Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla gimnazjów"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nakładka

do innowacyjnego programu nauczania matematyki dla gimnazjów

Praca z uczniem zdolnym

Program zawierający elementy zastosowania TIK (Technologii Informacyjno-Komunikacyjnych, w tym darmowego oprogramowania GeoGebra do nauczania matematyki)

Opracowanie: Anna Szwancyber

Warszawa 2015

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Spis treści

Wstęp

"Zdolności to różnice indywidualne, które sprawiają, że przy jednakowej motywacji i uprzednim przygotowaniu poszczególni ludzie osiągają w porównywalnych warunkach zewnętrznych niejednakowe rezultaty w uczeniu i działaniu." [1]

Spotkać na swojej drodze ucznia zdolnego to marzenie każdego nauczyciela. Musimy go jednak trafnie rozpoznać i rozsądnie pokierować jego edukacją, tak by nie zmarnować zgromadzonego w nim potencjału. To, niestety bardzo trudne wyzwanie stawiane przed nauczycielem i szkołą.

Czym charakteryzuje się uczeń zdolny?

Takie pytanie zadaje sobie lub zadawał każdy nauczyciel. Literatura pedagogiczna i psychologiczna jest pełna opracowań na ten temat. Wyłania się z nich jeden, w miarę spójny, obraz ucznia zdolnego, którego cechować ma:

- ponadprzeciętny poziom rozwoju intelektualnego, zdolność szybkiego zapamiętywania, umiejętność prawidłowego kojarzenia i rozumowania;
- ciekawość świata i ludzi, zdolność wnikliwej obserwacji otoczenia;
- dociekliwość, zadawanie dużej liczby pytań podczas lekcji jak i po jej zkończeniu;
- duży zasób wiadomości pozaszkolnych, niekiedy ukierunkowane uzdolnienia i pasje;
- wykonywanie zadań umysłowych z przyjemnością, umiejętność skupienia uwagi;
- bogata wyobraźnia, ciekawe, oryginalne pomysły;
- niezależna postawa, obrona swoich poglądów i pomysłów.

Niestety, często uczeń zdolny, oprócz tych wymienionych cech bywa niepokorny. Zdarza się, że przeszkadza na lekcji. Bywa niegrzeczny, nie potrafi współpracować z rówieśnikami. Na lekcji, na której nie może się rozwijać bywa znudzony, krytykuje wypowiedzi innych. Często mamy styczność z takimi właśnie uczniami, z jednej strony ponadprzeciętnie inteligentnymi, z drugiej o specyficznym stopniu rozwoju emocjonalnego i społecznego. Pewnie dlatego praca z uczniem zdolnym zakwalifikowana jest jako praca z dzieckiem o specjalnych potrzebach edukacyjnych.

[1]1 *Z. Pietrasiński, Psychologia, red. T. Tomaszewski, Warszawa: PWN, 1977, s. 736*

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Jak rozpoznać ucznia zdolnego?

Prawidłowe zdiagnozowanie wychowanka, jako ucznia zdolnego jest bardzo trudnym zadaniem. Często uczniowie zdolni, mający łatwość uczenia się nie chcą pokazywać swoich zdolności, wolą swój wolny czas wykorzystać na rozwijanie swoich zainteresowań, często bardzo rozległych. Bywają też osoby, dla których najważniejsza jest potrzeba akceptacji grupy rówieśniczej, która często izoluje ucznia zdolnego. Inny problem stanowią gimnazjaliści nudzący się w szkole. Nie są oni zainteresowani wykonywaniem zbyt łatwych zadań szkolnych, gdyż nie mobilizują ich one do podejmowania wysiłku. Ta grupa uczniów zdolnych uczy się w szkole gorzej niż rówieśnicy. Przez to bywają oni błędnie klasyfikowani jako osoby mające trudności w nauce.

Częste jest także błędne uznawanie uczniów za zdolnych. Nauczyciele traktują jako oznaki wybitnych zdolności dobre dostosowania się ucznia do reguł pracy i życia uczniów w szkole oraz szybkiego wykonywania wszystkich wskazanych uczniowi zadań, a także bardzo dobre wyniki w nauce. Zdarza się także potraktowanie jako zdolnego, tego ucznia, który wyróżnia się na korzyść na tle klasy mimo, iż jest ona słaba, a sam uczeń w innej klasie uchodziłby za przeciętnego.

Istnieje wiele metod, które pomogą ujawnić uzdolnienia, są to:

- obserwacja pracy ucznia na lekcjach;
- obserwacja relacji uczeń – grupa;
- ankieta;
- wyniki sprawdzianów, egzaminów;
- informacja zwrotna po przeprowadzonych zajęciach;
- rozmowa z rodzicami;
- testy zainteresowań;
- testy inteligencji;
- rozmowa z nauczycielami;
- rozmowa z psychologiem lub pedagogiem;
- rozmowa z rówieśnikami;

- wybitne osiągnięcia (w konkursach, olimpiadach, oryginalne prace uczniów).

Najwłaściwsze wydaje się korzystanie przy diagnozie z możliwie wielu metod i dopiero na podstawie ich łącznej analizy zakwalifikowanie gimnazjalisty, jako ucznia zdolnego.
Od lutego 2010 do grudnia 2014 roku realizowany był projekt systemowy "Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym". W ramach tego projektu przygotowano wiele publikacji dostępnych na stronie[2]
Przed diagnozą ucznia zdolnego zachęcam do lektury dwóch pozycji:

Pierwsza z nich to "Uczeń zdolny - analiza dostępnych narzędzi diagnostycznych" przygotowana przez Natalię Cybis, Ewę Drop, Tomasza Rowiński oraz Jana Cieciuch.

Można tam między innymi znaleźć informację na temat:

- teoretycznych podstaw zdolności i ich rozpoznawania;
- opis stosowanych w polskich szkołach metod identyfikacji i diagnozy zdolności na podstawowym, gimnazjalnym i ponadgimnazjalnym poziomie kształcenia;
- opis kompleksowych programów identyfikacji ucznia zdolnego realizowanych na terenie całej Polski;
- przykłady dobrych praktyk - rozwiązań stosowanych w polskich szkołach;
- szczegółowy opis narzędzi przeznaczonych do diagnozy zdolności (w tym rodzaj licencji i osoby mogące na nich pracować).

Kolejna pozycja to "Model pracy z uczniem zdolnym w gimnazjum" autorstwa Teresy Dąbrowskiej, Lidii Dyndor, Marii Foryś, Kingi Gałązka, Elżbiety Kolczyńskiej, Anety Madziara, Katarzyny Pęczek, Ewy Sprawka oraz Ewy Wachowicz. Książka podzielona jest na trzy części:

- uczeń zdolny, a uwarunkowania psychologiczno - społeczne

Znajdziemy tutaj opisany kontekst pracy z uczniem zdolnym, w tym wyjaśnienie pojęć związanych ze zdolnościami, prawne aspekty wspierania ucznia zdolnego oraz jego charakterystykę. Ponadto opisane są tam współczesne koncepcje pracy z uczniem zdolnym.

Przytoczenia warte są przyczyny trudności uczniów zdolnych, mające swe źródła zarówno w funkcjonowaniu poznawczym, jak i emocjonalno - społecznym.[3]

[2] Dostęp 07. 07. 2015
[3] Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela, Krzysztof Kruszewski, PWN, Warszawa 1991

- uczniowie miewają fantastyczne pomysły, które próbują realizować bez względu na istniejące warunki;
- w wypowiedziach akcentują elementy słabo dostrzegalne i uznawane przez innych, przez co nie są rozumiani i doceniani, co w konsekwencji bywa źródłem ich buntu, niekiedy agresji;
- są tolerancyjni wobec sprzeczności i wieloznaczności, wiele zagadnień rozpatrują z różnych punktów widzenia, są przez to odbierani jako nieprecyzyjni w myśleniu i spostrzeganiu, interesuje ich dużo zagadnień, przez trudno ich ukierunkować;
- zadają wiele "niewygodnych" pytań, co nie zawsze jest pozytywnie oceniane przez nauczycieli;
- uczą się szybko, skracają działania potrzebne do rozwiązania, nie zawsze potrafią zapisać, nawet wyjaśnić, jak doszli do danego rezultatu, przez co bywają posądzani o niesamodzielną pracę;
- w szkole pracują nad zadaniami szybko, z humorem, często rozmawiają i żartują, mogą przez to sprawiać wrażenie, że lekceważą dane zadanie;
- preferują pracę indywidualną, co bywa odbierane jako trudności w życiu społecznym;
- czasem wolą ukrywać swoje zdolności w obawie o brak akceptacji rówieśników.

