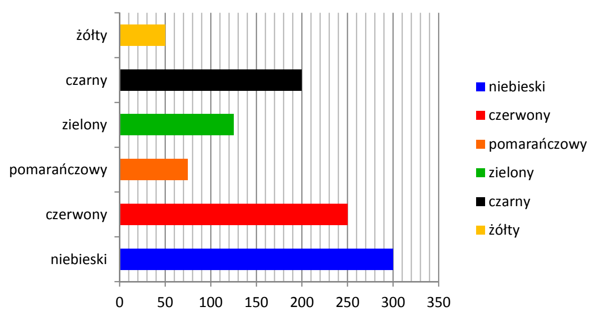


DIAGRAM KOŁOWY

Aby sporządzić diagram kołowy, należy wykonać odpowiednie obliczenia. Interesuje nas zależność między liczbą osób, które wybrały dany kolor, a częścią koła, która odpowiada tej liczbie osób. W tym celu wykonujemy następujące obliczenia.

Kolor niebieski wybrało 300 osób, co stanowi $\frac{300}{1000}$ wszystkich głosów, czyli 0,3. Zatem tej liczbie osób odpowiada kąt środkowy o mierze $0{,}3 \cdot 360^\circ = 108^\circ$.

Kolor czerwony wybrało 250 osób, co stanowi $\frac{250}{1000}$ wszystkich głosów, czyli 0,25. Zatem tej liczbie osób odpowiada kąt środkowy o mierze $0{,}25 \cdot 360^\circ = 90^\circ$.
Podobnie wykonujemy pozostałe obliczenia.

Kolor pomarańczowy: $\frac{75}{1000} = 0{,}075$, czyli kąt środkowy o mierze $0{,}075 \cdot 360^\circ = 27^\circ$.

Kolor zielony: $\frac{125}{1000} = 0{,}125$, czyli kąt środkowy o mierze $0{,}125 \cdot 360^\circ = 45^\circ$.

Kolor czarny: $\frac{200}{1000} = 0{,}2$, czyli kąt środkowy o mierze $0{,}2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$.

Kolor żółty: $\frac{50}{1000} = 0{,}05$, czyli kąt środkowy o mierze $0{,}05 \cdot 360^\circ = 18^\circ$.

Diagram kołowy wygląda więc następująco:

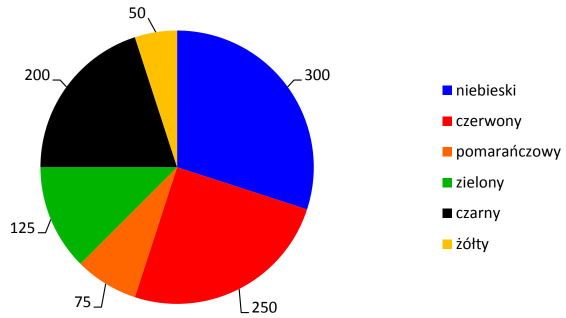
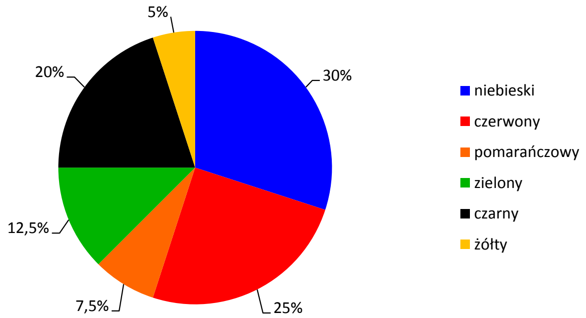


DIAGRAM PROCENTOWY

Diagram kołowy często występuje również w postaci diagramu procentowego, w którym zebrane dane wyrażone są w procentach.
Informacje otrzymane w badaniu wskazują, że kolor niebieski wybrało 30% wszystkich osób, kolor czerwony — 25%, kolor pomarańczowy — 7,5%, kolor zielony — 12,5%, kolor czarny — 20%, a kolor żółty — 5%.

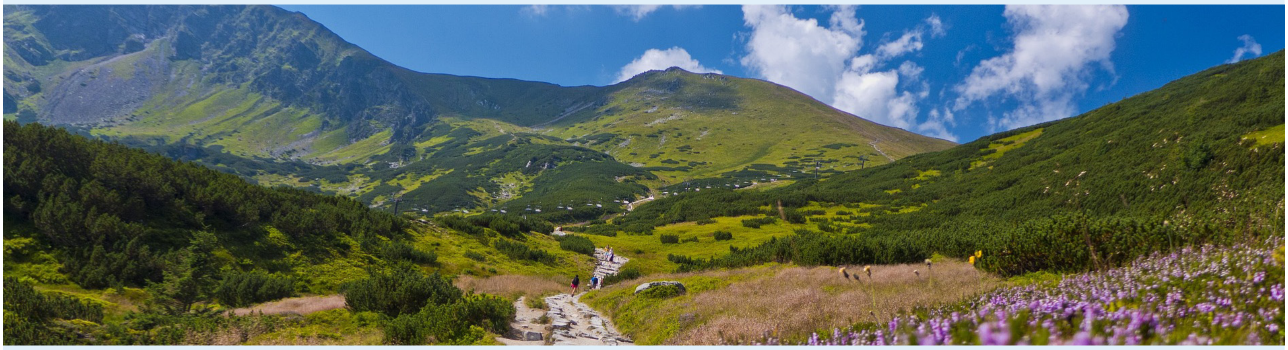


W prezentacji i analizie danych statystycznych często posługujemy się jednostronnie domkniętymi przedziałami (klasami), w które pogrupowane są dane. Przedziały muszą być rozłączne, a jednocześnie muszą obejmować wszystkie wyniki. Długość przedziału określa się na podstawie najmniejszej i największej wartości wśród wyników i dobiera się takie liczby, by były dogodne do obliczeń.

PRZYKŁAD

W tabeli zamieszczone są wysokości 26 najwyższych szczytów górskich w Polsce. Pogrupuj dane w przedziały i przedstaw je na diagramie kolumnowym w taki sposób, aby dane były czytelne.

Szczyty gór	**Wzniesienie nad poziomem morza w m**	
	Karpaty	
Rysy	2499	Tatry
Mięguszowiecki Szczyt	2438	
Świnica	2301	
Wołowiec	2064	
Kasprowy Wierch	1987	
Giewont	1894	
Babia Góra	1723	Beskid Żywiecki
Tarnica	1346	Bieszczady
Turbacz	1314	Gorce
Radziejowa	1267	Beskid Sądecki
Skrzyczne	1257	Beskid Śląski
Barania Góra	1215	
Mogielnica (Mogielica)	1170	Beskid Wyspowy
Mędralowa (Beskidek)	1169	Beskid Makowski
Wysokie Skałki	1050	Pieniny
Trzy Korony	982	
	Sudety	
Śnieżka	1603	Karkonosze
Wielki Szyszak	1509	
Śnieżnik	1425	Masyw Śnieżnika
Wysoka Kopa	1126	Góry Izerskie
Kamienica	973	
Wielka Sowa	1015	Góry Sowie
Szczeliniec Wielki	919	Góry Stołowe
	Góry Świętokrzyskie	
Łysica	612	Łysogóry
Łysa Góra	594	
Szczytniak	554	Pasmo Jeleniowskie

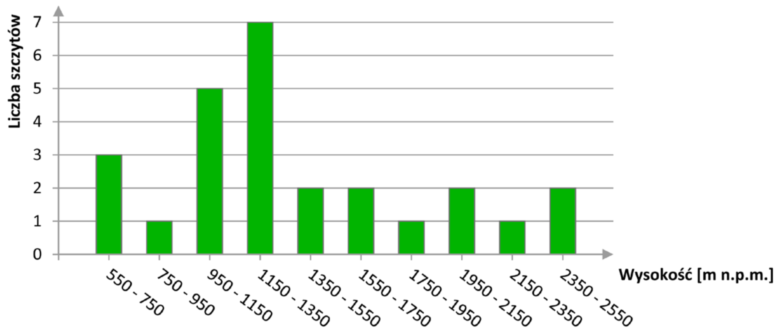


Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

1° Mamy rozpiętość danych od 554 do 2499. Możemy więc utworzyć 10 przedziałów, zaczynając od 550 m. Długość przedziału to 200 m. Określamy, ile szczytów znajduje się w każdym z przedziałów.

Przedział (w m n.p.m.)	Liczba szczytów	Przedział (w m n.p.m.)	Liczba szczytów
$(550-750\rangle$	3	$(1550-1750\rangle$	2
$(750-950\rangle$	1	$(1750-1950\rangle$	1
$(950-1150\rangle$	5	$(1950-2150\rangle$	2
$(1150-1350\rangle$	7	$(2150-2350\rangle$	1
$(1350-1550\rangle$	2	$(2350-2550\rangle$	2

2° Wykonujemy diagram kolumnowy.



ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.B.1. Pewna organizacja pozarządowa przeprowadziła w pewnym mieście sondę uliczną, chcąc zbadać, jak często mieszkańcy uczestniczą w wydarzeniach kulturalnych. Badanie zostało przeprowadzone na grupie 200 osób. Jedno z pytań brzmiało: „Ile razy w ostatnim miesiącu był(a) pan(i) w koncercie muzycznym?". Uzyskano następujące wyniki: 0 razy — odpowiedziało 55% osób, 1 raz — 30% osób, 2 razy — 10% osób, 3 razy — 5% osób. Przedstaw wyniki badania w postaci tabeli liczebności, diagramu kolumnowego oraz diagramu kołowego.

10.B.2. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli poniżej wykonaj diagram kołowy prezentujący procentowy podział Polski na obszary o określonej wysokości n.p.m.

Udział w powierzchni Polski obszarów położonych powyżej poziomu morza			
poniżej 0 m	0,2%	300 – 500 m	5,6%
0 – 100 m	25,2%	500 – 1000 m	2,9%
100 – 200 m	49,7%	powyżej 1000 m	0,2%
200 – 300 m	16,2%		

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

10.B.3. Tabela poniżej przedstawia długości rzek położonych na terenie Polski. Pogrupuj dane w przedziały i przedstaw je na diagramie słupkowym w taki sposób, by dane były czytelne.

