KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla gimnazjów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Poradnik metodyczny
do innowacyjnego programu nauczania matematyki
z wykorzystaniem programu edukacyjnego GeoGebra
w gimnazjum

Opracowanie:

dr Anna Rybak, Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Matematyki i Informatyki

dr Ewa Borak

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Spis treści

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Wprowadzenie

Wszechstronny rozwój ucznia powinien być nadrzędnym celem wszystkich systemów edukacyjnych i wszelkich działań podejmowanych w ramach funkcjonowania tych systemów. Przygotowujemy uczniów do życia i działania w szybko zmieniającym się – wręcz nieprzewidywalnym – świecie, dlatego też musimy wykształcić w nim umiejętność samodzielnego przystosowywania własnej wiedzy i umiejętności do stanu, jakiego ten świat – za lat kilka, kilkanaście, kilkadziesiąt – będzie wymagał. Musimy wzmacniać aktywność i kreatywność uczniowską. Dlatego też poradnik, który oddajemy do rąk Czytelnikowi, zawiera przede wszystkim wskazówki, jak wykorzystać utworzony program nauczania matematyki w kształceniu twórczego ucznia. Zawiera pewne elementy teoretyczne, ale głównie odnosi się do utworzonych materiałów dydaktycznych.

Jak uczyć, aby matematyka pomagała rozwijać twórczo uczniów?
Jak uczyć, aby matematyka była ciekawa dla uczniów?

W Podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III i IV etapu edukacyjnego znajdujemy m.in. następujące zapisy:

„Celem kształcenia ogólnego na III i IV etapie edukacyjnym jest:

1) przyswojenie przez uczniów określonego zasobu wiadomości na temat faktów, zasad, teorii i praktyk;
2)zdobycie przez uczniów umiejętności wykorzystania posiadanych wiadomości podczas wykonywania zadań i rozwiązywania problemów;
3) kształtowanie u uczniów postaw warunkujących sprawne i odpowiedzialne funkcjonowanie we współczesnym świecie.”
„Do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w szkole podstawowej należą: (…)
2) myślenie matematyczne – umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych;
3) myślenie naukowe – umiejętność formułowania wniosków opartych na obserwacjach empirycznych dotyczących przyrody i społeczeństwa;(…)
5) umiejętność sprawnego posługiwania się nowoczesnymi technologiami informacyjno-komunikacyjnymi; (...)
7) umiejętność rozpoznawania własnych potrzeb edukacyjnych oraz uczenia się.(…)

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

W procesie kształcenia ogólnego szkoła na III i IV etapie edukacyjnym kształtuje u uczniów postawy sprzyjające ich dalszemu rozwojowi indywidualnemu i społecznemu, takie jak: uczciwość, wiarygodność, odpowiedzialność, wytrwałość, poczucie własnej wartości, szacunek dla innych ludzi, ciekawość poznawcza, kreatywność, przedsiębiorczość, kultura osobista, gotowość do uczestnictwa w kulturze, podejmowania inicjatyw oraz do pracy zespołowej.”[1]

Już te podstawowe zapisy powinny stać się dla nauczycieli istotną wskazówką do pracy dydaktycznej i wychowawczej: mamy wydobyć z ucznia i rozwijać w nim to, co uczyni z niego istotę myślącą i działającą kreatywnie, posługującą się w swojej działalności nowoczesnymi metodami i narzędziami.

Często słyszymy: matematyka nie jest dla każdego, nie można jej zrozumieć, nauczyć się. Otóż przy wykorzystaniu przez nauczyciela odpowiednich metod kształcenia można nie tylko matematykę zrozumieć, ale można ją też odkrywać! I – co ważne – może to robić przeciętny uczeń.

Każdy może być twórcą!

Podejście humanistyczne do twórczości (prezentowane przez E. Fromma, A. Maslowa, C. Rogersa) - akcentuje najszerzej rozumianą aktywność twórczą. Twórczość jest to postawa i każdy człowiek jest z natury twórczy. Jest to zdolność dziwienia się, stawiania pytań, dociekania.[2] Z tego wynika, że każdy z nas może być twórcą. Nie zawsze nasza twórczość będzie dotyczyła zagadnień obiektywnie nowych dla całej ludzkości, ale odkrycia subiektywnie nowe, tylko dla osoby, która wcześniej danego fragmentu wiedzy nie miała, a w pewnym momencie ją skonstruowała, też mają wartość twórczą. W tym sensie każdy nasz uczeń może być twórczy, zaś naszym zadaniem jest tę jego postawę twórczą kształtować i rozwijać.

Aby ukształtowały się pożądane umiejętności, muszą być one poddane treningowi. Wielokrotne, intensywne i częste próby zwiększają prawdopodobieństwo opanowania w/w umiejętności (czyli zdolności twórczych). Nie są to więc umiejętności "dane nam"! Metody rozwijania zdolności twórczych muszą być dostosowane do wieku ucznia, jego

1 http://bip.men.gov.pl/men_bip/akty_prawne/rozporzadzenie_20081223_zal_4.pdf

2 **Szmidt K.J., *Szkice do pedagogiki twórczości.* Kraków 2001**

aktualnych możliwości i predyspozycji oraz powinny bazować na posiadanych już umiejętnościach. Najlepszym momentem na podjęcie takich działań jest wiek przedszkolny - wiek intensywnego rozwoju wyobraźni dziecięcej i zabaw twórczych.

Zdolności twórcze, pomysłowość ujawniają się około 5 roku życia pod postacią rozbudzonej ekspresji werbalnej, plastycznej, muzycznej i ruchowej dziecka. Po tym okresie specyficznej twórczości dziecięcej następuje spadek zdolności twórczych! Jeśli nie są rozwijane, ulegają zahamowaniu. Najskuteczniejsze jest pobudzanie i rozwijanie właściwości i dyspozycji psychicznych dopiero kształtujących się u dziecka. Odbywać się to może poprzez stawianie zadań, tworzenie odpowiednich sytuacji, warunków emocjonalnych i materialnych, w których ujawni się aktywność twórcza dzieci.

Rozwijanie uzdolnień twórczych może – a nawet powinno - odbywać się również na następnych etapach edukacyjnych.

Najbardziej sprzyja rozwojowi twórczemu ucznia **kształcenie konstruktywistyczne.**

Teoria konstruktywizmu mówi, że najbardziej cenimy, najlepiej rozumiemy i najdłużej pamiętamy tę wiedzę, którą sami skonstruowaliśmy. Nauczyciel-konstruktywista przestaje więc być osobą, która wie wszystko i przekazuje swoją wiedzę uczniom. Nauczyciel-konstruktywista staje się organizatorem „przestrzeni edukacyjnej”, środowiska kształcenia i sytuacji dydaktycznych pełnych czynników inspirujących twórcze myślenie uczniów skutkujące samodzielnym skonstruowaniem przez nich nowej (dla nich) wiedzy.

Na tę przestrzeń dydaktyczną składać się będą głównie: postawione uczniom do rozwiązania problemy, inspirujące pytania stawiane przez nauczyciela i uczniów oraz odpowiednie środki dydaktyczne, które będą pełniły rolę narzędzi badawczych w procesie dochodzenia do wiedzy.

W kształceniu zgodnym z teorią konstruktywizmu dużą rolę odgrywa strategia nauczania czynnościowego, z którą ściśle wiąże się metoda problemowa.

Nauczanie czynnościowe

Zofia Krygowska, znakomita polska specjalistka w zakresie dydaktyki matematyki, definiuje nauczanie czynnościowe jako „postępowanie dydaktyczne uwzględniające stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych".[3]

Nauczanie to opiera się na dwóch założeniach:

- na wyodrębnieniu z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie;
- działania nauczyciela polegają na świadomym organizowaniu zabiegów dydaktycznych, sprzyjających procesowi kształtowania myślenia matematycznego ucznia jako swobodnego specyficznego działania, jako świadomego posługiwania się przyswojonymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu sytuacji problemowych zapewniających efektywność tego procesu.

Zgodnie z założeniami tej metody, aby rozwój myślenia był prawidłowy, należy stosować odpowiednio dobrane środki dydaktyczne i przy ich pomocy organizować konkretne czynności dziecka.

Uczeń powinien wykonywać różnorodne czynności samodzielnie: manualne i myślowe. Najbardziej korzystna jest z punktu widzenia kształcenia sytuacja, kiedy uczeń wykonuje te czynności, aby konstruować nową (dla niego) wiedzę. To konstruowanie wiedzy następuje najczęściej w wyniku rozwiązywania problemów.

Metoda problemowa

Z metodą problemową mamy do czynienia, gdy pojawia się trudność, której nie można rozwiązać na prostej drodze za pomocą znanych schematów, reguł, praw, algorytmów. Jest ona podobna do metody czynnościowej, która wymaga organizowania sytuacji problemowych prowadzących od czynności konkretnych przez wyobrażeniowe do abstrakcyjnych.

Następstwami sytuacji problemowej są: formułowanie problemu, stawianie hipotez, proponowanie pomysłów rozwiązań, weryfikacja hipotez, sprawdzanie otrzymanych wyników, uporządkowanie nowo odkrytej wiedzy, stosowanie nowo odkrytej wiedzy. Nauczanie problemowe może przyjmować formę pracy badawczej uczniów.

Najbardziej chyba przydatne dla praktyki szkolnej określenie problemu sformułował Wincenty Okoń. Przyjął on, że problem to **„zadanie wymagające pokonania jakiejś trudności**

3 Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*, tom I, WSiP Warszawa, 1997

o charakterze praktycznym lub teoretycznym przy udziale aktywności badawczej podmiotu"[4]. Bardzo trafne również wydaje się określenie problemu jako **„trudności o charakterze teoretycznym lub praktycznym, która wywołuje badawczą postawę podmiotu i prowadzi do wzbogacenia posiadanej przez niego wiedzy"**[5].

W obu powyższych określeniach podkreśla się przyjmowanie przez podmiot postawy badawczej, a więc aktywnej, poszukującej, gotowej do tworzenia nowych (często tylko dla podmiotu) struktur wiedzy. Tak rozumiany problem:

- implikuje poszukiwanie, wymaga od podmiotu badawczej postawy, a więc zebrania i oceny danych, sformułowania jednej lub kilku hipotez dotyczących rozwiązania analizowanej trudności, umotywowanego wyboru hipotezy w przypadku istnienia hipotez sprzecznych, sprawdzenia hipotezy przyjętej;
- opiera się głównie na myśleniu produktywnym, prowadzącym do nowego poznania, aczkolwiek wymaga myślenia reproduktywnego, polegającego na aktywizowaniu treści poznawczych zdobytych wcześniej;
- ma bardziej złożoną strukturę aniżeli zwykłe pytanie;
- jest trudniejszy od pytania;
- prowadzi do opanowania przez uczący się podmiot nie tyle wiedzy biernej, przydatnej jedynie przy udzielaniu odpowiedzi na zadawane z zewnątrz pytania, co raczej do przyswojenia sobie wiedzy czynnej, będącej nieodzownym warunkiem wykonywania czynności nowych.

Tak więc formułujmy problemy, które uczniowie będą rozwiązywali zamiast biernego przyswajania podanej gotowej wiedzy.

Praca ucznia oparta na rozwiązywaniu problemów jest bardziej „przyjazna mózgowi" niż praca polegająca na usiłowaniu zapamiętania podanej gotowej wiedzy. Pisze o tym wspaniale Marzena Żylińska w znakomitej książce „Neurodydaktyka. Nauczanie i uczenie się przyjazne mózgowi" (Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2013). Neurodydaktyka to nowa dyscyplina, która, opierając się na badaniach nad mózgiem, stawia

4 Okoń W., *Słownik pedagogiczny*, Warszawa 1984,

5 Kupisiewicz Cz., *O efektywności nauczania problemowego*, PWN, Warszawa 1965

sobie za cel tworzenie nowych koncepcji pedagogicznych, a także inicjuje poszukiwanie systemu edukacyjnego przyjaznego mózgowi i lepiej wykorzystującego jego silne strony. Celem neurodydaktyki jest dostarczenie nauczycielom, studentom, jak również rodzicom wiedzy na temat przebiegu procesów uczenia się i zapamiętywania.

Przemyślmy i zastosujmy kilka z konkluzji płynących z tej książki:

- "**Aktywność rzeźbi mózg**" - w zasadzie nie wymaga komentarza
- „Nowe informacje zostają zapisane w mózgu w formie siły połączeń między neuronami. Innym skutkiem procesów uczenia się jest powstawanie uprzywilejowanych obwodów przesyłania impulsów." - Obwody są uprzywilejowane, jeśli często do nich wracamy. Do czego często wracamy? Do tego, co jest dla nas ciekawe i ważne. To od nas, nauczycieli, i od naszego sposobu pracy dydaktycznej zależy, czy matematyka będzie dla uczniów ważna i ciekawa.
- „Nasze mózgi nie zostały przystosowane do zapisywania informacji przychodzących z zewnątrz, ale do ich przetwarzania, wyciągania z nich ogólnych reguł i rozwiązywania z ich pomocą problemów." - Stosujmy metodę problemową!
- „Te same informacje wplecione w emocjonalny kontekst mogą być dużo łatwiej i lepiej zapamiętane niż typowo podręcznikowe." - Uczmy matematyki „w kontekście", stosujmy strategię nauczania realistycznego, wzbudzajmy emocje poprzez stwarzanie uczniom okazji do bycia odkrywcami matematyki.
- „Dopamina – hormon szczęścia. Uśmiech czy dobre słowo mają wielką moc sprawczą i działając na mózg jak każda inna nagroda, prowadzą do uwalniania dopaminy." - Człowiek szczęśliwy inaczej funkcjonuje, ma inny stosunek do świata, inaczej działa. Niedorosły człowiek też. Wzmacniajmy naszych uczniów w ich drodze do sukcesu w uczeniu się matematyki (i nie tylko). Motywujmy ich. Niech matematyka nie kojarzy im się wyłącznie z trudnościami i (dla wielu) z niepowodzeniami. Budujmy i wzmacniajmy ich wiarę we własne siły.
- „Rozwiązywanie typowych zadań w zeszytach ćwiczeń nie wymaga głębokiego przetwarzania informacji, a więc nie prowadzi do zapamiętywania informacji. Nauczyciele powinni rzadziej stosować zadania receptywne i reproduktywne, które są raczej narzędziami pomiaru niż ćwiczeniami, a częściej otwarte i produktywne. Najlepsze efekty osiąga się wtedy, gdy uczniowie sami tworzą zadania. Np. zamiast wstawiać w wolne kratki „ó" lub „u" sami tworzą zadania i klucze odpowiedzi dla innych grup." - Lekcje ćwiczeniowe też mogą być twórcze!
- „Mózgi uczniów bez udziału świadomości wyłapują z otoczenia wszystko to, co nowe,

zaskakujące, intrygujące lub przydatne. Kierują się przy tym swoimi subiektywnymi kryteriami. Uwaga uczniów automatycznie zanika, gdy omawiane zagadnienia zostają ocenione przez układ limbiczny jako mało istotne, nie wnoszące nic nowego. Wyłączają one tzw. detektor nowości." - Organizujmy takie sytuacje dydaktyczne, w których wszystko, czego uczniowie uczą się, jest dla nich ciekawe i pobudzające do działania.

- „Z neurofizjologii mózgu wynika, że kluczowym momentem jest początek lekcji. To wtedy układ limbiczny każdego ucznia podejmuje decyzję o uwalnianiu neuroprzekaźników i zainicjowaniu procesu uczenia się." - Chyba nie wymaga komentarza.
- „Natura wyposażyła nas w ciekawość poznawczą oraz w potrzebę aktywności. Łatwo jest wyłączyć się z lekcji, na której jest się jedynie słuchaczem i odbiorcą wiedzy, dużo trudniej, gdy jest się jej aktywnym uczestnikiem wykonującym określone zadanie." - Jak wyżej.

Podsumowując ten rozdział: Powinniśmy tak pracować aby uczeń mógł **bardziej „uczyć się" niż „być nauczanym!"**

Zasady dydaktyczne dla nauczycieli6

Poniżej kilka wskazówek dla nauczycieli, którzy chcą wychować twórczych, otwartych i pełnych inicjatywy uczniów, którzy mają poczucie własnej wartości, a nie mają w sobie lęku przed matematyką.

- Stawiaj uczniom zaskakujące pytania i kultywuj pytania uczniowskie. „Zabijaj uczniom ćwieka". Stwarzaj sytuacje wymagające myślenia intuicyjnego.
- Ceń zaangażowanie emocjonalne, domysł, a nawet zgadywanie (w rozsądnych granicach).
- Dbaj o sprzyjająca atmosferę na zajęciach dydaktycznych: ceń swobodę w wyrażaniu własnych poglądów, stosuj zasadę odroczonego wartościowania pomysłów uczniowskich, pozwalaj na udział humoru i dowcipu w treningu myślenia intuicyjnego.
- Dostarczaj uczniom pozytywnych wzmocnień ich aktywności poszukiwawczej, a szczególnie zaangażowania w rozwiązywanie problemów twórczych.
- Wyrabiaj tolerancyjny stosunek do nowych idei, pomysłów, pojęć wytworzonych przez

6 **W. Limont, *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych.* Kraków 2004**

uczniów.

- Pozytywnie wzmacniaj nie tylko końcowy wynik poszukiwań, ale również częściowe (etapowe) wyniki, jak hipotezy, prognozy.
- Kieruj się optymizmem, wierz w duże możliwości uczniów. Zapobiegaj wyuczonej bezradności uczniów, kształtuj w nich postawy optymistyczne.
- Pamiętaj o barierach psychicznych i psychospołecznych, powodujących, iż wykorzystujemy jedynie nieznaczną część swoich możliwości.
- Stosuj zasadę zespołowości w pracy.
- Popieraj zwyczaj zdobywania wiedzy w wielu różnych dziedzinach, stosuj ćwiczenia na „myślenie na boki”.
- Ceń dostrzeganie przez uczniów „dziwności”**,** toleruj zainteresowanie problemami „nienaukowymi”.
- Wymagaj od swoich uczniów nie tylko maksymalnej aktywności umysłowej, ale również ucz ich doceniać oraz posługiwać się relaksacją, w tym również szukania podpowiedzi w różnych dziedzinach, pozornie nie związanych z danym problemem.

Jak oceniać, aby wspomagać rozwój twórczy ucznia?

Jedna z klasyfikacji rodzajów oceniania osiągnięć uczniów wyróżnia: ocenianie kształtujące i ocenianie sumujące. Ocenianie sumujące ma miejsce po zakończeniu jakiegoś etapu pracy, natomiast w codziennej pracy dydaktycznej stosujemy ocenianie kształtujące. Poprzez nasze ocenianie kształtujemy ucznia i kierunkujemy jego pracę. Jest to dobre narzędzie do kształtowania jego twórczego rozwoju.

Trochę teorii:

Ocenianie kształtujące polega na pozyskiwaniu przez nauczyciela i ucznia w trakcie nauczania informacji, które pozwolą rozpoznać, jak przebiega proces uczenia się, aby:

•nauczyciel modyfikował dalsze nauczanie,
•uczeń otrzymywał informację zwrotną pomagającą mu się uczyć.
Liczne badania i raporty dowodzą, że ocenianie kształtujące (OK) jest bardzo efektywnym sposobem podnoszenia osiągnięć uczniów. John Hattie w swoich meta badaniach (*Visible Learning)* stawia ocenianie kształtujące na czele najkorzystniejszych interwencji w

nauczaniu.[7]

Nauczyciel, który stosuje ocenianie kształtujące:

- Określa cele lekcji i formułuje je w języku zrozumiałym dla ucznia
- Ustala wraz z uczniami kryteria oceniania, czyli to, co będzie brał pod uwagę przy ocenie pracy ucznia
- Stosuje efektywną informację zwrotną
- Rozróżnia funkcje oceny sumującej i kształtującej
- Buduje atmosferę uczenia się, pracując z uczniami i rodzicami
- Potrafi formułować pytania kluczowe
- Potrafi zadawać pytania angażujące ucznia w lekcję
- Wprowadza samoocenę i ocenę koleżeńską

Pięć strategii oceniania kształtującego:

- Określanie i wyjaśnianie uczniom celów uczenia się i kryteriów sukcesu.
- Organizowanie w klasie dyskusji, zadawanie pytań i zadań dających informacje, czy i jak uczniowie się uczą.
- Udzielanie uczniom takiej informacji zwrotnej, która przyczyni się do ich widocznych postępów.
- Umożliwianie uczniom, by korzystali wzajemnie ze swojej wiedzy i umiejętności.
- Wspomaganie uczniów, by stali się autorami procesu swojego uczenia się.

Uważna analiza powyższych cech i strategii oceniania kształtującego pozwala zauważyć, że są one spójne z wieloma wskazówkami dotyczącymi wspierania ucznia w jego rozwoju omówionymi we wcześniejszych rozdziałach.

Wskazówki metodyczne

Niniejszy rozdział ma następującą strukturę:

Na początku umieszczone jest krótkie słowo do ucznia – zawierające przesłanie, które będzie aktualne podczas realizacji wszystkich działów programu. Następnie umieszczone są uwagi dla nauczyciela, jak też propozycje kartkówek i prac kontrolnych osobno do każdego działu. Nie odnosimy się do działu „Przygotowanie do egzaminu”; jest to dział powtórzeniowy, na

7 http://www.ceo.org.pl/pl/ok

jego realizację przeznaczono dużo (85) godzin, Autorzy programu zgromadzili bardzo dużo różnorodnych materiałów dydaktycznych wspomagających jego realizację, więc dodatkowe uwagi – w naszej opinii – nie są konieczne.

Realizatorzy projektu utworzyli do każdego działu następujące materiały dydaktyczne, które przekazane są do dyspozycji nauczyciela i ucznia:

- aplety, których treści dostosowane są do tematyki poszczególnych lekcji (w niektórych przypadkach z tego samego apletu uczniowie korzystają na kilku lekcjach);
- skrypt, w którym opisane zostały przewidywane sposoby wykorzystania apletu w czasie lekcji oraz umieszczone zostały liczne zadania (w większości o charakterze obliczeniowym) dla ucznia;

Uwaga 1. Skrypt jest w zasadzie przeznaczony dla ucznia, ale nauczyciel koniecznie musi się z nim zapoznać, chociażby po to, aby zdecydować, czy część ćwiczeniowa lekcji oparta będzie w pewnym stopniu o zadania zawarte w skrypcie, czy też nie.

Uwaga 2. Skrypt stanowi równocześnie kartę pracy; jest w nim miejsce na wpisanie przez ucznia rozwiązań zadań.

Do dyspozycji nauczyciela przekazane zostały ponadto scenariusze lekcji, w których zostały opisane cele lekcji oraz jej przebieg.

Do ucznia

Przez trzy lata będziesz się uczyć matematyki z programem GeoGebra. Będziesz korzystać z komputera, z gotowych konstrukcji, z prezentacji, będziesz rozwiązywać zadania. Prawidłowość rezultatów swojej pracy będziesz mógł często sprawdzić, korzystając z apletu. Pamiętaj jednak, że najwięcej nauczysz się, starając się samodzielnie wyciągać wnioski z zaobserwowanych przykładów, snując przypuszczenia o treści matematycznej, dyskutując, broniąc swojego zdania, ale też szanując zdanie innych.

Zapamiętaj: staraj się jak najwięcej zrobić sam/sama. Najpierw rozwiązuj zadania samodzielnie, potem dopiero odsłaniaj na ekranie sprawdzenie. Najpierw staraj się sformułować wniosek samodzielnie, potem odsłaniaj na ekranie definicje czy twierdzenia. W ten sposób będziesz sam/sama tworzyć matematykę. W ten sposób lepiej ją zrozumiesz, a skonstruowaną przez siebie wiedzę zapamiętasz na zawsze. Postaraj się też jak najwięcej konstrukcji geometrycznych wykonać samodzielnie w programie GeoGebra, a potem w swoim zeszycie. Program jest łatwy w obsłudze, a ze względu na swoją dynamikę umożliwi Ci obserwowanie wielu przypadków zagadnienia po wykonaniu jednej konstrukcji. Staniesz się badaczem i odkrywcą matematyki. Rozsmakujesz się w tej pracy. Zaprzyjaźnisz się z matematyką i będziesz się nią cieszyć.

W każdym dziale programu proponujemy wykonanie długoterminowej pracy projektowej. Tematy projektów związane są głównie z historią matematyki, abyś mógł/mogła dowiedzieć się, skąd wzięły się poszczególne pojęcia matematyczne, kto i kiedy je wprowadził, dlaczego powstały. Jeżeli interesują Cię inne aspekty rozwoju matematyki, na przykład jej rozwój w obecnych czasach, zwróć się do nauczyciela i zaproponuj swój własny temat projektu. Chodzi o to, abyśmy - ucząc się matematyki - widzieli ją jako naukę żywą, która rozwija się od dawna i w tym rozwoju nie ustaje.

Dział 1. Liczby wymierne dodatnie

Realizacja działu „Liczby wymierne dodatnie” ma na celu przypomnienie i utrwalenie wiadomości o liczbach wymiernych dodatnich, działaniach na nich oraz zastosowaniach praktycznych obliczeń na liczbach wymiernych dodatnich, a także doskonalenie umiejętności posługiwania się liczbami wymiernymi dodatnimi w sytuacjach praktycznych.

Na realizację działu przeznaczono 20 godzin.

Scenariusze poszczególnych lekcji zawierają opis ich przebiegu. Podczas lekcji uczniowie pracują z apletami, kartami pracy zawartymi w skryptach oraz podręcznikami i zbiorami zadań wybranymi przez nauczyciela lub innymi materiałami przygotowanymi przez nauczyciela.

Bardzo ważną częścią lekcji jest praca z apletem. Program GeoGebra jest programem interaktywnym, umożliwiającym samodzielne wykonywanie konstrukcji przez ucznia, stawianie hipotez i weryfikowanie tych hipotez z wykorzystaniem dynamiki programu. Wspomniane właściwości programu najbardziej efektywnie mogą być wykorzystane przy realizacji treści z zakresu geometrii oraz funkcji.

Aplety zaproponowane do wykorzystania podczas realizacji działu „Liczby wymierne dodatnie” służą głównie do ilustracji treści, jakimi są np. cechy podzielności liczb, zasady zaokrąglania liczb, zasady zamiany liczb zapisanych w systemie arabskim na rzymski i odwrotnie, działań na ułamkach zwykłych i dziesiętnych itp. W scenariuszach lekcji dominujące aktywności uczniów opisane w punkcie „Praca z apletem” to „przypomnienie wiadomości” lub „przypomnienie pojęć”. Proponujemy tę część pracy z apletem przeprowadzić w dwojakiej formie:

- Jeżeli w klasie jest jeden komputer i rzutnik (lub dodatkowo tablica multimedialna), to korzystanie z apletu będzie się odbywało w formie pracy zbiorowej, której elementem powinna być dyskusja. Przed uaktywnieniem kolejnej opcji z menu (np. „liczby przeciwne” z apletu wymierne01, czy poszczególne reguły zaokrąglania w aplecie wymierne06) warto zapytać uczniów, co wiedzą na dany temat – zwłaszcza, że wiele treści z tego działu już jest uczniom znanych ze szkoły podstawowej. Warto też przed zmianą położenia punktu na suwaku (np. w opcji „Mnożenie i dzielenie przez 10, 100, …” w aplecie wymierne02 czy „Rozkład liczby na czynniki pierwsze” w aplecie wymierne01 zapytać uczniów: „Jak myślicie, co się stanie, gdy przesuniemy punkt na suwaku?”, lub (w dalszych krokach): „Jaki będzie wynik?”. Wtedy do czysto manualnej, nieskomplikowanej aktywności uczniów polegającej na przesuwaniu punktu na suwaku dodamy twórczą aktywność myślową. Połączenie obserwacji treści apletu z dyskusją wyprzedzającą pojawianie się tych treści pozwoli odejść od metody podającej na rzecz metod aktywizujących. Pozwoli też uczniom sięgnąć do pamięci i przypomnieć sobie wiadomości nabyte nie tylko w szkole, ale też w innych sytuacjach, oraz podzielenie się tymi wiadomościami.
- Jeśli lekcja odbywa się w pracowni komputerowej lub z wykorzystaniem pracowni mobilnej i każdy uczeń ma do dyspozycji komputer, to korzystanie z apletów może odbywać się w formie pracy indywidualnej. Ponieważ jednak aplety składają się z kilku elementów (opcji) podających wiedzę i/lub przykładów i/lub zadań, więc aby upewnić się, że uczniowie wszystko dobrze zrozumieli i wykonali, warto pracę samodzielną uczniów przeplatać z dyskusją podsumowującą poszczególne etapy tej pracy. Taka organizacja pracy z apletem pozwoli osiągnąć skupienie uczniów nad poszczególnymi elementami treści i zapobiegnie znużeniu zbyt długim odczytywaniem treści z ekranu. Pozwoli też na bieżąco wyjaśnić wszystko niejasności czy wątpliwości.

Ponieważ aktywności uczniów podczas korzystania z apletów przygotowanych do wspomagania realizacji tego działu są raczej odtwórcze, warto zorganizować sytuacje problemowe, które będą podłożem dla wykorzystania apletów przy omawianiu poszczególnych zagadnień. Problemem może być ciekawe zadanie lub opis sytuacji praktycznej wymagającej wykonania działań na liczbach wymiernych dodatnich.

Zadania

Zadania zaproponowane w skrypcie i scenariuszach są łatwe, warto więc skorzystać z bardziej zróżnicowanej oferty zadaniowej w podręcznikach i zbiorach zadań. Ponieważ aktywności uczniów w pracy z apletami ograniczają się praktycznie do czytania i przesuwania punktów na suwakach, w wyniku czego obliczenia „wykonują się same", więc zadań do samodzielnego rozwiązywania przez uczniów powinno być dużo, aby uczeń miał okazję wyćwiczyć praktycznie użycie przytoczonej w apletach teorii.

Zadania umieszczone w apletach powinny być rozwiązywane w pracy z całą klasą. Propozycja ta jest podyktowana faktem, że bardzo łatwo jest wyświetlić na ekranie rozwiązanie zadania i odpowiedź. Naszym zdaniem może to stanowić dla uczniów pokusę uniknięcia pracy samodzielnej. Tymczasem w pracy zbiorowej, gdy rozwiązanie zadania będzie poprzedzone dyskusją i wszystkie etapy rozwiązania zostaną wykonane na tablicy, wyświetlenie rozwiązania będzie stanowiło formę sprawdzenia jego poprawności.

Projekt

Warto zachęcać uczniów do realizacji prac długoterminowych, czyli projektów. O projektach w literaturze napisano dużo, więc tutaj ograniczymy się do zasugerowania tematów prac projektowych z każdego działu. I tak w dziale „Liczby wymierne dodatnie" proponujemy projekt na temat: „Jak liczono dawniej, jak liczymy dziś". Jest on związany z historią matematyki, której w szkole uczymy bardzo niewiele.

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Oblicz w pamięci:

a) $25,7 + 2,4$

b) $14,3 - 7,5$

c) $12,435 \cdot 100$

d) $1,2 : 0,3$

Zad. 2: Oblicz sposobem pisemnym:

a) $2,53 \cdot 4,71$

b) $4,32 : 6$

c) $28,35 : 0,3$

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Zad. 3: W liczbie czterocyfrowej $237\square$ pod kwadratem ukryto cyfrę jedności. Jaką cyfrą jest ukryta cyfra jedności, skoro wiadomo, że podana liczba czterocyfrowa dzieli się przez 3 i 4?

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 1: Oblicz w pamięci:

a) 34,8 + 3,3

b) 12,4 – 6,5

c) 124,35 · 10

d) 1,6 : 0,4

Zad. 2: Oblicz sposobem pisemnym:

a) 3,42 · 4,21

b) 5,04 : 7

c) 36,24 : 0,4

Zad. 3: W liczbie czterocyfrowej $237\square$ pod kwadratem ukryto cyfrę jedności. Jaką cyfrą jest ukryta cyfra jedności, skoro wiadomo, że podana liczba czterocyfrowa dzieli się przez 3 i 5?

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Oblicz w pamięci:

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{16}$

b) $\frac{4}{7}:\frac{5}{7}$

c) $\frac{3}{4}$ ze 180km

Zad. 2:

a) Oblicz $\frac{2}{3}$ kwoty $18{,}54zł$.

b) Znajdź liczbę, której $\frac{1}{6}$, to liczba $0{,}31$.