W drugiej części podana jest propozycja modelu pracy z uczniem zdolnym, którą można łatwo dostosować do zaplanowania własnych działań. Autorzy zwracają uwagę, że uzyskanie wysokiego poziomu osiągnięć w każdej dziedzinie, to wypadkowa zdolności, pilności, staranności oraz innych cech osobowościowych i charakterologicznych, w tym motywacji, a także wsparcia środowiska. Zatem osiągnięcie sukces ucznia zdolnego jest możliwe, jeśli współpracują rodzice, nauczyciele, najbliższe środowisko ucznia, a on sam jest chętny i właściwie zmotywowany do pracy.

Model pracy z uczniem zdolnym podzielony został na następujące etapy:

- identyfikacja

Warto skorzystać z opracowanych, darmowych narzędzi: tabeli do obserwacji pracy ucznia na zajęciach w postaci próbek czasowych, kwestionariuszy samoobserwacji wychowanka, ankiety dla nauczyciela, nauczycielskiego formularza oceny postawy twórczej ucznia, tabeli z zestawem stwierdzeń kontrolnych służących rozpoznaniu talentu twórczego, kwestionariusz obserwacji gimnazjalistów wyjątkowo uzdolnionych oraz kwestionariusza obserwacji - wskaźnika zachowań znamionujących uzdolnienie.

- diagnoza

Tutaj również znajdziemy cenne, gotowe materiały, bez których diagnoza ucznia zdolnego nie byłaby możliwa. Jest to: kwestionariusz rozmowy z rodzicami, kwestionariusz diagnostyczny (wypełniają go niezależnie od siebie dwie osoby, które dobrze znają badanego ucznia) oraz przykładowy harmonogram spotkań z rodzicami.

- analiza zasobów szkoły

Dokonanie takiej analizy uświadomi nauczycielowi, z czego może korzystać, o co należałoby jeszcze wzbogacić bazę szkoły, aby zapewnić uczniowi optymalne warunki rozwoju. Bardzo ważnym elementem są technologie informacyjno - komunikacyjne, które umożliwiają dostosowanie treści, zadań i stopnia trudności do potrzeb i zainteresowań uczniów.

Szerokie zastosowanie powinien znaleźć w procesie nauczania program GeoGebra oraz nasz innowacyjny program nauczania matematyki, dzięki któremu uczeń zdolny może samodzielnie wykonywać niektóre konstrukcje i ilustrować pojęcia oraz badać związki między obiektami matematycznymi.

- zaprojektowanie procesu wsparcia ucznia

W omawianej publikacji znajdziemy opis i gotowe formularze planu pracy. Opisane są tam metody i techniki stosowane w celu dostosowania warunków kształcenia do potrzeb ucznia zdolnego.

- ewaluacja sumatywna
- badanie losów absolwentów.

Dwa ostatnie punkty są również szczegółowo omówione i poparte przykładami.

Formy i metody pracy z uczniem zdolnym, czyli szybciej, więcej, na wyższym poziomie, oryginalnie

Praca z uczniem zdolnym powinna być prowadzona na lekcji oraz na zajęciach dodatkowych. Na lekcjach wymaga od nauczyciela indywidualizacji procesu nauczania.

Trzeba precyzyjnie dobrać treści i dostosować tempo nauczania, nie tylko do ucznia zdolnego, ale także uwzględnić resztę zespołu klasowego, w którym mamy uczniów przeciętnych oraz tych mających problemy z opanowaniem matematyki. Jest to najtrudniejsze zadanie dla uczącego. Można realizować je stosując:

- krótkie rozmowy nauczyciela z uczniem, zwykle komentujące w sposób rozszerzający bieżący materiał lub kończące się sformułowaniem problemu, a potem rozwiązaniem go;
- przygotowanie przez ucznia referatów po przeczytaniu odpowiedniej literatury;
- korygowanie błędów kolegów (szukanie błędów w rozumowaniu);
- prowadzenie przez uczniów fragmentów lekcji (czasami przygotowanie całej lekcji);
- zachęcanie do czytania fachowych czasopism, wymaga to jednak choć krótkiego omówienia lektury z uczniem;
- zwiększanie wymagań, co do ścisłości i precyzji ich wypowiedzi;
- stworzenie uczniom najzdolniejszym okazji do swobodnego wyboru zadań trudniejszych, swobodnej decyzji w podejmowaniu dodatkowych zadań (warto mieć przygotowana bazę zadań dodatkowych do każdego działu, wówczas, jeśli uczeń skończy już wykonywać poleconą pracę, może rozwiązywać zadania dodatkowe);
- indywidualizację nauki na lekcjach bez wykraczania poza nauczane treści, poprzez rozwiązywanie trudniejszych problemów w ramach omawianego zagadnienia, dodatkowe prace domowe lub prace długoterminowe;
- samodzielne opracowywanie zagadnień i prezentowanie ich na szerszym forum (koło zainteresowań, klasa, szkoła);
- przygotowywanie przez uczniów pomocy dydaktycznych (zarówno w wersji elektronicznej jak i tradycyjnej);
- promocję osiągnięć i dorobku uczniów zdolnych (może to być gazetka, spotkania, podziękowania, rozmowa na forum klasy czy szkoły);
- współpracę z poradniami psychologiczno - pedagogicznymi, domami kultury, uczelniami wyższymi, warto zapraszać ciekawych ludzi, naukowców do szkoły lub

korzystać z oferty szkół wyższych skierowanych dla uczniów szkół gimnazjalnych, czasem są to wykłady, warsztaty lub koła zainteresowań;

- organizowanie konkursów w rozwiązywaniu zadań trudniejszych na poziomie klasy i szkoły;
- doskonalenie własnych kompetencji w pracy z uczniem zdolnym;
- wymianę doświadczeń z innymi nauczycielami.

Praca z uczniem zdolnym powinna być tak nakierowana, aby:

- zaciekawić go danym zagadnieniem;
- stwarzać mu możliwość odkrywania pewnych zależności, a więc powinna uwzględniać prace długoterminowe, projektowe i badawcze;
- mobilizować do logicznego myślenia, stwarzać okazję do analizy i syntezy;
- dawać mu satysfakcję z wykonywanych zadań i osiąganych postępów;
- stwarzać możliwość współpracy z rówieśnikami o podobnych zainteresowaniach i uzdolnieniach;
- stwarzać mu możliwość przygotowania się i brania udziału w różnorodnych konkursach przedmiotowych z matematyki o różnej randze i szczeblu.

