



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

V Liceum Ogólnokształcące  
im. Augusta Witkowskiego  
w Krakowie

# Program działalności szkolnego koła zainteresowań z matematyki



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE



Autor  
Bernard Sozański

ISBN 978-83-7667-059-1

## 1. Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego

### SŁOWNICZEK UŻYTYCH NARZĘDZI:

Dla syntetycznego ujęcia wyników prowadzonych badań wykorzystano podstawowe miary statystyki opisowej:

- a) **średnia arytmetyczna** – wskazuje średnią wartość,
- b) **odchylenie standardowe** – obrazuje przeciętną różnicę między obserwacjami a ich średnią,
- c) **współczynnik zmienności** – opisuje przeciętną procentową różnicę między obserwacjami a ich średnią, wyrażona względem tej średniej,
- d) **kwartył I** – oznacza, że 25% obserwacji jest o wartościach nie wyższych niż wartość tego kwartyła
- e) **kwartył II** (inaczej **mediana** – wartość środkowa) oznacza, że 50% obserwacji jest o wartościach nie wyższych niż wartość tego kwartyła
- f) **kwartył III** – oznacza, że 75% obserwacji jest o wartościach nie wyższych niż wartość tego kwartyła
- g) **kurtoza** (właśc.. **współczynnik ekscesu**) – względna miara koncentracji i spłaszczenia rozkładu, określa rozmieszczenie i koncentrację wartości w pobliżu średniej (gdy wartość kurtozy jest równa 0 rozkład ma kształt normalny, gdy jest większa od 0 rozkład jest bardziej wysmukły niż normalny (większe skupienie wartości wokół średniej), natomiast wartość mniejsza od 0 rozkład jest mniej wysmukły niż normalny (większe spłaszczenie rozkładu)),
- h) **skośność** (**współczynnik skośności**) – miara asymetrii rozkładu (równa 0 dla rozkładu symetrycznego, dodatnia - gdy wykres rozkładu ma długi ogon z prawej strony, ujemna - gdy wykres rozkładu ma długi ogon z lewej strony)

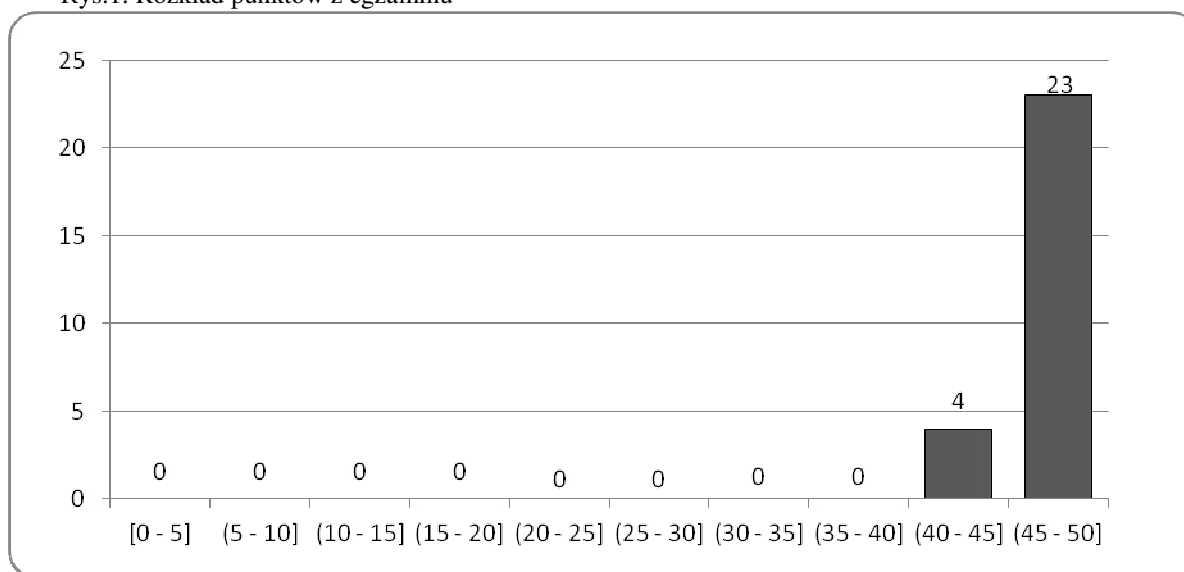
W celu zbadania zgodności badanego rozkładu z rozkładem normalnym wykorzystano **test Kołmogorowa – Smirnowa**, natomiast dla zweryfikowania hipotezy czy dwie niezależne próbki pochodzą z tej samej populacji (mają podobne rozkłady) wykorzystano **test t dla prób niezależnych** (w przypadku zgodności rozkładu wyników grupy z rozkładem normalnym) lub test **Manna – Whitneya** (w przypadku braku zgodności z rozkładem normalnym). Test t dla prób niezależnych został dodatkowo poprzedzony **testem Levene’a równości wariancji grupowych**. W każdym przypadku podano wartość **p**, czyli prawdopodobieństwo testowe; jeśli jest mniejsze od zadanego poziomu istotności  $\alpha$  (wynoszące w prowadzonych analizach 0,05), hipotezę  $H_0$  należy odrzucić.