Zad. 3: Oblicz: $\dfrac{3{,}3+2{,}1\cdot\frac{3}{2}}{\left(8\frac{3}{4}-2\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{77}}$

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Oblicz w pamięci:

a) $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{16}$

b) $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}$

c) $\frac{2}{5}$ z 250 km

Zad. 2:

a) Oblicz $\frac{3}{4}$ kwoty 21,24 zł.

b) Znajdź liczbę, której $\frac{1}{7}$ to liczba 0,35.

Zad. 3: Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{3{,}25+\frac{5{,}2\cdot 3}{4}}{\left(8{,}75-2\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{2}{13}}$$

Kartkówka 3 Grupa A

Zad. 1:

a) Liczbę 1276 zapisz w systemie rzymskim.

b) Liczbę MDCXXIV zapisz w systemie dziesiątkowym.

Zad. 2: Ułamek $\frac{5}{11}$ zapisz w postaci ułamka dziesiętnego. Jeśli rozwinięcie dziesiętne ułamka jest nieskończone, to zapisz je w postaci skróconej (o ile jest to możliwe).

Zad. 3: Zaokrąglij ułamek $235{,}0(78)$ do części tysięcznych.

Zad. 4: Opakowanie 20 jednakowych batoników kosztuje 25,99zł. Oszacuj, z dokładnością do 1 grosza, cenę jednego batonika z tego opakowania.

Kartkówka 3 Grupa B

Zad. 1:

a) Liczbę 1624 zapisz w systemie rzymskim.

b) Liczbę MCCLXXVI zapisz w systemie dziesiątkowym.

Zad. 2: Ułamek $\frac{5}{12}$ zapisz w postaci ułamka dziesiętnego. Jeśli rozwinięcie dziesiętne ułamka jest nieskończone, to zapisz je w postaci skróconej (o ile jest to możliwe).

Zad. 3: Zaokrąglij ułamek 423,2(47) do części dziesięciotysięcznych.

Zad. 4: Opakowanie 30 jednakowych zeszytów kosztuje 98,1 zł. Oszacuj, z dokładnością do 10 groszy, cenę jednego zeszytu z tego opakowania.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Oblicz:

a) $13{,}14 : 0{,}3 - 7{,}5 \cdot 2{,}3$

b) $(1-(0{,}1)^3)\cdot 100$

c) $\frac{3+2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{3\frac{3}{5}:(5{,}6-2\cdot 0{,}7)}$

Zad. 2: Uzupełnij tabelę:

Ułamek zwykły	Rozwinięcie dziesiętne	Zaokrąglenie do części dziesiętnych

$\frac{18}{50}$		
$\frac{11}{9}$		
	0,(1)	

Zad. 3: Telefon ma wyświetlacz o przekątnej 4,3 cala. Jaką długość w centymetrach ma przekątna wyświetlacza tego telefonu? (1 cal = 2,54 cm)

Zad. 4: Michał i Kamil kupili długopisy. Michał za swoje długopisy zapłacił 8 zł 10 gr. Długopisy Kamila kosztowały $\frac{4}{5}$ ceny długopisów Michała. Ile za długopisy zapłacił Kamil?

Zad. 5: W sklepie sprzedawano trzy gatunki owoców: gruszki w cenie 4,50zł za kilogram, jabłka w cenie 2,80zł za kilogram i winogrona w cenie 7 zł za kilogram. Zosia kupiła w tym sklepie $1\frac{1}{2}$ kg winogron, 1 kg jabłek i 600 g gruszek. Ile reszty otrzymała z 20 zł?

Zad. 6: Czteroosobowa rodzina zjadła pizzę. Tata zjadł $\frac{1}{3}$ pizzy, mama - 0,2, a resztą pizzy dzieci podzieliły się po równo i każdy zjadł swoją część. Jaką część pizzy zjadło każde dziecko? Kto zjadł więcej pizzy - dzieci czy rodzice?

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Oblicz:

a)14,16:0,4 – 7,4·2,3

b)$((0,1)^4 + 1)\cdot 1000$

c) $$\frac{-4+\frac{2}{3}:0,2}{1,6:(5:2-4\frac{1}{2})}$$

Zad. 2: Uzupełnij tabelę:

Ułamek zwykły	Rozwinięcie dziesiętne	Zaokrąglenie do części setnych
$\frac{323}{500}$		
$\frac{15}{11}$		
	0,(6)	

Zad. 3: Notebook ma ekran o przekątnej 9,5 cala. Jaką długość w centymetrach ma przekątna wyświetlacza tego komputera? (1 cal = 2,54 cm)

Zad. 4: Ala i Ola kupiły na wycieczce pocztówki. Ala za swoje pocztówki zapłaciła 9 zł 20 gr. Pocztówki Oli kosztowały $\frac{6}{5}$ kwoty, którą zapłaciła Ala. Ile za pocztówki zapłaciła Ola?

Zad. 5: W sklepie sprzedawano trzy rodzaje herbatników: „Domowe” w cenie 9,50 zł za kilogram, „Delicje” w cenie 16 zł za kilogram i „Kruche” w cenie 12,60 zł za kilogram. Mama kupiła w tym sklepie 1,3 kg „Domowych”, 1 kg „Kruchych” i 400 g „Delicji”. Ile reszty otrzymała z 50 zł?

Zad. 6: Czteroosobowa rodzina zjadła pizzę. Tata zjadł $\frac{3}{8}$ pizzy, mama – 0,25 pizzy, a resztą pizzy dzieci podzieliły się po równo i każdy zjadł swoją część. Jaką część pizzy zjadło każde dziecko? Kto zjadł więcej pizzy - dzieci czy rodzice?

Dział 2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)

Realizacja działu „Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)” ma na celu pogłębienie wiadomości o liczbach na osi liczbowej, kształcenie umiejętności posługiwania się wartością bezwzględną liczby, kształcenie umiejętności wykonywania działań na liczbach wymiernych oraz ich wykorzystania w sytuacjach praktycznych opisanych w zadaniach z treścią.

Na realizację działu przeznaczono 11 godzin.

Uwagi dotyczące metod i form pracy z apletami podane przy omówieniu poprzedniego działu, pozostają tutaj w mocy.

Ponieważ aktywności główne uczniów (oprócz wykonywania obliczeń) to obserwowanie i poruszanie punktami, więc należy upewnić się, że uczniowie dobrze opanowali myślenie przyczynowo-skutkowe. Dlatego też przy omawianiu każdej opcji z apletów kluczowymi pytaniami ze strony nauczyciela powinny być: „jak myślisz, co się stanie, jeśli...?” oraz „Dlaczego obserwujemy taki rezultat?”

Projekt

W tym dziale proponujemy realizację projektu na temat: „Do czego w matematyce może się przydać oś liczbowa?”

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Dobierając odpowiednią podziałkę, zaznacz na osi liczbowej następujące liczby: -5,5; -7; -0,5; -2,5; 0; 5,5; 3; 1,5

Zad. 2: Spośród liczb: $-3;\ -2{,}87;\ 0{,}36;\ -\frac{1}{5};\ 0;\ \frac{3}{11};\ 6{,}8;\ 9;\ 12$

a) naturalne, b) całkowite nieujemne, c) wymierne niedodatnie.

Zad. 3: Oblicz:

a) $|-6|$ c) $|-1\frac{2}{3}|$ e) $|7-9|$

b) $|7{,}24|$ d) $|0|$ f) $|12-4{,}5|$

Zad. 4:

a) Jaka jest odległość na osi liczbowej pomiędzy liczbami 5 i -7 ?

b) Podaj liczby całkowite, których odległość na osi liczbowej od liczby 0 jest mniejsza lub równa 3.

c) Podaj liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby -4 jest równa 3?

<u>Kartkówka 1 Grupa B</u>

Zad. 1: Dobierając odpowiednią podziałkę, zaznacz na osi liczbowej następujące liczby: -4,5; -6; -0,5; -3,5; 0; 6,5; 4; 2,5

Zad. 2: Spośród liczb -7; -5,12; -0,25; - $\frac{2}{5}$; 0; $\frac{4}{17}$; 5,7; 8; 14 wypisz liczby:

a) naturalne, b) całkowite nieujemne, c) wymierne niedodatnie.

Zad. 3: Oblicz:

a) |-5| b) |8,47| c) |-1,3| d) |0| e) |9-12| f) |15-12,7|

Zad. 4:

a) Jaka jest odległość na osi liczbowej pomiędzy liczbami 8 i -7 ?

b) Podaj liczby całkowite, których odległość na osi liczbowej od liczby 0 jest mniejsza lub równa 5.

c) Podaj liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby -7 jest równa 4.

<u>Kartkówka 2 Grupa A</u>

Zad. 1: Oblicz:

a) $-4\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}$ b $14{,}76+(-3{,}55)$ c) $-7\frac{3}{5}-(-5\frac{2}{3})$

Zad. 2: Oblicz:

a) $-4\cdot 1\frac{1}{16}$ c) $-4^2:\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{5}:(-\frac{15}{2})$

b) $(-3)^2\cdot\frac{1}{3}$ d) $-3{,}5\cdot(-3)$ f) $12-(-4\cdot(-2{,}5))$

Zad. 3:

a) Zapisz odpowiednią nierówność: liczba x jest mniejsza lub równa -3.

b) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: $x>\frac{7}{4}$.

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Oblicz:

a) $-5\frac{1}{3}-3\frac{3}{5}$ b) 15,85 + (-2,34) c) $-5\frac{3}{7}-(-3\frac{2}{3})$

Zad. 1: Oblicz:

a) $-5\cdot 1\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{4}\cdot(-4)^2$ c) -5^2 : $\frac{1}{5}$ d) -4,5 · (-4)

e) $\frac{4}{7}$: $(\frac{-14}{3})$ f) 15 - (-4 · (-3,5))

Zad. 3:

a) Zapisz odpowiednią nierówność: liczba x jest większa lub równa -3.

b) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek: x < 1,5.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Oblicz:

a) $-\left(-3\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-2\frac{1}{2}\right)$ c) $(-6)^2:\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $|-3{,}23|+|0|-|4{,}67-1{,}24|$ d) $-4\cdot\left(|-5|-\left(-2\frac{1}{4}\right)\right):2\frac{3}{7}$

Zad. 2: Oblicz sprytnie:

a) $-5\frac{1}{7}-12\frac{1}{11}-1\frac{10}{11}+6\frac{3}{7}$

b) $-4{,}8+3{,}3-2{,}2+2{,}7$

c) $-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+3{,}5-(-0{,}125)+2\frac{1}{3}$

Zad. 3: Na koniec lutego 2014 r. pani Ewa miała na koncie w banku 3541,27 zł. W miesiącu marcu 2014 r. na koncie zarejestrowano następujące operacje:

Data operacji	**Tytuł operacji**	**Kwota operacji**	**Stan konta po operacji**
02.03.2014	Wypłata gotówki w bankomacie	-600,00	
05.03.2014	Spłata raty kredytu mieszkaniowego	....	
09.03.2014	Zaliczka na koszty utrzymania nieruchomości	-459,37	+1850,85

10.03.2014	Wynagrodzenie za luty 2014r.	+2495,76	
12.03.2014	Zakup - sklep nr 78	-278,56	
25.03.2014	Zakup - sklep nr 29	-1200,00	
31.03.2014	Odsetki od środków na koncie	+0,05	
31.03.2014	Pobranie podatku dochodowego	-0,01	
31.03.2014	Opłata za prowadzenie konta	-6,99	....

Jakiej wysokości ratę kredytu mieszkaniowego zapłaciła pani Ewa w miesiącu marcu 2014r.?

Jaki był stan konta pani Ewy na koniec marca 2014r.?

Zad. 4: Które z poniższych stwierdzeń jest nieprawdziwe?

A) Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną.

B) Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

C) Każda liczba wymierna jest liczbą całkowitą.

D) Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.

Zad. 5: Zaznacz na osi liczbowej następujące liczby:

$-7,5;\ \ 4;\ \ 3\frac{1}{2};\ \ -3\frac{1}{2};\ \ 0;\ \ 6$

1) Jaka jest odległość pomiędzy liczbami 6 i $-7,5$?

2) Wypisz wszystkie liczby całkowite leżące na osi liczbowej pomiędzy liczbami $-7,5$ a $3,5$.

3) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunki:

a) $x > 6$ b) $-3\frac{1}{2} \leq x < 0$ c) $x \leq -7\frac{1}{2}$

Zad. 6: Ustal, jaką liczbą - dodatnią czy ujemną - jest:

a) iloczyn jedenastu liczb ujemnych,

b) odwrotność iloczynu czterech liczb ujemnych

c) liczba przeciwna do sześcianu liczby ujemnej

d) iloraz kwadratów dwóch liczb o tych znakach.

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Oblicz:

a) $-(-4\frac{1}{4})\cdot(5\frac{3}{5})$

b) |-5,23| + |0| - |4,01 – 4,24|

c) $(-4)^2 : (-0,8)$

d) $-4\cdot\left(|-5|-\left(-2\frac{1}{4}\right)\right):2\frac{3}{7}$

Zad. 2: Oblicz sprytnie:

a) $-5\frac{1}{7}-12\frac{1}{11}-1\frac{10}{11}+6\frac{3}{7}$

b) $-4{,}8+3{,}3-2{,}2+2{,}7$

c) $-\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+3{,}5-(-0{,}125)+2\frac{1}{3}$

Zad. 3: Na koniec lutego 2014 r. pan Adam miał na koncie w banku 4825,75 zł. W miesiącu marcu 2014 r. na koncie zarejestrowano następujące operacje:

Data operacji	**Tytuł operacji**	**Kwota operacji**	**Stan konta po operacji**
02.03.2014	Wypłata gotówki w bankomacie	-400,00	
05.03.2014	Spłata raty kredytu mieszkaniowego	....	
09.03.2014	Zaliczka na koszty utrzymania nieruchomości	-521,37	+2904,38
10.03.2014	Wynagrodzenie za luty 2014r.	+3495,76	
12.03.2014	Zakup - sklep nr 78	-375,56	
25.03.2014	Zakup - sklep nr 29	-200,00	
31.03.2014	Odsetki od środków na koncie	+0,05	
31.03.2014	Pobranie podatku dochodowego	-0,01	
31.03.2014	Opłata za prowadzenie konta	-6,99	....

Jakiej wysokości ratę kredytu mieszkaniowego zapłacił pan Adam w miesiącu marcu 2014r.?

Jaki był stan konta pana Adama na koniec marca 2014r.?

Zad. 4: Które z poniższych stwierdzeń jest nieprawdziwe?

A) Każda liczba wymierna jest liczbą naturalną.

B) Każda liczba całkowita jest liczbą wymierną.

C) Każda liczba naturalna jest liczbą całkowitą.

D) Każda liczba naturalna jest liczbą wymierną.

Zad. 5: Zaznacz na osi liczbowej następujące liczby: -8,5; 5; 8,5; 1; -3,5; 0.

1) Jaka jest odległość pomiędzy liczbami 5 i -8,5 ?

2) Wypisz wszystkie liczby całkowite leżące na osi liczbowej pomiędzy liczbami -3,5 a 8,5 .

3) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunki:

a) $x > 5$ b) $-3\frac{1}{2} \leq x < 0$ c) x ▯ -8,5

Zad. 6: Ustal, jaką liczbą - dodatnią czy ujemną - jest:

a) iloczyn dziesięciu liczb ujemnych,

b) odwrotność iloczynu trzech liczb ujemnych

c) liczba przeciwna do sześcianu liczby ujemnej

d) iloraz sześcianów dwóch liczb o różnych znakach.

Dział 3. Potęgi

Realizacja działu „Potęgi" ma na celu pogłębienie wiadomości o potęgowaniu liczb, gdy wykładnik potęgi jest liczbą całkowitą oraz kształcenie umiejętności wykonywania działań na potęgach z wykorzystaniem praw potęgowania.

Na realizację działu przeznaczono 15 godzin.

Uczniowie zetknęli się już z potęgowaniem w szkole podstawowej, gdzie obliczali kwadraty i sześciany liczb.

Bardzo cenna jest w tym dziale koncepcja rozpoczynania każdej lekcji od Rozgrzewki. Rozgrzewka zawiera różne zadania: obliczeniowe, nawiązujące do uprzednio nabytej wiedzy, ale też wymagające wnioskowania. Zadania te powinny stać się kanwą wprowadzenia do lekcji, materiałem do dyskusji z uczniami, zwłaszcza te, które wymagają wyciągania wniosków, ponieważ właśnie tutaj mamy okazję doprowadzić uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy. Nauczyciel ma też tutaj okazję ośmielić uczniów do swobodnego wypowiadania się (obserwujemy często, że uczniowie boją się wypowiadać swoje przypuszczenia dotyczące wniosków o charakterze matematycznym – obawiają się, że będą ukarani za nietrafne wnioski), tworzyć dobrą, twórczą atmosferę na lekcji i inspirować uczniów do samodzielnego konstruowania wiedzy.

Należy również wykorzystać zaproponowane w skrypcie i scenariuszach różne formy pracy, zwłaszcza pracę w parach lub grupach. Ciekawe są zwłaszcza elementy lekcji łączące pracę indywidualną (samodzielne rozwiązywanie zadań) z pracą w parach (wymienianie się rozwiązaniami i ocena rówieśnicza rozwiązań kolegi/koleżanki).

Proponujemy nauczycielom „sterowanie" pracą z apletami. Ponieważ praktycznie wszystkie elementy apletów są dostępne „na kliknięcie" lub „na ustawienie punktu na suwaku", może zrodzić się u uczniów pokusa odsłonięcia wszystkiego (w tym również natychmiastowego odsłonięcia wzorów i rozwiązań zadań). Wiemy dobrze, że uczniowie są niecierpliwi i często takiej pokusie ulegają. Pozwalając im na to stracimy okazję do samodzielnego konstruowania wiedzy przez nich (w przypadku wzorów) lub samodzielnego rozwiązywania zadań (w przypadku części ćwiczeniowej apletów). Dlatego też proponujemy prowadzić pracę z apletami w tym dziale w formie pracy zbiorowej, natomiast wyświetlenie wzoru czy też rozwiązania zadania powinno być poprzedzone pracą twórczą uczniów, dyskusją nad wynikami i wyraźnym sformułowaniem wniosku. Wówczas ta część zawartości apletu będzie służyła wyłącznie weryfikacji postawionej hipotezy (w przypadku budowania teorii) lub sprawdzeniu poprawności obliczeń (w przypadku zadań obliczeniowych).

Oczywiście uczniowie będą pracować później samodzielnie z apletami traktując je jako źródło wiedzy do powtórek czy utrwalania materiału w domu.

Proponujemy potraktować następujące pytania (umieszczone w skrypcie) jako problemy do rozwiązania podczas lekcji:

Zagadnienie	Problem	Aplet
Potęga o wykładniku naturalnym	Wyciągnij wniosek i spróbuj podać definicję, wyjaśnić pojęcie potęgi. (z Rozgrzewki)	*potegi01*
Iloczyn potęg o tych samych podstawach	Wyciągnij wniosek i odpowiedz na pytanie: Jak mnożymy potęgi o tej samej podstawie? (z Zadania wstępnego)	*potegi02*
Iloraz potęg o tych samych podstawach	Czy potrafisz dzielić potęgi o tej samej podstawie? (z Zadania wstępnego)	*potegi02*
Potęgowanie potęgi	Spróbuj wyciągnąć wniosek, i odpowiedz na pytanie, jak potęgujemy potęgę? (z Zadania wstępnego)	*potegi02*
Mnożenie potęg o tych samych wykładnikach	Czy potrafisz wyciągnąć wniosek, jak mnożyć potęgi o tych samych wykładnikach i napisać wzór? (z Zadania wstępnego)	*potegi03*
Dzielenie potęg o tych samych wykładnikach	Sformułuj wniosek, w jaki sposób dzielić potęgi o tych samych podstawach oraz napisz wzór. (z	*potegi03*

	Zadania wstępnego)	
Potęga o wykładniku ujemnym, liczby odwrotne	Czy potrafisz już samodzielnie obliczać potęgi o wykładniku ujemnym? (z Pracy z apletem)	*potegi04*
Notacja wykładnicza	W skrypcie brak jest problemu, którego rozwiązanie pozwoliłoby uczniom skonstruować nową wiedzę, ale proponuję rozpocząć lekcję od dyskusji na temat: Jak zapisujemy liczby bardzo duże lub bardzo małe? Czy spotkaliście się z tym zagadnieniem w ciekawych artykułach lub w książkach, które czytaliście? - Być może w trakcie takiej dyskusji któryś z uczniów poda przykład zapisu liczby w notacji wykładniczej.	*potegi05*

Postawienie powyższych problemów pozwoli wzbogacić zakres metod stosowanych podczas lekcji o metodę problemową.

Projekt: Potęgowanie – kto pierwszy zaczął tak zapisywać liczby?

Kartkówka1 Grupa A

Zad. 1: Porównaj potęgi wstawiając odpowiedni znak: $<$, $>$ lub $=$:

a) 2^0 ….. 23^0

b) $(-4)^3$ ….. $(-4)^5$

c) $(\frac{1}{2})^4$ ….. $(\frac{1}{2})^3$

d) $(-\frac{1}{2})^3$ ….. $(-\frac{1}{2})^2$

e) -3^3 ….. $(-3)^3$

Zad. 2: Zapisz w postaci potęgi:

a) $(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})$

b) $4^6\cdot 4^4\cdot 4^2$

c) $(-2)^{15}:(-2)^7$

d) $\frac{1}{27}\cdot 3^{12}$

Zad. 3: Uprość wyrażenia:

a) $[(x^{28}:x^{14})\cdot x^{13}]:x^{25}$

b) $(a^2)^6$

c) $\frac{[y^7\cdot(y^2)^3]:y^4}{[y^8:(y^3)^2]^2}$

Kartkówka1 Grupa B

Zad. 1: Porównaj potęgi wstawiając odpowiedni znak: <, > lub = :

a) $(-4)^2$ … -4^2

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ... $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

c) $(-3)^0$ ... 5^0

d) $(-3)^3$ ... $(-3)^4$

e) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2$ ... $\left(\frac{-1}{4}\right)^1$

Zad. 2: Zapisz w postaci potęgi:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^2$

c) $(-5)^7 : (-5)^5$

d) $\frac{1}{64}\cdot 4^{10}$

Zad. 3: Uprość wyrażenia:

a) $a^{12} \cdot a^8 : a^{15} : (a^3 \cdot a^2)$

b) $(x^7)^3$

c) $\frac{[y^7\cdot(y^2)^3]:y^4}{[y^8:(y^3)^2]^2}$

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Porównaj potęgi wstawiając odpowiedni znak: $<$, $>$ lub $=$:

a) 2^5 ….. 5^5

b) $(-4)^3$ ….. $(-2)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ ….. $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7$ ….. $\left(-\frac{1}{5}\right)^7$

Zad. 2: Zapisz w postaci potęgi:

a) $3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2$

b) $\frac{(-3)^8}{4^8}$

c) $\left(\left(2\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^5$

Zad. 3: Oblicz:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$

b) 2^{-3}

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Zad. 4: Zapisz liczby, posługując się notacją wykładniczą:

a) $27\,500\,000\,000$

b) $0{,}0000007$

c) $356 \cdot 10^7$

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Porównaj potęgi wstawiając odpowiedni znak: <, > lub = :

a) 2^5 ... 7^5

b) $(-2)^4$ ... $(-4)^4$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ ... $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

d) $\left(\frac{-1}{3}\right)^5$ ... $\left(\frac{-1}{4}\right)^5$

Zad. 2: Zapisz w postaci potęgi:

a) $3^4 \cdot 2^4 \cdot 5^2$

b) $\frac{(-5)^4}{2^4}$

c) $\left(\left(2\frac{1}{4}\right)^5 : \left(\frac{1}{4}\right)^5\right) \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^5$

Zad. 3: Oblicz:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

b) 3^{-4}

c) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-4}$

Zad. 4: Zapisz liczby, posługując się notacją wykładniczą:

a) 52000000000

b) 0,0000000009

c) $253 \cdot 10^6$

<u>Praca kontrolna Grupa A</u>

Zad. 1: Zapisz w postaci potęgi, a następnie oblicz:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 : \left(-\frac{1}{2}\right)^6$

d) $(5^{-5})^2 : 25^{-4}$

b) $\frac{3^5 \cdot 2^5}{6^4}$

c) $(-1{,}1)^{-2} \cdot 11^2$

Zad. 2: Uporządkuj podane liczby rosnąco: $4^3 \quad 4^{12} \quad 4^0 \quad 4^{-1} \quad 4^{-2} \quad 4^{-6} \quad 4^1$

Zad. 3: Liczbę 5 400 000 można przedstawić w postaci:

A. $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$ B. $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ C. $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ D. $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5$

Zad. 4: Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(a^4 \cdot a^{-3}) \cdot a^6 : a^2$

c) $(-abc^{-1})^{-2} \cdot (a^2 b^3 c^{-2})$

b) $\frac{x^5 y^{-3}}{x^{-2} y^6}$

d) $(c^n \cdot (c^{-n})^2) \cdot (c^{n+1})^{-2} : c^{-2n}$

Zad. 5: Jaką liczbę należy wpisać w miejsce kratki?

a) $(8^{\square})^{-2} = 8^6$

a) $7^{\square} : 7^{-2} = 7^7$

b) $\left(\frac{1}{\square}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

Zad. 6: W tabeli podane są pewne informacje o dwóch planetach: Merkurym i Uranie.

Planeta	Długość średnicy równikowej	Średnia odległość od Słońca	Długość orbity
Merkury	$4{,}9 \cdot 10^3$ km	$5{,}8 \cdot 10^7$ km	$3{,}6 \cdot 10^{11}$ m
Uran	$5{,}1 \cdot 10^4$ km	$29 \cdot 10^8$ km	$0{,}18 \cdot 10^{18}$ m

a) W podanej tabeli nie wszystkie wielkości zapisane są z użyciem notacji wykładniczej. Znajdź je i zapisz w tej notacji.

b) Ile razy średnia odległość Merkurego od Słońca jest mniejsza od średniej odległości Urana od Słońca?

c) O ile kilometrów długość średnicy Merkurego jest mniejsza od długości średnicy Urana?

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Zapisz w postaci potęgi, a następnie oblicz:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{-1}{3}\right)^7$

b) $\frac{4^2 \cdot 3^2}{12^4}$

c) $(2{,}2)^{-2} \cdot (-22)^2$

d) $\mathbf{(7^{-2})^3}$: 49^{-3}

Zad. 2: Uporządkuj podane liczby rosnąco: 3^0; 3^{-2}; 3^3; 3^{-1}; 3^5; 3^1; 3^{-4};

Zad. 3: Liczbę 16 200 000 można przedstawić w postaci:

A. $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$ B. $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ C. $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$ D. $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^5$

Zad. 4: Doprowadź wyrażenia do najprostszej postaci:

a) $(x^3 \cdot x^{-4}) \cdot x^5 : x^4$

b) $\frac{a^3 \cdot b^{-3}}{a^{-2} \cdot b^4}$

c) $(x\,y\,z^{-1})^{-2} \cdot (x^2\,y^2\,z^{-3})$

d) $(x^n \cdot (x^{-n})^3) \cdot (x^{n-1})^{-2} : x^{-3n}$

Zad. 5: Jaką liczbę należy wpisać w miejsce kratki, aby była spełniona równość □?

a) $(3^{\square})^{-2} = 3^8$

b) $8^{\square} : 8^{-5} = 8^8$

c) $\left(\frac{1}{\square}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

Zad. 6: W tabeli podane są pewne informacje o dwóch planetach: Merkurym i Uranie.

Planeta	Długość średnicy równikowej	Średnia odległość od Słońca	Długość orbity
Merkury	$4{,}9 \cdot 10^3$ km	$5{,}8 \cdot 10^7$ km	$3{,}6 \cdot 10^{11}$ m
Uran	$5{,}1 \cdot 10^4$ km	$29 \cdot 10^8$ km	$0{,}18 \cdot 10^{18}$ m

a) W podanej tabeli nie wszystkie wielkości zapisane są z użyciem notacji wykładniczej. Znajdź je i zapisz w tej notacji.

b) Ile razy średnia odległość Merkurego od Słońca jest mniejsza od średniej odległości Urana od Słońca?

c) O ile kilometrów długość średnicy Merkurego jest mniejsza od długości średnicy Urana?

Dział 4. Pierwiastki

Celem realizacji działu „Pierwiastki" jest zapoznanie uczniów z pojęciami pierwiastka kwadratowego i pierwiastka sześciennego oraz kształcenie umiejętności obliczania wartości takich pierwiastków, wykonywania działań na nich oraz posługiwania się nimi w sytuacjach praktycznych.

Na realizację działu przeznaczono 11 godzin.

Materiał, z którym w tym dziale spotyka się uczeń, jest dla niego nowy, niemniej jednak można rozpocząć realizację działu od dyskusji na temat: „Czy spotkaliście się już z pojęciem pierwiastka?" Uczniowie prawdopodobnie będą mieli jakieś skojarzenia. Jeżeli będą to skojarzenia matematyczne, można zapytać o to, czy uczniowie spotkali się z graficznym oznaczeniem pierwiastka.

Podobnie, jak przy omawianiu działu „Potęgi", proponujemy sterowanie przez nauczyciela korzystaniem przez uczniów a apletów, aby głównym elementem pracy nie stało się klikanie i posługiwanie się suwakiem.

W niektórych konspektach zaproponowana jest dyskusja prowadząca do sformułowania wniosku na przykład, jak wyłączamy czynnik spod znaku pierwiastka lub jak włączamy czynnik pod znak pierwiastka. To są bardzo cenne elementy lekcji. Dyskusji i samodzielnego tworzenia wiedzy powinno być w trakcie lekcji jak najwięcej.

Proponuję potraktować następujące pytania jako problemy do rozwiązania podczas lekcji:

Zagadnienie	Problem	Aplet
obliczanie pierwiastków stopnia drugiego i trzeciego z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych.	Co, według Was, oznacza słowo „pierwiastek”? Czy spotkaliście się już z pojęciem pierwiastka? Gdzie, w jakich sytuacjach?	*pierwiastki01*
Dodawanie i odejmowanie pierwiastków	Czy pierwiastki można dodawać? A odejmować? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Jeżeli tak, to jak proponujecie to zrobić?	*pierwiastki02*
Szacowanie wartości pierwiastków	Czy istnieją pierwiastki z dowolnych liczb? Czy zawsze możemy obliczyć dokładną wartość pierwiastka? Przykłady? Co proponujecie zrobić, jeżeli nie umiemy obliczyć dokładnej wartości pierwiastka?	*pierwiastki03*
Włączanie czynnika pod znak pierwiastka oraz wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka	Co to znaczy przedstawić pierwiastek w najprostszej postaci?	*pierwiastki04*
Potęgowanie pierwiastków	Już wiecie, że można potęgować potęgi. Jak Wam się wydaje, czy można potęgować pierwiastki? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Jeżeli tak, to jak proponujecie to zrobić?	*pierwiastki05*
Mnożenie i dzielenie pierwiastków drugiego i trzeciego stopnia	Czy pierwiastki można mnożyć? A dzielić? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Jeżeli tak, to jak proponujecie to zrobić?	*pierwiastki05*

Usuwanie niewymierności z mianownika	Liczba przedstawiona w postaci ułamka, w którego mianowniku występuje pierwiastek, uważana jest za liczbę „nieelegancką”. Podajcie przykład takiej liczby. Czy można usunąć niewymierność z mianownika? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Jeżeli tak, to jak proponujecie to zrobić?	*pierwiastki06*

Projekt: Pierwiastki – kto pierwszy zaczął tak zapisywać liczby?

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Oblicz:

a) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[3]{0{,}125}$

b) $\sqrt[2]{\frac{16}{81}}$

d) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

Zad. 2: Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka: $\sqrt[3]{80}$

Zad. 3: Włącz czynnik pod znak pierwiastka: $6\sqrt{11}$

Zad. 4: Zapisz w prostszej postaci:

a) $2(\sqrt{13}+\sqrt{7})-5(\sqrt{7}-\sqrt{13})$

b) $\frac{3\sqrt[3]{9}+8\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{-9}+2\sqrt[3]{9}}$

Zad. 5: Dobierz dwie kolejne liczby naturalne tak, aby jedna była mniejsza, a druga większa od liczby $\sqrt{15}$.