Baza zadań konkursowych z różnych wojewódzkich konkursów przedmiotowych

Tylko "trening czyni mistrzem", dlatego rozwiązywanie różnorodnych zadań pozwoli rozwijać się uczniowie zdolnemu i przygotowywać się do udziału w konkursach. Poniżej przedstawiam bazę linków do stron, na których zamieszczone są zadania konkursowe z matematyki.[4]

- Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z matematyki w województwie śląskim

Zakładka - Konkurs z MATEMATYKI

- Konkurs matematyczny dla uczniów gimnazjum - województwo małopolskie
- Wojewódzkie Konkursy Przedmiotowe, organizowane przez Kuratorium w Białymstoku - województwo podlaskie
- Konkurs Przedmiotowy w województwie łódzkim
- Wojewódzki Konkurs z Matematyki w województwie wielkopolskim
- Konkurs w województwie kujawsko - pomorskim
- Konkurs w województwie podkarpackim
- Konkurs Przedmiotowy z Matematyki w województwie lubuskim
- Mazowieckie Konkursy Przedmiotowe
- Lubelski Konkurs Przedmiotowy z Matematyki
- Konkurs w województwie świętokrzyskim

Inne konkursy:[5]

- Albus, Galileo, Multitest: wszystkie konkursy są płatne
- Alfik matematyczny, MAT: płatne konkursy organizowane przez organizację Jersz
- ZDolny Ślązak Gimnazjalista: konkursy dla uczniów dolnośląskiego
- Kangur matematyczny: międzynarodowy konkurs płatny

[4] Dostęp 07.07.2015
[5] Dostęp 07.07.2015

- Genius Logicus: międzynarodowy, płatny konkurs logicznego myślenia
- Krakowska matematyka: konkurs oraz zajęcia dodatkowe, bezpłatne organizowane przez krakowski oddział SNM
- Liga Naukowa Matematyczna. Dolnośląski Konkurs Gimnazjalistów o Puchar Prezydenta Wrocławia: bezpłatny konkurs dla uczniów gimnazjów z województwa dolnośląskiego
- Mistrzostwa Polski w Łamigłówkach: konkurs krajowy, bez ograniczeń wiekowych
- Nudna Matematyka oraz Przygoda z matematyką: płatne konkursy, które organizuje Pracownia Matematyki Pałacu Młodzieży w Katowicach
- Olimpiada Matematyczna: bezpłatny, ogólnopolski konkurs
- Olimpus: ogólnopolska, płatna olimpiada przedmiotowa dla uczniów
- Mistrz matematyki: konkurs dla uczniów klas trzecich, pod patronatem Śląskiego Towarzystwa Oświatowego Delta[6]
- Pangea: międzynarodowy konkurs matematyczny

Propozycja zadań pogłębiających podstawę programową

Dużo różnorodnych, ciekawych ćwiczeń znajdziemy w zbiorach zadań, dostępnych bezpłatnie w wersji elektronicznej.

1. Dariusz Kulma, Zbiór zadań dla nauczycielek i nauczycieli matematyki uczących w klasach 1, 2 i 3 gimnazjum, Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT, 2012 http://zasobyip2.ore.edu.pl
2. Dariusz Kulma we współpracy ze Sławomirem Dziugłem**,** Zbiór zadań dla nauczycielek i nauczycieli matematyki uczących w klasach 1, 2 i 3 gimnazjum, Firma Edukacyjno-Wydawnicza ELITMAT, **2011** http://zasobyip2.ore.edu.pl/
3. Wojciech Guzicki, Rozszerzony program matematyki dla gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki, dostępny na stronie ORE
4. Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki, dostępny na stronie ORE

[6] Dostęp 07.07.2015

1. Liczby wymierne dodatnie i niedodatnie

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania typu:

- zapisywanie największej liczby za pomocą symboli rzymskich, które się nie powtarzają;
- wykazywanie podzielności liczb;
- rozwiązywanie sudoku;
- wyznaczanie liczb w kryptogramach;
- rozkład liczby na czynniki pierwsze;
- rozbudowane wyrażenie arytmetyczne;
- szacowanie wartości wyrażeń.

Propozycje zadań:

a) Czy liczba $1\underbrace{00...00}_{2n\ \text{zer}}1$, gdzie *n* - to dowolna liczbę naturalną, jest podzielna przez 11?

b) Wykonaj działanie: 0, 0(23) + 1, (2), wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

c) Podaj trzy ułamki mające mianownik 8, leżące na osi między liczbą $-\frac{11}{12}$, a liczbą $-\frac{1}{2}$.[7]

d) Dla jakich cyfr liczba 2a35b52 jest podzielna przez 20?

e) Ile jest liczb całkowitych od 0 do 999 włącznie, niepodzielnych ani przez 5, ani przez 7. Odpowiedź uzasadnij.[8]

f) Podaj jakie liczby odpowiadają literom. Pamiętaj, że różnym literom odpowiadają różne cyfry.

[7] Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki, Liga zadaniowa, Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką, Wydawnictwo Aksjomat Toruń, 2004

[8] Krystyna Dworecka, Zbigniew Kochanowski, Konkursy matematyczne - wybór zadań, WSiP, Warszawa 1993

$$\begin{array}{r} G\ R\ A\ D \\ +\ D\ E\ S\ Z\ C\ Z \\ \hline S\ T\ R\ A\ T\ A \end{array}$$

g) Oblicz: $\frac{1}{1 \cdot 2}+\frac{1}{2 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 4}+\frac{1}{4 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 6}+\frac{1}{6 \cdot 7}+\frac{1}{7 \cdot 8}+\frac{1}{8 \cdot 9}+\frac{1}{9 \cdot 10}$

h) Wyznacz sumę: $\frac{2}{6 \cdot 9}+\frac{2}{9 \cdot 12}+\frac{2}{12 \cdot 15}+\cdots+\frac{2}{45 \cdot 48}$

i) Pewna liczba sześciocyfrowa zaczyna się cyfrą 2. Jeżeli tę cyfrę z pierwszego miejsca przestawimy na ostatnie, to otrzymamy liczbę równą czwartej części liczby pierwotnej. Jak to liczba?[9]

2. Potęgi

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania polegające na:

- zapisywaniu w najprostszej postaci wyrażeń zawierających potęgi, przy których upraszczaniu należy zastosować wszystkie wzory dotyczące potęgowania;
- wykonywania działań na liczbach zapisanych w postaci wykładniczej;
- określania co jest ostatnia cyfrą liczby będącej potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym;
- zapisywanie i odczytywanie liczb w różnych systemach liczenia.

Propozycje zadań:

a) Wyznacz ostatnia cyfrę liczby: $2014^4 + 4^{356}$

b) Zapisz liczę 213 za pomocą sumy wybranych potęg liczby 2.

c) Zapisz w postaci jednej potęgi: $4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5$.

d) Uzasadnij, że liczba $27^{50} : 81^{37}$ jest większa od 8.

e) Zapisz w postaci jednej potęgi; $12 \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^{11} + 3^{12}$.

f) Uzasadnij, która z liczb jest większa: 200^{300}, czy 300^{200}.

[9] Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki, Liga zadaniowa, Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką, Wydawnictwo Aksjomat Toruń, 2004

g) Podaj, ile wynosi reszta z dzielenia liczby 2^{305} przez 4.

h) Wykaż, że liczba: $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{99} + 2^{100}$ jest podzielna przez 3.

i) Czy istnieje trójkąt o bokach długości 4^{2014}, 4^{2105}, 4^{2016}?

3. Pierwiastki

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania polegające na:

- obliczaniu wartości rozbudowanych wyrażeń arytmetycznych;
- wykonywaniu działań na pierwiastkach wymagających uprzedniego wyłączenia czynnika przed znak pierwiastka;
- szacowaniu wartości pierwiastków;
- usuwaniu niewymierności z mianownika ułamka;
- wykazywaniu, że pierwiastek kwadratowy z danego wyrażenia arytmetycznego jest liczbą naturalną.

Propozycje zadań:

a) Wykaż, że $\sqrt{13+4\sqrt{3}} = 1+2\sqrt{3}$.

b) Uzasadnij, że: $\sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{75}$

c) Oblicz, nie używając kalkulatora: $\frac{3\sqrt[3]{16}-4\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}}{6\sqrt[3]{2000}+5\sqrt[3]{128}}$.

d) Usuń niewymierność z mianownika ułamka: $\frac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{3}}$; $\frac{2-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}}$; $\frac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$.

e) Wykaż, że $4\sqrt{5\sqrt{48}} - 3\sqrt{30\sqrt{27}} = -\sqrt[4]{30000}$

f) Suma dwóch liczb wynosi $\sqrt{14}$, a ich różnica $\sqrt{7}$. Jaki jest iloczyn tych liczb?