Natomiast dla zbadania kierunku i siły zależności pomiędzy oceną z matematyki a wynikami egzaminu z części matematyczno – przyrodniczej wykorzystano **współczynnik korelacji rang Spearmana**, który wyraża siłę korelacji dwóch cech mierzonych na skali porządkowej.

Analizie poddano wyniki egzaminu gimnazjalnego z części matematyczno – przyrodniczej w roku szkolnym 2009/2010 oraz oceny końcowe z matematyki 27 uczniów klas pierwszych V LO w Krakowie, którzy złożyli aplikację do zajęć rozszerzających w projekcie „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”. Większość badanych (16 osób, 59,26%) stanowili chłopcy.

Wynik egzaminu gimnazjalnego z części matematyczno – przyrodniczej podawany był w punktach od 0 do 50. Rozkład tych wyników w badanej grupie zaprezentowano na rysunku 1.

Rys.1. Rozkład punktów z egzaminu



Źródło: opracowanie własne

Z informacji przedstawionych na rysunku 1 wynika, że w badanej grupie najczęściej występowały wyniki z przedziału 45-50 pkt. Do tego przedziału należą także średnia (48,15 pkt) oraz mediana (50 pkt), co oznacza że połowa badanych uczniów miała wynik egzaminu nie wyższy niż ten wynik.

W porównaniu ze średnią z województwa podkarpackiego <sup>1</sup> wynoszącą 23,82 pkt średni wynik tej grupy jest dużo wyższy.

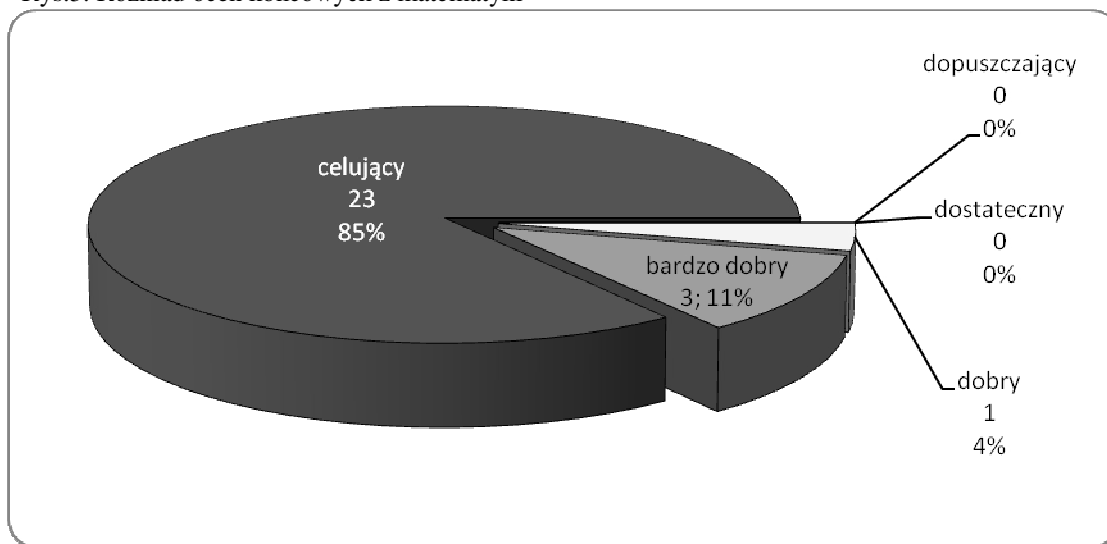
Czwarta część badanych uczniów miała wynik nie wyższy niż 46,5 (kwartył I), zaś 75% miała wynik nie wyższy niż 50 pkt (kwartył 3). Próbę charakteryzowała dość mała zmienność – przeciętne odchylenie od średniej, mierzone odchyleniem standardowym, wynosiło około 7,04 pkt., co stanowi 4,49% średniej. Ujemny wynik kurtozy (-1,10) świadczy o tym, iż rozkład wyników jest mniej