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 2: Oblicz:

a) $\sqrt[3]{-64}$

b) $\sqrt[2]{\frac{9}{25}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}216}$

d) $\sqrt[3]{1\frac{61}{64}}$

Zad. 2: Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka: $\sqrt[3]{81}$

Zad. 3: Włącz czynnik pod znak pierwiastka: $8\cdot\sqrt[2]{7}$

Zad. 4: Zapisz w prostszej postaci:

a) $5(\sqrt{15}-\sqrt{6})-8(\sqrt{6}+\sqrt{15})$

a)

b) $\frac{3\sqrt[3]{9}+8\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[3]{-9}+2\sqrt[3]{9}}$

Zad. 5: Dobierz dwie kolejne liczby naturalne tak, aby jedna była mniejsza, a druga większa od liczby $\sqrt{17}$

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Oblicz:

a) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{12}\right)^2$ d) $\frac{\sqrt{10^3}}{10\sqrt[3]{(-81)^3}}$

b) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-16}\right)^2\cdot(-2)\sqrt[3]{-16}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}$

Zad. 2: Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

Zad. 3: Oblicz długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o wymiarach 12cm x 8cm.

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Oblicz:

a) $(\frac{1}{4}\sqrt{13})^2$ b) $\frac{1}{3}\cdot(\sqrt[3]{-27})^2\cdot(-4)\cdot\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

b) c) d) $\frac{\sqrt{10^3}}{10\sqrt[3]{(-81)^3}}$

Zad. 2: Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{5}}$

a) b)

Zad. 3: Oblicz długość boku kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta o wymiarach 25 cm i 9 cm.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Oblicz:

a) $3\sqrt{16}-2\sqrt[3]{-27}$

b) $2\sqrt{5}-3\sqrt{12}+5\sqrt{3}+(-\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})$

d) $\frac{2\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{-320}}{2\sqrt[3]{5}}$

e) $\sqrt[3]{12^2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2-\sqrt[3]{4^2}\right)$

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{-25}$

Zad. 2: Zastąp litery odpowiednimi liczbami:

a) $\sqrt[3]{1-a}=-3$

b) $2\sqrt{b}=\sqrt{24}$

c) $c\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{108}$

d) $\sqrt[3]{e^2}=2\sqrt[3]{2}$

Zad. 3: Najmniejszą z liczb: $\frac{4}{\sqrt{2}}$ $3\sqrt{2}$ $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ $\frac{10}{3\sqrt{2}}$ jest liczba:

A. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{10}{3\sqrt{2}}$

Zad. 4: Działka pana Kamila o powierzchni 50 m^2 ma kształt kwadratu. Pan Kamil planuje ogrodzić swoją działkę siatką, którą można kupić na metry. Oblicz ile metrów siatki potrzebuje kupić pan Kamil do ogrodzenia swojej działki?

Zad. 5: Wykaż, że prawdziwa jest równość: $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Oblicz:

a) $3\sqrt{16}-2\sqrt[3]{-27}$

b) $2\sqrt{5}-3\sqrt{12}+5\sqrt{3}+(-\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})$

d) $\frac{2\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{-320}}{2\sqrt[3]{5}}$

e) $\sqrt[3]{12^2}$

f) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2-\sqrt[3]{4^2}\right)$

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{-25}$

Zad. 2: Zastąp litery odpowiednimi liczbami:

a) $\sqrt[3]{1-x}=-2$

b) $3\cdot\sqrt{x}=\sqrt{27}$

c) $x\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[2]{192}$

d) $\sqrt[3]{x^2}=5\cdot\sqrt[3]{5}$

Zad. 3: Wskaż najmniejszą z liczb: $\frac{4}{\sqrt{3}}$; $4\cdot\sqrt{2}$; $\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}$; $\frac{5}{2\cdot\sqrt{2}}$

Zad. 4: Ile tasiemki potrzeba na obszycie kwadratowej serwetki o polu 50 cm^2 ?

Zad. 5: Wykaż, że prawdziwa jest równość: $\sqrt{6-4\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$.

Dział 5. Procenty

Celem realizacji działu „Procenty" jest zapoznanie uczniów z pojęciami procentu i promila, kształcenie umiejętności obliczeniowych związanych z tymi pojęciami oraz umiejętności wykorzystania tych pojęć w sytuacjach praktycznych.

Na realizację działu przeznaczono 12 godzin.

Uczeń spotkał się już w szkole podstawowej z występowaniem procentów w bardzo prostych sytuacjach: 100% danej wielkości interpretował jako całość, 50% jako połowę, 25% jako jedną czwartą, 10% jako jedną dziesiątą, 1% jako jedną setną. W tej sytuacji już pierwszą lekcję z działu (Procenty, promile i ułamki) warto poprowadzić metodą problemową i po odwołaniu się do wiedzy ze szkoły podstawowej, a przed otwarciem apletu *procenty01*, postawić problem: „Jeżeli 25% możemy przedstawić jako jedną czwartą, a 1% jako jedną setną, to jak w postaci ułamka możemy przedstawić 37%?" Po burzy mózgów i sformułowaniu wniosku można przejść do uogólnienia: „A jak przedstawilibyśmy w postaci ułamka dowolny procent? Jak w postaci ułamka zwykłego? Jak w postaci ułamka dziesiętnego?" - Uczniowie mogą podawać konkretne przykłady, które zapiszemy na tablicy. Na podstawie tych przykładów uczniowie (prawdopodobnie wspomagani trochę przez nauczyciela) sformułują wnioski: „Aby przedstawić procent w postaci ułamka zwykłego, należy:......", „Aby przedstawić procent w postaci ułamka dziesiętnego, należy:......". Następnie w podobny sposób uczniowie rozpatrują sytuację odwrotną: ułamki przedstawiamy w postaci procentów.

W trakcie tak przeprowadzonej lekcji uczniowie stają się konstruktorami wiedzy, zaś aplet jest potwierdzeniem prawidłowości ich pracy twórczej. W scenariuszu tej lekcji zaproponowana jest burza mózgów w trakcie pracy z apletem, po rozwiązaniu kilku zadań. Proponujemy burzę mózgów przed otwarciem apletu, ponieważ pozwala to na większą inwencję twórczą uczniów: podawanie własnych przykładów, wykonywanie obliczeń na liczbach przez nich wybranych, dokonywanie podsumowań, gdy nie kusi jeszcze kliknięcie w pole wyboru „Wnioski". Praca jest – wydaje nam się – bardziej spontaniczna.

Proponujemy potraktować następujące pytania jako problemy do rozwiązania podczas lekcji:

Zagadnienie	Problem	Aplet
Procenty, promile i ułamki	Jeżeli 25% możemy przedstawić jako jedną czwartą, a 1% jako jedną setną, to jak w postaci ułamka możemy przedstawić 37%? A jak przedstawilibyśmy w postaci ułamka dowolny	*procenty01* *procenty02*

	procent? Jak w postaci ułamka zwykłego? Jak w postaci ułamka dziesiętnego? A jak postąpimy w sytuacji odwrotnej: musimy wytłumaczyć komuś, kto zna tylko ułamki, co znaczy zapis 29%. Jak zamienimy procent na ułamek? Zwykły? Dziesiętny?	
Analizowanie i sporządzanie diagramów procentowych	Co znaczy „diagram”? Gdzie spotykamy się z diagramami? Po co potrzebne są diagramy? Dlaczego sporządzamy diagramy różnego rodzaju? Czy z każdego diagramu tak samo łatwo odczytujemy dane?	
Obliczanie procentu danej wielkości	Obniżka cen o 30% - co to znaczy? Jak obliczyć nową cenę towaru? W jakich sytuacjach obliczamy procent z danej liczby?	*procenty03*
Obliczanie, jakim procentem jednej wielkości jest druga wielkość	Mam 25 płyt, wśród nich jest 5 płyt mojego ulubionego piosenkarza. Jaki procent mojej kolekcji stanowią płyty tego piosenkarza? Jak to obliczyć?	*procenty04*
Obliczanie liczby na podstawie jej procentu	Lubię dostawać książki. Zrobiłam listę książek, które chciałabym dostać. Na urodziny dostałam 3 książki. Obliczyłam, że to 20% liczby wszystkich pozycji z mojej listy. Ile książek mam w swoim spisie? Rodzina	*procenty04*

	zwykle kupuje mi 3 lub 4 książki na jakąś okazję. Ile takich okazji musi być, abym dostała wszystkie wymarzone książki?	
Obliczenia procentowe w praktyce - oprocentowanie oszczędności i kredytów	Czy warto oszczędzać? Co to znaczy „wziąć kredyt" i ile to kosztuje?	

Proponujemy wzbogacenie zasobu środków dydaktycznych w tym dziale o wycinki artykułów (o tematyce przystępnej uczniowi pierwszej klasy gimnazjum) z gazet, gdzie występują procenty i diagramy w sytuacjach praktycznych. Takie artykuły znakomicie nadają się na materiał do układania zadań. Zadania może układać nauczyciel (aby na początku pokazać uczniom, ile matematyki kryje się w gazetach) oraz mogą je układać uczniowie. Przy okazji uczymy krytycznego czytania tekstów. Doświadczenie wskazuje, że uczniowie mają ogromną pomysłowość i znakomicie pracują na nietypowych materiałach dydaktycznych. Bardziej się wtedy aktywizują (również są bardziej twórczy) niż przy wykonywaniu typowych zadań z podręcznika czy innych „oficjalnych" źródeł. Ogólnie należy stwierdzić, że rzadko stawiamy przed uczniami wyzwanie polegające na układaniu zadań, a szkoda, ponieważ jest to okazja do kształcenia wielu różnych umiejętności.

Zagadnienia dotyczące procentów są bardzo wdzięcznym tematem długoterminowych prac projektowych, dlatego też proponujemy tutaj kilka tematów projektów:

- Moja szkoła w procentach.
- Oszczędzamy na wycieczkę. Co mogę doradzić?
- Moja rodzina bierze kredyt na nowy samochód. Co mogę doradzić?

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Zamień 12,5% na ułamek zwykły nieskracalny.

Zad. 2: Zamień liczbę $\frac{1}{5}$ na procent.

Zad. 3: Oblicz 20% liczby 360.

Zad. 4:

a) Znajdź liczbę, której 120% jest równe 36.

b) Jakim promilem liczby 15 jest liczba 0,6?

c) Oblicz liczbę, która jest o 3% większa od 60.

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 1: Zamień 21,5% na ułamek zwykły nieskracalny.

Zad. 2: Zamień liczbę $\frac{3}{5}$ na procent.

Zad. 3: Oblicz 30% liczby 320.

Zad. 4:

a) Znajdź liczbę, której 150% jest równe 108.

b) Jakim promilem liczby 25 jest liczba 0,8?

c) Oblicz liczbę, która jest o 7% mniejsza od 60.

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Rower kosztował 1000zł. Oblicz ile kosztuje rower po dwukrotnej obniżce o 10%.

Zad. 2: Pan Michał położył na półroczną lokatę w banku kwotę 5000zł. Oprocentowanie lokaty pana Michała wynosiło 3,5% w skali roku. Oblicz, ile pieniędzy zarobił pan Michał na tej lokacie.

Zad. 3: W czasie transportu 1500 szt. telewizorów uszkodzeniu uległo 24 sztuki. Jaki procent transportowanych telewizorów stanowią uszkodzone egzemplarze?

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Komputer kosztował 1800 zł. Oblicz ile kosztuje rower po dwukrotnej obniżce o 5%.

Zad. 2: Pani Maria położyła na półroczną lokatę w banku kwotę 7000 zł. Oprocentowanie lokaty pani Marii wynosiło 4,5% w skali roku. Oblicz, ile pieniędzy zarobiła pani Maria na tej lokacie.

Zad. 3: W czasie transportu 500 szt. szklanych stolików uszkodzeniu uległo 15 sztuk. Jaki procent transportowanych stolików stanowią uszkodzone egzemplarze?

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Zamień ułamki na procenty:

a) $1\frac{4}{5}$ b) 0,017

Zad. 2: Zamień procenty na ułamki:

a) 15% b) 7,5%

Zad. 3:

a) Oblicz 25% masy 120 kg.

b) Oblicz, jaki procent kwoty 240zł stanowi 12zł.

c) Oblicz liczbę o $8\,{}^{0}/_{00}$ mniejszą od liczby 7.

d) Wyznacz liczbę x wiedząc, że liczbą o 25% większą od x jest 150.

Zad. 4: Samochód pani Joli po roku użytkowania stracił na wartości 15% i obecnie wyceniony został na 47 600 zł. Rok wcześniej samochód pani Joli był wart:

A. 40 460 zł B. 54 740 zł C. 56 000,00 złD. 71 400zł

Zad. 5: Rower kosztował 1800zł. Najpierw cenę tego roweru obniżono o 20%, a następnie podniesiono o 25%. Oblicz cenę końcową roweru.

Zad. 6: Jola i Kasia kupiły jednakowe torby w dwóch rożnych sklepach. Torba Joli kosztowała 125zł, a torba Kasi - 115zł. O ile procent torba Kasi była tańsza od torby Joli?

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Zamień ułamki na procenty:

a) $2\frac{3}{5}$ b) 0,038

Zad. 2: Zamień procenty na ułamki:

a) 37% b) 13,5%

Zad. 3:

a) Oblicz 35% masy 20 kg.

b) Oblicz, jaki procent kwoty 480 zł stanowi 24 zł.

c) Oblicz liczbę o 8 promili mniejszą od liczby 7.

d) Wyznacz liczbę x wiedząc, że liczbą o 75% większą od x jest 210.

Zad. 4: Samochód pana Adama po roku użytkowania stracił na wartości 15% i obecnie wyceniony został na 37 145 zł. Rok wcześniej samochód pani Joli był wart:

A. 43 460 zł B. 43 000 zł C. 43 700,00 zł D. 50 255 zł

Zad. 5: Rower kosztował 2200 zł. Najpierw cenę tego roweru obniżono o 10%, a następnie podniesiono o 15%. Oblicz cenę końcową roweru.

Zad. 6: Marek i Mirek kupili jednakowe gry komputerowe w dwóch rożnych sklepach. Gra Marka kosztowała 90 zł, a gra Mirka – 75 zł. O ile procent gra Marka była droższa od gry Mirka?

Dział 6. Wyrażenia algebraiczne

Jest to bardzo ważny dział, którego celem jest wprowadzenie ucznia w świat algebry. Co prawda uczniowie zetknęli się już z oznaczeniami literowymi wielkości w szkole podstawowej, ale dopiero tutaj rozpatrują wyrażenia algebraiczne w szerszym zakresie i uczą się wykonywać na nich pewne działania. Tutaj też dochodzi do bardziej głębokiej niż to miało miejsce w szkole podstawowej matematyzacji (można powiedzieć: algebraizacji) sytuacji praktycznych.

Na realizację działu przeznaczono 15 godzin.

Zagadnienia rozpatrywane w dziale „Wyrażenia algebraiczne" są teoretyczne (aczkolwiek poparte przykładami z praktyki życia codziennego) i abstrakcyjne. Obowiązują tutaj ściśle zasady ustalone przez twórców tej gałęzi matematyki: w określony sposób mnożymy jednomiany przez sumy algebraiczne, w określony sposób dokonujemy redukcji wyrazów podobnych itd. W zasadzie nie ma tu miejsca na samodzielne konstruowanie wiedzy przez uczniów. Jest natomiast miejsce na bardzo dużo ćwiczeń, rozwiązywanie zadań osadzonych w kontekście teoretycznym i praktycznym.

W zasadzie wszystkie wskazówki potrzebne do efektywnego przeprowadzenia lekcji z tego działu zawarte są w skrypcie i scenariuszach lekcji. Aplety dają możliwość interaktywnej pracy nad zadaniami, dodatkowe zadania zawarte są w skrypcie. Są one różnorodne, więc powinny wzbudzić zainteresowanie uczniów.

W tej sytuacji nie proponujemy tutaj problemów do rozwiązania przez uczniów, w wyniku czego zostałaby samodzielnie skonstruowana wiedza matematyczna. Wiedza ta musi być przyswojona ze źródeł, natomiast tematy do dyskusji dla uczniów zawarte są w zadaniach.

Proponujemy natomiast temat projektu związany z historią matematyki, a ściślej – z historią algebry:

Co znaczy „algebra”? Kto ją wprowadził do matematyki?

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) Połowa sumy liczb k oraz m.

b) Liczba o 5 mniejsza od iloczynu liczb x i y.

c) Iloraz liczby a przez różnicę liczb c i d.

Zad. 2: Karol kupił 25 biletów do kina: 10 biletów normalnych po a zł za bilet i 15 biletów ulgowych po b zł za bilet. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące średnią cenę biletu kupionego przez Karola.

Zad. 3: Zapisz wyrażenie

$$5ab - 3b^2 - \left(6a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) b + 2b^2\right) + b \cdot 5b$$

w jak najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla $a = 2$ i $b = -3$.

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 1: Zapisz odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) Połowa różnicy liczb p oraz q.

b) Liczba o 5 większa od ilorazu liczb x i y.

c) Iloczyn liczby a przez sumę liczb c i d.

Zad. 2: Na przyjęcie urodzinowe Kasi mama kupiła 15 batoników: 10 batoników po a zł za jeden batonik i 5 batoników po b zł za batonik. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące średnią cenę batonika kupionego przez mamę.

Zad. 3: Zapisz wyrażenie

$$5ab - 3b^2 - \left(6a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) b + 2b^2\right) + b \cdot 5b$$

w jak najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla *a* = -5 i *b* = 3**.**

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $2x(x-4) - 3(x^2+2x) + 2(x-3x^2) + 5x$

b) $(x-2y)(x+3y) - (x^2+5y^2)$

Zad. 2: Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $3x + 6y$

a) $5bc - bd$

b) $3xy - 12xy^2 + 18x^2y^2$

Zad. 3: Dla pewnych liczb a, b, c wartość wyrażenia algebraicznego $a - 3b + 2c$ wynosi 7. Oblicz wartość wyrażenia: $2a + 4c - 6b - 4$.

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $3x(x + 4) + 5(x^2 – 2x) + 4(x – 2x^2) - 3x$

b) $(2x + y)(2x – y) – (2x^2 - y^2)$

Zad. 2: Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $5a - 15b$

b) $3xy + yz$

c) $2ab^2 + 6ab - 10a^2b^2$

Zad. 3: Dla pewnych liczb *x, y, z* wartość wyrażenia algebraicznego $x + y - 2z$ wynosi 8. Oblicz wartość wyrażenia: $10 + 3x – 6z + 3y$.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Zapisz w jak najprostszej postaci odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) suma kwadratów liczb p i q,

b) pole prostokąta o bokach długości $2a$ i $3a - 1$,

c) koszt zakupu x kg cukierków po 20zł za kilogram oraz $4x$ kg cukierków po 25 zł za kilogram.

Zad. 2: Zapisz w jak najprostszej postaci podane wyrażenia:

a) $x(x+y-z)-3(-x^2+zx+xy)+2z(x-y)$

b) $2x-3(x+y-1)+(-3x-(4y-5x+4))$

c) $\frac{a^2-ab}{a}$

d) $12a\cdot\frac{a-b}{2}+4\cdot\frac{a+b^2}{3}-2\frac{a^2-b^2}{3}$

Zad. 3: Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

a) Jeśli $8c-4d=4a$, to $c=2(a-d)$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Jeśli $P=\frac{1}{2}a\cdot h$ i $h\neq 0$ to $a=\frac{2P}{h}$. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 4: Poniżej podano trzy metody obliczania prawidłowej wagi dla osoby o danym wzroście h wyrażonym w centymetrach.

Metoda Brocka	**Metoda Lorenza**	**Metoda Towarzystwa Ubezpieczeniowego**
$h-100$ [kg]	$h-100-0{,}25(h-150)$ [kg]	$50+0{,}75(h-150)$ [kg]

a) Stosując każdą z metod oblicz prawidłową wagę dla osoby o wzroście 172cm.

b) Czy dla każdego wzrostu, stojąc metodę Lorenza oraz metodę Towarzystwa Ubezpieczeniowego otrzymamy taką samą wartość prawidłowej wagi? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 5: Uzasadnij, że suma kolejnych trzech liczb naturalnych, z których najmniejszą jest liczba $n+4$, jest podzielna przez 3.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Zapisz w jak najprostszej postaci odpowiednie wyrażenia algebraiczne:

a) różnica sześcianów liczb *p* i *q*,

b) pole rombu o przekątnych długości 2*a* i 3*a* - 1,

c) koszt zakupu 5*x* kg cukierków po 23 zł za kilogram oraz *x* kg cukierków po 15 zł za kilogram.

Zad. 2: Zapisz w jak najprostszej postaci podane wyrażenia:

a) $x(x+y-z)-3(-x^2+zx+xy)+2z(x-y)$

b) $2x-3(x+y-1)+(-3x-(4y-5x+4))$

c) $\frac{a^2-ab}{a}$

d) $12a \cdot \frac{a-b}{2} + 4 \cdot \frac{a+b^2}{3} - 2\frac{a^2-b^2}{3}$

Zad. 3: Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań.

a) Jeśli $P = 0{,}5e \cdot f$ i $e \neq 0$, to $f = \frac{2P}{e}$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Jeśli $2x + 3xy = 7y$ to $x = 7y(2 + 3y)$. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 4: Poniżej podano trzy metody obliczania prawidłowej wagi dla osoby o danym wzroście h wyrażonym w centymetrach.

Metoda Brocka	**Metoda Lorenza**	**Metoda Towarzystwa Ubezpieczeniowego**
$h - 100$ [kg]	$h - 100 - 0{,}25(h - 150)$ [kg]	$50 + 0{,}75(h - 150)$ [kg]

a) Stosując każdą z metod oblicz prawidłową wagę dla osoby o wzroście 182 cm.

b) Czy dla każdego wzrostu, stojąc metodę Lorenza oraz metodę Towarzystwa Ubezpieczeniowego otrzymamy taką samą wartość prawidłowej wagi? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 5: Uzasadnij, że suma kolejnych czterech liczb naturalnych, z których najmniejszą jest liczba $n + 2$, jest liczbą parzystą.

Dział 7. Równania

Celem realizacji działu „Równania” jest kształcenie umiejętności:

- rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą,
- rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodami algebraicznymi: metodą podstawiania oraz metodą przeciwnych współczynników,
- zastosowania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań tekstowych

oraz

- pogłębianie umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych z zastosowaniem pełnej metodologii tej aktywności.

Na realizację działu przeznaczono łącznie 36 godzin (24 godziny na równania i 12 godzin na układy równań).

Uczniowie mieli do czynienia z równaniami pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz zadaniami z treścią w szkole podstawowej. Teraz będą pogłębiać i rozwijać umiejętności z tego zakresu. Zostaną też wprowadzone układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Zaproponowane aplety oraz skrypty zawierają dużo przykładów oraz materiału do ćwiczeń. Chciałabym zwrócić uwagę zwłaszcza na aplet *rownania02* zawierający animację ilustrującą podstawowe zasady rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, oraz aplety *rownania05* i *rownania06* zawierające bardzo dobre obrazowe wyjaśnienie schematu rozwiązywania zadań, których treść dotyczy dwóch momentów czasowych, oraz zadań dotyczących roztworów i stopów.

Właściwie niemal cała realizacja tego działu opiera się na ćwiczeniach, dlatego też nie proponujemy tutaj pracy badawczej uczniów w celu odkrywania nowej wiedzy dotyczącej rozwiązywania równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (temat znany częściowo ze szkoły podstawowej). Proponujemy natomiast poprzedzenie wprowadzenia metod rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi postawieniem problemu: „Jak rozwiązać taki (tu konkretny przykład) układ? Czy macie jakieś propozycje?". Być może burza mózgów poskutkuje odkryciem którejś z metod. Warto dać uczniom taką szansę.

Chciałybyśmy ponadto zwrócić uwagę na dwie sprawy:

1. Zasady rozwiązywania zadań tekstowych.

Każde zadanie tekstowe to pole twórczości ucznia. Różne typy zadań tekstowych wymagają stosowania do ich rozwiązania różnych metod i sposobów. Procesu rozwiązywania zadań nie można jednak ująć w schematy, reguły niezawodnie prowadzące do sukcesu. Wówczas rozwiązywanie zadań byłoby czynnością odtwórczą. Na każdym etapie powstaje nowa sytuacja i konieczność nowych decyzji. George Polya, znany dydaktyk węgierski uważa, że rozwiązywanie zadań tekstowych to wykonywanie pewnych operacji myślowych związanych ze stawianiem kolejnych pytań. Pytania te grupuje się w czterech ważnych fazach wykonywania czynności:

- Faza I: Zrozumienie zadania.

  Należy tu zdać sobie sprawę z tego, jaką wielkość mamy wyznaczyć, (czyli co jest niewiadome), jakie wielkości są dane oraz na ich podstawie ustalić związki między danymi i szukanymi. Jest to potrzebne do wprowadzenia odpowiednich oznaczeń i ustalenia działania bądź równania.

  W tej fazie uczeń powinien nie tylko zrozumieć zadanie, ale także chcieć je rozwiązać. Należy już na wstępie wywołać u niego pozytywne nastawienie. Zadanie powinno być odpowiednio dobrane, nie może być ani za trudne ani za łatwe. Musi być interesujące oraz mieć ciekawą interpretację. Należy zapoznać ucznia z jego treścią poprzez jeden z wymienionych poniżej sposobów lub ich kombinacje:

  - odczytanie głośne tekstu zadania,
  - samodzielne ciche czytanie przez ucznia,
  - utożsamianie postaci z zadania z uczniami danej klasy,
  - opowiadanie zadania,

- ilustrowanie zadania.

- Faza II: Plan rozwiązania zadania.

Plan mamy wtedy, gdy wiemy (przynajmniej w zarysie), jakich obliczeń lub konstrukcji musimy dokonać, aby otrzymać niewiadomą. W tej fazie powstają różne pomysły, które często oparte są na wcześniej rozwiązanych zadaniach.

- Faza III: Wykonanie planu.

Wykonując ustalony plan, sprawdza się każdy krok postępowania: czy jest on wystarczająco jasny i poprawny. Wynik, do którego powinno się dojść musi być oparty na ścisłym rozumowaniu.

Wykonanie planu to nic innego jak znalezienie sposobu rozwiązania i ostateczne rozwiązanie zadania. Należy przy tym starać się wykorzystać każdą okazję do wykrycia kilku różnych sposobów rozwiązania. Daje to większą gwarancję poprawności wyniku.

- Faza IV: Sprawdzenie wyniku.

Wykonanie planu doprowadza najczęściej do otrzymania wielkości poszukiwanej. Można więc sądzić, że wynik jest poprawny. Jednakże zawsze można zrobić błąd. Dlatego sprawdzenie wyniku jest bardzo wskazane. Powinno opierać się przede wszystkim na zdrowym rozsądku. Uczniowie otrzymują nieraz wręcz nieprawdopodobne wyniki i przechodzą nad tym do porządku dziennego. Często nie niepokoi ich, gdy w wyniku obliczeń otrzymują na przykład, że w klasie jest 25,5 uczniów.

Uczniowie po rozwiązaniu zadania powinni umieć odtworzyć wykonane przez siebie czynności, wymienić kolejność ich następowania, wskazać to, co robili niepotrzebnie, podać cel realizowania każdej czynności, porównać ze sobą różne sposoby rozwiązywania i wskazać najlepszy uzasadniając swój wybór.

Jak widać z powyższych zasad, rozwiązaniu zadania tekstowego powinno towarzyszyć dużo dyskusji, rozważań, myślenia twórczego i dywergencyjnego, którego wyniki powinny zostać zwerbalizowane na forum klasy. Uczniowie lubią wykonywać czynności manualne na ekranie (są przecież z pokolenia „cyfrowych tubylców” - klikają, przesuwają z zapałem i są w dużej mierze nastawieni na pojawienie się na ekranie szybkiego efektu swoich działań), ale nie zapominajmy, że rozwiązywanie równań, zadań i problemów matematycznych jest okazją do kształcenia również innych cennych umiejętności (analizowanie, stawianie hipotez, weryfikacja hipotez, dyskutowanie, argumentowanie), a to wymaga stosowania również metod innych niż praca z gotowym materiałem.

2. Modelowanie matematyczne

Podczas rozwiązywania zadań tekstowych mamy do czynienia z matematyzacją sytuacji praktycznych. Równania i układy równań obrazują jakąś zależność, zmienne oznaczają jakieś obiekty. Uczeń tworzy model matematyczny (czyli reprezentację badanego obiektu w postaci innej niż ta, w której występuje on w rzeczywistości) sytuacji pozamatematycznej. Warto więc pamiętać o etapach modelowania matematycznego, które są w wielu miejscach zbieżne z etapami rozwiązywania zadań tekstowych lub głębszych problemów (często interdyscyplinarnych):

- Sformułowanie problemu w kategoriach realistycznych (z użyciem języka potocznego) lub naukowych (z użyciem języka danej dziedziny wiedzy).
- Budowa modelu w języku matematyki:
- przyjęcie założeń upraszczających (idealizacja),
- nadanie nazw obiektom matematycznym reprezentującym obiekty rzeczywiste i ustalenie matematycznych zależności między nimi (konkretyzacja).
- Rozwiązanie problemu określonego matematycznie (algorytmizacja obliczeń).
- Wyrażenie rozwiązania w języku dziedziny, z której problem pochodzi.
- Weryfikacja rozwiązania, czyli ocena jego poprawności i empiryczna (doświadczalna lub na podstawie obserwacji otaczającej rzeczywistości) interpretacja wniosków.
- Modyfikacja modelu i ponowne rozwiązywanie problemu (powrót do budowania modelu), jeśli wynik weryfikacji jest nieakceptowalny.

Zauważmy, że ważnym elementem procesu modelowania matematycznego jest **krytyczne spojrzenie na wyniki własnej pracy** i **gotowość do ciągłego ulepszania modelu**, a więc swego rodzaju dążenie do doskonałości w tym, co robimy. Ma to również znaczenie wychowawcze.

Projekt: Od kiedy w historii ludzkości rozwiązuje się równania? Czy zawsze rozwiązywano je tak, jak my to robimy teraz?

RÓWNANIA

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Zapisz w postaci równania:

a) liczba 56 jest 2 razy większa niż x,

b) liczba o 5 mniejsza od x stanowi 60% liczby x.

Zad. 2: Sprawdź, czy liczba 3 spełnia równanie: $4x + 2 = 8x - (x - 1)$. Jeśli nie, to wyznacz liczbę, która je spełnia.

Zad. 3: Rozwiąż równania:

a) $\frac{1-5x}{3} = \frac{4x-3}{2}$ b) $3(y+6) - y = 2(y+9)$

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 1: Zapisz w postaci równania:

a) liczba 81 jest 3 razy mniejsza niż x ,

b) liczba o 12 większa od x stanowi 120% liczby x .

Zad. 2: Sprawdź, czy liczba 4 spełnia równanie: $2x + 7 = 12 - (3x - 2)$. Jeśli nie, to wyznacz liczbę, która je spełnia.

Zad. 3: Rozwiąż równania:

a) $\frac{6x-1}{4}=\frac{3-x}{3}$

b) $4(x+4)-2x=2(x+8)$

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Wyznacz a ze wzoru:

a) $s=\frac{a+b}{2}$ b) $V=5-6ab$ c) $D=\frac{px}{a}$

Zad. 2: Jacek za sześć lat będzie miał dwa razy więcej lat niż miał trzy lata temu. Ile lat ma Marek?

Zad. 3: Barszcz z pasztecikami kosztuje 24 zł. Paszteciki są dwa razy droższe niż barszcz. Ile kosztuje barszcz, a ile paszteciki?

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Wyznacz x ze wzoru:

a) $s=\frac{x+y}{3}$ b) $7-4xy=p$ c) $s=\frac{ab}{x}$

Zad. 2: Ala za dziesięć lat będzie miała dwa razy więcej lat niż miała dwa lata temu. Ile lat ma Ala?

Zad. 3: Grupa przyjaciół kupowała lody i gofry. Za wszystko razem zapłacono 50 zł, przy czym gofry kosztowały cztery razy więcej niż lody. Ile kosztowały lody, a ile gofry?

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Zapisz odpowiednie równanie:

Paczka chipsów kosztuje x złotych. Paczka orzeszków jest o 2 zł droższa od paczki chipsów. Trzy paczki chipsów kosztują tyle samo, co dwie paczki orzeszków.