4. Procenty

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania polegające na:

- rozwiązywaniu zadań dotyczących stężeń procentowych;
- rozwiązywaniu zadań dotyczących oprocentowania lokat i oszczędności;
- wykorzystaniu promili;
- obliczaniu procentu z procentu;
- rozwiązywaniu zadań dotyczących punktów procentowych.

Propozycje zadań:

a) Liczba dziewcząt uczestniczących w zajęciach koła matematycznego stanowi 47% liczby chłopców. Jaki procent liczby dziewcząt stanowi liczba chłopców?

b) Oblicz ile litrów roztworu 45% i ile litrów roztworu 60% należy zmieszać, aby uzyskać 20 litrów roztworu 50%.

c) Świeże grzyby maja w sobie 90% wody, suszone już tylko 12%. Ile grzybów należy zebrać, aby zgromadzić zapas 2 kg grzybów suszonych?

d) W roku 2007 plony pszenicy z hektara w stosunku do roku 2006 wzrosły o 25%, w roku 2008 były znowu takie same jak w 2006. Określ procentowy spadek wydajności w stosunku do roku 2007.[10]

e) 18% pewnej liczby jest o 2 większe od 12% tej liczby. Jaka to liczba?

f) O ile procent można obniżyć czesne, aby przy wzroście liczby uczniów o 20% łączna kwota wpłat na utrzymanie szkoły wzrosła o 8%?

g) Dwie trzecie pewnego towaru sprzedawca sprzedał z zyskiem 25%, 20% tego towaru z zyskiem 40%, a pozostałą część z zyskiem 30%. Ile procentowo zyskał na sprzedaży tego towaru. Wynik podaj z dokładnością do 0,1%.

[10] Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki, Liga zadaniowa, Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką, Wydawnictwo Aksjomat Toruń, 2004

h) Kasi podano szklankę czarnej kawy. Wypiła 20% zawartości i dopełniła szklankę mlekiem. Następnie, po wymieszaniu, znów wypiła 20% zawartości i znów dopełniła mlekiem. Ponownie wymieszała i po wypiciu 60% zawartości obliczyła, że w pozostałej części jest o 28 cm^3 więcej kawy niż mleka. Jaka była pojemność szklanki?

i) Które oprocentowanie jest korzystniejsze, jeśli planujemy oszczędzać cały rok:
12,5% z kapitalizacją kwartalną czy 13% z kapitalizacją roczną?

5. Wyrażenia algebraiczne

Opisywanie za pomocą wyrażeń algebraicznych związków między różnymi wielkościami

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania typu:

- zapisywanie liczb spełniających określone warunki, przykładowo podzielnych przez daną liczbę całkowitą, dającą przy dzieleniu przez podaną liczbę określoną resztę,

Propozycje zadań:

a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego liczbę, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2.

b) Zapisz trzy kolejne liczby naturalne parzyste, z których najmniejsza to 2n - 4.

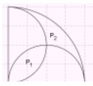
c) Wyrażenie algebraiczne, którego wartość będzie zawsze dodatnia, niezależnie od wartości zmiennych.

- opisywanie za pomocą wyrażeń algebraicznych związków między figurami geometrycznymi czy własności figur (liczba przekątnych, miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego).

Propozycje zadań:

a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego wzór na pole figur P_1 oraz P_2. Porównaj te pola.

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl



b) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego ile przekątnych ma wielokąt wypukły, jeśli liczbę jego boków oznaczymy przez n.

c) Opisz za pomocą wyrażenia algebraicznego ile krawędzie, wierzchołków ścian ma graniastosłup (ostrosłup), którego podstawą jest n- kąt.

- zamiana jednostek oraz wyrażenia dwumianowane.

Propozycje zadań:

Wynik podaj we wskazanej jednostce:

a) *a* km + *b* cm - *c* mm = ...m
b) *x* min + *0,3* h + *y* h = ...min
c) p kg + r dag + s gr = ...dag

- zapisywanie rozwiązania zadania wieloetapowego, tekstowego za pomocą wyrażenia algebraicznego.

Propozycje zadań:

a) Cenę książki obniżona o k %. Kosztuje ona obecnie x złotych. Jak była początkowa cena książki?

b) Jacek ma przeczytać lekturę, która ma a stron. Obliczył, że aby zdążyć musi od poniedziałku do piątku włącznie czytać po b stron, a w sobotę i niedzielę o 5 stron dziennie więcej. Niestety w środę nie przeczytał nic. Ile stron dziennie musi teraz czytać, aby zdążyć na czas i zachować proporcje, aby w weekend czytać dziennie o 5 dni więcej niż w dni, kiedy chodzi do szkoły?

Obliczanie wartości liczbowej wyrażeń algebraicznych

Zagadnie to można pogłębić dobierając takie wyrażenia, które na początku wymagają doprowadzenia do najprostszej postaci wyrażenia lub które wymaga wykonania złożonych obliczeń. Zadaniem sprawdzającym zarówno umiejętność obliczania wartości liczbowej wyrażania, jak i umiejętność czytania ze zrozumieniem jest zdanie, w którym określimy jakieś nowe działanie za pomocą wyrażania algebraicznego i polecimy wykonać je na podanych liczbach. Warto też rozwiązywać zdania, które wymagają podania liczb, dla których dane wyrażenie ma lub nie ma sensu.

Propozycje zadań:

a) Dla jakich wartości m, liczba $\frac{10^{2013}+2}{m}$ jest liczbą całkowitą?

b) Średnią kwadratową liczb nieujemnych x i y nazywamy liczbę, która jest równa pierwiastkowi kwadratowemu ze średniej arytmetycznej drugich potęg tych liczb. Zapisz odpowiednie wyrażenie wyrażające średnią kwadratową, a następnie oblicz ją dla liczb 3 i 8.

c) Podaj, dla jakich wartości a, wyrażenie $\frac{\sqrt[3]{a}-3a}{\sqrt{2-a}}$ nie ma sensu.

d) Działanie a @ b wykonujemy następująco, a @ b = $2a^2$ - 3a : (-2b) -0,3 b^3. Oblicz: 2 @ (-4).

Redukcja wyrazów podobnych w sumie algebraicznej. Dodawanie i odejmowanie sumy algebraicznej.

Zadania z tego tematu warto pogłębić o przykłady zawierające wyrazy podobne zapisane w postaci nieuporządkowanych jednomianów, jak również wyrazy o współczynnikach liczbowych będących liczbami wymiernymi i niewymiernymi.

Propozycje zadań:

a) Zredukuj wyrazy podobne w wyrażeniu 0,41abac -2,1acb + 3baca - 5,2bac.

b) Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $2\frac{2}{7}a - 0{,}34\,b + 0,(3)a - \sqrt{2}\,b \cdot \sqrt{8}$.

Mnożenie jednomianów, mnożenie sum algebraicznych przez jednomian oraz mnożenie sum algebraicznych.

Zagadnienie to warto pogłębić dobierając przykłady, w których jednomiany będą miały współczynniki będące liczbami niewymiernymi, różnego rodzaju ułamkami i liczbami mieszanymi. przy mnożeniu sum można brać pod uwagę sumy kilkuwyrazowe.

Propozycje zadań:

a) Zamień iloczyn na sumę:

   a. $3{,}2a^2b\,(-\,2\sqrt{2}a + 3\frac{2}{7}b - 0{,}2b)$

   b. - (-3a +2c -3.1d)(2,1a + 0,25b).

b) O liczbach całkowitych a i b wiadomo, że liczba a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2, zaś liczba b przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4. Jaka jest reszta z dzielenia iloczynu liczb a i b przez 5?

Wyłączanie wspólnego czynnika z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias

Od uczniów zdolnych można wymagać, aby wyłączali największy wspólny czynnik przed nawias, zamieniali sumę na iloczyn poprzez grupowanie wyrazów i wykorzystywali tę umiejętność do rozwiązywania równań.