Rzeka	**Długość rzeki na terenie Polski [km]**	**Rzeka**	**Długość rzeki na terenie Polski [km]**
Wisła	1022	Drwęca	231
Odra	726	Prosna	227
Warta	795	Wisłok	220
Bug	590	Wda (Czarna Woda)	198
Narew	443	Drawa	192
San	457	Nysa Kłodzka	189
Noteć	391	Rega	188
Wieprz	349	Pasłęka	187
Pilica	333	Bzura	173
Bóbr	276	Wisłoka	173
Łyna i jej dopływy	207	Obra	171
Wkra	255	Poprad	63
Dunajec	249	Biebrza	164
Nysa Łużycka	197	Nida	154
Brda	245		

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

10.B.4. Na podstawie danych z *Rocznika Statystycznego 2015* (zobacz tabelę poniżej) wykonaj:

a. diagram kołowy przedstawiający powierzchnię Ziemi w podziale na lądy i oceany,

b. diagram kołowy procentowy przedstawiający udział poszczególnych oceanów w powierzchni ogółem wszystkich oceanów,

c. diagram kolumnowy przedstawiający powierzchnie poszczególnych kontynentów.

Powierzchnia Ziemi			
Wyszczególnienie	**W mln km^2**	**W odsetkach**	
Ogółem	510,2	100,0	*x*
Lądy	148,9	29,2	100,0
Afryka	30,3	5,9	20,3
Ameryka Północna i Środkowa	24,2	4,7	16,3
Ameryka Południowa	17,8	3,5	12,0
Antarktyda	13,2	2,6	8,8
Australia i Oceania	8,5	1,7	5,7
Azja	44,4	8,7	29,8
Europa	10,5	2,1	7,1
Oceany	361,3	70,8	100,0
Arktyczny	14,7	2,9	4,1
Atlantycki	89,0	17,4	24,6
Indyjski	73,6	14,4	20,4
Południowy	20,3	4,0	5,6
Spokojny	163,7	32,1	45,3

10.B.5. Na podstawie poniższych danych wykonaj diagram kołowy procentowy przedstawiający długości lądowej granicy państwowej Polski z poszczególnymi sąsiednimi krajami.

Granice Polski	
Wyszczególnienie	**W liczbach bezwzględnych**
Długość lądowej granicy państwowej w km	3071
z Rosją	210
z Litwą	104
z Białorusią	418
z Ukrainą	535
ze Słowacją	541
z Czechami	796
z Niemcami	467

10.B.6. Na podstawie diagramów przedstawiających liczbę studentów szkół wyższych w podziale na kierunki w dwóch kolejnych latach akademickich odpowiedz na pytania:

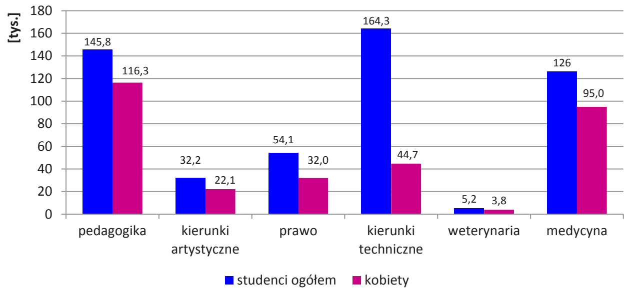
a. W którym roku studiowało ogółem więcej osób?

b. Jaki procent wszystkich studentów w poszczególnych latach stanowiły kobiety?

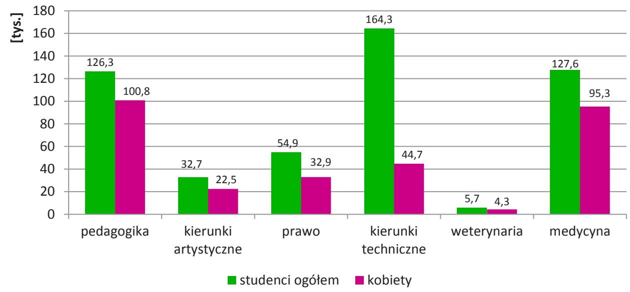
c. Na których kierunkach studiowało mniej osób w roku 2013/2014 niż w roku 2014/2015?

d. Na których kierunkach w obydwu latach mniej niż połowa studentów to kobiety?

e. Jaki procent studentów prawa w roku 2013/2014 stanowiły kobiety, a jaki w 2014/2015?

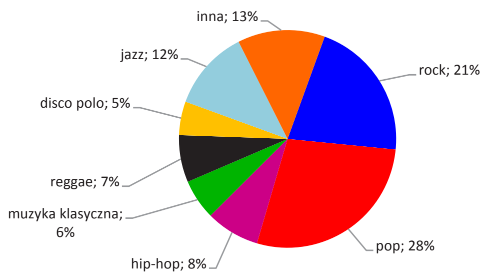


Studenci szkół wyższych w roku akademickim 2013/2014



Studenci szkół wyższych w roku akademickim 2014/2015

10.B.7. Na grupie 200 osób przeprowadzono badanie ankietowe, którego wyniki przedstawiono na diagramie kołowym (zobacz diagram obok). Badanie dotyczyło ulubionego gatunku muzycznego. Przedstaw wyniki badania na diagramie słupkowym, prezentującym liczby osób, które wybrały dany gatunek muzyczny.



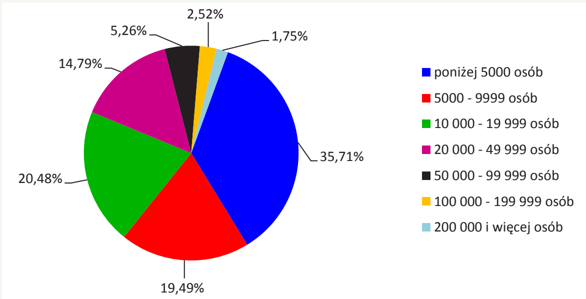
10.B.8. Przeprowadź w swojej klasie badanie, które pozwoli dowiedzieć się, jakie przedmioty uczniowie będą zdawać na egzaminie maturalnym. Wyniki ankiety przedstaw w postaci tabeli liczebności oraz diagramu kolumnowego.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.10.B

Informacja do zadań 10.B.9 – 10.B.12

Miasta w Polsce w podziale ze względu na liczbę mieszkańców (stan na dzień 31.12.2014 r.)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

10.B.9. Miasta poniżej 10 000 mieszkańców stanowią w przybliżeniu:

A. 52% **B.** 55% **C.** 76% **D.** 36%

10.B.10. Miast powyżej 200 000 mieszkańców jest około trzech razy mniej niż miast z liczbą mieszkańców z przedziału:

A. 100 000 – 199 999
C. 50 000 – 99 999
B. 20 000 – 49 999
D. 10 000 – 19 999

10.B.11. Prawdą jest, że:

A. prawie połowa mieszkańców miast mieszka w miastach z liczbą ludności do 10 000 osób,

C. niecałe 10% miast w Polsce to miasta z co najmniej 50 000 ludności,

B. ponad 30% mieszkańców miast mieszka w miastach z liczbą ludności większą niż 20 000,

D. miast z ludnością poniżej 5000 osób jest 21 razy więcej niż miast z liczbą ludności liczącą co najmniej 20 000 osób.

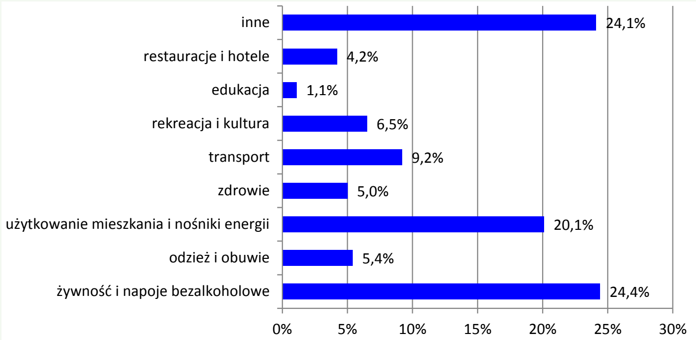
10.B.12. Wiedząc, że wszystkich miast w Polsce jest 913, można stwierdzić, że miast z liczbą ludności poniżej 10 000 jest:

A. 504 **B.** 502 **C.** 177 **D.** 178

Informacja do zadań 10.B.13 – 10.B.16

Przeciętne miesięczne wydatki na 1 osobę w gospodarstwach domowych w Polsce w 2014 roku wyniosły 1079 zł.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



10.B.13. Przeciętne miesięczne wydatki na edukację poniesione przez 1 osobę wynoszą:

A. 11,87 zł **B.** 12 zł **C.** 1,1 zł **D.** 118,69 zł

10.B.14. Wydatki na żywność oraz odzież stanowią:

A. jedną trzecią wszystkich wydatków,

B. połowę wszystkich wydatków,

C. mniej niż czwartą część wszystkich wydatków,

D. blisko 30% wszystkich wydatków.

10.B.15. Wydatki dotyczące transportu są większe od wydatków poniesionych na zdrowie o około:

A. 45 zł **B.** 112 zł **C.** 42 zł **D.** 84 zł

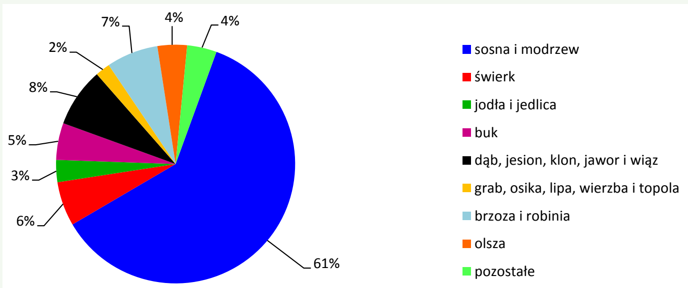
10.B.16. Łączne wydatki na edukację, rekreację i kulturę stanowią:

A. 7,6% **B.** 6,7% **C.** 6,5% **D.** więcej niż 8%

Informacja do zadań 10.B.17 – 10.B.20

Struktura powierzchni lasów państwowych według składu gatunkowego.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



10.B.17. Olsza stanowi:

A. $\frac{1}{20}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{25}$ **D.** $\frac{1}{15}$

powierzchni lasów państwowych.