Zad. 2: Rozwiązanie równania $3x-4=-5(2+x)$ jest liczbą:

A. nieujemną

B. całkowitą ujemną

C. mniejszą od 1

D. większą od 1

Zad. 3: Rozwiąż równania:

a) $6(3x-2)+5(1-3x)=7(x+2)-3(1-2x)$

b) $x-\frac{2x+3}{4}=\frac{3-x}{2}$

Zad. 4: Z równości $\frac{4}{x+2}=\frac{6}{x}$ wynika, że:

A. $4(x+2)=6x$

B. $4\cdot 6=x(x+2)$

C. $6x + 2 = 4x$ D. $6x + 12 = 4x$

Zad. 5: Obwód trójkąta wynosi 24 cm. Jeden bok trójkąta jest o 2 cm dłuższy od podstawy, drugi - krótszy o 2 cm od podstawy. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zad. 6: Ile wody trzeba dolać do 15 kg czteroprocentowego roztworu, aby otrzymać roztwór trzyprocentowy?

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Zapisz odpowiednie równanie:

Cyrkiel kosztuje *x* złotych. Ekierka jest o 2 zł tańsza od cyrkla. Cztery ekierki kosztują tyle samo, co dwa cyrkle.

Zad. 2: Rozwiązanie równania $4(2x + 3) = -5x + 7$ jest liczbą:

A. nieujemną

C. mniejszą od 1

B. całkowitą ujemną

D. większą od 1

Zad. 3: Rozwiąż równania:

a) $3(x + 3) = 2(x + 4) + 2x + 10$

b) $2x - \frac{x-5}{2} = 2 + \frac{2x-1}{3}$

Zad. 4: Z równości $\frac{4}{x+2} = \frac{6}{x}$ wynika, że:

A. $4(x + 2) = 6x$

C. $6x + 2 = 4x$

B. $4 \cdot 6 = x(x + 2)$

D. $6x + 12 = 4x$

Zad. 5: Obwód trójkąta wynosi 33 cm. Długości jego boków są wyrażone przez trzy kolejne liczby naturalne. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Zad. 6: Ile wody trzeba dolać do 20 kg trzyprocentowego roztworu, aby otrzymać roztwór dwuprocentowy?

<u>UKŁADY RÓWNAŃ</u>

<u>Kartkówka grupa A</u>

Zad. 1: Zapisz odpowiedni układ równań:

a) Liczba x jest o 5 większa od liczby y. Suma liczb x i y wynosi 17.

b) Ojciec jest trzykrotnie starszy od córki. Za trzynaście lat ojciec będzie już tylko dwukrotnie starszy od córki.

Zad. 2: Rozwiąż poniższy układ równań stosując metodę podstawiania.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2(x+1) + 3(y-2) = 2y \end{cases}$$

Zad. 3: Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ stosując metodę przeciwnych współczynników.

<u>Kartkówka Grupa B</u>

Zad. 1: Zapisz odpowiedni układ równań:

a) Podwojona liczba *x* jest o 3 mniejsza od liczby y. Różnica liczb x i y wynosi 20.

b) Mama jest dwukrotnie starsza od córki. Dwadzieścia lat temu mama była siedem razy starsza od córki.

Zad. 2: Rozwiąż poniższy układ równań stosując metodę podstawiania.

$$\begin{cases} 3(x-2y) - (2y+x) = 16 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Zad. 3: Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ stosując metodę przeciwnych współczynników.

<u>Praca kontrolna Grupa A</u>

Zad. 1: Połącz strzałką układ równań z odpowiednią nazwą.

$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$		Układ oznaczony
$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$		Układ nieoznaczony
$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$		Układ sprzeczny

Zad. 2: Rozwiąż poniższe układy równań - układ A stosując metodę podstawiania, układ B - stosując metodę przeciwnych współczynników.

A) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2(x+y) - 3(2x-y) = 1 \\ \frac{x-y}{2} + \frac{2x-y}{3} = 1 \end{cases}$

Zad. 3: Paweł i Gaweł zbierają karty piłkarskie. Paweł ma o 30 kart więcej od Gawła. Razem mają 350 kart. Ile kart piłkarskich ma Paweł, a ile Gaweł?

Zad. 4: Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań:

Suma liczby x i 15% liczby y równa jest 60. Różnica liczby x i 25% liczby y równa się 40.

Zad. 5: Należy uzyskać 120 l alkoholu 60% mając do dyspozycji alkohol 40% i 70%. Ile alkoholu każdego rodzaju należy zmieszać?

Praca kontrolna Grupa B

Zad. 1: Określ, jaki jest każdy z poniższych układów: oznaczony, oznaczony czy sprzeczny:

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y - 3x = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 9x - 7y = 25 \end{cases}$

Zad. 2: Rozwiąż poniższe układy równań - układ A stosując metodę podstawiania, układ B - stosując metodę przeciwnych współczynników.

A) $\begin{cases} 6x - 2 = 5(2x - y) - 6 \\ 4(x + y - 20) = 8 \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{4y-1}{10} = \frac{3x+5,5}{5} \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$

Zad. 3: Marek i Piotr zbierają znaczki pocztowe. Marek ma o 20 znaczków mniej od Piotra. Razem mają 230 znaczków. Ile znaczków ma Marek, a ile Piotr?

Zad. 4: Ułóż i rozwiąż odpowiedni układ równań:

Suma liczby *x* i 25% liczby y równa jest 52. Różnica liczby *x* i 35% liczby *y* równa się 40.

Zad. 5: Należy uzyskać 150 l alkoholu 60% mając do dyspozycji alkohol 50% i 70%. Ile alkoholu każdego rodzaju należy zmieszać?

Dział 8. Wykresy funkcji

Celem realizacji działu „Wykresy funkcji" jest wprowadzenie uczniów w tematykę funkcji i ich własności bez dokładnego omawiania poszczególnych rodzajów funkcji.

Na realizację działu przeznaczono 13 godzin.

W skrypcie oraz scenariuszach lekcji z omawianego działu przewidziano wiele dyskusji z uczniami na temat wprowadzanych pojęć. W apletach umieszczone zostały przyciski "Odkryj sam", których samo istnienie zachęca do samodzielnego konstruowania wiedzy przez uczniów.

Realizacja działu „Wykresy funkcji" jest dobrą okazją do samodzielnego posługiwania się przez uczniów algebraicznym modułem programu GeoGebra. Moduł ten umożliwia sporządzanie wykresów funkcji na podstawie wprowadzonego wzoru. W gimnazjum wprowadza się opisywanie funkcji różnymi sposobami, w tym również przy pomocy wzoru. Dlatego też warto pozwolić uczniom samodzielnie tworzyć wykresy funkcji, najpierw o wzorach podanych (najprostszych typu $f(x) = 1,5x$, $f(x) = x^2$, ale też o wzorach zaproponowanych przez uczniów, choćby wzory te były dziwne z naszego, nauczycielskiego punktu widzenia. Oczywiście warunkiem powodzenia takiej działalności jest dobre opanowanie przez uczniów pojęcia argumentu i wartości funkcji (czy też, w innej nomenklaturze, zmiennej niezależnej i zmiennej zależnej). Aby taka twórczość uczniowska nie była tylko zabawą, proponujemy odczytywanie z utworzonego wykresu własności utworzonej funkcji oraz dyskusję na temat: czy istnieje zjawisko realne, którego ilustracją mogłaby być zaproponowana przez ucznia funkcja?

Proponujemy również sporządzanie wykresów funkcji opisanych w postaci tabeli. Warto wykorzystać Widok Arkusza, wypełnić jedną kolumnę argumentami funkcji, drugą wartościami, zaznaczyć wypełnione komórki i skorzystać z opcji „Utwórz listę punktów", jeśli chcemy otrzymać wykres w postaci izolowanych punktów, lub „Utwórz łamaną", jeżeli chcemy otrzymać wykres ciągły. Wiele zjawisk i procesów bliskich uczniom opisujemy w postaci funkcji zadanej tabelą; można przytoczyć chociażby zmiany temperatury w pewnych okresach czasu, zmiany poziomu sprzedaży towarów w poszczególnych dniach itp. Pytania o własności funkcji mogą w takich sytuacjach nie być sformułowane standardowo (np.: odczytaj miejsce zerowe funkcji; dla jakich argumentów funkcja jest rosnąca?), ale dostosowane do opisywanej sytuacji. Można też zachęcać uczniów do rozwiązywania problemów w oparciu o odczytane własności funkcji.

Poniżej podane są przykłady takich zadań o zróżnicowanym stopniu złożoności.

Przykład 1.

Poniższa tabela przedstawia zmiany temperatury powietrza w ciągu dnia:

godz.	0	1	3	4	8	12	15	18	21	24
temp. (°C)	-4	-4	-4	-4	-2	2	3	1	-3	-3

Sporządź wykres i odczytaj:

- O której godzinie temperatura była najwyższa, o której najniższa?
- W jakim czasie temperatura wzrastała, w jakim obniżała się?
- Jaka była różnica temperatur między godziną 15 a 22?
- W których godzinach temperatura była ujemna, w których dodatnia?
- W których godzinach temperatura była równa 0 ^{o}C?

Przykład 2.

Baseny kąpielowe z włókna szklanego w kształcie koła są dostępne w sprzedaży w różnych rozmiarach. Ich ceny podaje tabelka:

średnica (m)	4	5	6	8	10
cena (zł)	300	450	630	1080	1650

- Zaproponuj cenę dla basenu o średnicy 7 m.
- Czy koszt wzrasta równomiernie ze wzrostem średnicy?
- Czy zauważasz jakąś regularność?

- Czy myślisz, że wzrost ceny jest usprawiedliwiony przez ilość materiału zużytego do produkcji basenów?

Przykład 3.

Spadochroniarz po wyskoczeniu z samolotu przez pewien czas spadał swobodnie, a dopiero potem otworzył spadochron. Film dostarczył następujących danych o tym spadaniu:

czas spa-dania (s)	0	0,5	1	1.5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
spadek wysokości (m)	0	1	4	9	16	25	36	42	46	49	52	55

Sporządź wykres i odczytaj:

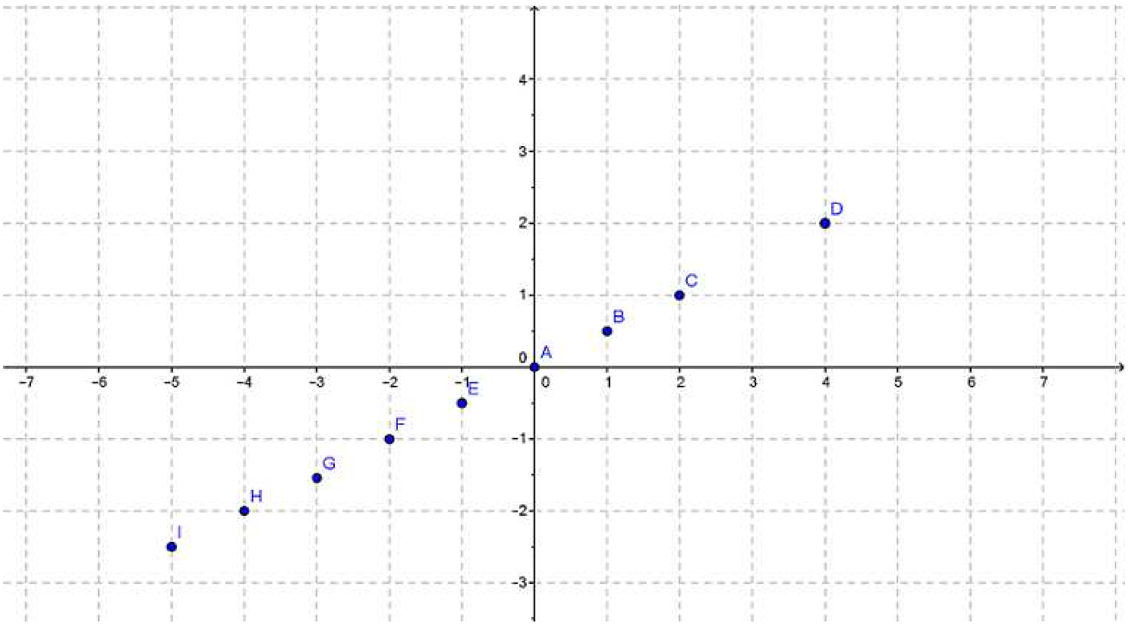
- Kiedy w przybliżeniu spadochroniarz otworzył spadochron?
- Jakie oszacowanie mógłbyś podać dla maksymalnej prędkości spadania w dół (w m/s)?

Takie aktywności uczniowskie sprzyjają kształceniu elastyczności myślenia, myślenia dywergencyjnego i twórczego.

Projekt: Kiedy zostało wprowadzone i jak rozwijało się pojęcie funkcji?

Kartkówka Grupa A

Zad. 1: W układzie współrzędnych sporządzono wykres pewnego przyporządkowania.



a) Czy powyższy wykres jest wykresem funkcji? Dlaczego?

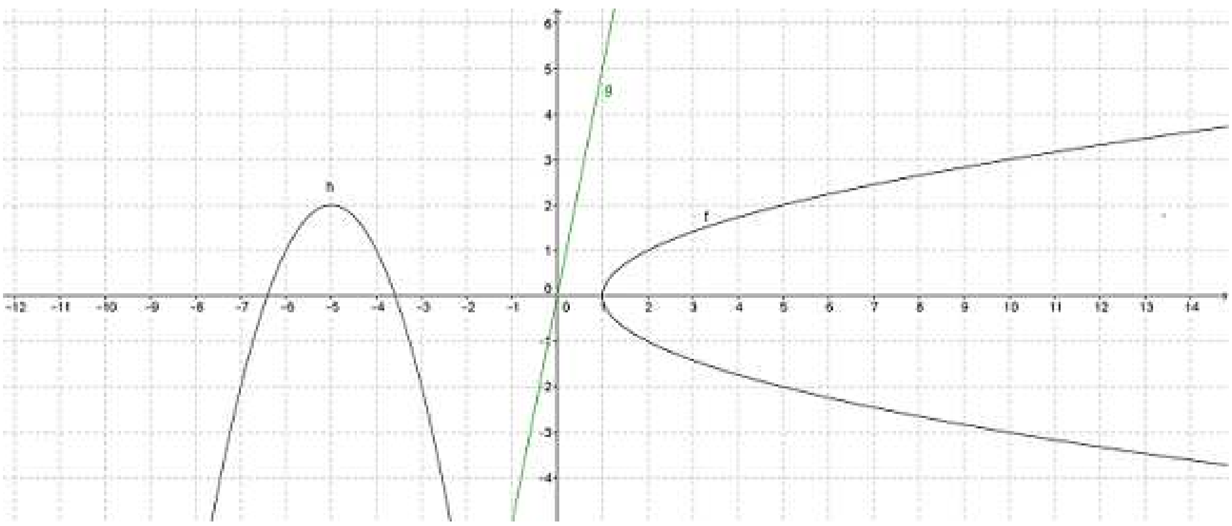
b) Korzystając z wykresu, przedstaw przyporządkowanie za pomocą tabelki:

x									
y									

c) Podaj opis słowny tego przyporządkowania.

d) Podaj wzór opisujący to przyporządkowanie.

Zad. 2: W jednym układzie współrzędnych sporządzono wykresy trzech różnych przyporządkowań: f, g, h. Dla każdego przyporządkowania określ, czy jest ono funkcją, czy nie i objaśnij dlaczego tak sądzisz.



Zad. 3:

Dana jest funkcja f określona wzorem: $f(x) = -3x$, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych opisanych nierównościami: $-3 < x \leq 4$.

a) Naszkicuj wykres tej funkcji.

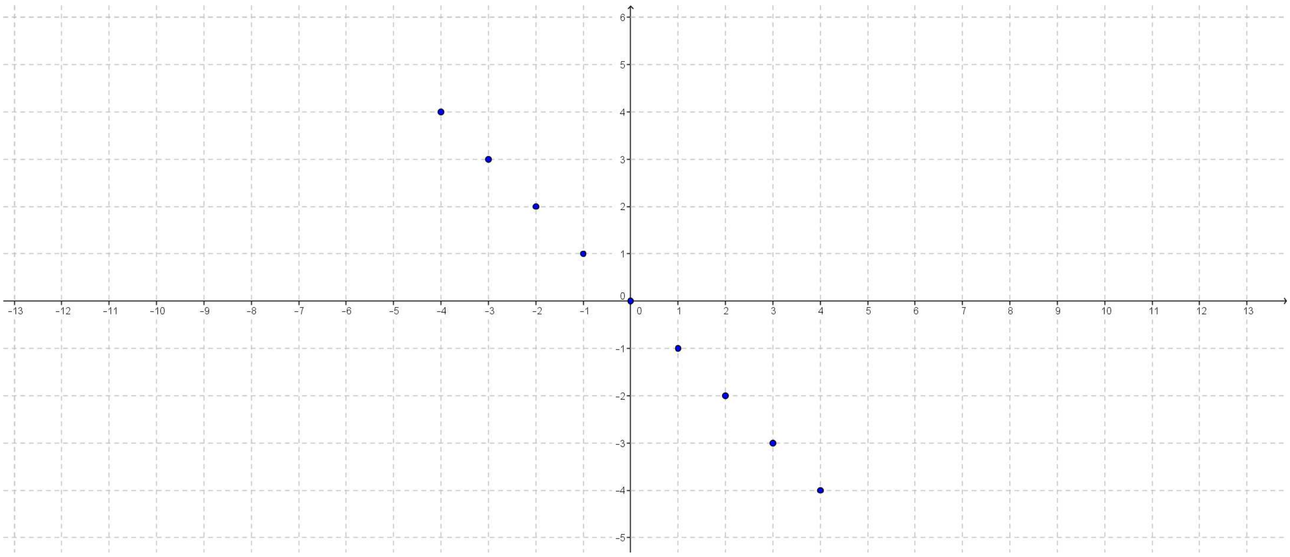
b) Określ zbiór wartości tej funkcji?

c) Jaką wartość przyjmuje funkcja f dla argumentu $x = 3{,}5$?

d)Dla jakiego argumentu funkcja f przyjmuje wartość 6?

<u>Kartkówka Grupa B</u>

Zad. 1: W układzie współrzędnych sporządzono wykres pewnego przyporządkowania.



a) Czy powyższy wykres jest wykresem funkcji? Dlaczego?

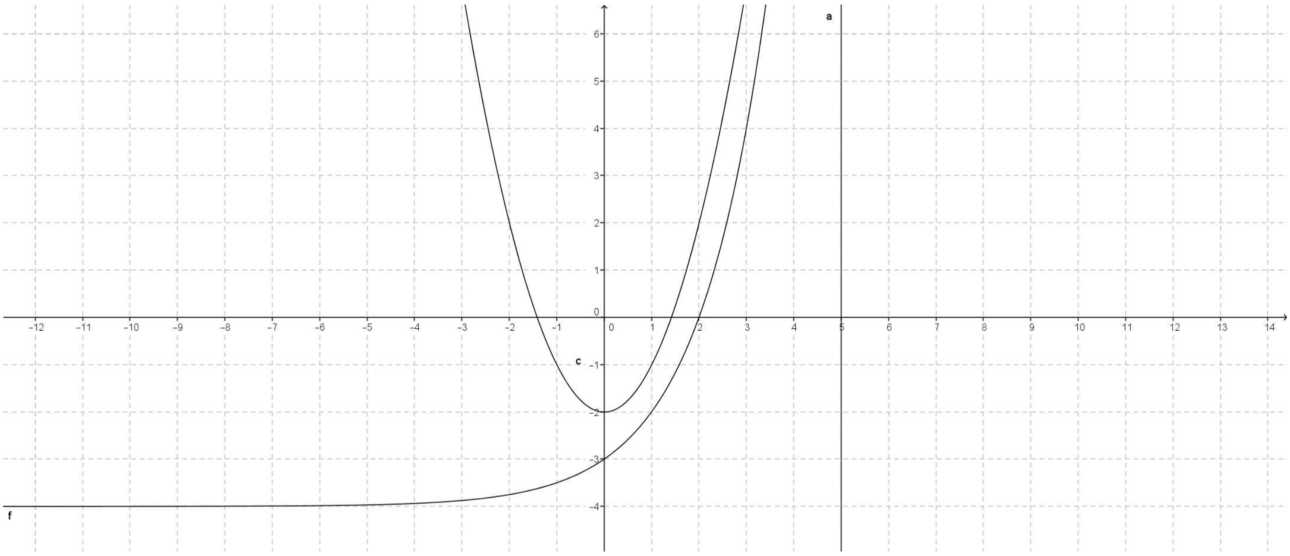
b) Korzystając z wykresu, przedstaw przyporządkowanie za pomocą tabelki:

x									
y									

c) Podaj opis słowny tego przyporządkowania.

d) Podaj wzór opisujący to przyporządkowanie.

Zad. 2: W jednym układzie współrzędnych sporządzono wykresy trzech różnych przyporządkowań. Oznacz te wykresy i określ, który z nich obrazuje funkcję, a który nie i objaśnij dlaczego tak sądzisz.



Zad. 3:

Dana jest funkcja f określona wzorem: *f*(*x*) = 2*x* , której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych opisanych nierównościami: $-3 < x \leq 4$.

a) Naszkicuj wykres tej funkcji.

b) Określ zbiór wartości tej funkcji?

c) Jaką wartość przyjmuje funkcja f dla argumentu *x* = -2,5 ?

d) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość -2?

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Pięciu członkom pewnej rodziny zmierzono temperatury ich ciał. Wyniki tych pomiarów podaje poniższa tabelka.

Cz łonek rodziny	Michał	Jolant a	Adam	Tomek	Kacper
Temperatura ciała	35,8	36,5	36,9	36,5	36,4

Czy tabelka ta określa funkcję? Jeśli tak, to wskaż jej zbiór argumentów i wartości.

Zad. 2: Poniżej podano opisy dwóch przyporządkowań. Zbadaj, które z nich określa funkcję, a które określa przyporządkowanie niebędące funkcją. Odpowiedź uzasadnij.

1. Każdej mamie przyporządkowujemy jej dziecko.

2. Każdemu dziecku przyporządkowujemy jego mamę.

Zad. 3: Każdej liczbie naturalnej większej od zera i mniejszej od 11 przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.

a) Sporządź tabelkę i narysuj wykres tej funkcji.

b) Określ dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji.

c) Jaką wartość największą, a jaką najmniejszą przyjmuje ta funkcja i dla jakich argumentów?

Zad. 4: Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ dla $x \in$ R, a następnie:

a) podaj dziedzinę funkcji f,

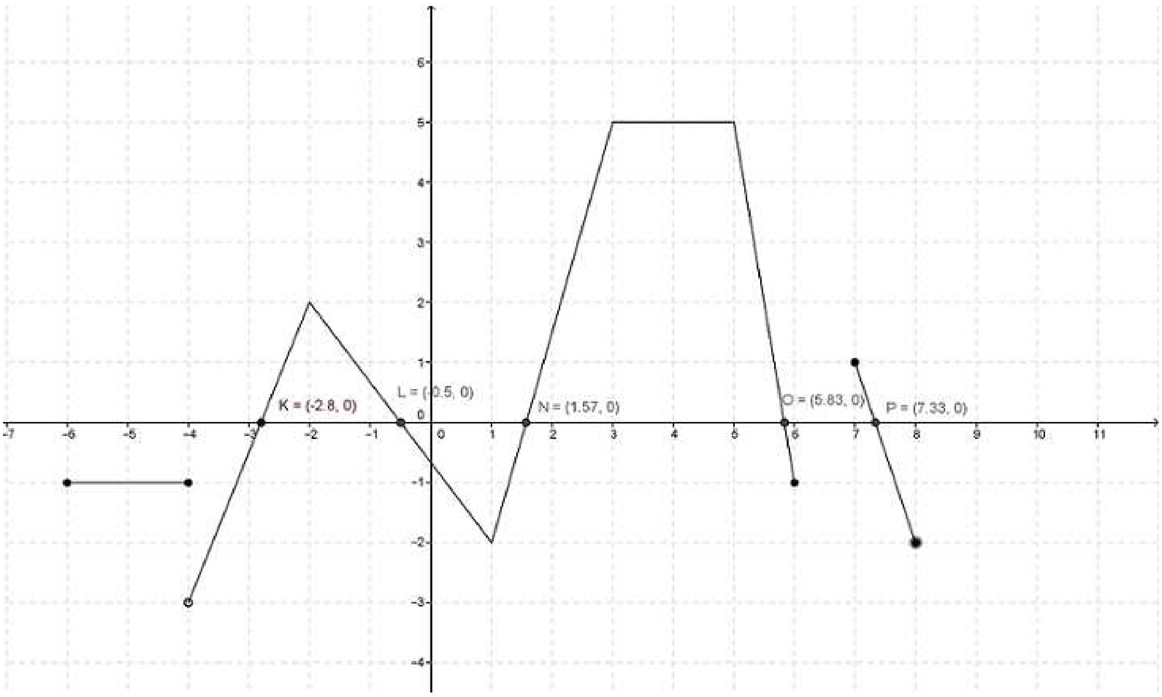
b) podaj zbiór wartości funkcji f,

c) podaj miejsca zerowe funkcji f,

d) podaj punkty przecięcia się wykresu funkcji z osiami OX i OY,

d) zbadaj monotoniczność funkcji.

Zad. 5: Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji g.



a) Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji,

b) Zbadaj monotoniczność funkcji,

c) Odczytaj z wykresu: $g(-5)$, $g(-4)$, $g(-0,5)$, $g(4)$.

d) Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 5.

e) Podaj miejsca zerowe funkcji.

f) Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji.

g) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

h) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości niedodatnie?

Zad. 6: Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych spełniających zależność $-5 \le x < 6$, wiedząc, że:

-- przeciwdziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność

$-4 \le x \le 5$,

-- miejscami zerowymi funkcji są liczby: -4; -1; 2,

-- funkcja jest rosnąca w przedziałach: $-5 \le x \le -2$, $0 \le x \le 5$, a malejąca w przedziałach: $-2 \le x \le 0$, $5 \le x < 6$,

-- wykres funkcji przecina oś OY w punkcie $(0,-4)$.

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Pięciu uczniów zapytano o liczbę rodzeństwa. Odpowiedzi podaje poniższa tabelka.

Uczeń	Michał	Jola	Adam	Tomek	Kacper
Liczba rodzeństwa	2	1	3	0	1

Czy tabelka ta określa funkcję? Jeśli tak, to wskaż jej zbiór argumentów i wartości.

Zad. 2: Poniżej podano opisy dwóch przyporządkowań. Zbadaj, które z nich określa funkcję, a które określa przyporządkowanie niebędące funkcją. Odpowiedź uzasadnij.

1. Każdemu nauczycielowi matematyki przyporządkowujemy klasę, którą uczy.

2. Każdej klasie przyporządkowujemy nauczyciela, który uczy w niej matematyki.

Zad. 3: Każdej liczbie naturalnej większej od 5 i mniejszej od 16 przyporządkowujemy liczbę jej dzielników.

a) Sporządź tabelkę i narysuj wykres tej funkcji.

b) Określ dziedzinę i przeciwdziedzinę tej funkcji.

c) Jaką wartość największą, a jaką najmniejszą przyjmuje ta funkcja i dla jakich argumentów?

Zad. 4: Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - 2, dla\ x \epsilon R$, a następnie:

a) podaj dziedzinę funkcji *f*,

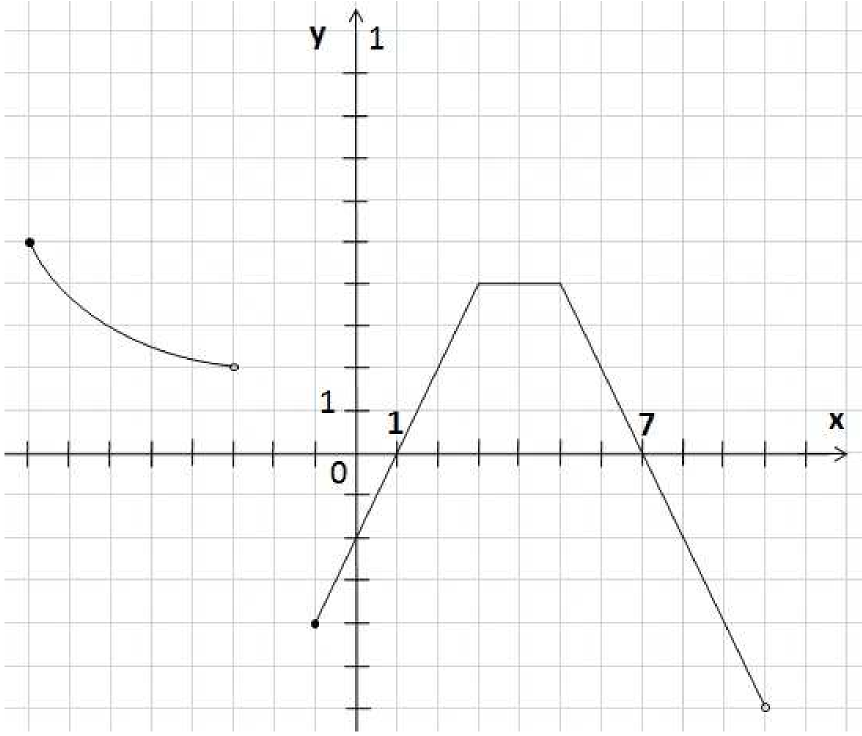
b) podaj zbiór wartości funkcji *f*,

c) podaj miejsca zerowe funkcji *f*,

d) podaj punkty przecięcia się wykresu funkcji z osiami *OX* i *OY*,

d) zbadaj monotoniczność funkcji *f*.

Zad. 5: Na poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji *g*.



a) Podaj dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji,

b) Zbadaj monotoniczność funkcji,

c) Odczytaj z wykresu: *g*(-8), *g*(4).

d) Odczytaj z wykresu, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 2.

e) Podaj miejsca zerowe funkcji.

f) Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji.

g) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?

h) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości niedodatnie?

Zad. 6: Naszkicuj wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych spełniających zależność $-5 \leq x < 6$, wiedząc, że:

-- przeciwdziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych spełniających nierówność

$-4 \leq x \leq 5$,

-- miejscami zerowymi funkcji są liczby: $-4;\ -1;\ 2$,

-- funkcja jest rosnąca w przedziałach: $-5 \leq x \leq -2$, $0 \leq x \leq 5$, a malejąca w przedziałach: $-2 \leq x \leq 0$, $5 \leq x < 6$,

-- wykres funkcji przecina oś OY w punkcie (0, -4).

Dział 9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Celem realizacji tego działu jest wprowadzenie wielu pojęć z zakresu statystyki opisowej oraz podstawowych pojęć z rachunku prawdopodobieństwa. Celem jest też kształcenie umiejętności posługiwania się tymi pojęciami w sytuacjach teoretycznych i praktycznych.

Na realizację działu przeznaczono 14 godzin.

Uczniowie już w szkole podstawowej zetknęli się z zagadnieniami gromadzenia, porządkowania danych oraz obrazowania danych różnymi sposobami. Teraz poznają podstawowe pojęcia statystyki opisowej, które pozwolą im analizować dane i budować na tej podstawie wiedzę o badanych zjawiskach.

Zaproponowane aplety zawierają zróżnicowany materiał: od definicji wyświetlanych w postaci tekstów do przykładów i zadań ilustrowanych również graficznie. Ze środków multimedialnych oprócz apletów zaproponowano wykorzystanie materiałów z portalu Scholaris.

Statystyka otacza nas. W środkach masowego przekazu bardzo często słyszymy bądź czytamy komentarze do otaczających nas zjawisk lub zachodzących zdarzeń nawiązujące do pojęć statystycznych. Prawdopodobnie więc pojęcia, które będą w tym dziale wprowadzane, nie są dla ucznia nowe – przynajmniej niektóre, jak średnia czy częstość. Należy również spodziewać się, że pojęcie prawdopodobieństwa nie jest uczniom obce, przynajmniej w sensie intuicyjnym. Często przecież używamy w mowie potocznej słowa „prawdopodobnie" (patrz chociażby ten akapit) i wszyscy dobrze wiedzą, jak je w różnych kontekstach rozumieć.

W tej sytuacji proponujemy zaczynanie poszczególnych lekcji od dyskusji nawiązujących do różnych aspektów statystyki w sytuacjach uczniom znanych. Proponujemy również samodzielne wyszukiwanie przez uczniów w różnych źródłach definicji pojęć, o których chcemy na lekcjach mówić. Mogłoby to wyglądać na przykład tak: dyskutujemy z uczniami o potocznym rozumieniu pojęć takich jak średnia, rozstęp czy częstość, pytamy, czy może słyszeli pojęcie mediana lub moda (ciekawe, jakie będą mieli skojarzenia), a następnie przygotowani uczniowie (dwie, trzy osoby) w formie minireferatu przedstawiają definicje poparte przykładami. Wówczas wyświetlenie definicji po kliknięciu odpowiedniego pola wyboru w aplecie będzie służyło utrwaleniu wiadomości, z którymi uczniowie zetknęli się w sposób bardziej „żywy".