<sup>1</sup> Sprawozdanie z egzaminu gimnazjalnego w 2010 roku [tab.59], OKE w Krakowie, Kraków, maj 2010 [w:] [http://www.oke.krakow.pl/inf/filedata/files/Sprawozdanie%20z%20egzaminu%20gimnazjalnego%20w%202010%20roku\\_1.pdf](http://www.oke.krakow.pl/inf/filedata/files/Sprawozdanie%20z%20egzaminu%20gimnazjalnego%20w%202010%20roku_1.pdf)

wysmukły (bardziej spłaszczony) niż rozkład normalny. Skośność ujemna (-0,63) świadczy o tym, że rozkład jest z asymetrią rozciągającą się w kierunku wartości wyższych.

Uczniowie należący do badanej grupy najczęściej kończyli gimnazjum z oceną z matematyki celującą (23 osoby, 85,19%), co widać na rysunku 3.

Rys.3. Rozkład ocen końcowych z matematyki

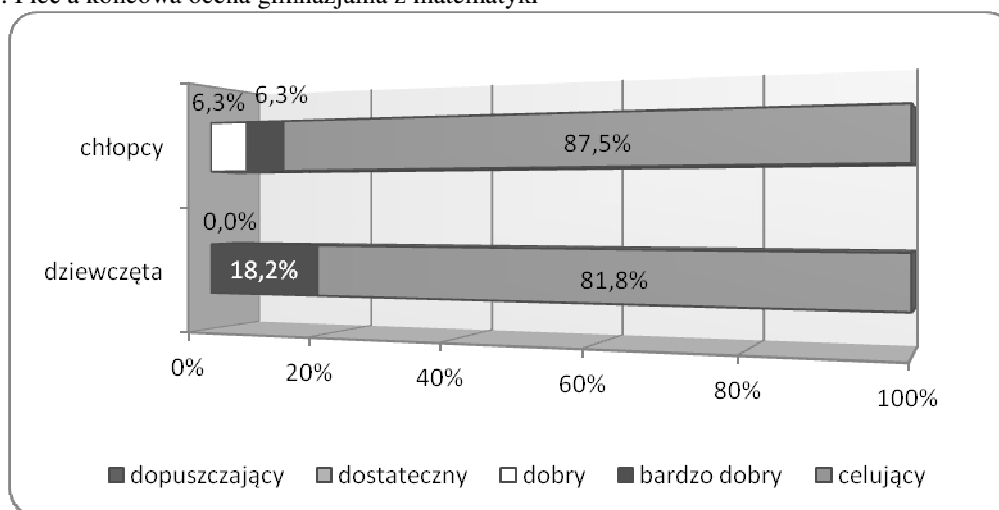


Źródło: opracowanie własne

W badanej grupie średnia ocen wyniosła 5,81, zaś wartość środkowa (mediana) 6. Z uwagi na małą liczbę wariantów cenniejszą informację niż kwartyle podaje nam średnia i odchylenie, które tu wyniosło ok. 0,48 stopnia. Oznacza to, że oceny końcowe uczniów różniły się od średniej 5,81 przeciętnie o 0,48 stopnia, co stanowi 8,31% średniej. Dodatni, wysoki wynik kurtozy (7,45) świadczy o bardzo dużym skupieniu wokół średniej. Znaczna skośność ujemna (-2,74) świadczy o tym, że rozkład jest z asymetrią rozciągającą się w kierunku wartości niższych.