10.B.18. Sosna i modrzew mają powierzchnię:

A. ponad 50% większą,

B. ponad 40% większą,

C. ponad 20% większą,

D. ponad dwa razy większą

od powierzchni, na jakiej rosną wszystkie pozostałe gatunki drzew.

10.B.19. 6% całej powierzchni lasów porasta:

A. buk, **B.** dąb, **C.** świerk, **D.** brzoza.

10.B.20. Powierzchnia porośnięta przez jodłę i jedlicę stanowi:

A. 50% **B.** 30% **C.** 3% **D.** 6%

powierzchni, na jakiej rośnie świerk.

Informacja do zadań 10.B.21 – 10.B.24

Udział Polski w letnich igrzyskach olimpijskich

Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale	Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale
1924, Paryż	66	2	1976, Montreal	223	26
1928, Amsterdam	64	5	1980, Moskwa	306	32
1932, Los Angeles	20	7	1984, Los Angeles	-	-
1936, Berlin	112	6	1988, Seul	143	16
1948, Londyn	24	1	1992, Barcelona	207	19
1952, Helsinki	28	4	1996, Atlanta	167	17
1956, Melbourne	64	9	2000, Sydney	187	14
1960, Rzym	186	21	2004, Ateny	194	10
1964, Tokio	140	23	2008, Pekin	263	10
1968, Meksyk	177	18	2012, Londyn	221	10
1972, Monachium	290	21			

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

10.B.21. Na pierwszych pięciu igrzyskach Polacy zdobyli tyle samo medali co w:

A. Los Angeles, **B.** Sydney, **C.** Moskwie, **D.** Monachium.

10.B.22. Średnia medali zdobytych przez polskich sportowców w latach 2000 – 2012 wynosi:

A. 10 **B.** 10,2 **C.** 11 **D.** 10,5

10.B.23. Największa reprezentacja w historii igrzysk zdobyła:

A. 21 medali, **B.** 32 medale, **C.** 10 medali, **D.** 26 medali.

10.B.24. Dominantą liczby medali zdobytych przez polskich sportowców w historii wszystkich igrzysk jest liczba:

A. 21, **B.** 10, **C.** większa niż 10, **D.** większa niż 15.

10.C ▶ Doświadczenia losowe. Opisywanie doświadczeń losowych

DEFINICJE	PRZYKŁAD
Doświadczenie losowe to zjawisko lub eksperyment, o wyniku którego decyduje przypadek. Przestrzeń zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich możliwych do otrzymania wyników. Oznaczamy ją literą Ω (wielką grecką literą omega). Liczbę elementów zbioru Ω nazywamy mocą zbioru Ω i oznaczamy jako $\overline{\overline{\Omega}}$ (lub $\lvert\Omega\rvert$).	Rzut monetą jest doświadczeniem losowym, ponieważ mogą pojawić się dwa wyniki (orzeł lub reszka), ale przed wykonaniem doświadczenia nie wiemy, co wypadnie. Rzut symetryczną kostką do gry jest doświadczeniem losowym, ponieważ wiemy, co może się pojawić: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ale przed dokonaniem rzutu nie wiemy, co wypadnie.

Każdy możliwy wynik doświadczenia nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy literą ω (małą grecką literą omega).

Przyjmujemy, że doświadczenie przebiega w warunkach, w których otrzymanie każdego wyniku jest jednakowo możliwe.

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Opisz zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia.

Jeśli w rzucie monetą wypadnie orzeł, to zapisujemy O, a gdy wypadnie reszka, zapisujemy R. Zapis (O, R) oznacza, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł, a w drugim reszka.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych, czyli zbiór wszystkich możliwych wyników, to
$\Omega = \{(O,O), (O,R), (R,O), (R,R)\}$.

Zdarzenia elementarne to: $\omega_1 = (O,O)$, $\omega_2 = (O,R)$, $\omega_3 = (R,O)$, $\omega_4 = (R,R)$

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą, a następnie jednokrotnym rzucie kostką.

a. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia.

b. Wyznacz zbiór możliwych wyników, jeśli:

A_1 — na monecie wypadł orzeł,

A_2 — na kostce wypadła nieparzysta liczba oczek,

A_3 — na kostce wypadły co najwyżej 4 oczka,

A_4 — na kostce wypadło co najmniej 5 oczek.

Odp. a. Wypisujemy kolejne uporządkowane pary — na pierwszym miejscu orzeł (O) lub reszka (R), a na drugim liczba oczek, które wypadły na kostce.

$$\Omega = \{(O,1),(O,2),(O,3),(O,4),(O,5),(O,6),(R,1),(R,2),(R,3),(R,4),(R,5),(R,6)\}$$

Odp. b. Zbiory możliwych wyników to:

$A_1 = \{(O,1),(O,2),(O,3),(O,4),(O,5),(O,6)\}$
$A_2 = \{(O,1),(R,1),(O,3),(R,3),(O,5),(R,5)\}$
$A_3 = \{(O,1),(O,2),(O,3),(O,4),(R,1),(R,2),(R,3),(R,4)\}$
$A_4 = \{(O,5),(O,6),(R,5),(R,6)\}$

DEFINICJA

Zdarzeniem losowym nazywamy każdy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych (czyli Ω).

Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami: A, B, C, D itd.

Podzbiorami zbioru Ω są m.in. zbiór pusty $\varnothing$ (który nazywamy zdarzeniem niemożliwym) i zbiór Ω (który nazywamy zdarzeniem pewnym).

Jeśli zdarzenie elementarne ω należy do zbioru A, to mówimy, że zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A.

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
A — wypadła parzysta liczba oczek,
B — wypadła nieparzysta liczba oczek,
C — wypadła liczba oczek większa od 7,
D — wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$A = \{2, 4, 6\}$ — co oznacza, że zdarzeniu A sprzyjają wyniki 2, 4, 6.
$B = \{1, 3, 5\}$ — co oznacza, że zdarzeniu B sprzyjają wyniki 1, 3, 5.
Zdarzenie C jest zdarzeniem niemożliwym.
Zdarzenie D jest zdarzeniem pewnym ($D = \Omega$).

DEFINICJA

Liczbę elementów zbioru A nazywamy mocą zbioru i oznaczamy jako $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką.

a. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia.
b. Wypisz wyniki sprzyjające następującym zdarzeniom:
A — za pierwszym razem wypadła nieparzysta liczba oczek,
B — w obu rzutach wypadła taka sama liczba oczek,
C — za drugim razem wypadła większa liczba oczek niż za pierwszym razem,
D — suma wyrzuconych oczek w obu rzutach jest nie mniejsza niż 13,
E — suma wyrzuconych oczek w obu rzutach jest nie większa niż 5.

Odp. a. Wypisujemy kolejne uporządkowane pary.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Odp. b.

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{A}} = 18$.

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{B}} = 6$.

$$C = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{C}} = 15$.

$D = \varnothing$ — zdarzenie D jest zdarzeniem niemożliwym.

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{E}} = 10$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.C.1. Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą.

a. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i określ moc tego zbioru.

b. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom i określ moc poszczególnych zbiorów:
A — reszka wypadła co najmniej raz,
B — wypadły same orły,
C — orzeł wypadł więcej razy niż reszka,
D — orzeł i reszka wypadły co najmniej dwa razy,
E — orzeł wypadł tyle samo razy co reszka,
F — orzeł wypadł co najwyżej dwa razy.

10.C.2. Losujemy jedną cyfrę ze zbioru $\{2, 4, 6\}$, a następnie rzucamy monetą.

a. Wyznacz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia i określ moc tego zbioru.

b. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom i określ moc poszczególnych zbiorów.
A — wypadł orzeł,
B — wypadła reszka i wylosowano liczbę parzystą,
C — wylosowano liczbę większą od 4,
D — wylosowano liczbę równą co najmniej 2,

c. Podaj przykład zdarzenia pewnego w tym doświadczeniu.

d. Podaj przykład zdarzenia niemożliwego w tym doświadczeniu.

10.C.3. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i tworzymy z nich liczbę dwucyfrową. Pierwsza wylosowana liczba jest cyfrą dziesiątek, a druga cyfrą jedności.

a. Wyznacz przestrzeń zdarzeń elementarnych tego doświadczenia i określ moc tego zbioru.

b. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom i określ moc poszczególnych zbiorów:
A — utworzona liczba jest parzysta,
B — utworzona liczba jest większa od 30,
C — utworzona liczba jest podzielna przez 5,
D — utworzona liczba jest większa niż 20.

c. Podaj przykład zdarzenia pewnego w tym doświadczeniu.

d. Podaj przykład zdarzenia niemożliwego w tym doświadczeniu.

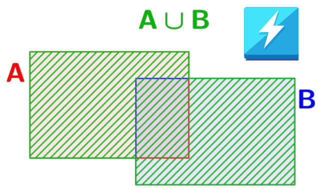
► Działania na zdarzeniach losowych

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω oraz zdarzenia A, B takie, że $A, B \subset \Omega$, są zbiorami, więc możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

DEFINICJA

Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B.

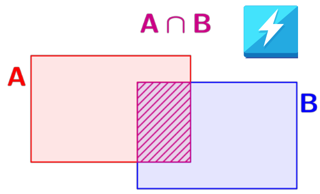
$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A$ lub $\omega \in B$



P.1.A.1

Iloczynem (częścią wspólną) zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B.