Użycie podobnej strategii proponujemy też podczas wprowadzania pojęć: doświadczenie losowe, zdarzenie losowe, zdarzenie elementarne, zdarzenie sprzyjające, przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Proponujemy również zorganizowanie takich sytuacji dydaktycznych, w których uczniowie wykonywaliby czynności inne niż klikanie w pola wyboru w apletach lub wypełnianie w nich pustych pól poprzedzone wykonaniem obliczeń. Proponujemy następujące aktywności uczniów:

- samodzielne przygotowanie badania statystycznego: określenie problemu badawczego (interesującego uczniów), określenie próby badawczej, przygotowanie narzędzia badawczego (ankiety),
- przeprowadzenie badania, co będzie skutkowało pozyskaniem danych,
- uporządkowanie tych (autentycznych) danych, pogrupowanie (jeśli jest to potrzebne), przedstawienie tabelaryczne,
- przedstawienie wyników badania za pomocą różnego rodzaju diagramów (dobranych odpowiednio do specyfiki przedstawianych danych),
- obliczenie podstawowych statystyk liczbowych (w zakresie wprowadzanym w gimnazjum),
- wyciągnięcie wniosków dotyczących charakterystyki badanego zjawiska.

Proponujemy, aby uczniowie wykonywali jak najwięcej różnych diagramów samodzielnie w zeszytach, ponieważ patrzenie wyłącznie na gotowe diagramy wykonane przez komputer nie pozwoli na wykształcenie umiejętności ich sporządzania. Niestety, polecenie „zmień dane i utwórz swój własny wykres” użyte w jednym z apletów, jest mylące co do efektów jego wykonywania, ponieważ uczeń zmieni dane, ale wykres wykona za niego komputer, więc to komputer umie sporządzić wykres, nie zaś uczeń.

Gdy uczniowie umieją już obliczać podstawowe statystyki (średnią, modę, medianę, rozstęp, częstość), uczmy ich wnioskowania o charakterze badanego zjawiska na podstawie obliczonych statystyk. Uczmy, że obliczenie tylko jednej z wymienionych wielkości niewiele nam mówi o danej próbie. Uczmy, jak te statystyki wzajemnie się dopełniają i jak na podstawie interpretacji kilku z nich można tworzyć wiedzę o badanym zjawisku. Za przykład niech posłuży następujący

Problem:

Zarobki pracownika powyżej średniej krajowej uznaje się jako dobre. W pewnym miesiącu pewnego roku przeciętne wynagrodzenie w Polsce było równe 2096 zł. Za pracę w tym miesiącu tego roku pracownicy pewnej małej firmy mieli wynagrodzenia: 1280 zł, 1280 zł, 1400 zł, 1523 zł, 1523 zł, 1523 zł, 1400 zł, 1600 zł, 1600 zł, 4200 zł, 6150 zł.

Szef firmy twierdzi, że pracownicy w jego firmie zarabiają dobrze. Czy ma rację?

Obliczmy kilka podstawowych statystyk:

Zmienna	płace
Liczebność	11
Średnia	2134,5
Mediana	1523
Moda	1523

Wartość minimalna	1280
Wartość maksymalna	6150

Obliczone statystyki mogą już być pewną wskazówką do wnioskowania, ale można też uzyskać o danych inne informacje, które pozwolą na bardziej wnikliwą analizę problemu.

Sporządźmy dodatkowo tabelę zawierającą dane pogrupowane w klasach o równej szerokości.

płace	liczebność	%
1000 - 1999	9	81,82
2000 - 2999	0	0,00
3000 - 3999	0	0,00
4000 - 4999	1	9,09
5000 - 5999	0	0,00
6000 - 6999	1	9,09
Ogółem	11	100%

Na podstawie informacji zawartych w obu tabelach możemy wysnuć następujące

wnioski:

- **Średnia płaca w zakładzie jest wyższa od średniej krajowej**. Można byłoby więc wnioskować, że pracownicy tego zakładu zarabiają dobrze. Pamiętajmy jednak, że **w statystyce nie należy dokonywać pochopnych wnioskowań na podstawie jednej tylko wielkości liczbowej charakteryzującej dane empiryczne**.
- Moda – w dość znacznym stopniu niższa od średniej płacy - wskazuje, że **najczęściej pojawiająca się płaca jest niższa od średniej**.
- Mediana – również niższa od średniej - wskazuje, że **co najmniej połowa pracowników zarabia poniżej średniej**.
- Analiza tablicy liczebności pozwala stwierdzić, **że 81,82% pracowników zarabia poniżej średniej.**

Wniosek ogólny:

Szef firmy nie ma racji twierdząc, że jego pracownicy dobrze zarabiają.

Przytoczony przykład pokazuje, jak przy rozwiązywaniu prostych problemów można uczyć uczniów wnikliwości i unikania pochopnych sądów. Do tego właśnie służy (między innymi) statystyka.

Można też na początku realizacji działu wprowadzić uczniów w zagadnienia statystyczne w sposób bardziej systematyczny i naukowy, na przykład podając informację, że:

Statystyka to dział matematyki, który zajmuje się **wnioskowaniem statystycznym**, czyli **formułowaniem i weryfikowaniem wniosków ogólnych** (**hipotez statystycznych**) **na podstawie skończonej liczby wyników obserwacji losowych.**

Prowadząc badania statystyczne pewnej zbiorowości (**populacji**), wybieramy reprezentatywną jej grupę zwaną **próbą**. Próbę poddajemy bezpośrednim badaniom, a wyniki uogólniamy na całą populację.

Badane zjawisko nazywamy **cechą statystyczną** (można też używać nazwy „zmienna” – jest ona powszechnie używana w oprogramowaniu z zakresu statystyki), a wyniki badania przeprowadzonego na próbie – **wartościami cechy**.

Wiarygodność takich badań w dużej mierze zależy od wyboru próby.

Statystyka dzieli się na dwa główne działy:

- **statystykę opisową**, która zajmuje się opracowywaniem, przedstawianiem w różnych formach i analizowaniem wyników badań prowadzonych na próbie losowej oraz
- **statystykę matematyczną**, która zajmuje się wnioskowaniem o rozkładzie wartości cechy w całej populacji na podstawie wyników badania próby.

Uzyskane w trakcie badania próby wyniki można przedstawiać w różnych formach graficznych (**tabele, różnorodne diagramy**) oraz dokonywać ich analizy przy pomocy tzw. **statystyk liczbowych**.

Sposób wprowadzenia uczniów w zagadnienia statystyczne zależy od nauczyciela i specyfiki danej klasy. Z niektórymi klasami można rozmawiać bardziej „naukowo”, z niektórymi bardziej „potocznie”. Ważne jest, aby w trakcie realizacji działu uczniowie wykonywali dużo różnorodnych czynności pozwalających odnieść statystykę do zagadnień im bliskich, nie zaś tylko zadań o charakterze pseudo-praktycznym.

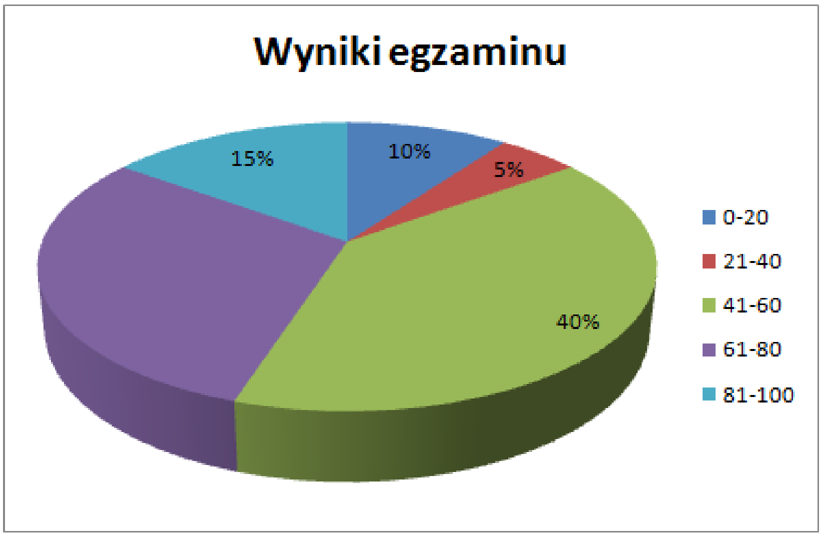
Statystyka opisowa i rachunek prawdopodobieństwa to bardzo dobre zagadnienia do opracowywania tematyki długoterminowych prac projektowych. Zamiast przygotowywania i prowadzenia typowych badań statystycznych (każdy uczeń może sam sobie sformułować taki problem) proponujemy następujące tematy, może odpowiednie raczej dla osób interesujących się bardziej dogłębnie matematyką i jej historią:

- Co to jest rozkład normalny? Czy w życiu codziennym mamy do czynienia z rozkładem normalnym?

- Początki rachunku prawdopodobieństwa.

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Diagram kołowy przedstawia wyniki egzaminu 150 uczniów pewnej szkoły.



a) Ile procent uczniów zdobyło od 61 do 80 punktów?

b) Ile procent uczniów zdobyło ponad 60 punktów?

c) Ile uczniów zdobyło mniej niż 21 punktów?

Zad. 2: Karolina przeprowadziła ankietę wśród 20 losowo wybranych uczniów swojej szkoły. Ankietowani odpowiadali na pytanie: "Ile masz rodzeństwa?". Karolina otrzymała kolejno następujące odpowiedzi: 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 0, 3, 0, 1, 1, 1, 4, 0, 0. Przedstaw te wyniki na diagramie słupkowym.

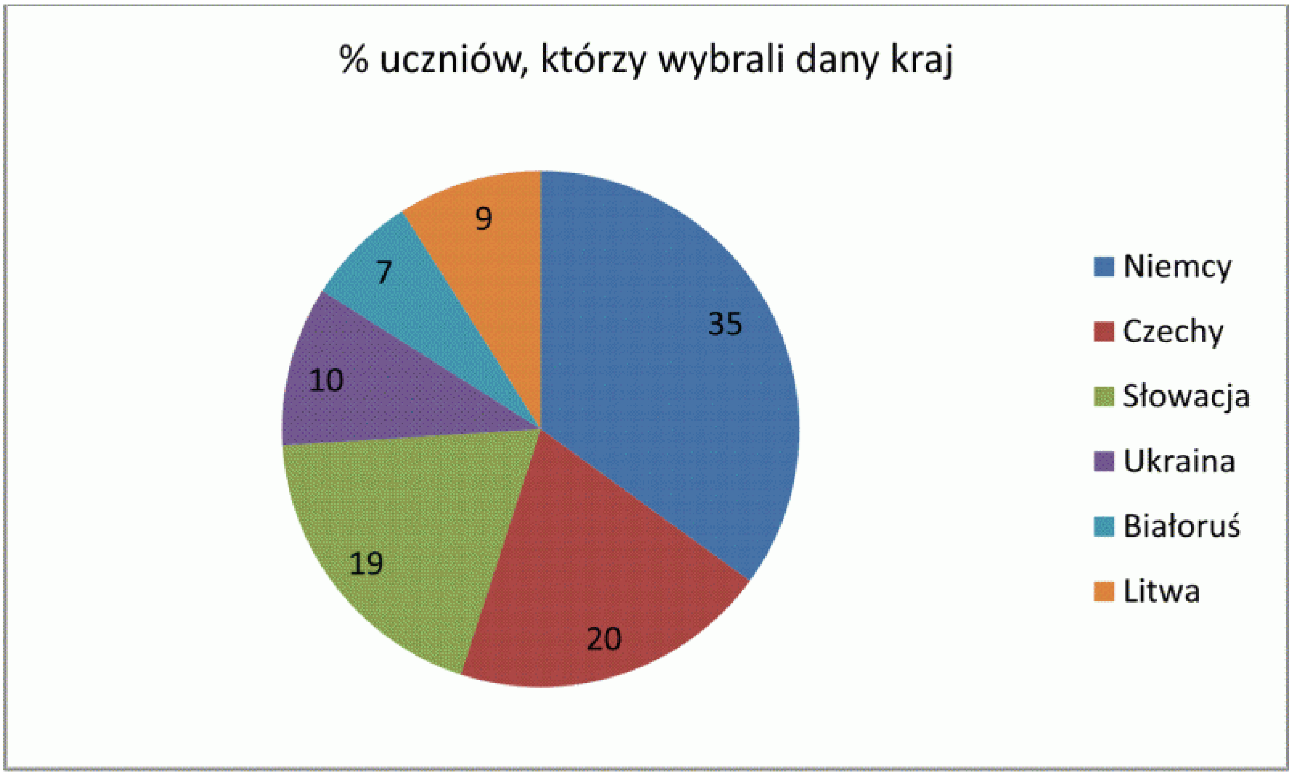
Zad. 3: W tabeli podano oceny z matematyki pewnej klasy.

Ocena	Liczba ocen
niedostateczny	1
dopuszczający	3
dostateczny	12
dobry	10
bardzo dobry	2
celujący	0

Oblicz średnią ocen z matematyki w tej klasie, ich medianę i modę.

<u>Kartkówka 1 Grupa B</u>

Zad. 1: 200 uczniów z pewnej szkoły zapytano, który kraj spośród sąsiadujących z Polską chcieliby odwiedzić. Diagram kołowy przedstawia wyniki tego badania.



a) Ilu uczniów wybrało Słowację?

b) Ile procent uczniów wybrało Ukrainę lub Białoruś?

c) Ilu uczniów wybrało kraje, które mają dostęp do Bałtyku?

Zad. 2: **P**rzeprowadzono sondaż na próbie 20 uczniów szkoły. Każdy z nich odpowiadał na pytanie: „Ile książek przeczytałeś w ciągu minionego miesiąca?” Oto odpowiedzi kolejnych uczniów: 5, 1, 2, 0, 5, 4, 4, 1, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 3, 1, 1, 2, 5, 4 . Przedstaw te wyniki na diagramie słupkowym.

Zad. 3: W tabeli podano oceny z matematyki pewnej klasy.

Ocena	Liczba ocen
niedostateczny	0
dopuszczający	4
dostateczny	12

dobry	9
bardzo dobry	3
celujący	2

Oblicz średnią ocen z matematyki w tej klasie, ich medianę i modę.

Kartkówka 2 grupa A

Zad. 1: Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką do gry. Dla tego doświadczenia podaj:

a) zbiór zdarzeń elementarnych,

b) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu jedynki lub szóstki,

c) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu mniej niż trzech oczek,

d) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu nie więcej niż dwóch oczek.

Zad. 2: Rzucasz dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na każdej monecie będzie ten sam wynik.

Zad. 3: W pojemniku jest 300 kul: 200 koloru zielonego i 100 koloru niebieskiego. Z pojemnika losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej? Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?

Kartkówka 2 Grupa B

Zad. 1: Doświadczenie losowe polega na rzucie sześcienną kostką do gry. Dla tego doświadczenia podaj:

a) zbiór zdarzeń elementarnych,

b) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu piątki lub szóstki,

c) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu więcej niż czterech oczek,

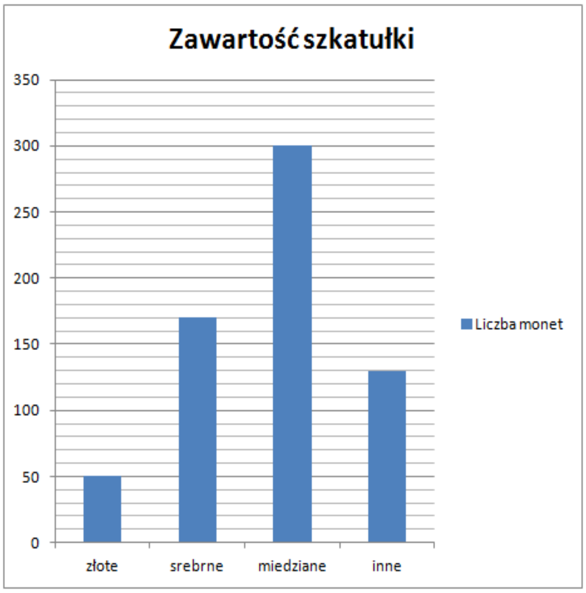
d) zbiór zdarzeń sprzyjających wyrzuceniu nie mniej niż trzech oczek.

Zad. 2: Rzucasz dwiema monetami. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na każdej z monet będzie inny wynik.

Zad. 3: W pojemniku jest 200 kartek z zapisanymi liczbami naturalnymi: 150 z liczbami parzystymi i 50 z liczbami nieparzystymi. Z pojemnika losujemy jedną kartkę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kartki z liczbą nieparzystą? Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kartki z liczbą ujemną?

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: W pewnej szkatułce znajdują się monety. Poniższy wykres słupkowy przedstawia pewne informacje o zwartości tej szkatułki. Przeanalizuj ten wykres, a następnie odpowiedz za zamieszczone obok wykresu pytania.



a) Ile monet jest w tej szkatułce?

b) O ile mniej jest monet złotych niż srebrnych?

c) Jaki procent wszystkich monet stanowią monety miedziane?

d) O ile procent więcej jest monet miedzianych niż złotych?

Zad. 2: W tabeli podano wynagrodzenie (w zł) poszczególnych pracowników pewnej firmy.

Pracownik	Wynagrodzenie
Adam Biały	1500
Bronisław Czarny	1800
Cezary Niebieski	3000
Dariusz Szary	2500
Ewa Zółty	2800
Jolanta Zielony	1500
Izabela Brązowy	1500
Jadwiga Fioletowy	2800

a) Który z pracowników zarabia najwięcej, a który najmniej?

b) Ilu pracowników otrzymuje wynagrodzenie wyższe od średniego wynagrodzenia w tej firmie?

c) Ile procent pracowników otrzymuje wynagrodzenie najniższe?

d) Oblicz medianę, modę i rozstęp płac w tej firmie.

e) Oblicz częstość wynagrodzenia w wysokości 2800zł.

Zad. 3: Rzucamy dwiema monetami.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na obu monetach wypadną reszki?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na co najmniej jednej z monet wypadnie orzeł?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na żadnej monecie nie wypadnie orzeł?

Zad. 4: Rzucamy sześcienną kostką do gry.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania 3 oczek?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy więcej niż 2 oczka?

Zad. 5: Rzucamy dziesięć razy monetą dwuzłotową. Wśród poniższych zadań wskaż prawdziwe.

A. Jeśli w pierwszych dwóch rzutach wypadła reszka, to w trzecim rzucie na pewno wypadnie orzeł.

B. W pierwszych pięciu rzutach przynajmniej raz wypadnie orzeł.

C. Może się zdarzyć, że wypadną same orły.

D. Wypadną same orły.

Zad. 6: W szufladzie jest 10 par skarpet, w tym tylko cztery pary skarpet koloru niebieskiego. Wyciągnięto już cztery skarpety, w tym 1 niebieską. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za piątą wyciągniętą skarpetą będzie skarpeta koloru niebieskiego?

<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: W pewnym lesie policzono wszystkie zwierzęta, co uwidoczniono na poniższym wykresie. Przeanalizuj ten wykres, a następnie odpowiedz za zamieszczone obok wykresu pytania.

a) Ile zwierząt żyje w tym lesie

b) O ile mniej jest lisów niż saren?

c) Jaki procent wszystkich zwierząt stanowią zające?

d) O ile procent więcej jest lisów niż dzików?

Zad. 2: Poniżej przedstawiono dane dotyczące liczby gimnazjalistów w roku szkolnym 2006/2007,w poszczególnych województwach Polski.

dolnośląskie 106 908

kujawsko-pomorskie	88 422
lubelskie	93 346
lubuskie	41 850
łódzkie	97 006
małopolskie	136 876
mazowieckie	194 586
opolskie	39 897
podkarpackie	94 919
podlaskie	51 796
pomorskie	92 020
śląskie	173 668
świętokrzyskie	53 514
warmińsko-mazurskie	64 485
wielkopolskie	143 578
zachodniopomorskie	68 595

Korzystając z tych danych, odpowiedz na pytania.

a) Ilu uczniów było we wszystkich gimnazjach w roku szkolnym 2006/2007?

b) W którym województwie było najmniej gimnazjalistów?

c) W którym województwie było najwięcej gimnazjalistów?

d) Jakim procentem liczby wszystkich gimnazjalistów jest liczba gimnazjalistów województwa wielkopolskiego? Wynik podaj z dokładnością do 1 procenta.

e) Jakim procentem liczby wszystkich gimnazjalistów jest liczba gimnazjalistów w Twoim województwie? Wynik podaj z dokładnością do 1 procenta.

Zad. 3: Rzucamy dwiema monetami.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na obu monetach wypadną orły?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na co najmniej jednej z monet wypadnie reszka?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na żadnej monecie nie wypadnie reszka?

Zad. 4: Rzucamy sześcienną kostką do gry.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania 5 oczek?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy mniej niż 4 oczka?

Zad. 5: Rzucamy dziesięć razy monetą dwuzłotową. Wśród poniższych zadań wskaż prawdziwe.

A. Jeśli w pierwszych dwóch rzutach wypadła reszka, to w trzecim rzucie na pewno wypadnie orzeł.

B. W pierwszych ośmiu rzutach przynajmniej raz wypadnie reszka.

C. Może się zdarzyć, że wypadną same reszki.

D. Wypadną same reszki.

Zad. 6: W szufladzie jest 10 par skarpet, w tym tylko cztery pary skarpet koloru niebieskiego. Wyciągnięto już cztery skarpety, w tym 1 niebieską. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że za piątą wyciągniętą skarpetą będzie skarpeta koloru niebieskiego?

Dział 10. Figury płaskie

Dział „Figury płaskie" jest bardzo obszerny. Składają się na niego następujące zagadnienia: Podstawowe figury geometryczne; Koło i okrąg; Okrąg wpisany i opisany na wielokącie; Symetrie; Trójkąty prostokątne – twierdzenie Pitagorasa; Podobieństwo figur.

Celem realizacji działu jest przypomnienie i pogłębienie wiadomości o figurach płaskich oraz kształcenie umiejętności wykorzystania tej wiedzy do rozwiązywania problemów matematycznych i pozamatematycznych.

Łącznie na realizację działu przeznaczono 75 godzin.

Geogebra jest programem do interaktywnego uczenia się geometrii i algebry. Dział „Figury płaskie" jest chyba najbardziej odpowiednim działem szkolnej matematyki do samodzielnego odkrywania przez ucznia z wykorzystaniem programu GeoGebra. Lekcje z zakresu geometrii płaszczyzny stanowią dobrą okazję do zastosowania zwłaszcza dwóch spośród znanych trzech wielkich strategii nauczania matematyki: nauczania czynnościowego i nauczania problemowego.

Praktycznie każda własność figury płaskiej i każde twierdzenie mogą być punktem wyjścia do postawienia problemu, który będzie przez uczniów rozwiązywany poprzez wykonywanie czynności konkretnych (na przedmiotach fizycznych), wyobrażeniowych (na rysunkach, schematach) i abstrakcyjnych (na symbolach matematycznych).

Czynności konkretne mogą być wykonywane na różnych materiałach (np. patykach różnej długości przy badaniu i formułowaniu warunku trójkąta, wyciętych modelach równoległoboku czy trapezu przy odkrywaniu wzorów na pola tych figur); ważne jest, aby uczniowie wykonywali czynności manualne, które sami zaplanowali, a celowość których została potwierdzona poprzez zbudowanie wiedzy matematycznej nowej dla uczniów.

Czynności wyobrażeniowe mogą być wykonywane przy pomocy programu GeoGebra. Uczniowie wykonują konstrukcje geometryczne, wykorzystują dynamikę programu i obserwują badaną własność figury, czy badany związek między wielkościami w wielu różnych przypadkach; ważne jest, aby uczniowie sami wykonywali konstrukcje oraz planowali badanie figur. Konstrukcje, które należy wykonać podczas lekcji geometrii w zakresie przewidzianym w gimnazjum, nie są skomplikowane. Uczniowie w gimnazjum na tyle sprawnie posługują się komputerem, że samodzielną obsługę programu GeoGebra opanowują szybko (zresztą przygotowujemy dla nich karty pracy z odpowiednimi wskazówkami) – tak więc mogą być nie tylko obserwatorami gotowych apletów, nie tylko osobami interaktywnie korzystającymi z gotowych apletów, ale też osobami wykonującymi samodzielnie konstrukcje i formułującymi na podstawie wyników swojej pracy wnioski o treści matematycznej. Ważne jest też samodzielne wykonywanie konstrukcji w zeszytach, nie tylko na komputerze przy pomocy programu. Uczniowie mają wówczas okazję kształcić dokładność, staranność, sprawność manualną w posługiwaniu się przyrządami geometrycznymi i estetykę wykonywania prac.

Czynności abstrakcyjne uczniowie wykonują zawsze przechodząc od przypadków konkretnych do uogólnień, formułując hipotezy o charakterze ogólnomatematycznym oraz posługując się sformułowanymi wnioskami. Zaznaczyć w tym miejscu należy, że obserwacja skończonej liczby przypadków potwierdzających postawioną hipotezę nigdy nie stanowi dowodu twierdzenia, w które chcielibyśmy naszą hipotezę przekształcić. Dowód musi być zawsze przeprowadzony metodami formalnymi.

Jeszcze raz chcemy podkreślić, że omawiany obecnie dział dostarcza wielu okazji do samodzielnego odkrywania wiedzy matematycznej. Niektóre z zaproponowanych apletów zawierają przycisk „Odkryj sam”. Odkrywanie praw matematycznych odbywa się tutaj drogą obserwacji zmian, jakie powoduje poruszanie już skonstruowanymi obiektami lub zmiana ich charakterystyk liczbowych (np. promienia okręgu) przy pomocy suwaka. Proponujemy organizowanie na lekcjach pracy badawczej ucznia na bazie samodzielnie wykonanych przez niego konstrukcji przed wykorzystaniem apletów, inspirowanie uczniów do dyskusji nad wynikami ich pracy, a na koniec ilustrowanie zagadnienia apletem (co może być potraktowane jako utrwalenie wiadomości).

Poniższa tabela zawiera propozycje problemów do rozwiązania na poszczególnych lekcjach z działu „Figury płaskie” wraz ze wskazaniem środków dydaktycznych do realizacji strategii czynnościowej i strategii problemowej.

Temat lekcji	Problem do rozwiązania	Wskazówki dotyczące czynności uczniów
Podstawowe figury geometryczne		
Rodzaje i własności kątów	Jaki jest związek pomiędzy miarami kątów przyległych? Czym charakteryzują się kąty wierzchołkowe?	Uczniowie wykonują odpowiednie konstrukcje w programie GeoGebra, stawiają hipotezę wstępną (odnośnie równości miar pewnych kątów – jeszcze przed

	Jaki jest związek pomiędzy miarami kątów odpowiadających? Kątów naprzemianległych?	mierzeniem), mierzą kąty, poruszają utworzonymi obiektami badając różne rodzaje kątów, formułują hipotezę ostateczną.
Rodzaje i własności trójkątów	Czy z każdych trzech odcinków można zbudować trójkąt? Dlaczego tak lub dlaczego nie? Uwaga: warunek trójkąta jest uczniom znany ze szkoły podstawowej, jeżeli więc odpowiedzą oni szybko i bezbłędnie na postawione pytanie, to przechodzimy do dalszej części lekcji bez czynnościowego rozwiązywania problemu, który nie jest dla uczniów nowy.	Tutaj warto zastosować czynności manualne z wykorzystaniem chociażby zbioru patyków o różnej długości.
	Czemu jest równa suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie? Uwaga: jest to materiał znany uczniom ze szkoły podstawowej, jeżeli więc odpowiedzą oni szybko i bezbłędnie na postawione pytanie, to przechodzimy do dalszej części lekcji bez czynnościowego rozwiązywania problemu, który nie jest dla uczniów nowy.	Można zorganizować pracę manualną: uczniowie przynoszą na lekcję wycięte większe modele trójkątów, rozcinają je tak, aby zachować nienaruszone kąty, a następnie układają wnętrza kątów obok siebie tak, aby ramię końcowe jednego kąta było ramieniem początkowym następnego. Wnioskują o sumie miar trzech kątów. Można też wykonać konstrukcję dowolnego trójkąta w programie GeoGebra, zmierzyć kąty, obliczyć sumę ich miar i poruszając wierzchołkami otrzymywać różne trójkąty, za każdym razem obliczać

		sumę ich miar
Wysokości w trójkącie	Czym charakteryzują się wysokości w trójkącie?	Uczniowie konstruują w programie GeoGebra dowolny trójkąt, jego trzy wysokości, poruszając wierzchołkami otrzymują różne trójkąty. Cały czas obserwują wysokości tych trójkątów, wnioskują o ich przecinaniu się w jednym punkcie i położeniu punktu przecięcia w zależności od rodzaju trójkąta.
Rodzaje i własności czworokątów	Jakie własności mają znane Ci czworokąty? Omów ich boki, kąty i przekątne. Uwaga: jest to materiał znany uczniom ze szkoły podstawowej, jeżeli więc odpowiedzą oni szybko i bezbłędnie na postawione pytanie, to przechodzimy do dalszej części lekcji bez czynnościowego rozwiązywania problemu, który nie jest dla uczniów nowy.	Uczniowie konstruują w programie GeoGebra poszczególne znane im czworokąty i dokonując odpowiednich pomiarów wnioskują o ich własnościach.
Cechy przystawania trójkątów	Co musimy wiedzieć o dwóch trójkątach, aby stwierdzić, czy są one przystające?	Uczniowie wykonują czynności manualne: konstruują trójkąty o zadanych wymiarach (nauczyciel powinien przygotować propozycje pozwalające na odkrycie cech przystawania trójkątów: bok-bok-bok, bok-kąt-bok, kąt-bok-kąt), wycinają je i sprawdzają, czy trójkąty są przystające.

Koło i okrąg		
Wzajemne położenie dwóch okręgów	Ile punktów wspólnych mogą mieć dwa okręgi? Co musimy wiedzieć o tych okręgach, aby bez rysunku określić ich wzajemne położenie?	Uczniowie wykonują w programie GeoGebra konstrukcje dwóch okręgów, zmieniają ich promienie i wzajemne położenie oraz odkrywają związek pomiędzy liczbą punktów wspólnych okręgów a relacją pomiędzy odległością ich środków i sumą lub różnicą promieni.
Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu	Ile punktów wspólnych mogą mieć prosta i okrąg? Co musimy wiedzieć o prostej i okręgu, aby bez rysunku określić ich wzajemne położenie?	Uczniowie wykonują w programie GeoGebra konstrukcję prostej i okręgu i manipulując obiektami odkrywają związek pomiędzy liczbą punktów wspólnych prostej i okręgu a relacją pomiędzy odległością środka okręgu od prostej i promieniem okręgu. Uczniowie powinni też sformułować wniosek o prostopadłości promienia okręgu do stycznej w punkcie styczności.
Długość okręgu i pole koła	Stosunek długości okręgu do jego średnicy – czy jest w nim coś interesującego?	Wprowadzenie liczby π: Uczniowie wykonują czynności manualne: mierzą (np. przy pomocy miarki krawieckiej) obwody okrągłych przedmiotów (talerzyka, podstawy piórnika w kształcie walca itp.), ich średnice i dzielą pierwszą z wielkości przez drugą. Dyskusja: co otrzymaliśmy? Odkrycie: stosunek długości okręgu do jego średnicy jest wielkością stałą. Stąd już tylko krok do wyprowadzenia wzoru na długość

		okręgu.
Pole wycinka koła	Jak obliczyć pole wycinka koła?	Uczniowie w drodze burzy mózgów wyprowadzają wzór na pole wycinka koła – wykonują czynności abstrakcyjne.
Pole pierścienia kołowego	Jak obliczyć pole pierścienia kołowego?	Uczniowie w drodze burzy mózgów wypracowują koncepcję obliczania pola pierścienia kołowego – wykonują czynności abstrakcyjne.
Okrąg wpisany i opisany na wielokącie		
Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie	Czy na każdym trójkącie można opisać okrąg?	Scenariusz lekcji na ten temat podany jest w rozdziale „Zbadaj”.
Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt	Czy w każdy trójkąt można wpisać okrąg?	Pracę uczniów z programem GeoGebra w zakresie realizacji tego tematu można zaplanować wzorując się na metodach zastosowanych w lekcji na temat okręgu opisanego na trójkącie.
Podobieństwo figur		
Podobieństwo trójkątów	Co musimy wiedzieć o dwóch trójkątach, aby stwierdzić, czy są one podobne?	Co prawda w podstawie programowej nie ma cech podobieństwa trójkątów, ale proponuję w klasach o wysokim poziomie osiągnięć przeprowadzić z uczniami dyskusję bazującą na cechach przystawania trójkątów, której rezultatem być może będzie sformułowanie cech podobieństwa trójkątów. Aktywność nieobowiązkowa.
Stosunek pól figur podobnych	Wiemy, czym wyraża się stosunek długości	Uczniowie przeprowadzają rozumowanie korzystając ze

	odpowiednich boków w figurach podobnych. Czy stosunek pól figur podobnych jest również związany ze skalą podobieństwa?	wzorów na pola znanych wielokątów oraz z zależności pomiędzy odpowiednimi bokami figur podobnych – wykonują czynności abstrakcyjne.