Propozycje zadań:

a) Zamień sumę (2x - 0,2y)·3c - 4d (-0,2y + 2x) na iloczyn.

b) Wyłącz największy wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej

   $\frac{6}{54}a^3b^4 + \frac{16}{27}a^5b^7 - \frac{24}{9}a^{13}b^{24} + \frac{12}{54}a^{11}b^7.$

c) Podaj wszystkie liczby całkowite, które są rozwiązaniem równania

   2ax -4a - 6bx + 12b = 0.

d) Wykaż, że jeśli x, y są liczbami naturalnymi, parami różnymi, to liczba: 2 + x + 2y + xy jest liczbą złożoną.

Wyznaczanie wskazanej wielkości z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych

Zadanie wymagające przekształcania wzorów są trudne dla większości uczniów, a przekształcenie wzoru wymagające więcej niż 2 - 3 operacji jest już pogłębieniem tego zagadnienia. Umiejętność ta ma jednak szerokie zastosowanie interdyscyplinarne i pomoże uczniom osiągać dobre wyniki zarówno z fizyki czy chemii.

Propozycje zadań:

a) Cenę pewnego towaru obniżono o p%. O Ile procent należy podnieść cenę, aby była taka sam jak na początku.

b) Oblicz wysokość czworościanu prawidłowego, którego objętość wynosi a [j^3], a wysokość odstawy ma b [j].

6. Równania i układy równań:

Przy realizacji tego zagadnienia można pogłębić temat wykonując zadania polegające na:

- rozwiązywaniu rozbudowanych równań, zawierających ułamki oraz nawiasy;
- rozwiązywaniu zadań tekstowych za pomocą równań lub układów równań;
- dopisywaniu równania do danego, tak, aby z podanym tworzyło ono układ równań zależnych (niezależnych, sprzecznych);
- rozwiązywaniu zadań dotyczących wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych;
- obliczaniu zadań dotyczących wydajności;
- rozwiązywaniu prostych równań z wartością bezwzględną.

Propozycje zadań:

a) Znajdź wszystkie liczby całkowite, które są rozwiązaniem równania: (a + 1) (b - 2) = 9.

b) Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których wyrażenie $\frac{16n+2}{2n+1}$ jest liczbą całkowitą.

c) Ile jest czwórek (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie: ab + bc + cd + da =55. Odpowiedź uzasadnij.[11]

d) Rozwiąż równanie: $\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|-4\right|=0$[12]

e) Do równania: 3x + 4 y = 5 dopisz drugie, tak, aby razem utworzyły układ równań, który ma jedno rozwiązanie (nie ma rozwiązania, ma nieskończenie wiele rozwiązań).

[11] I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, zawody III stopnia, dostęp 07.07.2015
[12] III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów, zawody I stopnia, dostęp 07.07.2015

f) Zbiornik możemy napełnić korzystając z pompy nr 1, wówczas trwa to 12 godzin, albo z pompy nr 2, wtedy potrzeba 15 godzin, jest jeszcze dostępna pompa nr 3, za pomocą której napełnienie trwa 8 godzin. Potrzebujemy napełnić zbiornik najszybciej jak się da, jak to zrobić i ile czasu na to potrzeba.

g) Pomiędzy miastami A i B kursuje autobus. Droga między tymi miastami prowadzi przez wzgórze. Autobus jadąc pod górę rozwija prędkość 25 km/h, a z góry 50 km/h. Podróż z A do B trwa 3,5 godziny, a z B do A 4 godziny. Ile jest kilometrów z miasta A do miasta B?[13]

h) Julka i Franek zmierzyli krokami odcinek długości 143m. Ponieważ długości ich kroków były różne, ich ślady pokryły się 20 razy. Krok Julki wynosi 55cm. Znajdź długość kroku Franka.

i) Kilku przyjaciół postanowiło kupić wspólnie łódź motorową. Gdyby każdy z nich wpłacił po 7000zł, to byłoby o 3000zł za mało. Gdyby zaś każdy z nich wpłacił 8000zł, to byłoby o 4000zł za dużo. Ilu było przyjaciół, a ile kosztowała łódź motorowa?

j) Podaj wszystkie liczby dwucyfrowe, które wzrastają 9 razy, gdy między cyfrę jedności i cyfrę dziesiątek wstawimy zero.

7. Wykresy funkcji

Tematyka związana z funkcjami została bardzo okrojona na poziomie gimnazjum. Niestety często na konkursach zdarzają się zadania znacznie wykraczające poza program.

Pogłębiając, a nie poszerzając tematyki związanej z tym zagadaniem należy wykonywać zadania polegające na:

- zaznaczaniu punktów w układzie współrzędnych, których rzędne lub odcięte spełniają określone warunki;
- sporządzaniu wykresu funkcji we wskazanej dziedzinie;
- opisywaniu funkcji na różne sposoby;
- odczytywaniu własności funkcji;
- zastosowaniu funkcji do opisu zjawisk;

[13] Krystyna Dworecka, Zbigniew Kochanowski, Konkursy matematyczne - wybór zadań, WSiP, Warszawa 1993

- odczytywaniu z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu, argumentu dla danej wartości funkcji, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich zero (tutaj można powiedzieć o miejscu zerowym funkcji oraz o pojęciu funkcji malejącej, rosnącej i stałej);
- sprawdzaniu czy punkt o podanych współrzędnych należy do wykresu funkcji o danym wzorze;
- odczytywaniu informacji z wykresów funkcji.

Propozycje zadań:

a) Pracownicy pewnego sklepu mogą wybrać, w jaki sposób będzie naliczane ich miesięczne wynagrodzenie. Do wyboru mają dwie opcje:

   I: 1000 zł plus 10% kwoty liczonej od obrotów sklepu

   II: 1500zł plus 5% kwoty liczonej od obrotów sklepu

   Wykonaj, w jednym układzie współrzędnych, wykresy funkcji ilustrujące te zależności a następnie odczytaj z wykresu przy jakich obrotach sklepu korzystniejsza jest każda z ofert.

b) Jaka jest odległość punktu A = (-3; 6) od początku układu współrzędnych?

c) Ania wyszła z domu do szkoły o godzinie 7.30. Na przystanek autobusowy szła z prędkością 2km/h przez 15 minut. Potem czekała 4 minuty na autobus, którym jechała do szkoły ze stałą prędkością 50 km/h przez 20 minut. Z przystanku do szkoły Ania musiał przejść jeszcze 300 m, zajęło jej to 5 minut.

   Wykonaj wykres, na osi x zaznaczaj czas podróży do szkoły, a na osi y przebytą drogę. O której Ania dotarła do szkoły?

d) Jaką liczbą może być druga współrzędna punktu A = (2; y), tak aby leżał on w III ćwiartce układu współrzędnych?

e) Funkcja liniowa, to funkcja postaci y = ax + b , gdzie a i b są dowolnym liczbami rzeczywistymi. Funkcja f spełnia warunki:

   $f(3)+f(2)+f(1)=15$ oraz $f(4)+f(6)+f(5)=42$

   Oblicz: $\sqrt{f(7)-f(8)+2f(9)}$

f) Wiedząc, że pomiędzy wielkościami x i y zachodzi zależność x + 2y = 3, uzupełnij brakujące komórki tabeli.

x	0		2		
y		-3,5		7	-2

g) Właściciel piekarni zaopatruje się w mąkę w odległym o 330 km młynie lub w oddalonej o 10 km hurtowni. W młynie cena jednej 50 kg worka mąki 80zł, a w hurtowni jest o 20% wyższa. Zakupioną mąkę przywozi do piekarni firma transportowa, która pobiera opłatę w wysokości 1 zł 20 gr za kilometr (niezależnie od wielkości ładunku). Niech P(x) H(x) oznaczają całkowite koszty zakupu x worków mąki (wraz z kosztami transportu) odpowiednio u producenta i w hurtowni.
Podaj wzory funkcji P oraz H.
Przy, ile co najmniej mąki musi zakupić właściciel piekarni, by korzystniejsze dla niego było zaopatrywanie w młynie?