Rozkład ocen końcowych z matematyki wydaje się być nieco inny u dziewcząt i u chłopców (rys. 4). Wprawdzie u obu płci dominowały oceny celujące, ale wśród chłopców ich udział był większy. Z drugiej strony, w odróżnieniu od chłopców, żadna z dziewcząt nie miała na świadectwie „czwórki” z matematyki.

Rys.4. Płeć a końcowa ocena gimnazjalna z matematyki



Źródło: opracowanie własne

Odmienności rozkładów nie potwierdzają podstawowe statystyki (tab.1): zarówno średnia, jak i mediana były zbliżone u obu płci, przy nieco większej zmienności u chłopców.

Tab.2. Rozkład ocen końcowych z matematyki w rozbiciu na płeć

Płeć \ Ocena końcowa	średnia	mediana	odchylenie standardowe	współczynnik zmienności
<b>dziewczeta</b>	5,82	6	0,40	6,95%
<b>chłopcy</b>	5,81	6	0,54	9,36%

Źródło: opracowanie własne

Podobieństwo rozkładów sprawdzono ostatecznie testem U Manna – Whitneya, z uwagi na skalę porządkową. Uzyskany wynik ( $U = 84,00$ ;  $p=0,75$ ,  $p \geq \alpha$ ) pozwolił na przyjęcie tezy, iż gimnazjalne oceny końcowe z matematyki dziewcząt i chłopców są podobne.

Z uwagi na małą liczbę wariantów ocen, nie można było przeprowadzić analizy zależności między wynikiem z egzaminu a oceną końcową z gimnazjum.

## **2. Zasady realizacji zajęć**

### **2.1. Cele realizacji zajęć**

Głównym celem realizacji zajęć w ramach *Koła rozszerzających* jest podniesienie kompetencji matematycznych uczniów rozpoczynających naukę w klasie pierwszej w roku szkolnym 2010/2011.

Cele szczegółowe:

- Rozwijanie sprawności umysłowej,
- Rozwijanie osobistych zainteresowań,
- Nauka rozwiązywania problemów w sposób twórczy,
- Nabywanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy,
- Optymalne przygotowanie młodzieży do zdawania matury w zakresie rozszerzonym.

### **2.2. Założenia programowe**

#### **2.2.1. Organizacja zajęć**

Zajęcia w grupach 10–15-osobowych po 2 godziny tygodniowo – stały termin zajęć (2 godz. razem), dodatkowo konsultacje indywidualne (może być w grupach do 4 osób) – 1 godzina tygodniowo – stały termin oraz w razie potrzeb na wniosek uczniów dodatkowo jeszcze 1 godzina.

Większość zajęć odbywa się wg schematu:

- omówieniem zadania domowego
- część teoretyczna – przypomnienie teorii z lekcji szkolnych, lub omówienie nowego tematu (wykład, prezentacja slajdów, animacji) – każdy uczeń otrzymuje materiały z opracowanym nowym tematem, niektóre tematy mogą opracować uczniowie,
- rozwiązywanie zadań – część zadań rozwiązywana na tablicy, często praca w grupach oraz praca samodzielna zakończona omówieniem metod rozwiązywania poszczególnych zadań oraz przedstawieniem wyników
- zadanie pracy domowej

W trakcie konsultacji indywidualnych prowadzący pomaga uczniowi m.in. poprzez:

- sprawdzanie rozwiązań zadań ucznia
- udzielenie wskazówek do zadań, których uczeń nie potrafi rozwiązać
- wytłumaczenie treści których uczeń nie rozumie
- dobór dodatkowych zadań w celu lepszego opanowania materiału.

### **2.2.2. Omówienie niezbędnych pomocy naukowych**

Zajęcia w grupach 10–15-osobowych po 2 godziny tygodniowo – stały termin zajęć (2 godz. razem), dodatkowo konsultacje indywidualne (może być w grupach do 4 osób) – 1 godzina tygodniowo – stały termin oraz w razie potrzeb na wniosek uczniów dodatkowo jeszcze 1 godzina.