Zagadnienia dotyczące symetrii oraz trójkątów prostokątnych i twierdzenia Pitagorasa proponujemy realizować w oparciu o aplety. W przypadku symetrii warto postawić przed uczniami problemy: Jaka jest zależność pomiędzy współrzędnymi punktu i punktu do niego symetrycznego względem osi OX? Jaka jest zależność pomiędzy współrzędnymi punktu i punktu do niego symetrycznego względem osi OY? Jaka jest zależność pomiędzy współrzędnymi punktu i punktu do niego symetrycznego względem początku układu współrzędnych? Po skorzystaniu z apletu figury27 lub sporządzeniu odpowiednich konstrukcji w zeszycie uczniowie na pewno sformułują prawidłowe wnioski.

Jeżeli chodzi o trójkąty prostokątne i twierdzenie Pitagorasa, aplety zawierają obrazowe przedstawienie tych treści (zwłaszcza animowany dowód twierdzenia Pitagorasa).

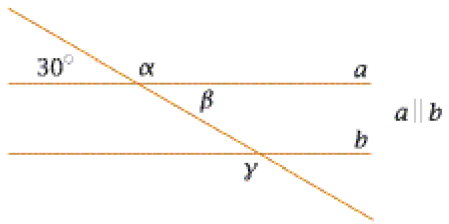
Projekty: Proponujemy dwa rodzaje projektów:

- rys historyczny: Kto jest uważany za ojca geometrii na płaszczyźnie i dlaczego?
- wykraczający poza podstawę programową: Czy na powierzchniach zakrzywionych figury mają takie same własności, jak na płaszczyźnie?

PODSTAWOWE FIGURY GEOMETRYCZNE

Kartkówka 1 Grupa A

Zad. 1: Znajdź miary kątów: α, β oraz γ.



Uzupełnij luki:

a) Kąty α i β to kąty ....

b) Kąty β i kąt o mierze 30° to kąty ....

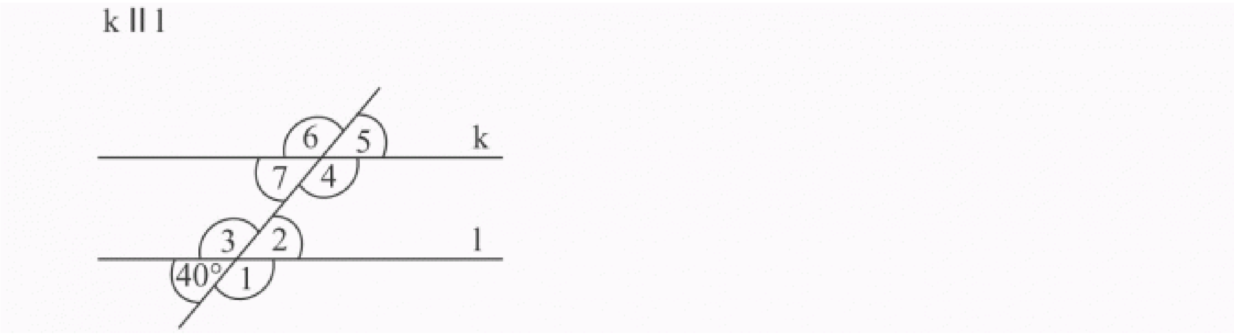
c) Kąty α i γ to kąty ....

Zad. 2: Pole rombu jest równe 160cm^2, a jego dłuższa przekątna ma długość 16cm. Oblicz długość krótszej przekątnej.

Zad. 3: Na działce o powierzchni 8 arów znajduje się basen zbudowany na planie prostokąta o wymiarach 25m x 12 m. Jaką część działki zajmuje ten basen?

Kartkówka 1 Grupa B

Zad. 1: Znajdź miary kątów oznaczonych jako 1, 2 oraz 6: .



Uzupełnij luki:

a) Kąty 1 i 2 to kąty ....

b) Kąt oznaczony jako 2 i kąt o mierze 40º to kąty ....

c) Kąty oznaczone jako 6 i 1 to kąty ....

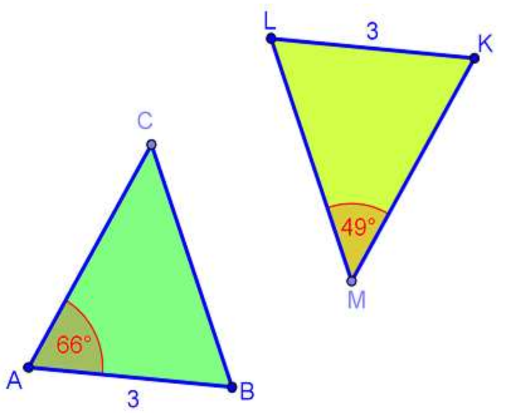
Zad. 2: Pole rombu jest równe 240 cm^2, a jego krótsza przekątna ma długość 12 cm. Oblicz długość dłuższej przekątnej.

Zad. 3: Na działce o powierzchni 11 arów znajduje się basen zbudowany na planie prostokąta o wymiarach 35m x 12 m. Jaką część działki zajmuje ten basen?

Kartkówka 2 Grupa A

Zad. 1: Kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę 65°. Oblicz miary pozostałych kątów trapezu.

Zad. 2: Czy narysowane poniżej trójkąty równoramienne są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Zad. 3: Trójkąt przystający do trójkąta *ABC* można skonstruować, gdy dane są:

a) dwa boki trójkąta *ABC*,

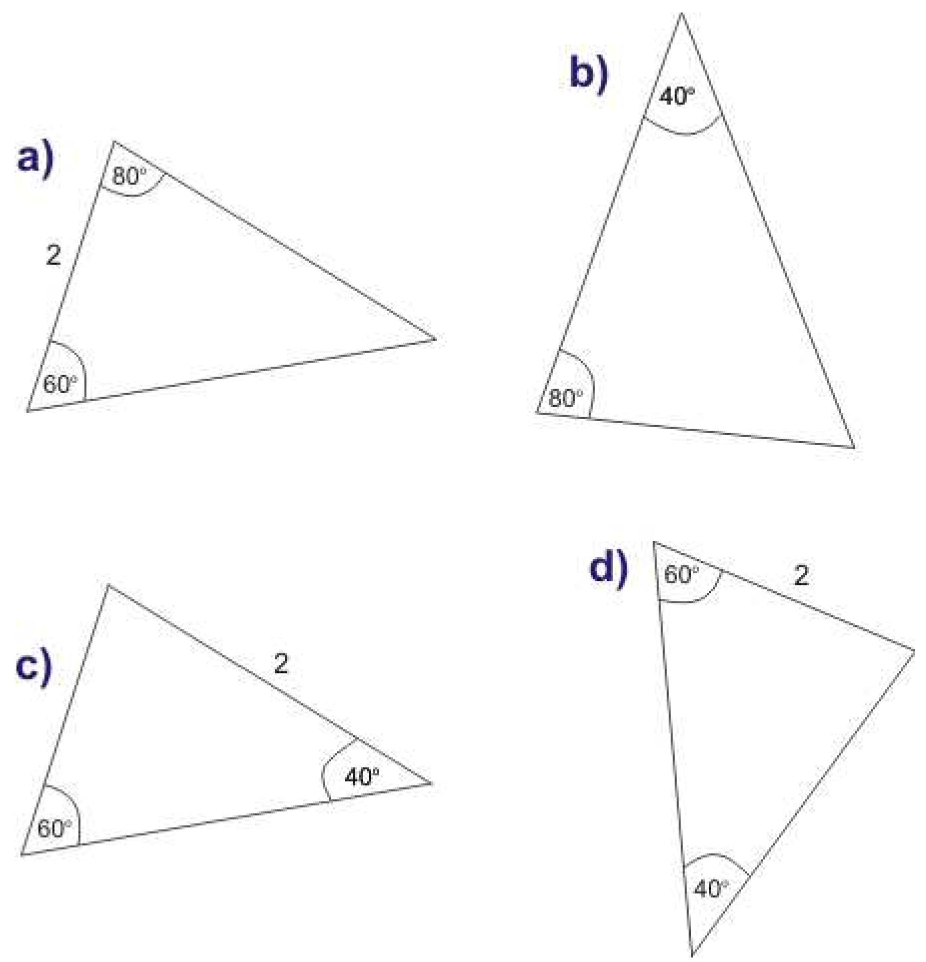
b) kąt *ACB* i bok *BC*,

c) kąt *BAC* oraz boki *AB* i *A.*

<u>Kartkówka 2 Grupa B</u>

Zad. 1: Kąt ostry trapezu prostokątnego ma miarę 35º . Oblicz miary pozostałych kątów trapezu.

Zad. 2: Na poniższym rysunku widzisz cztery trójkąty. Które z nich są przystające? Odpowiedź uzasadnij.



Zad. 3: Zakreśl prawidłową odpowiedź:

Trójkąt przystający do trójkąta *ABC* można skonstruować, gdy dane są:

a) kąt *ACB* i bok *BC*,

b) kąt *BAC* oraz boki *AB* i *AC*,

c) dwa boki trójkąta *ABC.*

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 46cm. Jego podstawa ma długość 12cm. Oblicz długość ramienia tego trójkąta.

Zad. 2: Podstawy trapezu równoramiennego mają długość 3cm i 9cm, a kąt przy dłuższej podstawie ma miarę 45° .

a) Oblicz pole tego trapezu.

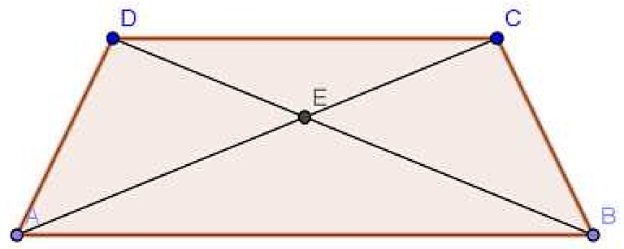
b) Jakie miary mają pozostałe kąty wewnętrzne tego trapezu?

Zad. 3: W układzie współrzędnych narysuj figury o wierzchołkach leżących w podanych niżej współrzędnych. Nazwij je. Oblicz pola tych figur i obwód figury z podpunktu b). W tym samym układzie współrzędnych narysuj figurę przystającą do figury z podpunktu a) i podaj współrzędne jej wierzchołków.

a) A=(-2, 3); B=(2, 2), C=(2, 4)

b) A=(-3, -3), B=(4, -3), C=(4, 4), D=(-3, 4).

Zad. 4: Przekątne trapezu równoramiennego ABCD przecinają się punkcie E:



Oceń, które z podanych zdań są prawdziwe.

a) Trójkąty ACD i BCD są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

b) Trójkąty ACD i ABC są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

c) Trójkąty ABD i ABC mają takie same pola. PRAWDA/FAŁSZ

d) Trójkąty ABE i CDE są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

e) Trójkąty AED i BCE mają różne pola. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 5: Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych |AC|=3cm, |BC|=4cm i przeciwprostokątnej |AB| =5cm. Punkt będący środkiem odcinka AC oznaczono literą D. Trójkąt ABC podzielono na dwa trójkąty odcinkiem łączącym wierzchołek B z punktem D.

a) Czy powstałe w ten sposób trójkąty mają takie same pola? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz długość wysokości trójkąta ADB, opuszczonej z wierzchołka D na przeciwległy bok AB.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 58 cm. Jego ramię ma długość 19 cm. Oblicz długość podstawy tego trójkąta.

Zad. 2: Podstawy trapezu prostokątnego mają długość 6 cm i 12 cm, a kąt ostry przy dłuższej podstawie ma miarę 45° .

a) Oblicz pole tego trapezu.

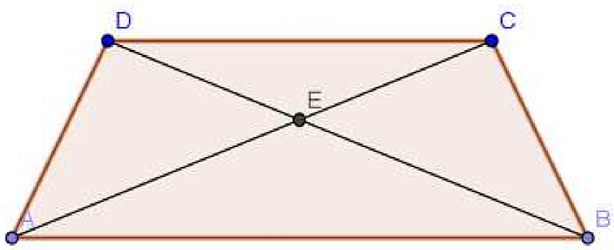
b) Jakie miary mają pozostałe kąty wewnętrzne tego trapezu?

Zad. 3: W układzie współrzędnych narysuj figury o wierzchołkach leżących w podanych niżej współrzędnych. Nazwij je. Oblicz pola tych figur i obwód figury z podpunktu b). W tym samym układzie współrzędnych narysuj figurę przystającą do figury z podpunktu a) i podaj współrzędne jej wierzchołków.

a) A=(-3, 1); B=(7, 1), C=(5, 6)

b) A=(-4, -4), B=(5, -4), C=(5, 2), D=(-4, 2).

Zad. 4: Przekątne trapezu równoramiennego ABCD przecinają się punkcie E:



Oceń, które z podanych zdań są prawdziwe.

a) Trójkąty ABD i ABC mają takie same pola. PRAWDA/FAŁSZ

b) Trójkąty AED i BCE mają różne pola. PRAWDA/FAŁSZ

c) Trójkąty ACD i BCD są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

d) Trójkąty ABE i CDE są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

e) Trójkąty ACD i ABC są przystające. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 5: Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych |AC|=6 cm, |BC|=8 cm i przeciwprostokątnej |AB| =10 cm. Punkt będący środkiem odcinka AC oznaczono literą D. Trójkąt ABC podzielono na dwa trójkąty odcinkiem łączącym wierzchołek B z punktem D.

a) Czy powstałe w ten sposób trójkąty mają takie same pola? Odpowiedź uzasadnij.

b) Oblicz długość wysokości trójkąta ADB, opuszczonej z wierzchołka D na przeciwległy bok AB.

KOŁO I OKRĄG

Kartkówka Grupa A

Zad. 1: Gospodarz zamierza posadzić na działce dwa drzewa różnych gatunków. Korona dorosłego drzewa gatunku pierwszego ma mieć średnicę 5m, a korona dorosłego drzewa gatunku drugiego - 6m. W jakiej odległości od siebie gospodarz powinien posadzić te drzewa, aby umożliwić im swobodny rozrost?

Zad. 2: Narysuj okrąg o promieniu 2 cm, a następnie poprowadź cięciwę AB tego okręgu długości 3cm.

a) Oblicz długość okręgu.

b) Skonstruuj styczną do okręgu przechodzącą przez punkt A.

Zad. 3: Pole koła jest równe 36π. Jaką długość ma promień tego koła?

Kartkówka Grupa B

Zad. 1: O ile centymetrów należy zmniejszyć średnicę kola o promieniu 8cm, aby obwód kola zmniejszył sie czterokrotnie?

Zad. 2: Narysuj okrąg o promieniu 3 cm, a następnie poprowadź cięciwę *AB* tego okręgu długości 4 cm.

a) Oblicz długość okręgu.

b) Skonstruuj styczną do okręgu przechodzącą przez punkt A.

Zad. 3: Pole koła jest równe 25. Jaką długość ma średnica tego koła?

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Oblicz obwód i pole koła o promieniu 13cm.

Zad. 2: Obwód pewnego koła jest równy 12π. Jakie jest pole tego koła?

Zad. 3: Promień okręgu ma długość 5. Jaką długość ma łuk tego okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 125^o?

Zad. 4: Jaką średnicę ma pizza, jeśli kawałek pizzy wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 72^o ma powierzchnię 28,8 π cm^2?

Zad. 5: a) Okrąg o środku O_1 ma promień 6cm, a okrąg o środku O_2 ma promień 8cm. Jakie jest wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|O_1O_2| = 12$, a jakie, jeśli $|O_1O_2| = 2$?

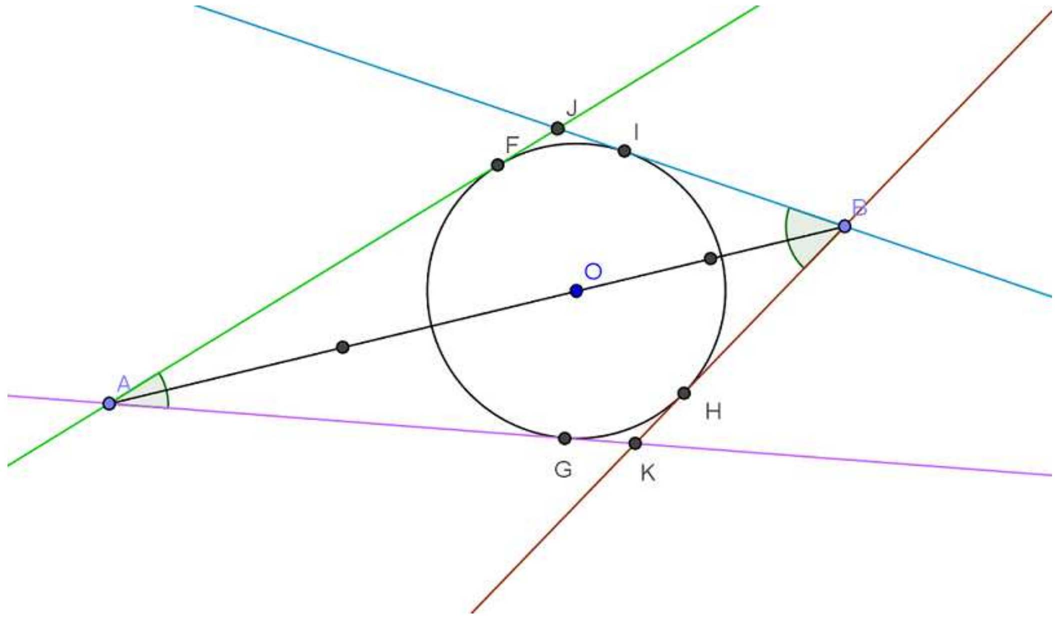
b) Określ jaka jest odległość pomiędzy środkami okręgów o promieniach 4cm i 6cm, jeśli

1. okręgi są styczne zewnętrznie,

2. okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach,

3. rozłączne wewnętrznie.

Zad. 6: Narysowano okrąg i cztery styczne do tego okręgu, przechodzące przez współliniowe punkty A i B. Punkty przecięcia się odpowiednich stycznych wyznaczają wierzchołki czworokąta AKBJ (rysunek poniżej). Znajdź miary kątów wewnętrznych tego czworokąta, wiedząc, że $|\sphericalangle KAJ| = 30^\circ$ oraz $|\sphericalangle KBJ| = 60^\circ$.



<u>Praca kontrolna **Grupa B**</u>

Zad. 1: Oblicz obwód i pole koła o średnicy 14 cm.

Zad. 2: Obwód pewnego koła jest równy 16▯▯▯Jakie jest pole tego koła?

Zad. 3: Promień okręgu ma długość 4. Jaką długość ma łuk tego okręgu wyznaczony przez kąt środkowy o mierze 75^o?

Zad. 4: Jaki promień ma koło, jeśli jego wycinek wyznaczony przez kąt środkowy o mierze120º ma powierzchnię 27▯ cm^2?

Zad. 5: a) Okrąg o środku O_1 ma promień 16 cm, a okrąg o środku O_2 ma promień 8 cm. Jakie jest wzajemne położenie tych okręgów, jeśli $|O_1 O_2| = 30$, a jakie, jeśli $|O_1 O_2| = 3$?

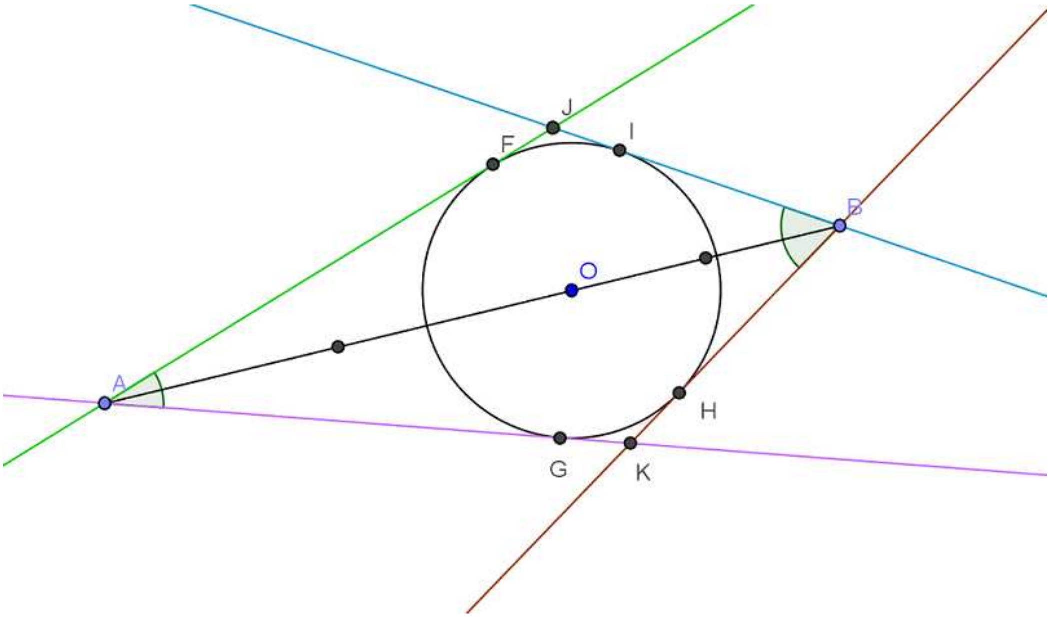
b) Określ jaka jest odległość pomiędzy środkami okręgów o promieniach 10cm i 6cm, jeśli

1. okręgi są styczne zewnętrznie,

2. okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach,

3. rozłączne wewnętrznie.

Zad. 6: Narysowano okrąg i cztery styczne do tego okręgu, przechodzące przez współliniowe punkty A i B. Punkty przecięcia się odpowiednich stycznych wyznaczają wierzchołki czworokąta AKBJ (rysunek poniżej). Znajdź miary kątów wewnętrznych tego czworokąta, wiedząc, że $|\sphericalangle KAJ| = 30^\circ$ oraz $|\sphericalangle KBJ| = 60^\circ$.



<u>OKRĄG WPISANY I OPISANY NA WIELOKĄCIE</u>

<u>Kartkówka Grupa A</u>

Zad. 1: Narysuj dowolny odcinek i skonstruuj symetralną tego odcinka.

Zad. 2: Narysuj trójkąt rozwartokątny ABC i wpisz w niego okrąg.

Zad. 3: Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg. Najdłuższy bok trójkąta ma długość średnicy okręgu, a jeden z jego kątów ostrych ma miarę 30^0. Jaką miarę mają pozostałe kąty tego trójkąta.

<u>Kartkówka Grupa B</u>

Zad. 1: Narysuj dowolny odcinek i skonstruuj symetralną tego odcinka.

Zad. 2: Narysuj trójkąt ostrokątny *ABC* i wpisz w niego okrąg.

Zad. 3: Trójkąt *ABC* jest wpisany w okrąg. Najdłuższy bok trójkąta ma długość średnicy okręgu, a jeden z jego kątów ostrych ma miarę 25^0. Jaką miarę mają pozostałe kąty tego trójkąta.

<u>Praca kontrolna Grupa A</u>

Zad. 1: Oceń prawdziwość poniższych wypowiedzi.

a) Na każdym trójkącie można opisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

b) Na każdym czworokącie można opisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

c) W każdy czworokąt można wpisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

d) W każdy wielokąt foremny można wpisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 2: W trójkąt równoboczny o boku $a = 2$ jest opisany na okręgu o promieniu r, a wpisany w okrąg o promieniu R. Oblicz pole koła pierścienia kołowego ograniczonego tymi dwoma okręgami.

Zad. 3: a) Jakie pole ma kwadrat wpisany w okrąg o promieniu 6 cm?

b) Jaką długość ma promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny o boku 8 cm?

Zad. 4: Kartonowa podstawka pod szklankę ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości 4 cm. Czy na tej podstawce zmieści się w całości szklanka, której dno jest w kształcie koła o średnicy 7 cm?

Zad. 5: W koło o promieniu r = 6 cm wpisujemy trójkąt równoboczny. Oblicz pole odcinka koła wyznaczonego przez jeden bok trójkąta.

Zad. 6: W kwadrat o boku a wpisujemy cztery okręgi o promieniu r w taki sposób, że każdy okrąg jest styczny do dwóch prostopadłych boków kwadratu i do dwóch sąsiednich okręgów. Wykaż, że suma pól ograniczona tymi okręgami jest równa polu koła wpisanego w kwadrat.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Oceń prawdziwość poniższych wypowiedzi.

a) W każdy trójkąt można wpisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

b) Na każdym czworokącie można opisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

c) W każdy czworokąt można wpisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

d) Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 2: Trójkąt równoboczny o boku a = 5 jest opisany na okręgu o promieniu r , a wpisany w okrąg o promieniu R . Oblicz pole koła pierścienia kołowego ograniczonego tymi dwoma okręgami.

Zad. 3: a) Jakie pole ma kwadrat opisany na okręgu o promieniu 7 cm?

b) Jaką długość ma promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku 10 cm?

Zad. 4: Podstawka pod doniczkę ma kształt sześciokąta foremnego o boku długości 8 cm. Czy można wstawić w nią doniczkę, której dno jest w kształcie koła o promieniu 7 cm?

Zad. 5: W koło o promieniu r = 8 cm wpisujemy pięciokąt foremny. Oblicz pole odcinka koła wyznaczonego przez jeden bok pięciokąta.

Zad. 6: W kwadrat o boku 12 cm wpisujemy cztery okręgi w taki sposób, że każdy okrąg jest styczny do dwóch prostopadłych boków kwadratu i do dwóch sąsiednich okręgów.

Wykaż, że suma pól ograniczona tymi okręgami jest równa polu koła wpisanego w kwadrat.

SYMETRIE

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Ile osi symetrii mają następujące figury geometryczne: a) odcinek, b) półprosta, c) prosta, d) kąt, e) trójkąt równoboczny, f) trójkąt równoramienny, g) romb, niebędący kwadratem, h) sześciokąt foremny, i) okrąg? Które z wymienionych figur są środkowosymetryczne?

Zad. 2: Punkty A=(-3, 0), B=(-2, 2), C=(1, 1), D=(-4, 5) są wierzchołkami czworokąta wklęsłego. Narysuj w układzie współrzędnych i podaj współrzędne wierzchołków czworokąta symetrycznego do ABCD względem a) osi OX, b) osi OY, c) punktu (0,0).

Zad. 3: Narysuj trójkąt rozwartokątny ABC, a następnie narysuj figury symetryczne do niego względem:

a) prostej zawierającej bok AB trójkąta,

b) wierzchołka C tego trójkąta,

c) środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zad. 4: a) Wskaż osie symetrii każdej z narysowanych poniżej figur:

A C D H M O T

b) Spośród narysowanych poniżej figur wskaż te, które są środkowosymetryczne, a następnie zaznacz środki symetrii tych figur.

A H M O Z S N X

Zad. 5: Ile osi symetrii ma figura, będąca sumą:

a) dwóch prostych? Rozważ różne przypadki.

b) prostej i okręgu? Rozważ różne przypadki.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Ile osi symetrii mają następujące figury geometryczne: a) odcinek, b) półprosta, c) prosta, d) kąt, e) trójkąt równoboczny, f) trójkąt równoramienny, g) romb, niebędący kwadratem, h) sześciokąt foremny, i) okrąg? Które z wymienionych figur są środkowosymetryczne?

Zad. 2: Punkty A=(1, 1), B=(4, 3), C=(-1, 5), D=(-2, 3) są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Narysuj w układzie współrzędnych i podaj współrzędne wierzchołków czworokąta symetrycznego do ABCD względem a) osi OX, b) osi OY, c) punktu (0,0).

Zad. 3: Narysuj trójkąt prostokątny ABC (punkt C jest wierzchołkiem kąta prostego), a następnie narysuj figury symetryczne do niego względem:

a) prostej zawierającej bok AB trójkąta,

b) wierzchołka C tego trójkąta,

c) środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zad. 4: a) Wskaż osie symetrii każdej z narysowanych poniżej figur:

B E I K N S U

b) Spośród narysowanych poniżej figur wskaż te, które są środkowosymetryczne, a następnie zaznacz środki symetrii tych figur.

B C D O Z S W X

Zad. 5: Ile osi symetrii ma figura, będąca sumą:

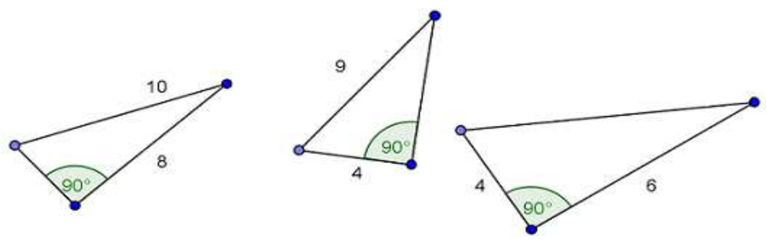
a) dwóch prostych? Rozważ różne przypadki.

b) prostej i okręgu? Rozważ różne przypadki.

<u>TRÓJKĄTY PROSTOKĄTNE</u>

<u>Praca kontrolna Grupa A</u>

Zad. 1: Oblicz długość trzeciego boku trójkąta.



Zad. 2: Oblicz odległość cięciwy o długości 4 cm od środka okręgu o promieniu 3 cm.

Zad. 3: Jakie pole ma równoległobok o bokach długości 4 cm i 10 cm, w którym jeden z kątów ma miarę 60°?

Zad. 4: Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość 5, a krótsza - 15. Kąt ostry trapezu ma miarę 45°. Oblicz obwód tego trapezu.

Zad. 5: Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma długość $8+4\sqrt{3}$, wysokość ma długość 4, a kąt ostry trapezu ma miarę 30°. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

Zad. 6: Pan Jan i Pani Janina toczyli pewien spór o ziemię. Sąsiad zaproponował, aby wygrodzili siatką swoje kawałki ziemi. Tak zrobili. Po wygrodzeniu działek okazało się, że działka pana Jana jest w kształcie trójkąta równobocznego, a działka pani Janiny - w kształcie kwadratu, i że oboje zużyli tyle samo metrów siatki na ogrodzenie swoich działek. Czyja działka ma większą powierzchnię? Ile razy?

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Oblicz długość trzeciego boku trójkąta prostokątnego, jeśli:

a) długości przyprostokątnych to 7 cm i 3 cm;

b) długość przeciwprostokątnej to 12 cm, a długość jednej z przyprostokątnych to 10 cm;

c) długość przeciwprostokątnej to 10 cm, a długość jednej z przyprostokątnych to 6 cm.

Zad. 2: Oblicz odległość cięciwy o długości 6 cm od środka okręgu o promieniu 5 cm.

Zad. 3: Jakie pole ma równoległobok o bokach długości 4 cm i 8 cm, w którym jeden z kątów ma miarę 30º ?

Zad. 4: Dłuższa podstawa trapezu prostokątnego ma długość 25, a krótsza - 15. Kąt ostry trapezu ma miarę 45°. Oblicz obwód tego trapezu.

Zad. 5: Dłuższa podstawa trapezu równoramiennego ma długość $8 + 4\sqrt{3}$, wysokość ma długość 6, a kąt ostry trapezu ma miarę 30°. Oblicz pole tego trapezu.

Zad. 6: Na uroczystość urodzinową braci bliźniaków przygotowano dwa torty: jeden w kształcie trójkąta równobocznego, drugi w kształcie kwadratu. Oba miały taką samą powierzchnię. Który z tortów miał większy obwód?