Uwaga: Propozycje zadań do wykonania z wykorzystaniem programu GeoGebra, znajdują się na końcu rozdziału.

8. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Pogłębiając tematykę związaną z tym zagadaniem można wykonywać zadania polegające na:

- interpretowaniu danych przedstawionych za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów oraz histogramów;
- wyszukiwaniu, selekcji i porządkowaniu informacji z dostępnych źródeł;
- przedstawianiu danych w tabeli, za pomocą diagramu słupkowego lub kołowego, histogramu;
- wyznaczaniu średniej arytmetycznej i mediany zestawu danych (można poprosić o podanie modalnej, rozstępu wyników);
- omówieniu problemu możliwości przedstawiania danych statystycznych w sposób pozwalający nimi manipulować;
- analizowaniu prostych doświadczeń losowych (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu) i określaniu prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń w tych doświadczeniach

(prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą, dwójki lub szóstki w rzucie kostką, itp.).

Propozycje zadań:

1. W miejscowości Stokrotkowo przeprowadzono badanie, policzono ilu jest słuchaczy Polskiego Radia "Trójka" w poszczególnych przedziałach wiekowych. Oto wyniki:

Grupa wiekowa	6 - 10	11 - 18	19 - 28	29 - 43	44 - 63
Liczba słuchaczy	30	36	40	90	40

   Wykonaj diagram słupkowy oraz histogram ilustrujący liczbę słuchaczy. Zastanów się, który sposób dokładniej ilustruje zebrane informacje i dlaczego?

2. Średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie Alfa, wynosi 3300zł. Firma zatrudnia 25 pracowników. Zatrudniono nowego pracownika. Jakie są jego miesięczne zarobki, jeśli obecnie średnie miesięczne wynagrodzenie w firmie jest o 3% wyższe niż poprzednio?

3. Spośród cyfr wylosowano (bez zwracania) trzy: 2, 6 oraz 7. Na ile sposobów można wylosować jeszcze dwie, tak, aby średnia arytmetyczna wszystkich wylosowanych cyfr nie uległa zmianie?

4. Niech S oznacza średnią arytmetyczną, M - medianę, a M_o - modalną (czyli wartość występującą najczęściej). Dany jest zestaw liczb: 1, 2, 3, 2, 4, 5, x, 4, 2, 5, 6. Wyznacz x, tak, by:

   a. M = S

   b. $S = M_o$

5. W worku znajduje się 10 piłek: 3 czerwone, 2 niebieskie i 5 białych. Ile najmniej piłek należy wyciągnąć, aby mieć pewność, że wylosowana piłka będzie koloru niebieskiego?

6. Kacper zapomniał dwie ostatnie cyfry sześciocyfrowego numeru telefonu do kolegi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykręcając dokładnie pierwsze cztery,

zapamiętane cyfry, a dwie ostanie przypadkowo, uda mu się połączyć za pierwszym razem.

7. Ile można utworzyć wszystkich czterocyfrowych, różnych od siebie numerów pin?

8. Figury płaskie

Pogłębiając tematykę związaną z tym zagadaniem można wykonywać zadania polegające na:

- wykorzystaniu związków między kątami utworzonymi przez prostą przecinającą dwie proste równoległe;
- rozpoznawaniu wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz stycznej do okręgu;
- wykorzystaniu faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności;
- rozpoznawaniu kątów środkowych i obliczaniu ich miar;
- obliczaniu długości okręgu i łuku okręgu;
- obliczaniu pole koła, pierścienia kołowego, wycinka kołowego;
- stosowaniu twierdzenie Pitagorasa;
- wykorzystaniu własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach;
- obliczaniu pól i obwodów wielokątów;
- zamianie jednostek pola;
- rozwiązywaniu zadań dotyczących podobieństwa figur;
- stosowania cech przystawania trójkątów w rozwiązywaniu zadań;
- rozwiązywaniu zadań z zakresu symetrii;
- rozwiązywaniu zadań dotyczących symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta;
- wykorzystaniu związków miarowych w trójkątach prostokątnych o kątach ostrych o miarach 60°, 30°, 45°;
- rozwiązywaniu zadań dotyczących okręgów opisanych na trójkątach oraz okręgów wpisanych w trójkąty;

- rozpoznawaniu oraz rysowaniu wielokątów foremnych i wykorzystaniu ich podstawowych własności.

Propozycje zadań:

a) Dane są dwa okręgi o promieniach różnej długości styczne zewnętrznie w punkcie S i proste przechodzące przez punkt S przecinające jeden z okręgów w punkcie P, a drugi w punkcie R. Udowodnij, że kąty środkowe oparte na łukach SP i SR są równe.[14]

b) Zewnętrzne kąty trójkąta są proporcjonalne do liczb 6 : 7 : 11. Znaleźć kąt między wysokościami wychodzących z wierzchołków mniejszych kątów wewnętrznych tego trójkąta.[15]

c) Wyznacz wszystkie trójkąty prostokątne, których boki są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi parzystymi.

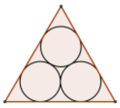
d) Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątna na trzy równe części. Znajdź stosunek boków tego prostokąta.[16]

e) Każdą z dwóch identycznych prostokątnych kartek papieru rozcięto na dwie części. Z pierwszej kartki otrzymano dwa prostokąty o obwodach 40 cm każdy, z drugiej zaś również dwa prostokąty, ale o obwodach 50 cm każdy. Oblicz obwód wyjściowych kartek.[17]

f) Piłka nożna jest uszyta z białych i czarnych kawałków skóry. Czarne kawałki są pięciokątami foremnymi, a białe sześciokątami foremnymi. Każdy pięciokąt jest połączony brzegami z pięcioma sześciokątami, a każdy sześciokąt z trzema pięciokątami i trzema sześciokątami. Piłka ma 12 czarnych pięciokątów. Ile ma ona białych sześciokątów?[18]

[14] Krystyna Dworecka, Zbigniew Kochanowski, Konkursy matematyczne - wybór zadań, WSiP, Warszawa 1993
[15] Zbigniew Bobiński, Piotr Nodzyński, Mirosław Uscki, Liga zadaniowa, Zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką, Wydawnictwo Aksjomat Toruń, 2004
[16] Witold Bednarek, Konkurs matematyczny w gimnazjum, Przygotuj się sam!, Wydawnictwo Nowik, 2003
[17] Kangur Matematyczny, przykładowe zadania, Kadet 2008, dostęp 07.07.2015
[18] Kangur Matematyczny, przykładowe zadania, Kadet 2001, dostęp 07.07.2015

g) Oblicz pole i obwód trójkąta, wiedząc, że wszystkie okręgi są parami styczne i mają promień długości 2cm.



9. Bryły

Pogłębiając tematykę dotyczącą brył można wykonywać zadania polegające na:

- rozpoznawaniu graniastosłupów i ostrosłupów (w tym także prawidłowych);
- rysowaniu siatek i rzutów brył obrotowych powstałych wyniku obrotu danych figur;
- obliczaniu pola powierzchni i objętości graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym);
- rozwiązywaniu zadań polegających na poznawaniu własności brył platońskich;
- zamianie jednostek objętości i pola powierzchni.

Propozycje zadań:

a) Podaj wszystkie przykłady wielościanów, spełniających warunki:

   a. w każdym wierzchołku łączą się 3 krawędzie;

   b. liczba ścian jest równa liczbie wierzchołków.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej oraz objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości 3dm.

c) Dwie ściany prostopadłościanu o wspólnej krawędzi długości 15 cm są prostokątami podobnymi w skali k = 1,5. Oblicz pole powierzchni i objętość tej bryły.[19]

d) W sześcianie o krawędzi 2 dm zostały obcięte wszystkie naroża płaszczyznami poprowadzonymi przez środki trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej powstałej bryły.[20]

e) Kula o promieniu R jest wpisana w stożek, którego wysokość jest równa 8 cm, a promień podstawy 5cm. Oblicz długość promienia kuli.

f) Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest wycinkiem koła o promieniu 3 i kącie środkowym 120 °. Oblicz objętość tego stożka.

g) Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu rombu o kącie ostrym 60 °i boku równym 8cm wokół dłuższej przekątnej rombu.

h) Średnica obranego ze skórki grejpfruta ma 9 cm. Wyciśnięty z niego sok stanowi 40% objętości obranego owocu. Ile trzeba obrać takich grejpfrutów, aby otrzymany z nich sok napełnił 1,5 - litrowe naczynie?