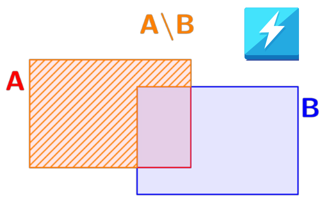
$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A$ i $\omega \in B$



P.1.A.1

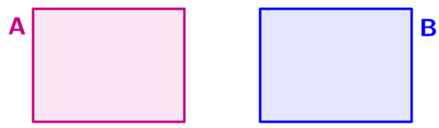
Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B.

$\omega \in A \setminus B \Leftrightarrow \omega \in A$ i $\omega \notin B$

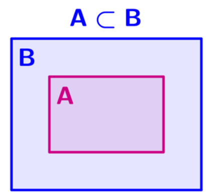


P.1.A.1

Zdarzenia A i B są rozłączne lub wykluczają się, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym.



Jeżeli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B, to mówimy, że zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B, co oznaczamy $A \subset B$.

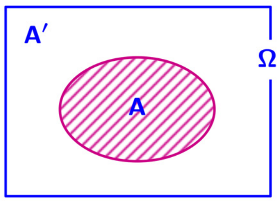


DEFINICJA

Zbiór wszystkich wyników w przestrzeni Ω, które nie sprzyjają zdarzeniu A, nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i oznaczamy jako A':

$$A' = \Omega \setminus A$$

Zauważmy, że $A \cap A' = \varnothing$ oraz $A \cup A' = \Omega$.



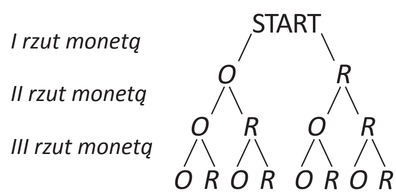
PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wypisz wyniki sprzyjające następującym zdarzeniom:

A — reszka wypadła co najwyżej raz,
B — orzeł wypadł co najmniej raz,
C — wypadły same reszki,
D — orzeł wypadł dokładnie dwa razy,
E — wypadło mniej orłów niż reszek.

a. Wskaż pary zdarzeń wykluczających się.
b. Wskaż pary zdarzeń przeciwnych.
c. Wyznacz różnicę zdarzeń $B \setminus E$.
d. Wyznacz iloczyn zdarzeń $A \cap B$.

1° Wyznaczamy zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia (Ω). Możemy to zrobić za pomocą drzewka.



Wyniki doświadczenia:
$(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (O,R,R), (R,O,O), (R,O,R), (R,R,O), (R,R,R)$

Wyniki tego doświadczenia wypisujemy, idąc kolejnymi gałęziami drzewka od START-u do mety (w dół). W ten sposób otrzymujemy zbiór Ω.

2° Wypisujemy wyniki sprzyjające poszczególnym zdarzeniom.

$A=\{(R,O,O),(O,R,O),(O,O,R),(O,O,O)\}$
$B=\{(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(O,O,O)\}$
$C=\{(R,R,R)\}$
$D=\{(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O)\}$
$E=\{(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O),(R,R,R)\}$

Odp. a. Pary zdarzeń wykluczających się to: A i C, B i C, D i C, E i A, E i D.

Odp. b. Para zdarzeń przeciwnych to: B i C, ponieważ $B \cup C=\Omega$.

Odp. c. $B \setminus E=\{(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(O,O,O)\}$

Odp. d. $A \cap B=\{(R,O,O),(O,R,O),(O,O,R),(O,O,O)\}$

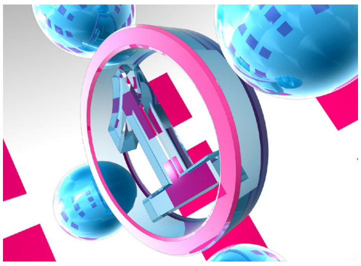
ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.C.4. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ losujemy kolejno bez zwracania dwie cyfry i tworzymy liczbę dwucyfrową. Pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą jedności tej liczby, a druga cyfrą dziesiątek.

a. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia.

b. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
A — utworzona liczba jest nieparzysta,
B — utworzona liczba jest podzielna przez 3.

c. Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $A' \cup B$, $A \cap B'$.

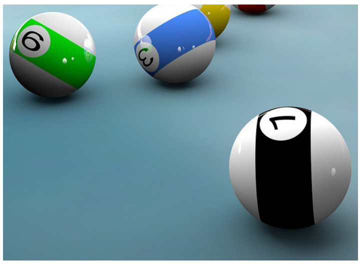


10.C.5. Z pojemnika z kulami ponumerowanymi od 1 do 6 losujemy kolejno bez zwracania dwie kule.

a. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
A — wylosowano kule z numerami nieparzystymi,
B — dokładnie jedna wylosowana kula ma numer nieparzysty.

b. Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B'$, $B \cap A'$.

c. Podaj przykład zdarzenia pewnego w tym doświadczeniu losowym.



10.C.6. Rzucamy monetą, a następnie losujemy jedną cyfrę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$.

a. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:
A — wypadła reszka i wylosowano liczbę nieparzystą,
B — wypadł orzeł,
C — wylosowano liczbę parzystą.

b. Wyznacz zdarzenia: $A \cup C$, $A \cap B$, $A' \cap C'$.

c. Podaj przykład zdarzenia niemożliwego w tym doświadczeniu losowym.

ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.10.C

10.C.7. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy jedną cyfrę, a następnie losujemy drugą cyfrę. Pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga cyfrą jedności. Zdarzeniem elementarnym nie może być liczba:

A. 52 **B.** 74 **C.** 26 **D.** 44

10.C.8. Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych rzutu monetą, który ma postać $\Omega = \{(O,O),(R,R),(R,O),(O,R)\}$. Zbiór ten opisuje:

A. pojedynczy rzut monetą,
B. dwukrotny rzut monetą,
C. trzykrotny rzut monetą,
D. czterokrotny rzut monetą.

10.C.9. Dany jest zbiór zdarzeń elementarnych jednoczesnego rzutu jedną kostką i jedną monetą. Zdarzeniem elementarnym tego zbioru nie może być:

A. (O,R) **B.** $(3,R)$ **C.** $(O,5)$ **D.** $(R,1)$

10.C.10. Wyników sprzyjających zdarzeniu, że w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką do gry liczba oczek na jednej kostce jest dwa razy większa od liczby oczek na drugiej kostce jest:

A. 12 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 2

10.C.11. Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką do gry. Zbiór zdarzeń elementarnych liczy:

A. 18 elementów, **B.** 36 elementów, **C.** 108 elementów, **D.** 216 elementów.

10.C.12. Rzucamy n-krotnie symetryczną monetą. Zbiór zdarzeń elementarnych liczy 32 elementy. Oznacza to, że:

A. $n = 2$ **B.** $n = 3$ **C.** $n = 4$ **D.** $n = 5$

10.C.13. Ze zbioru $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy jedną liczbę. Zdarzenie A polega na wylosowaniu liczby parzystej, a zdarzenie B polega na wylosowaniu liczby nieparzystej. Prawdą jest, że:

A. $A \setminus B = \{1,3,5\}$ **B.** $A \cap B = \varnothing$ **C.** $A \cup B = B$ **D.** $B \setminus A = \varnothing$

10.C.14. Rzucamy trzykrotnie monetą. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu co najmniej dwóch orłów, a zdarzenie B na wyrzuceniu co najwyżej dwóch orłów. Wtedy:

A. $B \setminus A = \{(R,R,O),(R,O,R),(R,R,R)\}$

B. $A \setminus B = \{(O,O,O)\}$

C. $A \cup B = \{(O,O,O),(R,R,O),(R,O,R),(O,R,R)\}$

D. $A \cap B = \varnothing$

10.C.15. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Zdarzenie A polega na wyrzuceniu na obu kostkach parzystej liczby oczek. Zdarzenie przeciwne A' polega na:

A. wyrzuceniu na obu kostkach parzystej liczby oczek,

B. wyrzuceniu dokładnie na jednej kostce parzystej liczby oczek,

C. wyrzuceniu na co najwyżej jednej kostce parzystej liczby oczek,

D. wyrzuceniu co najmniej na jednej kostce parzystej liczby oczek.

10.2 ▶ Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych. Zastosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania

Do rozwiązywania zadań kombinatorycznych jest potrzebna umiejętność zliczania elementów zbiorów opisujących przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jeśli zdarzeń nie jest zbyt dużo, to można je wypisać i policzyć. Innym sposobem jest zastosowanie reguły mnożenia oraz reguły dodawania.

▶ Reguła mnożenia

TWIERDZENIE

Jeśli doświadczenie można wykonać w m kolejnych etapach, takich, że w pierwszym etapie jest k_1 wyników, w drugim — k_2 wyników, w trzecim — k_3 wyników, …, a w m-tym — k_m wyników, to moc zbioru wyników doświadczenia jest równa iloczynowi $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_m$.

PRZYKŁAD 1

P.10.2.1

Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?

1° Ustawiamy osoby na kolejnych miejscach — posłużymy się w tym celu rysunkiem pomocniczym z pięcioma miejscami.

1.1° Na pierwszym miejscu możemy ustawić każdą z 5 osób.

1.2° Na drugim miejscu możemy ustawić jedną z pozostałych 4 osób.

1.3° Na trzecim miejscu możemy ustawić jedną z pozostałych 3 osób.

1.4° Na czwartym miejscu możemy ustawić jedną z pozostałych 2 osób.

1.5° Na piątym miejscu możemy ustawić ostatnią osobę.

5	4	3	2	1

2° Korzystamy z reguły mnożenia.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

3° Pięć osób możemy ustawić w kolejce na 120 sposobów.

PRZYKŁAD 2

P.10.2.1

Ile różnych liczb czterocyfrowych można otrzymać z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jeżeli cyfry nie mogą się powtarzać?

1° Ustawiamy cyfry na kolejnych miejscach liczby — posłużymy się w tym celu rysunkiem pomocniczym z czterema miejscami.

9	9	8	7

1.1° Na pierwszym miejscu możemy ustawić cyfry od 1 do 9. Nie możemy ustawić zera.

1.2° Na drugim miejscu możemy ustawić jedną z pozostałych 8 cyfr oraz cyfrę 0, więc razem mamy 9 możliwości.