PODOBIEŃSTWO FIGUR

Kartkówka Grupa A

Zad. 1: Oceń prawdziwość poniższych wypowiedzi:

a) Każde dwa kwadraty są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

b) Każde dwa trójkąty prostokątne są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

c) Każde dwa trójkąty równoboczne są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

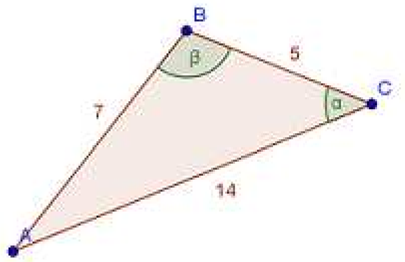
d) Każde dwa koła są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 2: Figura *F'* jest podobna do figury *F*. Uzupełnij poniższą tabelę.

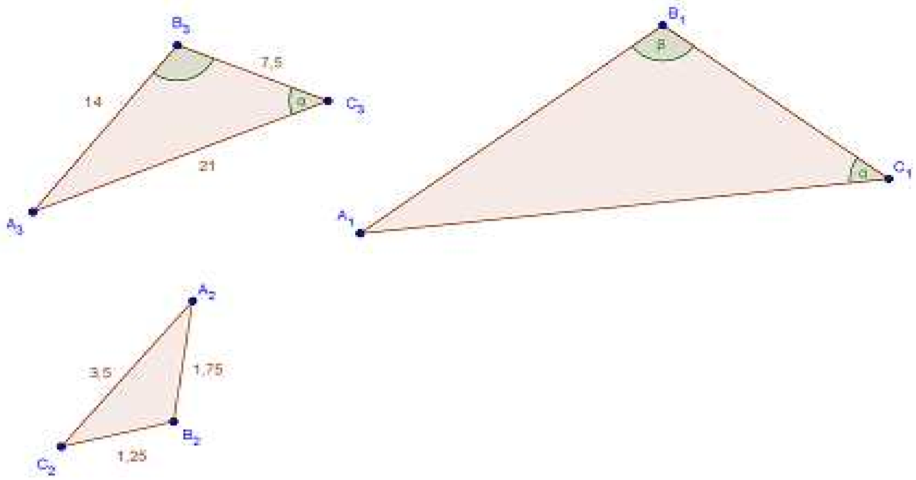
Lp.	Długość boku *a* figury *F*	Skala podobieństwa	Długość boku *a'* figury *F'* odpowiadającego bokowi *a*
1.	2 cm	3	

2.		$\frac{1}{2}$	6 dm
3.	12 cm		7 cm
4.	7 dm		7 cm

Zad. 3: Dany jest trójkąt ABC:



Które z następujących trójkątów są podobne do trójkąta ABC? Zaznacz prawidłową odpowiedź.



A. Trójkąty $A_2B_2C_2$ oraz $A_3B_3C_3$.

B. Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_3B_3C_3$.

C. Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$.

D. Trójkąty $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ i $A_3B_3C_3$.

<u>Kartkówka Grupa B</u>

Zad. 1: Oceń prawdziwość poniższych wypowiedzi:

a) Każde dwa koła są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

b) Każde dwa trapezy prostokątne są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

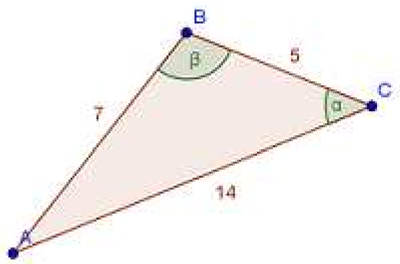
c) Każde dwa kwadraty są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

d) Każde dwa równoległoboki są podobne. PRAWDA/FAŁSZ

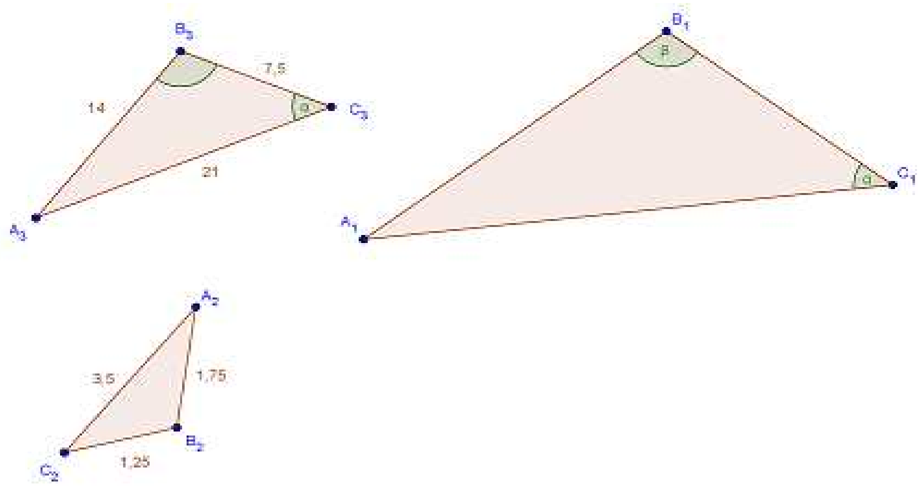
Zad. 2: Figura *F'* jest podobna do figury *F*. Uzupełnij poniższą tabelę.

Lp.	Długość boku *a* figury *F*	Skala podobieństwa	Długość boku *a'* figury *F'* odpowiadającego bokowi *a*
1.	5 cm	3	
2.		$\frac{1}{2}$	12 dm
3.	15 cm		3 cm
4.	8 cm		8 dm

Zad. 3: Dany jest trójkąt ABC:



Które z następujących trójkątów są podobne do trójkąta ABC? Zaznacz prawidłową odpowiedź.



A. Trójkąty $A_2B_2C_2$ oraz $A_3B_3C_3$.

B. Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_3B_3C_3$.

C. Trójkąty $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$.

D. Trójkąty $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ i $A_3B_3C_3$.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Czworokąty ABCD i A'B'C'D' są podobne. Boki czworokąta ABCD mają długości:

6cm, 8cm, 2cm, 4cm. Najkrótszy bok czworokąta A'B'C'D' ma długość 40cm. Jakie są długości pozostałych jego boków?

Zad. 2: Trójkąt *F'* jest podobny do trójkąta F są podobne. Oceń prawdziwość wypowiedzi.

a) Jeśli trójkąt F ma boki długości 6cm, 6cm, 12cm, a trójkąt *F'* ma obwód 16cm, to skala podobieństwa trójkątów F i *F'* jest równa $\frac{3}{2}$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Jeśli trójkąt *F'* ma pole 24cm^2, a trójkąt F ma pole 6cm^2, to skala podobieństwa trójkąta *F'* do trójkąta F jest równa 4. PRAWDA/FAŁSZ

c)) Jeśli trójkąt *F* ma pole 30cm^2, a trójkąt *F'* ma pole 270cm^2, to skala podobieństwa trójkąta *F'* do trójkąta *F* jest równa 3. PRAWDA/FAŁSZ

d) Jeśli trójkąt F ma obwód 25m, a skala podobieństwa trójkąta *F'* do trójkąta F jest równa $\frac{1}{5}$, to obwód trójkąta *F'* jest równy 5m. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 2: Na mapie w skali 1 : 50000 pewien obszar ma pole 5cm^2. Jakie jest pole tego obszaru w rzeczywistości?

Zad. 3: Drzewo rzuca cień o długości 12m. Pionowo ustawiony drążek o wysokości 30cm rzuca cień długości 24cm. Długości cieni drzewa i pionowo ustawionego drążka mierzone były w tej samej chwili. Oblicz wysokość drzewa.

Zad. 4: Trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC. Najdłuższy bok trójkąta ABC ma długość 9 cm. Najdłuższy bok trójkąta A'B'C' ma długość 15cm, a wysokość opuszczona na ten bok - 10 cm. Oblicz, jaką długość ma wysokość opuszczona na najdłuższy bok trójkąta ABC.

Zad. 5: Na talerzu została ostatnia trójkątna grzanka z serem. Ola i Monika postanowiły się nią podzielić. Odcięły więc róg grzanki cięciem przebiegającym w połowie dwóch sąsiednich boków, równoległym do trzeciego boku. Ola zjadała odcięty trójkątny róg grzanki, a Monika czworokątny kawałek grzanki, pozostały po odcięciu rogu. Czy oba kawałki grzanki były jednakowej wielkości? Jeśli nie, wskaż osobę, która zjadła większy kawałek grzanki i oblicz ile razy większy był jej kawałek w porównaniu do kawałka grzanki, który zjadła koleżanka.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Trójkąty ABC i A'B'C' są podobne. Boki trójkąta ABC mają długości:

6cm, 8cm, 4cm. Najkrótszy bok trójkąta A'B'C' ma długość 20cm. Jakie są długości pozostałych jego boków?

Zad. 2: Czworokąt *F'* jest podobny do czworokąta *F*. Oceń prawdziwość wypowiedzi:

a) Jeśli czworokąt *F* ma boki długości 6cm, 6cm, 12 cm, 12 cm, a czworokąt *F'* ma obwód 18cm, to skala podobieństwa trójkątów F i *F'* jest równa $\frac{3}{2}$. PRAWDA/FAŁSZ

b) Jeśli czworokąt *F'* ma pole 36 cm^2, a czworokąt F ma pole 9 cm^2, to skala podobieństwa czworokąta *F'* do czworokąta F jest równa 4 . PRAWDA/FAŁSZ

c)) Jeśli czworokąt *F* ma pole 30cm^2, a czworokąt *F'* ma pole 270cm^2, to skala podobieństwa czworokąta *F'* do czworokąta *F* jest równa 3 . PRAWDA/FAŁSZ

d) Jeśli czworokąt *F* ma obwód 100 m, a skala podobieństwa czworokąta *F'* do czworokąta F jest równa $\frac{1}{5}$, to obwód trójkąta *F'* jest równy 20 m. PRAWDA/FAŁSZ

Zad. 2: Na mapie w skali 1 : 20000 pewien obszar ma pole 3 cm^2. Jakie jest pole tego obszaru w rzeczywistości?

Zad. 3: Drzewo o wysokości 12 m rzuca cień o długości 8 m. Pionowo ustawiony kijek rzuca w tym samym momencie cień długości 24 cm. Oblicz wysokość kijka.

Zad. 4: Trójkąt A'B'C' jest podobny do trójkąta ABC. Najdłuższy bok trójkąta ABC ma długość 18 cm. Najdłuższy bok trójkąta A'B'C' ma długość 15cm, a wysokość opuszczona na ten bok - 10 cm. Oblicz, jaką długość ma wysokość opuszczona na najdłuższy bok trójkąta ABC.

Zad. 5: Tort w kształcie trójkąta został podzielony na dwie części cięciem przebiegającym w połowie dwóch sąsiednich boków, równoległym do trzeciego boku. Czy oba kawałki tortu są jednakowej wielkości? Jeśli nie, oblicz stosunek ich pól.

Dział 11.Bryły

Dział „Bryły” podzielony jest na trzy części: Graniastosłupy; Ostrosłupy; Bryły obrotowe. Celem realizacji tego działu jest pogłębienie wiedzy uczniów o bryłach oraz kształcenie umiejętności rozpoznawania, klasyfikowania, charakteryzowania brył wraz z obliczaniem ich pól i objętości, zwłaszcza w sytuacjach praktycznych.

Proponujemy oprzeć realizację działu na apletach, skryptach i scenariuszach opracowanych w projekcie. Uczenie się o bryłach, posługiwanie się bryłami wymaga wyobraźni przestrzennej. Przygotowane aplety znakomicie tę wyobraźnię wspomagają: umożliwiają oglądanie figur z różnej perspektywy, powiększanie, pomniejszanie i obracanie ich. Dynamiczne rysunki ilustrują nie tylko teorię, ale też treści konkretnych zadań. W materiałach zaproponowano wiele ciekawych zadań. Jeżeli dodamy do tego korzystanie z podręczników i zbiorów zadań, materiał ćwiczeniowy będzie naprawdę bogaty.

Proponujemy uzupełnić korzystanie z apletów pracą na modelach przestrzennych (w tych sytuacjach dydaktycznych, gdzie jest to metodycznie uzasadnione), ponieważ przy realizacji działu „Bryły” uczeń powinien mieć okazję dotknąć bryły trójwymiarowej.

Projekt: Ciekawe bryły.

GRANIASTOSŁUPY I OSTROSŁUPY

Kartkówka (graniastosłupy) Grupa A

Zad. 1: Uzupełnij poniższą tabelę.

Lp.	Podstawa graniastosłupa	Wysokość graniastosłupa	Objętość graniastosłupa	Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa
1.	trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 3cm i 4 cm	10 cm		
2.	sześciokąt foremny o boku długości 2 cm		$24\sqrt{3}$ cm^3	
3.	kwadrat o boku długości 6cm			192 cm^2

Zad. 2: Wazon ma kształt graniastosłupa, którego podstawą jest romb o przekątnych długości 12cm i 20cm. Krótsza przekątna wazonu ma długość $12\sqrt{10}$cm. Oblicz, ile litrów wody zmieści się w tym wazonie.

Kartkówka (graniastosłupy) Grupa B

Zad. 1: Uzupełnij poniższą tabelę.

Lp.	Podstawa graniastosłupa	Wysokość graniastosłupa	Objętość graniastosłupa	Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa
1.	trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 4 cm i 5 cm	8 cm		
2.	trójkąt równoboczny o boku długości 4 cm		$24\sqrt{3}$ cm^3	
3.	prostokąt o bokach długości 6 cm i 3 cm			216 cm^2

Zad. 2: Ozdobne pudełko ma kształt graniastosłupa, którego podstawą jest graniastosłup o

jednym boku długości 20 cm i wysokości opadającej na ten bok długości 12 cm. Objętość pudełka jest równa 7200 cm^2. Czy można w to pudełko opakować wazon o wysokości 35 cm? Uzasadniając swoją odpowiedź zapisz stosowne obliczenia.

Kartkówka (ostrosłupy) Grupa A

Zad. 1: Uzupełnij luki:

a) Ostrosłup prawidłowy pięciokątny ma .... ścian, ... krawędzi i .... wierzchołków.

b) Podstawą ostrosłupa, który ma 7 ścian jest ....

c) Podstawą ostrosłupa, który ma 7 wierzchołków jest ....

d) Podstawą ostrosłupa, który ma 12 krawędzi jest ....

Zad. 2: Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 4cm. Wysokość ostrosłupa ma długość 7cm. Oblicz pole powierzchni bocznej i objętość tego ostrosłupa.

Zad. 3: W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 6cm, a krawędź boczna - 10cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Kartkówka (ostrosłupy) Grupa B

Zad. 1: Uzupełnij luki:

a) Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma .... ścian, ... krawędzi i .... wierzchołków.

b) Podstawą ostrosłupa, który ma 6 ścian jest ....

c) Podstawą ostrosłupa, który ma 8 wierzchołków jest ....

d) Podstawą ostrosłupa, który ma 8 krawędzi jest ....

Zad. 2: Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 6 cm. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa ma długość 8 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Zad. 3: W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ostrosłupa – 8 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Graniastosłup prawidłowy trójkątny i ostrosłup mają wysokości jednakowej długości i przystające podstawy. Oblicz objętość i pole całkowite każdej z brył, wiedząc, że ich podstawą jest trójkąt o boku długości 3cm, a ich wysokości mają długość 8cm.

Zad. 2: Do wykonania akwarium zużyto pięć prostokątnych tafli szkła. Dno wykonano z tafli o wymiarach: 120cm $\times$ 62cm $\times$ 1cm, a boki z dwóch tafli szkła o wymiarach: 120cm $\times$ 80cm $\times$ 1cm oraz dwóch tafli szkła o wymiarach: 60cm $\times$ 80cm $\times$ 1cm. Oblicz ile waży akwarium, wiedząc, że 1cm^3 szkła waży 2,6g.

Zad. 3: Basen Marka ma pojemność 360 000 litrów, a jego dno ma kształt prostokąta o wymiarach 15m × 8m. Marek postanowił wyłożyć wnętrze basenu płytkami ceramicznymi. Oblicz, ile m^2 płytek potrzebuje Marek, wiedząc, że na straty materiałowe powstałe przy cięciu płytek należy doliczyć 10%.

Zad. 4: Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe $360cm^2$, a pole powierzchni bocznej - $260cm^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Graniastosłup prawidłowy czworokątny i ostrosłup mają wysokości jednakowej długości i przystające podstawy. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej każdej z brył, wiedząc, że ich podstawą jest kwadrat o boku długości 4 cm, a ich wysokości mają długość 9 cm.

Zad. 2: Do wykonania akwarium zużyto pięć prostokątnych tafli szkła. Dno wykonano z tafli o wymiarach: 130 cm × 70 cm × 1 cm, a boki z dwóch tafli szkła o wymiarach: 130 cm × 90 cm × 1 cm oraz dwóch tafli szkła o wymiarach: 70 cm × 90 cm × 1 cm. Oblicz ile waży akwarium, wiedząc, że $1cm^3$ szkła waży 2,6g.

Zad. 3: Basen ma kształt prostopadłościanu, którego długość jest równa 20 m, a szerokość 15 m. Do basenu wlano 225 000 litrów wody. Oblicz wysokość wody w basenie.

Zad. 4: Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $(360+36\sqrt{3})\ cm^2$, a pole powierzchni bocznej – $360\ cm^2$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

BRYŁY OBROTOWE

Kartkówka (walec) Grupa A

Zad. 1: Jaką objętość i jakie pole powierzchni całkowitej ma walec powstały poprzez obrót prostokąta o wymiarach 4cm × 8cm wokół prostej zawierającej dłuższy bok prostokąta?

Zad. 2: Z kawałka blachy mającego kształt kwadratu o boku długości 16cm sklejono powierzchnię boczną walca Jaką objętość ma ten walec?

Zad. 3: Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu $25m^2$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

Kartkówka (walec) Grupa B

Zad. 1: Jaką objętość i jakie pole powierzchni całkowitej ma walec powstały poprzez obrót prostokąta o wymiarach 5cm × 8cm wokół prostej zawierającej krótszy bok prostokąta?

Zad. 2: Z kawałka blachy mającego kształt kwadratu o boku długości 36 cm sklejono powierzchnię boczną walca. Jaką objętość ma ten walec?

Zad. 3: Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu 49 dm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

Kartkówka (stożek) Grupa A

Zad. 1: Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, którego promień podstawy ma długość 6cm, a wysokość - 14cm.

Zad. 2: Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, którego promień podstawy ma długość 6cm, a tworząca - 12cm.

Zad. 3: Promień podstawy stożka ma długość 2cm. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 60°. Oblicz wysokość tego stożka.

Kartkówka (stożek) Grupa B

Zad. 1: Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, którego promień podstawy ma długość 8 cm, a wysokość – 12 cm.

Zad. 2: Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, którego promień podstawy ma długość 5 cm, a tworząca – 11 cm.

Zad. 3: Promień podstawy stożka ma długość 4 cm. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 90°. Oblicz wysokość tego stożka.

Praca kontrolna Grupa A

Zad. 1: Oblicz objętość i pole powierzchni kuli o promieniu 5cm.

Zad. 2: Metalową kulę o promieniu 4cm przetopiono na walec, którego promień podstawy ma długość 4cm. Jaka jest wysokość tego walca?

Zad. 3: Fabryka przyjęła zamówienie na dwa rodzaje półlitrowych puszek do napojów. Puszki pierwszego rodzaju mają mieć średnicę 7cm, puszki drugiego rodzaju - 6cm. Jaką wysokość będą miały te puszki? Na wykonanie której puszki zużyje się więcej blachy?

Zad. 4: Trapez równoramienny o podstawach długości 15cm i 9cm oraz ramieniu długości 6cm obraca się wokół prostej zawierającej krótszą podstawę. Oblicz objętość i pole powierzchni powstałej w ten sposób bryły.

Zad. 5: Olga zaprosiła 4 koleżanki. Ma zamiar poczęstować swoich gości lodami, nakładając każdemu z nich po 6 gałek lodów. Łyżka do lodów jest w kształcie półkuli o średnicy 4cm. Czy Olga będzie mogła również sobie nałożyć 6 gałek, skoro kupiła tylko jedno półlitrowe opakowanie lodów?

Praca kontrolna **Grupa B**

Zad. 1: Oblicz objętość i pole powierzchni kuli o promieniu 7 cm.

Zad. 2: Metalową kulę o promieniu 8 cm przetopiono na walec, którego promień podstawy ma długość 4cm. Jaka jest wysokość tego walca?

Zad. 3: Fabryka przyjęła zamówienie na dwa rodzaje półlitrowych puszek do napojów. Puszki pierwszego rodzaju mają mieć średnicę 8 cm, puszki drugiego rodzaju – 6 cm. Jaką wysokość będą miały te puszki? Na wykonanie której puszki zużyje się więcej blachy?

Zad. 4: Trapez równoramienny o podstawach długości 15cm i 9cm oraz ramieniu długości 6cm obraca się wokół prostej zawierającej dłuższą podstawę. Oblicz objętość i pole powierzchni powstałej w ten sposób bryły.

Zad. 5: Marta zaprosiła koleżanki i kupiła litrowe opakowanie lodów, aby je poczęstować. Łyżka do lodów jest w kształcie półkuli o średnicy 4cm. Dla ilu koleżanek wystarczy lodów, jeżeli każda z nich zje po 5 gałek?

Zbadaj

Najbardziej wartościowe cechy programu GeoGebra to – jak już było podkreślane wcześniej - jego interaktywność i dynamika. Dlatego też nadaje się on do wykorzystania w charakterze narzędzia badawczego w procesie konstruowania przez ucznia wiedzy matematycznej.

Wykorzystanie programu GeoGebra dobrze wpisuje się w realizację celów kształcenia matematycznego na poziomie gimnazjum, w szczególności – ze względu na interaktywny i umożliwiający działalność badawczą ucznia charakter programu – w realizację:

- Celu IV. **Użycie i tworzenie strategii:** Uczeń stosuje strategię jasno wynikającą z treści zadania, tworzy strategię rozwiązania problemu. oraz
- Celu V. **Rozumowanie i argumentacja**: Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Poniższa tabela zawiera zestawienie treści nauczania z podstawy programowej matematyki w gimnazjum, w realizacji których można wykorzystać program GeoGebra nie w celu wizualizacji pojęć lub procesów, lecz w celu prowadzenia przez uczniów rozumowań matematycznych. Jednocześnie zaproponowana jest zmiana opisu aktywności ucznia z uwzględnieniem podejścia problemowego do poznawanych treści.

Treści nauczania. Uczeń:	Z programem GeoGebra uczeń:
korzysta ze związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;	Bada i ustala związki między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do	Bada i ustala wzajemne położenie stycznej do okręgu i promienia poprowadzonego do punktu styczności;

promienia poprowadzonego do punktu styczności;	
korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;	Bada własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
rozpoznaje pary figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;	Bada własności figur symetrycznych względem prostej i względem punktu;
konstruuje okrąg opisany na trójkącie oraz okrąg wpisany w trójkąt;	Bada i ustala, czy na każdym trójkącie można opisać okrąg i czy w każdy trójkąt można wpisać okrąg
rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;	Bada własności wielokątów foremnych;
oblicza wymiary wielokąta powiększonego lub pomniejszonego w danej skali;	Ustala stosunek pól figury oryginalnej i figury powiększonej lub pomniejszonej w skali
stosuje cechy przystawania trójkątów;	Bada cechy przystawania trójkątów;

Oczywiście, propozycje podane w tabeli nie wyczerpują wszystkich możliwości twórczego wykorzystania programu GeoGebra do pracy badawczej ucznia. Zachęcamy Czytelników do uzupełniania tabeli według własnej inwencji.

Poniżej przedstawiony jest scenariusz lekcji realizującej zasygnalizowane wyżej podejście do kształcenia matematycznego z rozszerzeniem treści przewidzianych do realizacji przez podstawę programową o elementy geometrii na sferze. Czasami warto sięgnąć po treści spoza podstawy programowej w celu sprowokowania uczniów do myślenia porównawczego: jak to jest z geometrią na płaszczyźnie, a jak na powierzchni zakrzywionej. Doświadczenie wskazuje, że uczniowie zainspirowani odpowiednio stawianymi przez nauczyciela pytaniami i mający możliwość pracy z odpowiednio dobranymi środkami dydaktycznymi, zupełnie nie czują, że pracują nad zagadnieniami spoza podstawy programowej. Umysł nie zna granic stawianych przez oficjalne dokumenty; umysł pracuje, bada i tworzy, gdy ma do tego odpowiednie warunki.

Lekcja: Okrąg opisany na trójkącie

Klasa II gimnazjum

2 godziny lekcyjne

Cele ogólne:

- pogłębianie wiadomości o własnościach trójkąta na płaszczyźnie,
- nabycie podstawowych wiadomości o własnościach trójkąta na sferze,
- kształcenie umiejętności prowadzenia rozumowań matematycznych, wyciągania wniosków i stawiania hipotez,- doskonalenie umiejętności argumentowania i dyskutowania,
- kształcenie umiejętności wykorzystania pomocy naukowych (programów komputerowych i modeli) do pracy badawczej prowadzącej do rozwiązania problemu.

Cele szczegółowe:

Po zajęciach uczeń:

- zna definicję okręgu opisanego na trójkącie,
- potrafi skonstruować okrąg opisany na dowolnym trójkącie na płaszczyźnie,
- zna podstawowe założenia geometrii na sferze dotyczące trójkątów i okręgów,
- potrafi skonstruować okrąg opisany na trójkącie sferycznym,
- uzasadnia następujące stwierdzenia: na każdym trójkącie można opisać okrąg; środek okręgu opisanego na trójkącie leży w punkcie przecięcia symetralnych boków trójkąta,
- podaje podstawowe zastosowania praktyczne zagadnień dotyczących okręgu opisanego na trójkącie

Metody pracy na lekcji: metoda problemowa, dyskusja kierowana, praca z komputerem, ćwiczenia konstrukcyjne

Formy pracy: praca zbiorowa, praca indywidualna (również grupowa, jeśli ilość pomocy naukowych nie pozwala na indywidualną w części badawczej)

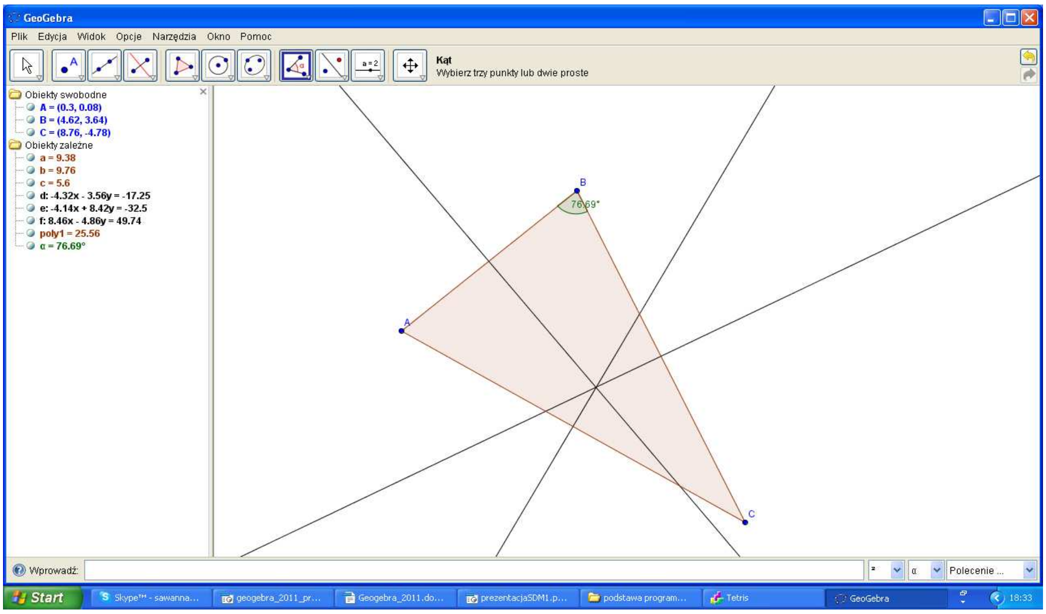
Środki dydaktyczne: Komputer z oprogramowaniem (Geogebra, Spherical Easel), globus, przyrządy geometryczne do konstrukcji na płaszczyźnie, zestaw modeli i przyrządów do konstrukcji na sferze

Kluczowe etapy lekcji:

- podanie przez nauczyciela (lub wyszukanie w dowolnych źródłach przez uczniów) definicji okręgu opisanego na trójkącie,

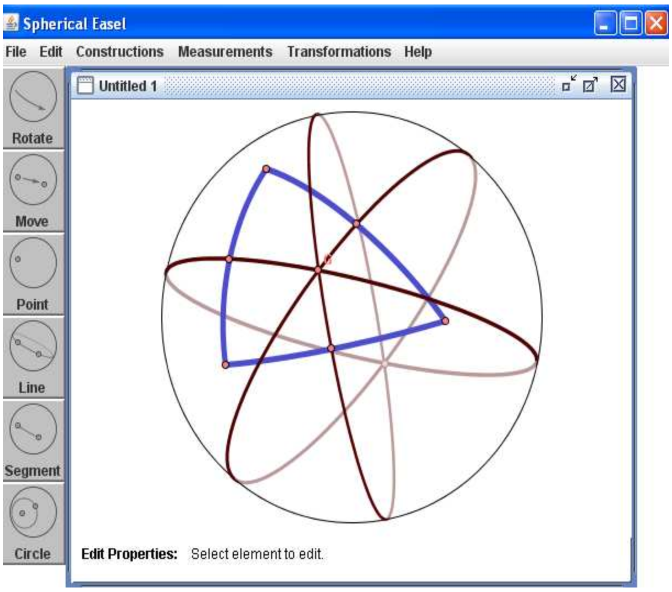
- prowadzenie przez uczniów rozumowania (kierowanego w miarę potrzeby przez nauczyciela) prowadzącego do określenia punktu, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie na płaszczyźnie – wychodzimy od definicji okręgu i korzystając z własności symetralnej odcinka określamy punkt równo oddalony od trzech wierzchołków trójkąta,

- postawienie kluczowego pytania: C**zy na każdym trójkącie można opisać okrąg?** Pytanie to można sprowadzić do wersji wyrażonej w kategoriach innych pojęć: **Czy w każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie?**
- prowadzenie przez uczniów pracy badawczej z wykorzystaniem programu Geogebra, której rezultatem ma być weryfikacja hipotezy: Na każdym trójkącie można opisać okrąg.



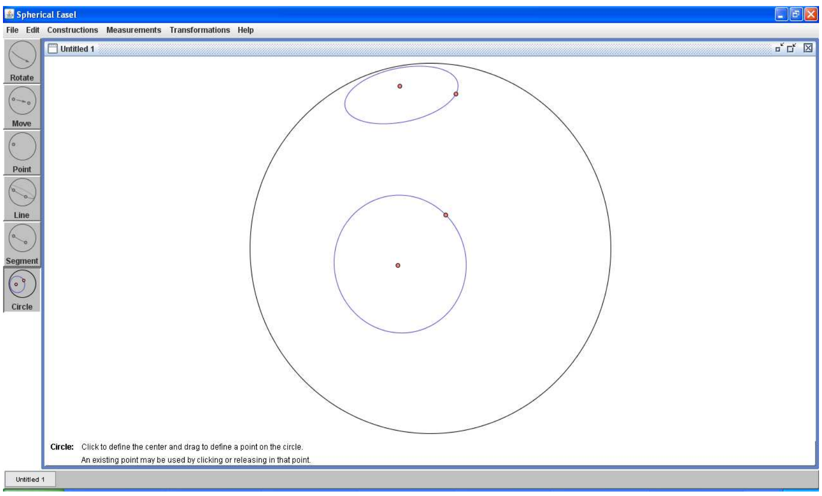
Rys. 1. Przykład rezultatu pracy uczniowskiej nad weryfikacją hipotezy: W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie

- sformułowanie wniosku,
- wykonanie konstrukcji trójkąta opisanego na okręgu- w programie Geogebra,- w zeszycie własnoręcznie,
- dyskusja na temat: w jakich sytuacjach praktycznych wiedza o okręgu opisanym na trójkącie może być użyteczna?
- przejście do pracy z powierzchnią sferyczną w postaci globusa i dyskusja na temat: czy wiedza o okręgu opisanym na trójkącie na sferze może być użyteczna? Komu może być potrzebna? W jakich sytuacjach? W jakich dziedzinach?
- **postawienie przez uczniów hipotezy dotyczącej możliwości opisania okręgu na trójkącie sferycznym i wykorzystanie programu Spherical Easel do weryfikacji postawionej hipotezy**



Rys. 2. Przykład rezultatu pracy uczniowskiej nad weryfikacją hipotezy: W każdym trójkącie sferycznym symetralne boków przecinają się w jednym punkcie. Odkrycie uczniów: W dwóch punktach! Ale to nie zmienia faktu, że na trójkącie sferycznym można opisać okrąg!