Większość zajęć odbywa się wg schematu:

- omówieniem zadania domowego
- część teoretyczna – przypomnienie teorii z lekcji szkolnych, lub omówienie nowego tematu (wykład, prezentacja slajdów, animacji) – każdy uczeń otrzymuje materiały z opracowanym nowym tematem, niektóre tematy mogą opracować uczniowie,
- rozwiązywanie zadań – część zadań rozwiązywana na tablicy, często praca w grupach oraz praca samodzielna zakończona omówieniem metod rozwiązywania poszczególnych zadań oraz przedstawieniem wyników
- zadanie pracy domowej

W trakcie konsultacji indywidualnych prowadzący pomaga uczniowi m.in. poprzez:

- sprawdzanie rozwiązań zadań ucznia
- udzielenie wskazówek do zadań, których uczeń nie potrafi rozwiązać
- wytłumaczenie treści których uczeń nie rozumie
- dobór dodatkowych zadań w celu lepszego opanowania materiału.

### **2.2.3. Procedury osiągnięcia celów**

- zestawy zadań oraz tematykę zajęć uczniowie powinni znać z wyprzedzeniem, by mieli możliwość poszukania sposobów rozwiązania, potrzebnych informacji, przypomnienia zdobytych na lekcjach wiadomości,
  - przygotowywanie zadań, które można rozwiązywać różnymi sposobami, uzasadnianie celowości wyboru metody rozwiązania oraz przeprowadzonego rozumowania ,
  - poszukiwanie najprostszego rozwiązania,
  - rozwiązywanie zadań konkursowych, które uczą wytrwałości w pokonywaniu trudności,
- angażowanie uczniów do aktywnego udziału w zajęciach, wykorzystywanie ich pomysłów, stwarzanie możliwości rozwiązywania przygotowanych przez nich problemów, wyjaśniania wątpliwości,
- rozwiązywanie zadań, w których występują polecenia: wykaż, udowodnij, uzasadnij,



- zwracanie uwagi na każdym zajęciach na sposób zapisu, właściwe użycie symboli i języka matematycznego.

### 2.3. Szczegółowe treści kształcenia

#### KLASA I

- Elementy logiki i nauki o zbiorach, *relacje*.
  1. Prawa de’Morgana dla zdań i zbiorów.
  2. Metody dowodzenia twierdzeń w matematyce.
  3. Historia matematyki – prezentacja multimedialna.
- Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych i ich własności.
  1. Nietypowe równania i nierówności.
  2. Podzielność liczb.
  3. Własności liczb pierwszych.
  4. Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w zadaniach.
  5. Nierówność Cauchy’ego.
- Funkcje i ich własności.
  1. Dziedzina i zbiór wartości funkcji.
  2. Szkicowanie wykresów funkcji przy pomocy programów komputerowych.  
Odczytywanie własności funkcji z wykresu.
  3. Funkcja liniowa i jej własności.
  4. Wartość bezwzględna i jej własności.
  5. Równania i nierówności z wartością bezwzględną.
- *Elementy równań funkcyjnych*.
  1. Przykłady rozwiązywania równań funkcyjnych.
- Geometria płaszczyzny.
  1. Twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie Talesa.
  2. Rozwiązywanie zadań z geometrii analitycznej.
  3. Miejsce geometryczne punktów – zadania.

- Funkcje trygonometryczne.
  1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.
  2. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.
  3. Równania trygonometryczne (1).
- Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki opisowej.
  1. Reguła mnożenia i jej zastosowania w kombinatoryce.
  2. Reguła szufladkowa Dierichletta.
- *Elementy matematyki finansowej.*
  1. Obliczenia procentowe.
  2. Lokaty i pożyczki.

## KLASA II

- *Wektory.*
  1. Iloczyn skalarny wektorów i jego własności.
  2. Rozwiązywanie zadań z geometrii analitycznej z wykorzystaniem wektorów.
- Funkcje i ich własności.
  1. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem funkcji kwadratowej.
  2. Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną.
  3. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.
  4. Zagadnienia optymalizacyjne dotyczące funkcji kwadratowej.
- Geometria płaszczyzny.
  1. Przystawanie i podobieństwo figur.
  2. Wzór sinusów, wzór cosinusów.
  3. Pola figur płaskich.
  4. Zagadnienia optymalizacyjne dotyczące geometrii płaszczyzny.
- Wielomiany i wyrażenia wymierne.
  1. Pierwiastek wielokrotny wielomianu.
  2. Wzory Viete'a dla wielomianów.
- *Funkcja wymierna.*
  1. Zastosowanie równań i nierówności wymiernych do rozwiązywania zadań.