1.3° Na trzecim miejscu możemy ustawić jedną z 8 cyfr.

1.4° Na czwartym miejscu możemy ustawić jedną z pozostałych 7 cyfr.

2° Korzystamy z reguły mnożenia.

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$$

3° Z podanych cyfr można otrzymać 4536 różnych liczb.

PRZYKŁAD 3

P.10.2.1

Ile różnych liczb czterocyfrowych można otrzymać z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jeżeli cyfry mogą się powtarzać?

1° Ustawiamy cyfry na kolejnych miejscach liczby — posłużymy się w tym celu rysunkiem pomocniczym z czterema miejscami.

1.1° Na pierwszym miejscu możemy ustawić cyfry od 1 do 9. Nie możemy ustawić zera.

1.2° Na drugim miejscu możemy ustawić każdą z 10 cyfr.

1.3° Na trzecim miejscu możemy ustawić każdą z 10 cyfr.

1.4° Na czwartym miejscu możemy ustawić każdą z 10 cyfr.

9	10	10	10

2° Korzystamy z reguły mnożenia.

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$$

3° Z podanych cyfr można otrzymać 9000 różnych liczb.

PRZYKŁAD 4

P.10.2.1

W restauracji można zamówić 5 rodzajów zup, 9 rodzajów drugiego dania oraz 7 rodzajów deserów. Na ile sposobów można zamówić w tej restauracji obiad składający się z zupy, drugiego dania i deseru?

1° Wybieramy sposoby wyboru rodzajów dań — posłużymy się w tym celu rysunkiem pomocniczym z trzema miejscami.

1.1° Zupę możemy wybrać na 5 sposobów.

1.2° Drugie danie możemy wybrać na 9 sposobów.

1.3° Deser możemy wybrać na 7 sposobów.

5	9	7

2° Korzystamy z reguły mnożenia.

$$5 \cdot 9 \cdot 7 = 315$$

3° W restauracji można zamówić obiad na 315 sposobów.

PRZYKŁAD 5

P.10.2.1

Na ile sposobów można wybrać dwuosobową delegację z klasy liczącej 30 uczniów?

1° Wybieramy poszczególne osoby do delegacji — posłużymy się w tym celu rysunkiem pomocniczym z dwoma miejscami.

1.1° Pierwszą osobę wybieramy z 30 osób.

1.2° Drugą osobę wybieramy z pozostałych 29 osób.

30	29

2° Korzystamy z reguły mnożenia. $30 \cdot 29 = 870$

Uwaga! W uzyskanej liczbie mamy zdublowane wyniki, ponieważ uwzględnione są sytuacje, gdy np. osoba A została wybrana jako pierwsza, a osoba B jako druga i odwrotnie. Wszystkie możliwe pary policzone są więc dwukrotnie.

3° Liczbę uzyskaną z reguły mnożenia dzielimy więc przez 2. $870 : 2 = 435$

4° Delegację można wybrać na 435 sposobów.

PRZYKŁAD

P.10.2.2

Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, występuje dokładnie jedna cyfra 4 i dokładnie jedna cyfra nieparzysta.

1° Przedstawiamy symbolicznie liczbę pięciocyfrową.

2° Liczbę 4 możemy ustawić na 5 sposobów. $5 \cdot \ldots$

3° Liczbę nieparzystą (1, 3, 5, 7, 9) możemy wybrać na 5 sposobów i ustawić ją w 4 miejscach. $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \ldots$

4° Pozostałe cyfry muszą być parzyste i różne od 4 (czyli 2, 6, 8) i mogą się powtarzać, czyli na każdym polu z trzech pozostałych możemy ustawić cyfrę na 3 sposoby. $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

5° Wykonujemy obliczenie. $= 2700$

6° Takich liczb jest 2700.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

P.10.2.3

PRZYKŁAD 1. Na ile sposobów można ustawić 6 różnych książek na półce?

PRZYKŁAD 2. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, jeżeli cyfry nie mogą się powtarzać?

PRZYKŁAD 3. Ile różnych liczb czterocyfrowych można otrzymać z cyfr parzystych, jeżeli cyfry mogą się powtarzać?

PRZYKŁAD 4. Tomek ma 8 par spodni, 10 bluz oraz 6 par butów. Oblicz, na ile sposobów może założyć posiadane spodnie, bluzy i buty?

PRZYKŁAD 5. W turnieju szachowym startuje 15 zawodników. Każdy z każdym gra jedno spotkanie. Ile spotkań odbędzie się podczas turnieju?

► Reguła dodawania

TWIERDZENIE

Jeśli zbiór wszystkich wyników możemy podzielić na m podzbiorów takich, że w pierwszym podzbiorze jest n_1 wyników, w drugim podzbiorze — n_2 wyników, w trzecim podzbiorze — n_3 wyników, ..., a w ostatnim podzbiorze n_m wyników i wyniki te są różne, to wszystkich wyników jest $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m$.

Inaczej możemy zapisać:
Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

PRZYKŁAD 1

P.10.2.4

Ile jest liczb czterocyfrowych o sumie cyfr 4?

1° Rozpatrujemy poszczególne przypadki.

PRZYPADEK I: Liczba złożona z cyfr 4 i samych zer to: $4000 \rightarrow P_I = 1$

PRZYPADEK II: Liczby złożone z cyfr 3, 1, 0, 0: $3100, 3010, 3001, 1300, 1030, 1003 \rightarrow P_{II} = 6$

PRZYPADEK III: Liczby złożone z cyfr 2, 2, 0, 0: $2200, 2020, 2002 \rightarrow P_{III} = 3$

PRZYPADEK IV: Liczby złożone z cyfr 2, 1, 1, 0: $1120, 1102, 1012, 1210, 1201, 1021, 2110, 2101, 2011 \rightarrow P_{IV} = 9$

PRZYPADEK IV: Liczba złożona z samych cyfr 1: $1111 \rightarrow P_V = 1$

2° Korzystamy z reguły dodawania: $P_I + P_{II} + P_{III} + P_{IV} + P_V = 1 + 6 + 3 + 9 + 1 = 20$

3° Liczb czterocyfrowych o sumie cyfr 4 jest 20.

PRZYKŁAD 2

P.10.2.4

Ile różnych liczb czterocyfrowych można otrzymać z cyfr, których iloczyn wynosi 6?

1° Rozpatrujemy poszczególne przypadki.

PRZYPADEK I: Liczby złożone z cyfr 1, 1, 1, 6: $1116, 1161, 1611, 6111 \rightarrow P_I = 4$

PRZYPADEK II: Liczby złożone z cyfr 1, 1, 2, 3: $1123, 1132, 1231, 1321, 1213, 1312, 2311, 2131, 2113, 3211, 3121, 3112 \rightarrow P_{II} = 12$

2° Korzystamy z reguły dodawania: $P_I + P_{II} = 4 + 12 = 16$

3° Liczb czterocyfrowych o iloczynie cyfr 6 jest 16.

PRZYKŁAD 3

P.10.2.4

Do klasy III A uczęszcza 13 chłopców i 17 dziewcząt, a do klasy III B 14 chłopców i 16 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać parę złożoną z jednej dziewczyny i jednego chłopca, którzy chodzą do tej samej klasy?

1° Rozpatrujemy poszczególne przypadki.

PRZYPADEK I: Losujemy chłopaka i dziewczynę z klasy III A: $P_I = 13 \cdot 17 = 221$

PRZYPADEK II: Losujemy chłopaka i dziewczynę z klasy III B: $P_{II} = 14 \cdot 16 = 224$

2° Korzystamy z reguły dodawania: $P_I + P_{II} = 221 + 224 = 445$

3° Parę można wybrać na 445 sposobów.

PRZYKŁAD 4

P.10.2.4

Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 utworzono liczbę ośmiocyfrową o różnych cyfrach. Ile jest takich liczb, w których cyfry parzyste są ustawione na przemian z nieparzystymi?

1° Rozpatrujemy poszczególne przypadki.

PRZYPADEK I: Ustawiamy cyfry, zaczynając od cyfry nieparzystej. N P N P N P N P

Pierwszą cyfrę nieparzystą możemy ustawić na 4 sposoby, potem parzystą również na 4 sposoby. Kolejną nieparzystą na 3 sposoby oraz parzystą również na 3, itd. $P_I = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 576$

PRZYPADEK II: Ustawiamy cyfry, zaczynając od cyfry parzystej. P N P N P N P N

Pierwszą cyfrę parzystą możemy ustawić na 4 sposoby, potem nieparzystą również na 4 sposoby. Kolejną parzystą na 3 sposoby oraz nieparzystą również na 3, itd. $P_{II} = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 576$

2° Korzystamy z reguły dodawania. $P_I + P_{II} = 576 + 576 = 1152$

3° Takich liczb jest 1152.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

P.10.2.5

PRZYKŁAD 1. Ile jest liczb trzycyfrowych o sumie cyfr 5?

PRZYKŁAD 2. Ile różnych liczb czterocyfrowych możemy otrzymać z cyfr, których iloczyn wynosi 4?

PRZYKŁAD 3. Do klasy I C uczęszcza 12 chłopców i 16 dziewcząt, a do klasy I D 15 chłopców i 11 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać parę złożoną z jednej dziewczyny i jednego chłopaka, którzy chodzą do tej samej klasy?

PRZYKŁAD 4. Z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 utworzono liczbę sześciocyfrową o różnych cyfrach. Ile jest takich liczb, w których suma sąsiednich cyfr jest nieparzysta?

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.2.1. Ile słów z sensem lub bez można ułożyć ze wszystkich liter słowa SŁOŃCE.

10.2.2. Rzucamy trzema symetrycznymi kostkami do gry. Na ile sposobów można otrzymać sytuację, w której na każdej kostce jest inna liczba oczek?

10.2.3. Ile liczb sześciocyfrowych można ułożyć z cyfr 0, 1, 2, 3?

10.2.4. Krawcowa dysponuje materiałami w 10 kolorach. Na ile sposobów może uszyć trójkolorową flagę, tak aby każda z trzech części była innego koloru?