- dyskusja na temat: **Czy podczas pracy z komputerem zweryfikowaliśmy naszą hipotezę? Czy program komputerowy wystarczy, aby badać własności figur na powierzchni zakrzywionej?**



Rys. 3. Zniekształcenia, jakie powoduje rzutowanie przestrzeni na płaszczyznę.

- wykorzystanie zestawu modeli do geometrii sferycznej do wykonania konstrukcji okręgu opisanego na trójkącie sferycznym,
- dokonanie przez uczniów porównania własności figur na płaszczyźnie i na sferze w omawianym zakresie,
- podsumowanie zajęć.

Wnioski z lekcji (została przeprowadzona w PG nr 2 w Białymstoku):

- Dobrze zaplanowane czynności uczniów z wykorzystaniem dobrze przemyślanych pomocy naukowych prowadzą do samodzielnego konstruowania wiedzy w sposób naturalny, niewymuszony.
- Korzystanie z programów komputerowych dotyczących geometrii trójwymiarowej powinno być wspomagane wykorzystaniem innych pomocy dydaktycznych, prawdziwie trójwymiarowych.
- Można wkroczyć z geometrią sferyczną w dowolnym momencie nauczania geometrii!
- Wykorzystanie metody porównawczej daje uczniom możliwość rozszerzenia wiedzy i rozwinięcia ich myślenia matematycznego. Po odbytej lekcji uczniowie powiedzieli: „Nigdy dotąd nie uczyliśmy się geometrii w ten sposób.”

Uwagi dotyczące dodatkowych możliwości wykorzystania apletów

Aplety to jedne z wielu materiałów dydaktycznych przygotowanych przez autorów projektu do pracy na lekcji, z których korzysta zarówno nauczyciel, jak i uczeń. Treść apletów jest ściśle z wiązana z tematyką poszczególnych lekcji, a sposób ich wykorzystania w czasie danej lekcji został szczegółowo opisany w skrypcie załączonym do danego działu programu. Nie jest to zamknięty katalog sposobów wykorzystania apletów i z pewnością każdy nauczyciel wskaże dodatkowe możliwości dydaktyczne wykorzystania każdego z przygotowanych apletów.

We wskazówkach metodycznych, omawiając poszczególne działy programu, wskazane już zostały pewne sposoby wykorzystania apletów na lekcji. Po części zaproponowałyśmy takie ich wykorzystanie, aby aplety te służyły uczniowi do konstruowania wiedzy, a nie tylko do przyswajania gotowych treści i aby praca z apletem wyzwoliła u ucznia twórczą aktywność myślową.

Poniżej zaproponujemy dodatkowe możliwości wykorzystania apletów.

I.

Aplety do działu *Liczby wymierne dodatnie* mogą być wykorzystane w podsumowaniu lekcji. Nauczyciel pyta uczniów o wiadomości i umiejętności poznane i zdobyte/przypomniane na lekcji, uczeń odpowiada, a następnie nauczyciel zaznacza odpowiedni pole wyboru w aplecie i wyświetla poprawną odpowiedź, weryfikując w ten sposób odpowiedź ucznia.

Dla przykładu rozważmy Ćwiczenie zamieszczone w aplecie *wymierne03*. Nauczyciel suwakami ustala poszczególne cyfry liczby pięciocyfrowej i zadaje pytania: "Czy ta liczba jest podzielna przez 2, 3, 4, ...?" Wybrany uczeń udziela odpowiedzi na postawione pytanie, a następnie nauczyciel zaznacza odpowiednie pole wyboru i wyświetla poprawną odpowiedź. Następuje weryfikacja odpowiedzi ucznia w formie pracy z całą klasą.

Aplet *wymierne08* może służyć uczniom na każdej lekcji, na której dokonuje się zamiany jednostek - do przypomnienia zależności między jednostkami lub do weryfikacji poprawności dokonanej zamiany jednostek, pełniąc funkcję podręcznych tablic.

Przygotowane aplety może także wykorzystać nauczyciel pracujący z uczniami szkoły podstawowej. Najbardziej konstruktywne wykorzystanie apletów byłoby na lekcjach wprowadzających. Uczeń, pracując z apletami, pod odpowiednim kierunkiem nauczyciela odkrywałby nową dla siebie wiedzę, definiowałby nowe pojęcia i odkrywałby zależności między tymi pojęciami. Aplety byłyby środkiem dydaktycznym wprowadzającym ucznia w świat matematyki, jej pojęcia i metodę.

=

II.

Aplety do działu *Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)* mogą być również wykorzystane do odkrywania nowej dla ucznia wiedzy matematycznej. Praca np. z apletem *wymierne10* może okazać się dla ucznia ciekawą i twórczą. Zaznaczając odpowiednie pola wyboru (liczby naturalne, całkowite, wymierne) i przesuwając przy każdym dokonanym wyborze suwakiem uczeń obserwuje zmiany pojawiające się na ekranie monitora, dostrzega różnice między liczbami naturalnymi a całkowitymi, naturalnymi a wymiernymi, itd., a jednocześnie spostrzega jakie cechy wspólne łączą zaznaczone na osi liczbowej liczby z poszczególnych zbiorów. Uczeń wówczas może podjąć próbę zdefiniowania poszczególnych pojęć: liczba naturalna, liczba całkowita, liczba wymierna.

Przykład 3 z apletu *wymierne12* może być wykorzystany jako baza do zadań dotyczących funkcji (posługując się suwakiem możemy tworzyć opisy przyporządkowań które są funkcją oraz takich, które funkcją nie są, dane te możemy również wykorzystać do prognozowania pogody) oraz do zadań z zakresu statystyki opisowej.

III.

We wskazówkach metodycznych do działu *Potęgi* podano liczne propozycje wykorzystania poszczególnych apletów (*potegi01 - potegi05)*. Nauczyciel stosujący się do tych propozycji będzie pobudzał ucznia do twórczego myślenia, rozwiązywania problemów i będzie wprowadzał ucznia w metodę matematyczną.

Zamieszczone w apletach liczne zadania (których poprawność rozwiązania można sprawdzić dokonując zaznaczenia odpowiednich pól wyboru) mogą służyć nauczycielowi i uczniowi do sprawdzenia wiedzy i umiejętności uczniów. Nauczyciel może je wykorzystać w trakcie podsumowania lekcji lub w króciutkich kartkówkach. Uczeń i nauczyciel niemal natychmiast otrzymują informację zwrotną o osiągniętych wynikach nauczania-uczenia się.

IV.

Aplety do działu *Pierwiastki* zawierają materiał teoretyczny i liczne przykłady, większość z nich jest podzielona na części: wiedza i zadania. We wskazówkach metodycznych podano praktyczne rady, jak kierować pracą z apletami, aby służyły one nie do przyswajania gotowej wiedzy, ale do jej konstruowania. Szczególną uwagę zwrócono na stawianie uczniom pytań-problemów. Uczeń ma możliwość wykorzystania apletów do znalezienia odpowiedzi na postawione pytania-problemy, do samodzielnego sformułowania wniosków (w tym wniosków zapisanych w postaci wzorów).

W pracy z apletami wskazane jest, aby najpierw uczniowie przeanalizowali liczne przykłady, a potem podejmowali próby sformułowania stosownego wniosku np. w postaci wzoru, a dopiero na koniec tej pracy wybierali pole "Zobacz wzory" czy "Wniosek" w celu weryfikacji swoich sądów.

Zaproponowane przez nas wykorzystanie apletów aktywizuje ucznia do pracy twórczej, pobudza go do rozwiązywania problemów i umożliwia uczniowi konstruowanie jego wiedzy matematycznej.

V.

We wskazówkach metodycznych do działu *Procenty* został zaproponowany alternatywny sposób poprowadzenia lekcji otwierającej serię lekcji poświęconych procentom. W podanej przez nas propozycji aplet *procenty01* przestał pełnić funkcję podręcznika podającego uczniowi gotową wiedzę, a stał się potwierdzeniem prawidłowości twórczej pracy ucznia.

Aplet *procenty03* nie ma pola wyboru "Wniosek" - po jego otwarciu wyświetla się informacja opisująca sposób postępowania w obliczaniu procentu danej wielkości (podany jest gotowy algorytm postępowania). Proponujemy więc, aby przed rozpoczęciem pracy z tym apletem podjąć się rozwiązania z uczniami problemu tj. poszukania odpowiedzi na postawione pytania-problemy: "Obniżka cen o 30% - co to znaczy? Jak obliczyć nową cenę towaru? W jakich sytuacjach obliczamy procent z danej liczby?" (zob. wskazówki metodyczne do działu Procenty) i tak pokierować pracą ucznia, aby uczniowie samodzielnie podali sposób obliczania procentu danej wielkości. Praca z apletem *Procenty03* rozpocznie się wówczas - tak jak w przypadku apletu *procenty01* - od potwierdzenia prawidłowości twórczej pracy uczniów.

Podobnie zbudowany jest aplet *procenty06* - na kolejnych kartach wyświetlają się definicje i gotowe algorytmy postępowania w obliczaniu: procentu danej liczby, liczby na podstawie jej procentu, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, liczby większej/mniejszej o dany procent od zadanej liczby. Tak więc, powyższe wskazówki pozostają w mocy w trakcie pracy również i z tym apletem.

VI.

Efektywne wykorzystanie apletów do działu *Wyrażenia Algebraiczne* opierać się może na skrypcie i scenariuszach lekcji. Należy pamiętać o tym, by tak zorganizować pracę ucznia z apletem, aby nie ulegał on pokusie zaznaczenia pola wyboru z poprawną odpowiedzią na postawione w aplecie pytanie, przed przedyskutowaniem postawionych pytań. Na przykład, w aplecie *algebraiczne03* postawiono przed uczniem pytania: "Gdzie wykorzystuje się umiejętność obliczania wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego? Jak obliczyć wartość liczbową wyrażenia algebraicznego?" - pozwólmy się uczniom wypowiedzieć, przedyskutujmy odpowiedzi, a dopiero potem wyświetlmy te podane w aplecie. Taka organizacja pracy zmobilizuje ucznia do aktywności myślowej.

Aplet *algebraiczne04* (karty Mnożenie sumy przez jednomian - teoria oraz Mnożenie sum algebraicznych - teoria) może zostać ponownie wykorzystany w pracy z uczniem na IV etapie edukacyjnym, w trakcie lekcji "Wzory skróconego mnożenia". Może stanowić on inspirację dla ucznia w twórczej pracy prowadzącej do "odkrycia" wzorów skróconego mnożenia.

VII.

Aplety do działu *Równania* zawierają dużo przykładów i materiałów do ćwiczeń. Taka zawartość tych materiałów dydaktycznych jest uzasadniona, gdyż niemalże cały dział *Równania* realizowany jest z wykorzystaniem metody ćwiczeniowej. Następuje ćwiczenie umiejętności i wykorzystywania wiadomości zdobytych we wcześniejszym etapie edukacyjnym, a uczniowie poszerzają swą wiedzę i zdobywają nowe umiejętności jedynie z zakresu układów równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. W momencie wprowadzania nowych dla ucznia treści pojawia się możliwość pracy metodą problemową, o czym szerzej napisałyśmy we wskazówkach metodycznych do działu *Równania*.

Aplet *rownania2* może być wykorzystany przez nauczyciela do weryfikacji wiedzy uczniów. Nauczyciel wybiera któregoś ucznia do odpowiedzi, uczeń losuje przykład - równanie do rozwiązania, rozwiązuje je samodzielnie, a następnie zaznaczając kolejne pola wyboru sam sprawdza, czy podane przez niego rozwiązanie jest poprawne. Takie ocenianie wiedzy i umiejętności wiedzy ucznia jest ocenianiem kształtującym. W podobny sposób można wykorzystać aplety *rownania3, rownania10, uklady01*.

Na szczególną uwagę zasługują sposoby reprezentacji treści zadań opisujących sytuację w dwóch momentach czasowych (aplet *rownania0*5) bądź treści zadań dotyczących roztworów (stopów, mieszanin, itp.) (*rownania06*). Tabelaryczna reprezentacja treści takich zadań przemawia do ucznia, rzuca światło na sytuację opisaną w zadaniu i ułatwia uczniowi zbudowanie modelu matematycznego problemu, który stoi przed nim do rozwiązania. Te dwa aplety może również wykorzystać nauczyciel IV etapu edukacyjnego i wdrożyć zaproponowane w apletach sposoby reprezentacji treści zadań wymienionych typów.

VIII.

Aplety do działu *Wykresy funkcji* są materiałami dydaktycznymi wspierającym pracę twórczą ucznia. Wiele apletów (np. *funkcje02)* jest utworzonych w taki sposób, że ukierunkowują aktywność myślową ucznia na samodzielne skonstruowanie przez niego wiedzy (np. zdefiniowanie pojęcia funkcji). Na szczególną uwagę zasługuje aplet *funkcje05*, który w sposób dynamiczny obrazuje podstawowe pojęcia związane z pojęciem funkcji. Polecamy go do wykorzystania również w trakcie pracy z uczniami szkoły ponadgimnazjalnej w trakcie początkowych lekcji z zakresu funkcji.

IX.

Aplety do działu *Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa* zawierają zróżnicowany materiał: teorię, przykłady, zadania. Proponujemy, pracę z apletami rozpocząć dyskusją o tematyce związanej z zagadnieniami z zakresu statystyki lub elementów rachunku prawdopodobieństwa bliskimi uczniowi. Każdy uczeń ma/miał okazję odczytywać diagramy, wykresy, tabele reprezentujące pewne dane (np. wyniki sondaży i inne statystki), ma również pewne skojarzenia z pojęciami "prawdopodobieństwo", "doświadczenie losowe" i na swój sposób je rozumie. Warto wykorzystać tę wiedzę i doświadczenia uczniów i prowokować ich do samodzielnego definiowania pojęć. Aplet wówczas będzie służył do sprawdzenia poprawności rozumowania uczniów (im samym i nauczycielowi), do uściślenia definicji, a nie do pracy z gotową definicją.

X.

Realizacja (obszernego) działu *Figury płaskie* stwarza doskonałą okazję do stwarzania sytuacji dydaktycznych w których uczeń odkrywałby wiedzę matematyczną w trakcie pracy z programem GeoGebra. We wskazówkach metodycznych do tego działu podałyśmy liczne propozycje problemów do rozwiązania na poszczególnych lekcjach wraz ze wskazaniem środków dydaktycznych wspierających pracę badawczą ucznia.

W apletach do działu *Figury płaskie* zamieszczone są gotowe konstrukcje, uczeń nie wykonuje ich samodzielnie. Ma on jednakże możliwość dokonywania pewnych dynamicznych zmian w skonstruowanych obiektach czy dokonywania zmian w charakterystykach liczbowych obiektów za pomocą suwaków. Uczeń ma okazję do obserwowania zmian, zauważania pewnych własności skonstruowanych obiektów, ale nie zmienia to faktu, że jest to nadal praca z gotowym obiektem matematycznym. Dlatego zalecamy, aby uczeń samodzielnie konstruował obiekty geometryczne wykorzystując możliwości programu GeoGebra (zob. wskazówki dydaktyczne do działu).

Aplety do działu *Podstawowe figury geometryczne* zawierają dużo treści i mogą tworzyć swoiste kompendium wiedzy matematycznej, pełnić rolę interaktywnych tablic matematycznych, z których mogliby również korzystać uczniowie uczący się w szkole podstawowej.

Aplety do działu *Koło i okrąg* zawierają treści ściśle związane z realizacją tego działu. Prowokują twórczą pracę ucznia, a odpowiednie kierowanie przez nauczyciela jego pracą może owocować odkryciem przez ucznia nowej dla niego wiedzy. Aplety te mogą również służyć uczniom szkoły ponadgimnazjalnej w przygotowaniach do lekcji poszerzających wiedzę o kole i okręgu.

Aplety do działu *Okrąg wpisany i opisany na wielokącie* proponujemy potraktować jako sprawdzenie poprawności twórczej pracy ucznia (wskazówki dotyczące zorganizowania takiej pracy zamieszczone zostały we wskazówkach metodycznych). Mogą być również wykorzystane w podsumowaniu poszczególnych lekcji - do powtórzenia kolejnych kroków konstrukcji obiektów geometrycznych lub w fazie wstępnej kolejnej lekcji, na której potrzeba przywołać zdobyte wcześniej wiadomości i umiejętności z uwagi na ich wykorzystywanie w trakcie bieżących zajęć lekcyjnych.

Aplety do działów *Symetrie* i *Trójkąty prostokątne* są ściśle związane z tymi działami. Instrukcje do ich efektywnego wykorzystania na poszczególnych lekcjach zamieszczone zostały w skrypcie do działu i scenariuszach lekcji oraz we wskazówkach metodycznych do działu.

Aplety w których zamieszczono dowody twierdzeń Pitagorasa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa warto wykorzystać jako baza do nauczania dowodzenia twierdzeń, do rozwijania rozumienia pojęć takich jak: twierdzenie, założenie twierdzenia, teza twierdzenia, dowód twierdzenia.

We wskazówkach metodycznych zaproponowałyśmy realizację działu *Podobieństwo figur* metodą problemową (problemowo-ćwiczeniową). Proponujemy więc, aby aplety do tego działu służyły sprawdzeniu poprawności rozwiązania problemu, poprawności pracy twórczej uczniów.

XI.

Aplety do działu *Bryły* znakomicie wspierają realizację działu. Dodatkowo praca z apletami wspiera wyobraźnię ucznia, umożliwia "oglądanie" figur z różnych stron, w powiększeniu, w pomniejszeniu. W apletach zamieszczone są także rysunki ilustrujące treści zadań. Wybrane przez nauczyciela aplety proponujemy wykorzystać w trakcie lekcji w szkole podstawowej związanymi z figurami przestrzennymi - dostarczają wiele przykładów różnych brył, siatek brył.

Aplet *bryly04* może służyć uczniom (II, III i IV poziomu edukacyjnego) w nabieraniu doświadczenia w sporządzaniu rysunków brył na płaszczyźnie. Uczeń ma możliwość przemieszczania wierzchołków i natychmiastowego obserwowania czytelności rysunku.

Wiele apletów może służyć do ilustracji treści zadań niezamieszczonych w przygotowanych materiałach do działu. Takim apletem jest na przykład aplet *bryły10*

Aplety można wykorzystać do wspierania wyobraźni nawet studentów szkół wyższych.

Przygotowane materiały dydaktyczne: skrypty, scenariusze i aplety mogą zostać wykorzystane w indywidualnym procesie nauczania-uczenia się ucznia i idąc dalej - mogą tworzyć bazę materiałów dydaktycznych w nauczaniu na odległość.

Sposoby ewaluacji zajęć

Innowacyjny i interdyscyplinarny Program, opracowane metody i materiały dydaktyczne, przygotowane przez autorów projektu, mają stanowić dla nauczycieli narzędzie, które znacznie poprawi skuteczność i ułatwi im pracę z uczniami. Autorzy spodziewają się więc pozytywnego wpływu zastosowania przygotowanych narzędzi pracy nauczyciela i ucznia na jakość procesu nauczania - uczenia się matematyki. Aby te spodziewane efekty pracy potwierdziły się w rzeczywistości, musi mieć miejsce ewaluacja zajęć.

Od ewaluacji zależy jakość procesu nauczania-uczenia. Przeprowadzenie takiej oceny szczególnie istotne jest w omawianym przypadku, gdy wprowadzany jest do użytkowania innowacyjny program nauczania wraz z gotowymi narzędziami i metodami pracy na lekcjach całego trzeciego etapu edukacyjnego. Nauczanie-uczenie się matematyki ma być wspierane programem GeoGebra w sposób ciągły, tym bardziej wskazane jest poddanie ocenie przygotowanego narzędzia i opracowanych metod pracy. Wyniki ewaluacji powinny być podstawą decyzji mających na celu poprawę jakości kształcenia matematycznego uczniów szkoły gimnazjalnej i wprowadzenia korekt do Programu, do poszczególnych zajęć. Warto przy tym pamiętać, że ewaluacja jest "przede wszystkim narzędziem do pozyskiwania informacji mającym wspomagać proces decyzyjny i budować współodpowiedzialność za osiągane rezultaty pracy, nie oferuje natomiast gotowych rozwiązań czy sposobów postępowania"[8]. Nie ma również gotowych wzorów i schematów czy rozwiązań metodologicznych, które moglibyśmy zastosować w procesie ewaluacji zajęć lekcyjnych z matematyki, których realizacja opierać się będzie na innowacyjnym i interdyscyplinarnym programie zawierającym elementy zastosowania programu edukacyjnego GeoGebra do nauczania matematyki.

Do metodologii badań ewaluacyjnych zaadaptowane zostały metody, techniki i narzędzia badań takich dziedzin nauki, jak: socjologia, psychologia, pedagogika czy ekonomia, a najczęściej stosowanymi są: analiza dokumentacji, analiza ankiety, wywiad, obserwacja. Informacje, które zostaną pozyskane tymi metodami mogą być opisywane i analizowane ilościowo i jakościowo.

Proponujemy następujące sposoby ewaluacji zajęć:

1. Ocenianie przez nauczyciela efektów procesu nauczania-uczenia się matematyki poprzez sprawdzanie prac wykonanych w domu, prac wykonanych samodzielnie na lekcji (kartkówki, klasówki), prac wykonanych na lekcji w grupach, sprawdzanie postawy twórczej i zaangażowania w wykonywanie projektów, rozwiązywanie pytań kluczowych, problemów.

2. Analiza ankiety ewaluacyjnej dla ucznia - po realizacji programu nauczania,

3. Analiza ankiety ewaluacyjnej dla nauczyciela - po realizacji programu nauczania.

Poniżej zamieszczone zostały kwestionariusze ankiet: dla nauczyciela i dla ucznia.

Kwestionariusz ankiety ewaluacyjnej dla nauczyciela

Szanowni Państwo!

8

Ciężka B., *Planowanie ewaluacji wewnętrznej w szkole (placówce) wraz z przykładami projektów ewaluacji*, http://www.npseo.pl/data/documents/2/196/196.pdf

W ciągu ostatnich trzech lat prowadziliście Państwo lekcje matematyki, realizując podstawę programową w oparciu o innowacyjny program nauczania zawierający elementy zastosowania technologii informacyjno-komunikacyjnych, w tym programu edukacyjnego Geogebra w nauczaniu matematyki.

Niniejsza ankieta ma na celu zbadanie Państwa odczuć po dobyciu tych lekcji. Jest ona anonimowa. Uzyskane od Państwa informacje pozwolą na dokonanie oceny wprowadzonej w programie innowacji dydaktycznej i posłużą udoskonaleniu metod pracy na lekcjach matematyki z wykorzystaniem opracowanych materiałów dydaktycznych, a także zostaną wykorzystane w opracowaniu naukowym. Dlatego prosimy o poważne potraktowanie tej ankiety oraz udzielenie szczerych i wyczerpujących odpowiedzi.

Dziękujemy za wypełnienie ankiety.

Autorzy Programu

Pytanie 1. W jaki sposób wprowadzone do nauczania matematyki innowacyjne środki dydaktyczne (program Geogebra, aplety, skrypty) wpłynęły na:

a) aktywność uczniów na lekcji

....
....
....
....
....

b) zaangażowanie uczniów w rozwiązywanie zadań, problemów w trakcie lekcji i w domu

....
....
....
....
....

c) zaangażowanie uczniów w prace nad realizacją projektów (o ile były realizowane)

....
....
....
....
....

d) twórczą postawę uczniów

....
....
....
....
....

e) motywację uczniów do pracy

....
....
....
....
....

f) zachowanie uczniów na lekcji

....
....
....
....
....

g) inne aspekty pracy ucznia

....
....
....
....
....

Pytanie 2.

a) Jakie czynniki aktywują (lub mogą aktywować) Pani/Pana uczniów do pracy na lekcji?

....
....
....
....
....

b) Jakie czynniki wpływają (lub mogą wpływać) na zaangażowanie Pani/Pana uczniów w pracę na lekcji, w domu, w trakcie realizacji projektu?

....
....
....

....
....

c) Jakie czynniki wpływają (lub mogą wpływać) na przyjmowanie przez Pani/Pana uczniów twórczej postawy?

....
....
....
....
....

d) Jakie czynniki wpływają na zachowanie Pani/Pana uczniów na lekcji?

....
....
....
....
....

Pytanie 3. Jak Pani/Pan ocenia przydatność w pracy nauczyciela matematyki opracowanych materiałów dydaktycznych?

....
....
....
....
....

Pytanie 4. Jak Pani/Pan ocenia przydatność w pracy nauczyciela matematyki programu Geogebra?

....
....
....
....
....

Pytanie 5. Jaki Pani/Pan ocenia wpływ realizacji innowacyjnego programu nauczania matematyki, zawierającego elementy zastosowania technologii informacyjno-komunikacyjnych, w tym programu edukacyjnego Geogebra w nauczaniu matematyki, na rozwój zawodowy nauczyciela, który ten program realizuje?

....
....
....

....
....

Inne uwagi i spostrzeżenia, sugestie:

....
....
....
....
....
....

Kwestionariusz ankiety ewaluacyjnej dla ucznia

Drodzy Uczniowie!

Uczestniczyliście w innowacyjnych lekcjach matematyki, podczas których wykorzystywane były elementy technologii informacyjno-komunikacyjnych, w tym program edukacyjny Geogebra.

Niniejsza ankieta ma na celu zbadanie Waszych odczuć po dobyciu tych lekcji. Jest ona anonimowa. Uzyskane od Was informacje pozwolą na dokonanie oceny wprowadzonej do nauczania matematyki innowacji dydaktycznej i posłużą udoskonaleniu metod pracy na lekcjach matematyki z wykorzystaniem opracowanych materiałów dydaktycznych, a także zostaną wykorzystane w opracowaniu naukowym. Dlatego prosimy Was o bardzo poważne potraktowanie tej ankiety oraz udzielenie szczerych i wyczerpujących odpowiedzi.

Dziękujemy za wypełnienie ankiety.

Autorzy Programu

Pytanie 1. Czy wykorzystanie programu edukacyjnego Geogebra i apletów utworzonych w tym programie pomogło Ci w nauce matematyki?

tak ☐ nie ☐

Uzasadnij swoją odpowiedź.

....
....

………
………
………

Pytanie 2. Czy chciałbyś na lekcjach matematyki pracować z komputerem i/lub programami komputerowymi, np. Geogebra?

tak ☐ nie ☐

Uzasadnij swoją odpowiedź.

………
………
………
………
………

Pytanie 3. Które z wymienionych poniżej środków dydaktycznych były dla Ciebie najbardziej przydatne w nauce matematyki <u>na lekcji</u>?

Możesz zaznaczyć więcej niż jeden środek, ale wówczas określ hierarchię przydatności wskazanych przez Ciebie środków, przyporządkowując im kolejne liczby naturalne, począwszy od środka najbardziej przydatnego.

1. podręcznik ☐ 2. skrypty dla ucznia ☐

3. aplety ☐ 4. program Geogebra ☐

Pytanie 4. Które z wymienionych poniżej środków dydaktycznych były dla Ciebie najbardziej przydatne w nauce matematyki <u>w domu</u>?

Możesz zaznaczyć więcej niż jeden środek, ale wówczas określ hierarchię przydatności wskazanych przez Ciebie środków, przyporządkowując im kolejne liczby naturalne, począwszy od środka najbardziej przydatnego.

1. podręcznik ☐ 2. skrypty dla ucznia ☐

3. aplety ☐ 4. program Geogebra ☐

Pytanie 5. Które z wymienionych poniżej aktywności podejmowałaś/łeś w trakcie rozwiązywania zadań, problemów przy pomocy apletów lub programu Geogebra?

Możesz zaznaczyć więcej niż jedną odpowiedź.

1. obserwowanie ☐ 2. analizowanie ☐ 3. wyciąganie wniosków ☐

4. przedstawianie swoich wniosków na forum klasy ☐ 5. logiczne myślenie ☐

6. zadawanie pytań ☐ 7. dyskutowanie ☐ 8. współpraca z innymi ☐

9. krytyczne ocenianie swojego rozumowania ☐

10. dążenie do rozwiązania zadania, problemu ☐

11. inne (wymień, jakie) ⍰

....

....

Pytanie 6. Jak ocenisz swoje zaangażowanie w pracę w trakcie rozwiązywania zadań, problemów przy pomocy apletów lub programu Geogebra?

Możesz zaznaczyć więcej niż jedną odpowiedź.

1. byłam/em zainteresowany rozwiązaniem zadania, problemu

2. byłam/em znudzony tym, co działo się na lekcji ⍰

3. pracowałam/em wytrwale, aż do rozwiązania zadania, problemu ⍰

4. łatwo się zniechęcałam/em ⍰

5. szybko dawałam/em za wygraną ⍰

6. czekałam/em, aż zadanie rozwiążemy wspólnie z nauczycielem ⍰

7. starałam/em się samodzielnie coś wymyślić ⍰

8. czekałam/em, aż inni coś wymyślą ⍰

9. odczuwałam/em satysfakcję z odkrycia czegoś nowego ⍰

10. dzieliłam/emm się swoimi wnioskami z innymi ⍰

11."wyłączałam/em się", zajmując się czymś innym ⍰

12. inne (wymień, jakie) ⍰

....

....

Pytanie 7. Które czynniki zazwyczaj motywowały Ciebie do pracy z apletami i/lub programem Geogebra?

Zaznacz więcej niż jeden czynnik i określ hierarchię ważności wskazanych przez Ciebie czynników, przyporządkowując im kolejne liczby naturalne, począwszy od czynnika najważniejszego.

1. otrzymanie dobrej oceny ⍰

2. satysfakcja z pracy z apletami i/lub programem Geogebra ⍰

3. możliwość samodzielnego odkrycia nowej wiedzy ⍰

4. możliwość nauki z wykorzystaniem apletów i/lub programu Geogebra ⍰

5. możliwość nauczenia się czegoś nowego ⍰

6. możliwość odniesienia sukcesu ⍰

7. możliwość zaimponowania innym ⍰

8. możliwość rozwoju ⍰

9. możliwość zastosowania wiedzy w praktyce

10. inne (wymień, jakie)
....
....

Pytanie 8. Która lekcja zapadła Ci w pamięć? Z jakiego powodu?

....
....
....
....
....

Pytanie 9. Co powiedziałbyś przyjacielowi, który rozważa podjęcie nauki w klasie w której lekcje matematyki mają odbywać się z wykorzystaniem tych samych, z których Ty korzystałeś, środków dydaktycznych (aplety, skrypty, program Geogebra)?

....
....
....
....
....

<u>Metryczka:</u>

Płeć: Dziewczyna Chłopak

Klasa: I II III

Profil klasy: ....

Bibliografia

Ciężka B., *Planowanie ewaluacji wewnętrznej w szkole (placówce) wraz z przykładami projektów ewaluacji*, http://www.npseo.pl/data/documents/2/196/196.pdf

Dylak S., *Konstruktywizm jako obiecująca perspektywa kształcenia nauczycieli*, www.cen.uni.wroc.pl/teksty/konstrukcja.pdf,

http://www.ceo.org.pl/pl/ok

Klus-Stańska D., *Konstruowanie wiedzy w szkole*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn, 2002,

Krygowska Z.: 1997; *Zarys dydaktyki matematyki*, tom I, WSiP Warszawa,

Kupisiewicz Cz., *O efektywności nauczania problemowego*, PWN, Warszawa 1965

Limont W., *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych.* Kraków 2004,

Okoń W., *Słownik pedagogiczny,* Warszawa 1984,

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół; załączniki nr 2 i 4,

Rybak A., Lénárt I., *Trzy światy geometrii*, ISBN 978-83-88396-79-3, Wydawnictwo Dla Szkoły, Bielsko-Biała 2013,

Rybak A., *Multimedia in Education*, ISBN 978-3-659-52228-4, Lambert Academic Publishing, Germany 2014,

Szmidt K.J., *Szkice do pedagogiki twórczości.* Kraków 2001,

Żylińska M., *Neurodydaktyka. Nauczanie i uczenie się przyjazne mózgowi*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń 2013.