- 2. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem własności funkcji homograficznej.
- Ciągi.
  1. Ciąg Fibonacciego i jego własności – prezentacja multimedialna.
  2. Rozwiązywanie zadań dotyczących ciągów.
- Indukcja matematyczna.
  1. Zastosowanie zasady indukcji matematycznej do dowodzenia twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.
- *Granica ciągu.*
  1. Przykłady wyznaczania granic ciągów, Liczba Eulera.
- Funkcja wykładnicza i *funkcja logarytmiczna.*
  1. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna i ich własności.
  2. Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne.
- Geometria płaszczyzny.
  1. Równanie okręgu.
- Figury geometryczne w przestrzeni.
  1. Graniastosłupy, ostrosłupy i ich przekroje.
  2. Bryły obrotowe.
  3. Krzywe stożkowe – prezentacja multimedialna.

### **KLASA III**

- Funkcje trygonometryczne.
  1. Funkcje trygonometryczne sumy kątów.
  2. Sumy funkcji trygonometrycznych w zadaniach.
  3. Równania trygonometryczne (2).
  4. Funkcje cyklometryczne.
- *Granica funkcji.*
  1. Granica funkcji w punkcie.
  2. Granica niewłaściwa funkcji.
  3. Asymptoty wykresu funkcji.
- *Ciągłość i pochodna funkcji*

1. Ciągłość funkcji w punkcie.
  2. Ciągłość funkcji w zbiorze.
  3. Własności funkcji ciągłych.
  4. Pochodna funkcji w punkcie.
  5. Pochodna funkcji w zbiorze.
  6. Styczna do krzywej w punkcie.
  7. Ekstrema lokalne i globalne funkcji.
- Figury geometryczne w przestrzeni.
    1. Krzywe stożkowe – prezentacja multimedialna.
    2. Elementy geometrii analitycznej w przestrzeni trójwymiarowej.
  - Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki opisowej.
    1. Permutacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń.
    2. Kombinacje.
    3. Rozwiązywanie zadań z kombinatoryki.
    4. Prawdopodobieństwo i jego własności.
    5. Zagadnienia optymalizacyjne w rachunku prawdopodobieństwa.
    6. Prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń.
    7. Prawdopodobieństwo całkowite.
    8. Schemat Bernoulliego – zadania.

### **3. Zalecane metody pracy to:**

- podające ( wykład, pogadanka, opis);
- metoda przypadków;
- metoda problemowa;
- nauczanie programowe;
- ćwiczenia przedmiotowe;
- problemowe (metody aktywizujące)

Wykład polega na bezpośrednim lub pośrednim przekazywaniu wiedzy określonej grupie odbiorców. Aktywność uczestnika wykładu wymaga od niego dużego wysiłku i znacznej dojrzałości umysłowej. Dlatego też należy go odpowiednio w szkołach średnich stosować i ograniczać. Typowe dla wykładu elementy to przekazanie informacji w sposób systematyczny i logicznie konsekwentny. Nauczyciel powinien treść wykładu wiązać umiejętnie z życiem,

dobierać trafne i interesujące przykłady, starannie się wysławiać. Pogadanka polega na rozmowie nauczyciela z uczniami, przy czym nauczyciel jest w tej rozmowie osobą kierującą. Zmierzając do osiągnięcia zaplanowanego celu stawia uczniom pytania, na które oni z kolei udzielają odpowiedzi. Pogadanka może służyć przygotowaniu uczniów do pracy na lekcji, zaznajamianiu ich z nowym materiałem, systematyzowaniu i utrwalaniu wiadomości.

Opis jest najprostszym sposobem zaznajamiania uczniów z nieznanymi im bliżej osobami, rzeczami, zjawiskami itp. Zalecany jest zarówno wtedy, gdy nie ma możliwości zastosowania odpowiedniego pokazu, jak i przede wszystkim wtedy, gdy opisowi towarzyszy pokazywanie opisywanych przedmiotów lub ich modeli czy rysunków.