10.2.5. Na ile sposobów można utworzyć liczbę czterocyfrową parzystą, w której tylko jedna cyfra jest parzysta?

10.2.6. Na ile sposobów można utworzyć czterocyfrowy PIN (hasło) do telefonu?

10.2.7. Janek, Dorota, Basia, Iga i Artur kupili bilety do kina. Mają oni zająć pięć kolejnych miejsc w jednym rzędzie. Na ile sposobów mogą zająć te miejsca tak, aby Basia i Janek siedzieli obok siebie?

10.2.8. Na szczyt góry prowadzą cztery różne szlaki. Na ile sposobów turysta może wybrać trasę na górę i z powrotem?

10.2.9. Ile jest liczb pięciocyfrowych o sumie cyfr równej 3?

10.2.10. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których iloczyn cyfr jest równy 9?

10.2.11. Gosia ma 2 czerwone torebki, 3 białe, 4 niebieskie i jedną zieloną. W takich kolorach ma również buty: 3 pary butów czerwonych, 2 pary białych, jedną parę butów niebieskich oraz 4 pary butów zielonych. Oblicz, na ile sposobów Gosia może wybrać torebkę i buty w jednym kolorze?

10.2.12. Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których występuje jedna cyfra nieparzysta oraz jedna cyfra 8, a nie występuje cyfra 0.

10.2.13. Na półce stoi siedem różnych książek do matematyki — dwie do klasy I, jedna do klasy II i cztery do klasy III — oraz pięć różnych książek do fizyki — jedna do klasy I, dwie do klasy II i dwie do klasy III. Oblicz, na ile sposobów można wybrać parę książek do tej samej klasy tak, aby była to jedna książka do matematyki i jedna do fizyki.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną. T.10.2

10.2.14. Kasia ma 8 marynarek, 7 bluzek oraz 5 spódnic. Może się ona ubrać na:

A. 20 sposobów, **C.** 280 sposobów,

B. 28 sposobów, **D.** ponad 300 sposobów.

10.2.15. Flagę, taką jak na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Każdy pas ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 6 kolorach, jest równa:

A. 480 **B.** 240 **C.** 150 **D.** 120

10.2.16. W karcie dań jest 6 zup, 4 drugie dania oraz 3 rodzaje deserów. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy, jednego drugiego dania oraz jednego deseru?

A. 13 **B.** 72 **C.** 18 **D.** 24

10.2.17. Z klasy III B, do której uczęszcza 25 osób, należy wybrać dwuosobową delegację, która będzie reprezentowała szkołę na obozie międzynarodowym. Delegację taką można wybrać na:

A. 600 sposobów, **B.** 300 sposobów, **C.** 50 sposobów, **D.** 225 sposobów.

10.2.18. Każdy uczestnik spotkania dziesięcioosobowej grupy przyjaciół uścisnął dłoń każdemu z pozostałych członków tej grupy. Liczba wszystkich uścisków dłoni była równa:

A. 45 **B.** 100 **C.** 180 **D.** 90

10.2.19. Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 4, jest:

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 8

10.2.20. Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których suma cyfr wynosi 3, jest:

A. 6 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 5

10.2.21. Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 9 i niepodzielnych przez 18 jest:

A. 6 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 5

10.2.22. 6 osób w kolejce można ustawić na:

A. 10 sposobów, **B.** 5 sposobów, **C.** 24 sposoby, **D.** 120 sposobów.

10.2.23. Tworzymy liczbę czterocyfrową większą od 3000, która utworzona jest wyłącznie z cyfr 1, 2, 3. Wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać, ale nie wszystkie cyfry muszą być wykorzystane, można stwierdzić, że liczb tych jest:

A. 6 **B.** 4 **C.** 18 **D.** 27

MATURA — ZADANIA OTWARTE

10.2.24. 3 dziewcząt i 4 chłopców wysiada z autobusu. Na ile sposobów mogą wysiąść, jeżeli najpierw będą wysiadać dziewczęta? **2 pkt**

10.2.25. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których cyfry: **2 pkt**

a. mogą się powtarzać,

b. nie mogą się powtarzać?

10.2.26. Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 5 oraz dokładnie jedna cyfra parzysta. **4 pkt**

10.2.27. Z klasy I, II i III dyrektor szkoły musi wybrać dwuosobową delegację na konferencję edukacyjną. Delegacja musi składać się z jednej dziewczyny i jednego chłopca. W klasie I jest 12 dziewcząt i 18 chłopców, w klasie II jest 16 dziewcząt i 11 chłopców, a w klasie III jest 17 dziewcząt i 15 chłopców. Oblicz, na ile sposobów można wybrać delegację złożoną z uczniów z tej samej klasy. **4 pkt**

10.3 ▶ Obliczanie prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa

▶ Prawdopodobieństwo klasyczne zdarzenia *A*

Powiemy, że wyniki doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne, gdy przy odpowiednio dużej liczbie prób częstości wyników są do siebie zbliżone.

DEFINICJA

Dane jest doświadczenie losowe, w którym wyniki są jednakowo prawdopodobne. Wówczas prawdopodobieństwo określonego zdarzenia jest ilorazem wyników sprzyjających temu zdarzeniu i liczebności całego zbioru możliwych wyników.

$$P(A) = \frac{\text{liczba elementów zbioru } A}{\text{liczba elementów zbioru wszystkich wyników}} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

$\overline{\overline{A}}$ — liczba wyników (zdarzeń elementarnych) sprzyjających zdarzeniu A

$\overline{\overline{\Omega}}$ — liczba wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)

TWIERDZENIE

Jeżeli A jest zdarzeniem w doświadczeniu losowym, to $0 \le P(A) \le 1$.

WYJAŚNIENIE

Liczby $\overline{\overline{\Omega}}$ i $\overline{\overline{A}}$ są liczbami naturalnymi i zawsze prawdziwa jest nierówność $0 \le \overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{\Omega}}$. Jeżeli obie strony tej nierówności podzielimy przez $\overline{\overline{\Omega}}$, to otrzymamy $0 \le \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \le 1$, czyli $0 \le P(A) \le 1$.

UWAGA:

Jeżeli w doświadczeniu losujemy więcej niż jeden element, to do opisywania zdarzeń elementarnych (czyli wyników) stosujemy dwa rodzaje nawiasów:

- okrągłe ( ) — gdy ważna jest kolejność losowanych elementów
- klamrowe { } — gdy nie jest ważna kolejność losowanych elementów

PRZYKŁAD 1

P.10.3.1

Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadną dokładnie 2 orły.

1° Wypisujemy wszystkie możliwe zdarzenia elementarne, czyli wyniki.

$$\Omega = \{(R,R,R),(O,R,R),(R,O,R),(R,R,O),(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O),(O,O,O)\}$$

2° Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń.

$$\overline{\overline{\Omega}} = 8$$

3° Obliczamy liczbę zdarzeń sprzyjających.

$A = \{(O,O,R),(O,R,O),(R,O,O)\}$, więc $\overline{\overline{A}} = 3$

4° Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A. $P(A)=\dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\dfrac{3}{8}$

5° Prawdopodobieństwo wypadnięcia dwóch orłów wynosi $\frac{3}{8}$.

PRZYKŁAD 2

P.10.3.1

Rzucamy raz symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba podzielna przez 3.

1° Wypisujemy wszystkie możliwe zdarzenia elementarne, czyli wyniki. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

2° Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli wyników. $\overline{\overline{\Omega}}=6$

3° Obliczamy liczbę zdarzeń sprzyjających. $A=\{3,6\}$, więc $\overline{\overline{A}}=2$

4° Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A. $P(A)=\dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

5° Prawdopodobieństwo wypadnięcia liczby podzielnej przez 3 wynosi $\frac{1}{3}$.

PRZYKŁAD 3

P.10.3.1

W pudełku jest 5 kul czerwonych, 7 niebieskich i 11 zielonych. Losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej.

1° Obliczamy liczbę wszystkich kul w pudełku. $\overline{\overline{\Omega}}=5+7+11=23$

2° Liczba kul sprzyjających zdarzeniu wynosi 7, ponieważ mamy 7 niebieskich kul. $\overline{\overline{A}}=7$

3° Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A. $P(A)=\dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}=\dfrac{7}{23}$

4° Prawdopodobieństwo wylosowania niebieskiej kuli wynosi $\frac{7}{23}$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

P.10.3.2

PRZYKŁAD 1. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadną co najmniej 2 reszki.

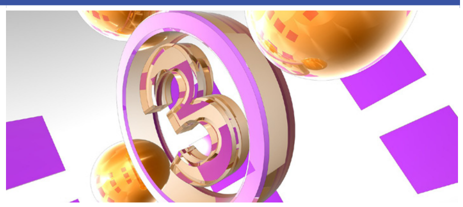
PRZYKŁAD 2. Rzucamy raz symetryczną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba mniejsza od 5.

PRZYKŁAD 3. W pudełku znajduje się 12 losów wygrywających 100 zł, 23 losy wygrywające 10 zł oraz 42 losy przegrywające. Losujemy jeden los. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania losu wygrywającego.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.3.1. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,\ldots,49,50\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej.

10.3.2. Ze zbioru liczb dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 13.



10.3.3. Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadną co najwyżej 2 orły.

10.3.4. W pudełku znajduje się 11 kul czerwonych, 7 kul niebieskich, 13 kul zielonych i 9 kul białych. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej lub białej.

10.3.5. Student potrafi odpowiedzieć na 32 z 44 pytań egzaminacyjnych. Oblicz prawdopodobieństwo, że nie będzie umiał odpowiedzieć na wylosowane pytanie.

10.3.6. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadną same orły lub same reszki.

PRZYKŁAD 1

P.10.3.3

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że w obu rzutach wypadnie parzysta liczba oczek.

1° Obliczamy moc zbioru omega — wszystkie możliwe wyniki. $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$

2° Do rozwiązywania zadania wykorzystamy tabelę. Rysujemy tabelę wszystkich możliwych wyników, w której górny wiersz poziomy oznacza liczbę oczek w pierwszym rzucie, a pionowy liczbę oczek w drugim rzucie.