Propozycje tematów projektów do realizacji

Opisane są tu dwa przykładowe tematy projektów, które można zrealizować w pracy z uczniem zdolnym.

Temat: Jak dowieść, że jeśli 2 > 1, to 2 = 1?

Cele ogólne projektu:

- rozwijanie kreatywności;
- wdrażanie do samodzielnej pracy;
- kształtowanie umiejętności planowania pracy;
- doskonalenie współpracy w grupie.

[19] Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów gimnazjów województwa śląskiego, etap II, r.sz. 2012/2013, dostęp 07.07.2015
[20] Wojewódzki Konkurs Przedmiotowy z Matematyki dla uczniów gimnazjów województwa śląskiego, etap III, r.sz. 2009/2010, dostęp 07.07.2015

Cele szczegółowe projektu - kształcenie umiejętności:

- zbierania i opracowywania wiadomości na dany temat;
- selekcji i przetwarzania zdobytych informacji;
- korzystania z różnych źródeł informacji;
- przygotowywania prezentacji;
- wygłaszania publicznych wystąpień;
- poprawnego wykonywania działań na liczbach i wyrażeniach algebraicznych.

Instrukcja wykonania projektu:

- Zapoznaj się z wiadomościami na temat sofizmatów.
- Zaplanuj zadania szczegółowe, które będą realizowane w trakcie trwania projektu. Zaplanuj co będzie efektem końcowym projektu, może to być przykładowo gazetka, broszura, strona internetowa, blog lub prezentacja multimedialna poświęcona temu tematowi.
- Zbierz potrzebne informacje.
- Opracuj zdobyte informacje, pamiętając aby nadać im taką formę, aby zaciekawić odbiorców podczas prezentacji oraz przekazać im te wiadomości w sposób jasny i czytelny.
- Przygotuj się do publicznego wystąpienia (przed klasą lub większym gronem uczniów).
- Podsumuj swoją pracą, zastanów się czy zrealizowałeś wszystkie zaplanowane działania, czy jesteś zadowolony z efektów swojej pracy, co i jak mógłbyś zmienić w projekcie, czy możesz go jeszcze jakoś rozbudować, wskaż jego mocne i słabe strony.

Proponowane źródła informacji:

1. http://www.serwis-matematyczny.pl/static/st_artykuly_paradoksy_i_sofizmaty.php[21]
2. http://www.matematyka.wroc.pl/book/rozmaitosci/sofizmaty

[21] Dostęp 07.07.2015

3. Bobiński Zbigniew, Ciszewska - Nowak Maria, Jarek Paweł i inni, Miniatury matematyczne 26, Sofizmaty matematyczne, o podziale odcinka na równe części.

Temat: Moja najbliższa okolica - okiem matematyka

Cele ogólne projektu:

- rozwijanie kreatywności;
- wdrażanie do odpowiedzialności za pracę;
- wdrażanie do umiejętnego planowania pracy;
- doskonalenie współpracy w grupie.

Cele szczegółowe projektu - kształcenie umiejętności:

- zbierania i opracowywania wiadomości na dany temat;
- selekcji i przetwarzania zdobytych informacji;
- korzystania z różnych źródeł informacji;
- przygotowywania różnych form prezentacji;
- wygłaszania publicznych wystąpień;
- poprawnego wykonywania diagramów i wykresów.

Instrukcja wykonania projektu:

- Zorientuj się gdzie możesz uzyskać, jak najwięcej wiadomościami dotyczących twojej najbliższej okolicy. Może odwiedzić urząd gminy lub miasta?
- Zaplanuj zadania szczegółowe, które będą realizowane w trakcie trwania projektu. Zaplanuj co będzie efektem końcowym projektu, może to być przykładowo gazetka, broszura, strona internetowa, zbiór zadań, blog lub prezentacja multimedialna poświęcona temu tematowi.
- Zbierz potrzebne informacje.
- Opracuj zdobyte informacje, pamiętając aby nadać im taką formę, aby zaciekawić odbiorców podczas prezentacji i aby przekazać im te wiadomości w sposób jasny i czytelny. Może warto zorganizować szkolny konkurs?
- Przygotuj się do publicznego wystąpienia (przed klasą lub większym gronem uczniów).

- Podsumuj swoją pracą, zastanów się czy zrealizowałeś wszystkie zaplanowane działania, czy jesteś zadowolony z efektów swojej pracy, co i jak mógłbyś zmienić w projekcie, czy możesz go jeszcze jakoś rozbudować, wskaż jego mocne i słabe strony.

Proponowane źródła informacji:

1. Główny Urząd Statystyczny, http://stat.gov.pl/[22]
2. Strona internetowa danego miasta lub gminy
3. Roczniki statystyczne

Praca długoterminowa

Warto zadawać uczniom prace długoterminowe, tak by samodzielnie mogli opracowywać pewne zagadnienia. Poniżej dwie przykładowe propozycja takiej pracy.

Temat: Kwadraty magiczne

Cele ogólne:

- wdrażanie do samodzielnej pracy.
- rozwijanie kreatywności

Cele szczegółowe - kształcenie umiejętności:

- poprawnego wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych;
- wykorzystywania technologii informacyjnej do redagowania zadań dotyczących kwadratów magicznych;
- redagowania tekstów naukowych - zadań matematycznych.

Instrukcja wykonania zadania:

a) Przypomnij sobie co to jest kwadrat magiczny, jeśli nie pamiętasz poszukaj odpowiednich informacji.

b) Przygotuj po dwa kwadraty magiczne dotyczące następujących zagadnień:

[22] Dostęp 07.07.2015

- mnożenie jednomianów;
- mnożenie sum algebraicznych przez jednomian;
- mnożenie sum algebraicznych;
- dodawanie wyrażeń algebraicznych;
- odejmowania wyrażeń algebraicznych.

c) Za pomocą dostępnego edytora tekstu zredaguj przygotowane przez siebie zadania.

d) Podsumuj swoją pracą, zastanów się czy zrealizowałeś wszystkie zaplanowane działania, czy jesteś zadowolony z efektów swojej pracy, co i jak mógłbyś zmienić w pracy, czy możesz ją jeszcze jakoś wzbogacić, wskaż jej mocne i słabe strony.

Temat: Matematyka, daj się uwieść!

Cele ogólne:

- wdrażanie do samodzielnej pracy;
- rozwijanie kreatywności.

Cele szczegółowe - kształcenie umiejętności:

- czytania tekstów naukowych - matematycznych;
- wykorzystywania technologii informacyjnej do referowania danego tematu;
- redagowania tekstów naukowych.

Instrukcja wykonania zadania:

a) Przeczytaj książkę Christofera Drosser, Matematyka, daj się uwieść!, Wydawnictwo Naukowe PWN.

b) Wybierz jeden rozdział i przygotuj na jego temat referat. Postaraj się wzbogacić omawiany problem o prezentację multimedialną go ilustrującą. Wykonaj ją w dowolnym programie do robienia prezentacji.

c) Przygotuj się do wystąpienia przez całą klasą.

d) Podsumuj swoją pracą, zastanów się czy zrealizowałeś wszystkie zaplanowane działania, czy jesteś zadowolony z efektów swojej pracy, co i jak mógłbyś zmienić w pracy, czy możesz ją jeszcze jakoś wzbogacić, wskaż jej mocne i słabe strony.