Metoda przypadków polega na rozpatrzeniu przez małą grupę uczniów opisu jakiegoś przypadku, możliwych rozwiązań. Po otrzymaniu opisu, rozwiązań wraz z kilkoma pytaniami, na które należy odpowiedzieć, uczniowie sami formułują dalsze pytania wyjaśniające ten przypadek, a nauczyciel udziela na nie odpowiedzi.

Metoda problemowa polega na wytworzeniu sytuacji problemowej, formułowaniu problemów, określaniu pomysłów ich rozwiązania, weryfikacji pomysłów rozwiązania oraz na porządkowaniu i stosowaniu uzyskanych wyników w nowych zadaniach o charakterze praktycznym lub teoretycznym. Jej cechą charakterystyczną jest dominacja uczenia się nad nauczaniem. Wzbudza ona wiarę ucznia w siebie, utwierdza go w przekonaniu, że jest w stanie rozwiązywać coraz trudniejsze zadania.

Nauczanie programowane prowadzone być może z użyciem komputera lub podręcznika, zbioru zadań itp. Obecnie dostępnych jest wiele komputerowych programów dydaktycznych spełniających potrzebne warunki. Metody praktyczne ułatwiają uczniom bezpośrednie poznanie rzeczywistości oraz pozwalają na wykorzystanie posiadanej przez nich wiedzy w rozwiązywaniu problemów praktycznych. Do tej grupy zaliczyć można: pokaz, ćwiczenia przedmiotowe, ćwiczenia laboratoryjne, metodę projektów itp. Pokaz polega na demonstrowaniu uczniom naturalnych przedmiotów lub ich modeli, zjawisk, wydarzeń lub procesów i objaśnianiu ich istotnych cech.

Ćwiczenia przedmiotowe polegają na wielokrotnym wykonywaniu pewnych czynności dla nabycia wprawy i uzyskania coraz wyższej sprawności w działaniach intelektualnych i praktycznych. W nauczaniu matematyki pełnią rolę szczególną. Podczas

ćwiczeń laboratoryjnych uczniowie samodzielnie przeprowadzają eksperymenty. Eksperymenty te pozwalają na formułowanie pewnych uogólnień, zilustrowanie wcześniej poznanych praw, zasad i reguł (tradycyjna metoda laboratoryjna) oraz ułatwiają uczniom przewidywanie nieznanymi im jeszcze zjawisk i procesów (problemowa metoda laboratoryjna).

Metody aktywizujące to grupa metod, które uważa się za najskuteczniejsze. Dzięki nim uczenie się ma charakter niekonwencjonalny, ciekawy i zajmujący. Zajęcia motywują ucznia do działania, twórczego myślenia i kreatywności. Dzięki nim uczeń ma wpływ na to, co na lekcji będzie się działo, jest jej współtwórcą, (tworzy się poczucie współodpowiedzialności). Metody te uczą przez działanie, tworzenie, współpracę i przeżywanie. Sednem metod aktywizujących może być powiedzenie Konfucjusza: „ Powiedz, a zapomnę. Pokaż a zapamiętam. Pozwól wziąć udział a zrozumieć.” Metody te wymagają zaangażowania nauczyciela i uczniów.

#### **4. Ewaluacja**

**Ewaluacja w oświacie** to ocena przydatności i skuteczności podejmowanych działań dydaktycznych, wychowawczych i opiekuńczych w odniesieniu do założonych celów, służącą doskonaleniu tych działań (*Rozporządzenie MENiS z 23 kwietnia 2004*)

**Ewaluacja** odbywać się będzie w formie obserwacji postępów uczniów. Systematyczne prowadzenie ewaluacji pozwoli dostrzec wpływ przekazywanych treści na postawy, wiedzę, umiejętności uczniów, a zarazem stanowi podstawę planowania dalszej pracy

#### **5. Literatura:**

Podstawa programowa – Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 6 listopada 2003 dz.u. 2003 r. 210 poz. 2041

Standardy egzaminacyjne

Informator o egzaminie maturalnym z matematyki - [www.cke.edu.pl](http://www.cke.edu.pl)

Poradnik metodyczny dla nauczyciela