3° Zaznaczamy w tabeli zdarzenia sprzyjające — zaznaczamy te pola, które oznaczają jednoczesny wybór liczby parzystej w pionie i poziomie (czyli w pierwszym i drugim rzucie).

II \ I	1	2	3	4	5	6
1						
2		+		+		+
3						
4		+		+		+
5						
6		+		+		+

4° Obliczamy liczbę sprzyjających wyników, czyli liczbę zaznaczonych pól w tabeli. $\overline{\overline{A}} = 9$

5° Obliczamy prawdopodobieństwo. $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

6° Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{4}$.

PRZYKŁAD 2

P.10.3.3

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek, jakie wypadną w obu rzutach, będzie nieparzysta.

1° Obliczamy moc zbioru omega — wszystkie możliwości. $\overline{\overline{\Omega}} = 6^2 = 36$

2° Rysujemy tabelę wszystkich możliwych wyników.

3° Zaznaczamy w tabeli zdarzenia sprzyjające.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1		+		+		+
2	+		+		+	
3		+		+		+
4	+		+		+	
5		+		+		+
6	+		+		+	

4° Obliczamy liczbę sprzyjających wyników. $\overline{\overline{A}} = 18$

5° Obliczamy prawdopodobieństwo. $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

6° Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$.

PRZYKŁADY DO ĆWICZEŃ

PRZYKŁAD 3. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn oczek, jakie wypadną na obu kostkach, będzie większy od 17.

PRZYKŁAD 4. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że w obu rzutach wypadnie liczba oczek, różniących się o 2.

PRZYKŁAD 1

P.10.3.4

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

1° Obliczamy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych, czyli wyników. $\overline{\overline{\Omega}} = 7^2 = 49$

2° Rysujemy tabelę, w której zaznaczamy zdarzenia sprzyjające, czyli dwie liczby, których iloczyn jest podzielny przez 6.

II \ I	1	2	3	4	5	6	7
1						+	
2			+			+	
3		+		+		+	
4			+			+	
5						+	
6	+	+	+	+	+	+	+
7							

3° Zliczamy zdarzenia sprzyjające. $\overline{\overline{A}} = 17$

4° Obliczamy prawdopodobieństwo. $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{17}{49}$

5° Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{17}{49}$.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.3.7. Dane są dwa podzbiory liczb całkowitych: $C = \{-5, -4, 1, 3, 7\}$ i $D = \{-3, -2, 2, 4, 5\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest dodatni. **Z.10.3.7**

10.3.8. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn liczby oczek wylosowanych w obu rzutach jest podzielny przez 12. **Z.10.3.8**

10.3.9. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma liczby oczek wylosowanych w obu rzutach jest wielokrotnością liczby 4. **Z.10.3.9**

10.3.10. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich liczb, których suma jest podzielna przez 3. **Z.10.3.10**

10.3.11. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których iloczyn jest podzielny przez 16. **Z.10.3.11**

10.3.12. W pudełku jest 10 kul z numerami od 1 do 10. Losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb nieparzystych, których suma jest parzysta i większa od 5.

10.3.13. W pudełku P_1 znajduje się 5 kul czarnych i 12 białych, a w pudełku P_2 znajduje się 11 kul czarnych i 7 białych. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowane kule będą różnego koloru.

10.3.14. Na lekcji języka angielskiego klasa została podzielona na dwie grupy. W grupie G_1 jest 5 chłopców i 7 dziewcząt, a w grupie G_2 8 chłopców i 6 dziewcząt. Nauczyciel wybiera losowo kapitana każdej grupy. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w obu grupach kapitanem będzie dziewczyna.

10.3.15. Na egzaminie student losuje po jednym pytaniu z trzech zestawów. Każdy zestaw zawiera po 10 pytań. Student zna odpowiedzi na 8 pytań z zestawu pierwszego, 9 pytań z zestawu drugiego oraz na wszystkie pytania z zestawu trzeciego. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
A — student odpowie na wszystkie pytania,
B — student nie odpowie na żadne z pytań.

► Własności prawdopodobieństwa

Zdarzenie przeciwne

A' — oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, więc: $P(A) = 1 - P(A')$ lub $P(A') = 1 - P(A)$.

Własności prawdopodobieństwa

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$.

$P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(A) \in \langle 0,1 \rangle$

PRZYKŁAD

A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A. Wiadomo, że $P(A) = 3P(A') - \frac{1}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

1° Skorzystamy z zależności: $P(A') = 1 - P(A)$.

2° Z treści zadania wiemy, że $P(A) = 3P(A') - \frac{1}{3}$, więc podstawiamy za $P(A') = 1 - P(A)$ i obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = 3(1 - P(A)) - \frac{1}{3}$$

$$P(A) = 3 - 3P(A) - \frac{1}{3}$$

$$P(A) + 3P(A) = 2\frac{2}{3}$$

$$4P(A) = 2\frac{2}{3} \quad |: 4$$

$$P(A) = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

3° Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $\frac{2}{3}$.

PRZYKŁAD

A i B są zdarzeniami losowymi. B' jest zdarzeniem przeciwnym do B. Wiedząc, że $P(A) = 0{,}3$ i $P(B') = 0{,}4$ oraz $A \cap B = \varnothing$, oblicz prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$.

1° Aby obliczyć $P(A \cup B)$, musimy skorzystać ze wzoru:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2° Z treści zadania wiemy, że $P(A) = 0{,}3$ oraz $P(B') = 0{,}4$.

3° Obliczamy $P(B)$, pamiętając, że $P(B) = 1 - P(B')$. $P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

4° Skoro $A \cap B$ jest zbiorem pustym, to $P(A \cap B) = 0$.

5° Podstawiamy otrzymane wartości do wzoru i obliczamy $P(A \cup B)$. $P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}6 - 0 = 0{,}9$

6° Prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$ wynosi 0,9.

ZADANIA UTRWALAJĄCE

10.3.16. A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do A. Oblicz prawdopodobieństwo $P(A)$, jeśli $P(A) = 2 \cdot P(A')$.

10.3.17. Zdarzenia losowe A i B są rozłączne. Wiedząc, że $P(A') = 0{,}7$ i $P(B') = 0{,}6$, oblicz $P(A \cup B)$, gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do A, a B' jest zdarzeniem przeciwnym do B.

MATURA — ZADANIA TESTOWE. Spośród podanych odpowiedzi wybierz poprawną.

T.10.3

10.3.18. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 5 wynosi:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

10.3.19. Rzucamy czterokrotnie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadną co najmniej 3 orły, jest równe:

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{1}{4}$

10.3.20. Prawdopodobieństwo wyrzucenia w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry dwóch liczb parzystych wynosi:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{6}$

10.3.21. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo, że wypadną w trzech rzutach same orły, wynosi:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{6}$

10.3.22. Ze zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Jeżeli p oznacza prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4, to:

A. $p < \frac{1}{4}$ **B.** $p = \frac{1}{3}$ **C.** $p = \frac{1}{4}$ **D.** $p > \frac{1}{3}$

10.3.23. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ wybieramy losowo jedną liczbę. Niech p oznacza prawdopodobieństwo wybrania liczby będącej wielokrotnością liczby 4 lub 6. Wtedy:

A. $p < \frac{1}{3}$ **B.** $p = \frac{1}{3}$ **C.** $p = \frac{1}{4}$ **D.** $p > \frac{1}{3}$

10.3.24. W pojemniku znajdują się 3 kule czerwone, 4 kule niebieskie i 5 kul zielonych. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej równe jest:

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{5}{12}$

10.3.25. W każdym z trzech pudełek znajduje się para kul — jedna kula czerwona i jedna niebieska. Z każdego pudełka losujemy po jednej kuli. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie z trzech wylosowanych kul będą czerwone, wynosi:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

10.3.26. Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 20 wynosi:

A. $\frac{1}{30}$ **B.** $\frac{4}{91}$ **C.** $\frac{4}{89}$ **D.** $\frac{2}{45}$

10.3.27. W klasie III A jest 12 dziewcząt i 18 chłopców, a w klasie III B jest 18 dziewcząt i 14 chłopców. Do dwuosobowej delegacji losowo ma zostać wybrany przedstawiciel każdej klasy. Prawdopodobieństwo, że delegacja będzie składała się z dwojga dziewcząt wynosi:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{28}{62}$ **D.** $\frac{9}{40}$

10.3.28. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej wynosi:

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{7}{20}$ **C.** $\frac{9}{20}$ **D.** $\frac{3}{10}$

10.3.29. Na loterię przygotowano 80 losów, w tym 5 wygrywających. Po wylosowaniu pewnej liczby losów, wśród których były dokładnie dwa wygrywające, szansa na wygraną była taka sama jak przed rozpoczęciem loterii. Wynika stąd, że wylosowano:

A. 3 losy, **B.** 22 losy, **C.** 32 losy, **D.** 40 losów.

10.3.30. Zdarzenie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A. Jeśli $P(A) = 4 \cdot P(A')$, to $P(A)$ równe jest:

A. 0,8 **B.** 0,6 **C.** 0,2 **D.** 0,4

MATURA — ZADANIA OTWARTE

10.3.31. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 8. **2 pkt**

10.3.32. Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 2 większa od liczby oczek w drugim rzucie. **2 pkt**

10.3.33. Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych wybieramy losowo jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczby podzielnej przez 8 lub podzielnej przez 12. **2 pkt**

10.3.34. W pudełku P_1 znajduje się 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8, a w pudełku P_2 znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 2 do 7. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka, aby otrzymać liczbę dwucyfrową. Liczba wylosowana z pudełka P_1 jest cyfrą dziesiątek, a z pudełka P_2 cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 9. **2 pkt**

10.3.35. Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczby oczek otrzymanych na obu kostkach jest większa od 5 i iloczyn tych liczb jest parzysty. **4 pkt**