Gry - czyli nauka przez rozrywkę

To, że uczniowie lubią grać w różnorodne gry, jest oczywiste. Proponuję wykorzystać ich zapał. Warto poświęcić parę minut zajęć koła matematycznego i pozwolić gimnazjalistom trochę się "pobawić". Gry służą rozbudzaniu ciekawości. Uczniowie podejmują próby poszukiwania algorytmów, przewidują wyniki, uczą się logicznego myślenia i planowania strategii. Poniżej zamieszczam krótki opis gier, które sama wykorzystuję na swoich zajęciach. Warto też zachęcić do samodzielnego wykonywania różnego rodzaju gier.

Dobble

W Dobble można grać na pięć sposobów. Najpopularniejszą jest wersja, w której wszystkie karty rozdaje się graczom, a jedną z kart kładzie się na środku stołu. Na dany sygnał gracze patrzą na pierwszą kartę z góry, którą trzymają w ręku i szukają wspólnego symbolu łączącego ją z kartą, która leży na stole. Symbol nazywają głośno i szybko kładą swoją kartę na stole, tworząc stos. Każdy z graczy musi znaleźć wspólny symbol z nową kartą, tylko w ten sposób może się jej pozbyć. Wygrywa ten, kto pierwszy pozbędzie się kart. Symbole na kartach bywają odwrócone i miewają inne rozmiary. Same karty są okrągłe i pełne kolorowych ilustracji roślin, postaci i przedmiotów, a każda z nich jest unikalna i łączy się z innymi kartami tylko jednym symbolem.

Digit

To gra logiczna. Należy ułożyć pokazany na karcie wzór przesuwając tylko jeden patyczek. Gra ćwiczy spostrzegawczość, wyobraźnię, logikę i refleks. Jest doskonałym wprowadzeniem w temat symetrii.

6 bierze!

Każdy z graczy otrzymuje 10 kart, które musi wyłożyć w jednym z czterech rzędów. Kolejni gracze dokładają karty, w ten sposób, aby różnica pomiędzy numerem karty już wyłożonej, a dokładanej była jak najmniejsza. Ten, kto położy szóstą kartę musi wziąć pozostałe pięć i otrzymuje punkty karne. Celem gry jest zebranie jak najmniejszej ilości kart. Każda karta jest warta minus jeden punkt za każdą głowę byka znajdującą się na niej. Zwycięzcą zostaje osoba, która na końcu gry ma najmniejszą ilość byczych głów.

Rummikub

To gra bardzo podobna do remika. Gracz wykłada na stół utworzone przez siebie układy kostek, serie albo grupy. Seria to co najmniej trzy kostki o kolejnych numerach w jednym kolorze. Do wyłożenia trzeba mieć co najmniej 30 punktów. Grupa składa się z trzech lub czterech kostek o tym samym numerze. Zwycięzcą zostaje ten, kto pierwszy pozbędzie się wszystkich kości ze swojego stojaka. Gracz, który wykonał otwarcie (wyłożył się) może manipulować. Do manipulowania musi dołożyć przynajmniej jeden klocek. Gdy nie ma możliwości manipulacji, wtedy trzeba pobrać kość z banku. Kości raz wyłożone muszą pozostać na stole.

Super Farmer

Gra wymyślona przez polskiego matematyka Karola Borsuka. W grze posługujemy się dwoma różnymi dwunastościennymi kostkami, na których znajdują się wizerunki różnych zwierząt. Rzuty kostkami wskazują jakie karty-zwierzęta gracz może wziąć ze stada głównego. Wyrzucenie lisa lub wilka powoduje stratę zwierząt, przed czym uchronić może tylko posiadanie dużego lub małego psa. Kolejne zwierzęta można zdobyć dzięki rzutom kostkami lub drogą wymiany ze stadem głównym. Wygra ten, kto pierwszy zgromadzi w swoim stadzie po jednym przedstawicielu każdego gatunku zwierząt.

Qwirkle

Założenia **Qwirkle** są proste, polegają na dopasowywaniu kolorów i kształtów. Gra wymaga także taktyki i strategicznego planowania. Zbieramy punkty budując z drewnianych płytek wiersze i kolumny z symbolami w tym samym kolorze lub kształcie. Klucz do zwycięstwa to wyobraźnia, spostrzegawczość oraz trochę taktyki i szczęścia.

Zapałczane zagadki

Zasad nie należy chyba nikomu tłumaczyć, należy przełożyć tylko jedną zapałkę, aby rozwiązać zagadkę. Gra zawiera 50 h zagadek. Zmusza do myślenia, rozwijai wyobraźnię i spryt.

Tangram

Celem gry jest ułożenie przedstawionych figur wzorów z dostępnych części tangramu w taki sposób, aby wykorzystać wszystkie części, które muszą do siebie przylegać, ale nie mogą na siebie nachodzić. Każdą część tangramu można odwracać i obracać według potrzeb.

Equate - Scrabble Matematyczne

Equate to rewelacyjna gra planszowa, którą można porównać do "Matematycznych Scrabble". Wykorzystując posiadane płytki, gracz ma za zadanie tworzyć równania matematyczne, zdobywając punkty za każde poprawnie sformułowane równanie. Equate to gra dla 2-4 osób doskonaląca umiejętność wykonywania działań arytmetycznych na liczbach.

Getriko

Mistrz GETRIKO to uniwersalna gra logiczna. W może w nią grać od 1 do 6 osób. Gra polega na manipulowaniu i układaniu kolorowych trójkątów w taki sposób, żeby otrzymać wzór (witraż) zgodny z wylosowaną kartą, przy czym każdy z graczy ma inną kartę i zmierza do ułożenia innego wzoru. Celem gry jest ćwiczenie spostrzegawczości i myślenia kombinatorycznego. Wielokrotne obracanie trójkątów prowadzi bowiem do gromadzenia doświadczeń, które stanowią podstawę kształtowania orientacji przestrzennej, intuicji geometrycznej i wyobraźni. Gra uczy planowania swoich ruchów i przewidywania ruchów przeciwnika.

Kwadrylion

Grę rozpoczyna się od połączenia czterech magnetycznych kwadratów - tak, aby powstała plansza. Celem gry jest dopasowanie na planszy dwanaście elementów układanki-łamigłówki. Każdy z układów ma inne rozwiązanie. Do gry dołączono książeczkę z wyborem zadań - od łatwych po bardzo trudne. Gracz może skorzystać z zadań przykładowych lub stworzyć własne. Gra rozwija: myślenie logiczne, planowanie strategiczne oraz wyobraźnię przestrzenną

Blokus

Gracze dostają zestawy 21 elementów w koralach: czerwonym, niebieskim, zielonym lub żółtym, które kolejno układają na planszy. Przy układaniu elementów, obowiązuje jedna zasada, każdy klocek musi dotykać innego klocka w tym samym kolorze, ale stykać się mogą

tylko narożnikami. Celem gry jest pozbycie się jak największej liczby klocków, ponieważ wygrywa ten gracz, któremu pozostanie ich najmniejsza liczba. gra kończy się w momencie, gdy nie można już dołożyć ani jednego kloca na planszę.
Gra jest polecana przez Instytut Badań Edukacyjnych do użytku przez nauczyciela podczas zajęć matematyki.
Gra ćwiczy: wyobraźnie przestrzenną, tworzenie strategii, umiejętność przewidywania kilku kroków do przodu, koncentrację uwagi.

Więcej informacji i szczegółowy poradnik jak włączać gry do procesu nauczania można znaleźć na stronie Instytutu Badań Edukacyjnych. Chodzi o publikację Renaty Korolczuk i Małgorzaty Zambrowskiej pt. " Pozwólmy dzieciom grać. O wykorzystaniu gier planszowych w edukacji matematycznej".[23] Jest to pozycja dostępna bezpłatnie. Jej lektura będzie zapewne inspiracja do wzbogacenia własnego warsztatu pracy.

[23] Dostęp: 07.07.2015