10.3.36. Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyników, które wypadły na obu kostkach, jest dwucyfrową liczbą parzystą. **4 pkt**

10.3.37. Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloczyn oczek otrzymanych w obu rzutach będzie podzielny przez 4. **4 pkt**

10.3.38. W pudełku znajdują się 3 kule białe, 5 niebieskich i 7 zielonych. Losujemy najpierw jedną kulę z pudełka, potem drugą, a po niej trzecią. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie trzy kule będą różnych kolorów. **4 pkt**

10.3.39. W pojemniku znajdują się kule ponumerowane kolejnymi numerami od 1 do 12. Losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kul, których iloczyn będzie liczbą trzycyfrową. **4 pkt**

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ I PRZYKŁADÓW

9.1.1. **a.** $ABCD \parallel EFGH$, $ABFE \parallel CDGH$, $BCGF \parallel ADHE$

b. $ABFE \perp ABCD$, $ABFE \perp BCGF$, $ABFE \perp ADHE$, $ABFE \perp EFGH$,
$CDHG \perp EFGH$, $CDHG \perp BCGF$, $CDHG \perp ADHE$, $CDHG \perp ABCD$,
$BCGF \perp EFGH$, $BCGF \perp ABCD$, $ADHE \perp EFGH$, $ADHE \perp ABCD$

P.9.1.3 PRZYKŁAD 2. AB, AD, EH, EF, HG, DC, FG, BC

PRZYKŁAD 3. EH, BC, AD

PRZYKŁAD 4. HE, GF, GC, HD, AD, BC, BF, AE

9.1.2. **a.** AB, AD, DD', BB', $B'C'$, $C'D'$

b. BC, CD, AA', CC', $A'B'$, $A'D'$

9.1.3.

9.1.4.

GRANIASTOSŁUP	Liczba			
	Ścian	Wierzchołków	Krawędzi	Przekątnych graniastosłupa
TRÓJKĄTNY	5	6	9	0
CZWOROKĄTNY	6	8	12	4
PIĘCIOKĄTNY	7	10	15	10
SZEŚCIOKĄTNY	8	12	18	18
OŚMIOKĄTNY	10	16	24	40
DZIESIĘCIOKĄTNY	12	20	30	70
n-KĄTNY*	$n+2$	$2n$	$3n$	$n(n-3)$

9.1.5. **a.** Tak, ponieważ liczba krawędzi graniastosłupa to $3n$, a liczba 21 jest podzielna przez 3.

b. Tak, ponieważ liczba krawędzi graniastosłupa to $3n$, a liczba 33 jest podzielna przez 3.

9.1.6. **a.** Tak, ponieważ graniastosłup posiada parzystą liczbę wierzchołków.

b. Nie, ponieważ liczba 41 jest liczbą nieparzystą.

9.1.7. **a.** 28 **b.** 16

9.1.8.

OSTROSŁUP	Liczba		
	Ścian	Wierzchołków	Krawędzi
TRÓJKĄTNY	4	4	6
CZWOROKĄTNY	5	5	8
PIĘCIOKĄTNY	6	6	10
SZEŚCIOKĄTNY	7	7	12
OŚMIOKĄTNY	9	9	16
DWUNASTOKĄTNY	13	13	24
n-KĄTNY*	$n+1$	$n+1$	$2n$

9.1.9. **a.** Tak, jest to ostrosłup sześciokątny.

b. Tak, jest to ostrosłup czternastokątny.

c. Nie, ponieważ liczba krawędzi ostrosłupa to $2n$, a liczba 5 nie jest podziena przez 2.

9.1.10. **a.** 10 **b.** 10

9.1.11. $\alpha = 45^\circ$

9.1.12. $\alpha = 60^\circ$

9.1.13. $\alpha = 45^\circ$

9.1.14.	B	**9.1.15.**	A	**9.1.16.**	C	**9.1.17.**	A	**9.1.18.**	D
9.1.19.	C	**9.1.20.**	D	**9.1.21.**	C	**9.1.22.**	C	**9.1.23.**	D

9.1.24. $\alpha = 30^\circ$ **9.1.25.** $\alpha = 90^\circ$

P.9.2.5 PRZYKŁAD 2. $\alpha = 60^\circ$

9.2.1. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

9.2.2. $\alpha = 30^\circ$

9.2.3.	D	**9.2.4.**	D	**9.2.5.**	A	**9.2.6.**	C	**9.2.7.**	A
9.2.8.	B								

9.2.9. $\alpha = 30^\circ$ **9.2.10.** $H = 3\sqrt{2}$

9.2.11. $a = 6$ **9.2.12.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

P.9.3.10 PRZYKŁAD 2. $l = 17$

9.3.1. $l = 10$

9.3.2. $H = 8$

9.3.3. $\alpha = 120^\circ$

9.3.4. $d = 15$

9.3.5.	D	**9.3.6.**	C	**9.3.7.**	A	**9.3.8.**	A	**9.3.9.**	D
9.3.10.	C								

9.3.11. $H = 4\sqrt{6}$, $r = 6\sqrt{2}$ **9.3.12.** $r = H = 2\sqrt{10}$

9.4.1. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

9.4.2. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

9.4.3.	C	**9.4.4.**	D	**9.4.5.**	D	**9.4.6.**	C	**9.4.7.**	A

9.4.8. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{12}$ **9.4.9.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$

P.9.5.5 PRZYKŁAD 2. $P_{przekroju} = 8\sqrt{61}\ j^2$

9.5.1.

$P_{ABF} = 52\ j^2$

9.5.2. $P_{przekroju} = 16\sqrt{3}\ j^2$

9.5.3. $H = 11$

9.5.4.	D	**9.5.5.**	B	**9.5.6.**	D	**9.5.7.**	C	**9.5.8.**	D

9.6.1. $V = 1331\ \text{j}^3, P_c = 726\ \text{j}^2$

9.6.2. $V = 729\ \text{j}^3$

9.6.3. $P_c = 864\ \text{j}^2$

9.6.4. Suma krawędzi wynosi 120.

9.6.5. $d_{sz} = 10\sqrt{6}$

9.6.6. $a = 2(\sqrt{3} + 1)$

9.6.7. $d = 15\sqrt{2}$

9.6.8. $P_c = 738\ \text{j}^2$

9.6.9. $V = 96\ \text{j}^3$

9.6.10. $V = 144\ \text{cm}^3$

9.6.11. $V = 48\ \text{cm}^3$

9.6.12. $V = 60\ \text{j}^3$

P.9.6.18 PRZYKŁAD 2. $V = 72\ \text{j}^3$

P.9.6.19 PRZYKŁAD 2. $P_c = 96(3 + 2\sqrt{3})\ \text{j}^2$

9.6.13. $V = 75\sqrt{3}\ \text{j}^3$

9.6.14. $P_c = 18(1 + 2\sqrt{6})\ \text{j}^2$

9.6.15. $V = 3240\ \text{j}^3$

9.6.16. $V = 243\ \text{j}^3$

9.6.17. $P_b = 192\ \text{j}^2$

9.6.18. $P_c = 48(1 + 2\sqrt{3})\ \text{j}^2$

9.6.19. $P_b = 168\ \text{j}^2$

9.6.20. $V = 1296\ \text{j}^3$

P.9.6.34 PRZYKŁAD 2. $V = 18\sqrt{2}\ \text{j}^3, P_c = 36\sqrt{3}\ \text{j}^2$

9.6.21. $V = 144\sqrt{2}\ \text{j}^3$

9.6.22. $V = \frac{256\sqrt{2}}{3}\ \text{j}^3$

9.6.23. $V = 768\ \text{j}^3$

9.6.24. $V = 36\sqrt{2}\ \text{j}^3$

9.6.25. Objętość ostrosłupa jest 5 razy mniejsza od pozostałej części sześcianu.

9.6.26. $V = 3072\ \text{j}^3$

9.6.27. $V = 180\ \text{j}^3$

9.6.28. $V = 32\ \text{j}^3$

P.9.6.38 PRZYKŁAD 2. $P_c = 48\pi\ \text{j}^2$

P.9.6.39 PRZYKŁAD 2. $P_c = 96\pi$ j^2, $V = 96\pi$ j^3

P.9.6.40 PRZYKŁAD 2. $V = 972\pi$ j^3

9.6.29. $P_b = 64\pi$ j^2

9.6.30. $V = 100\pi$ j^3

9.6.31. $V = 7776\pi$ j^3

9.6.32. $P_c = 200\pi$ cm^2

9.6.33. $P_b = 56\pi$ j^2

9.6.34. $V = 192\sqrt{3}\,\pi$ j^3

9.6.35. $P_b = 48\pi$ j^2

9.6.36. $P_c = 100\pi$ j^2

9.6.37. $P_c = 200\pi$ j^2, $V = 320\pi$ j^3

9.6.38. $V = 175\pi$ j^3

9.6.39. $P_c = 400\pi$ j^2

9.6.40. $P_{przekroju} = 144\pi$ cm^2

9.6.41. B	**9.6.42.** D	**9.6.43.** C	**9.6.44.** D	**9.6.45.** D
9.6.46. A	**9.6.47.** D	**9.6.48.** B	**9.6.49.** C	**9.6.50.** D
9.6.51. B	**9.6.52.** D	**9.6.53.** B	**9.6.54.** C	**9.6.55.** D
9.6.56. A	**9.6.57.** B	**9.6.58.** C		

9.6.59. $P_c = 72$ j^2	**9.6.60.** 4 cm, 6 cm, 10 cm	**9.6.61.** $P_b = 48\pi$ j^2
9.6.62. $d = 2\sqrt{29}$	**9.6.63.** $P_c = 160$ j^2	**9.6.64.** $V = 32\sqrt{7}$ j^3
9.6.65. $V = 162\sqrt{2}$ j^3	**9.6.66.** $P = 8\sqrt{19}$ j^2	**9.6.67.** $V = 240\,\pi$ j^3
9.6.68. $P_c = 600\,\pi$ j^2, $V = 1500\pi$ j^3		

ISBN: 978-83-63975-21-0

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY