Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Ciągi liczbowe

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ciągi arytmetyczne i ciągi geometryczne stanowią istotne klasy ciągów zarówno ze względu na ich prosty opis, ciekawe własności oraz możliwe zastosowania. Przed poznaniem tych ciekawych obiektów matematycznych przypomnimy istotną dla udowodnienia wielu własności dotyczących ciągów **zasadę indukcji matematycznej**.

Twierdzenie 1. *Niech W będzie własnością określoną dla wszystkich liczb naturalnych. Jeśli spełnione są następujące założenia:*

1) *zachodzi $W(1)$ (własność W jest prawdziwa dla liczby 1),*
2) *dla każdej liczby naturalnej k, z prawdziwości $W(k)$ wynika prawdziwość $W(k+1)$,*

to $W(n)$ zachodzi dla każdej liczby naturalnej n.

Uwaga . *Należy tu wyraźnie podkreślić, że drugie z założeń w Twierdzeniu 1 ma postać* ***implikacji*** *poprzedzonej kwantyfikatorem. Nie oznacza to więc założenia, że dla każdego k zachodzi $W(k)$, a jedynie, że dla dowolnego k prawdziwa jest implikacja*

$$W(k) \Longrightarrow W(k+1).$$

Dla przypomnienia udowodnimy indukcyjnie równość, która będzie nam potrzebna w dowodzie twierdzenia opisującego wzór na sumę wyrazów pewnego skończonego ciągu.

Zadanie 1. *Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi równość*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rozwiązanie.

1) Zauważmy, że dowodzona równość jest prawdziwa dla $n = 1$.

2) Ustalmy liczbę naturalną k *i załóżmy, że*

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Wtedy, wykorzystując założenie indukcyjne dostaniemy

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) =$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnijmy jeszcze podstawowe informacje o ciągach liczbowych?

Definicja. ***Ciągiem nieskończonym*** *(lub po prostu* ***ciągiem****) nazywamy każdą funkcję określoną na zbiorze* $\mathbb{N}$ *wszystkich liczb naturalnych. Wartości takiej funkcji nazywamy* ***wyrazami*** *ciągu. Ciąg nazywamy* ***liczbowym****, jeśli jego wartości są liczbami.*

W pewnych przypadkach wygodniej jest się posługiwać pojęciem ciągu skończonego. Przytoczymy teraz definicję takiego ciągu.

Definicja . ***Ciągiem skończonym*** *lub dokładniej* ***ciągiem m-wyrazowym*** *nazywamy każdą funkcję określoną na zbiorze* $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Uwaga. *Jeśli* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *jest ciągiem liczbowym, to zamiast symbolu* $a(n)$ *oznaczającego* n*-ty wyraz tego ciągu, używać będziemy oznaczenia* a_n. *Ponadto, ciąg nieskończony* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *oznaczać będziemy przez* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *lub też prościej* (a_n), *zaś na oznaczenie ciągu* m*-wyrazowego* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *użyjemy symbolu* $(a_n)_{n\in\{1,\ldots,m\}}$.

Podamy dalej kilka przykładów ciągów.

Przykład 1. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem kwadratów odwrotności kolejnych liczb naturalnych* $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ *W tym przypadku możemy zapisać*

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Przykład 2. *Innym przykładem może być ciąg* (b_n) *postaci* $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$. *Mamy wtedy*

$$b_n = (-1)^{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Pokażemy teraz przykład ciągu skończonego mający zastosowanie w ekonomii.

Zadanie 2. *Wyznacz skumulowane kwartalne odsetki od rocznej lokaty w wysokości* 2000 *PLN, jeśli bank stosuje kapitalizację prostą kwartalną przy stopie rocznej równej* 8%.

Uwaga. *W kapitalizacji prostej odsetki naliczane są jedynie od początkowej wartości inwestycji.*

Rozwiązanie. *W kolejnych kwartałach otrzymamy następujące kwoty skumulowanych odsetek:*

1 kwartał $c_1 = 2000 \cdot 1 \cdot \frac{8\%}{4} = 40$,

2 kwartał $c_2 = 2000 \cdot 2 \cdot \frac{8\%}{4} = 80$,

3 kwartał $c_3 = 2000 \cdot 3 \cdot \frac{8\%}{4} = 120$,

4 kwartał $c_4 = 2000 \cdot 4 \cdot \frac{8\%}{4} = 160$.

Odp. *Otrzymamy w tym przypadku skończony ciąg* 4*-wyrazowy* $(40, 80, 120, 160)$.

Przykład 3. *Rozważmy ciąg kolejnych dziesiętnych przybliżeń z niedomiarem dowolnej liczby niewymiernej, choćby liczby* $\sqrt{3}$. *W tym przypadku mamy:* $d_1 = 1$; $d_2 = 1,7$; $d_3 = 1,73$; $d_4 = 1,732$; $d_5 = 1,7320$;...

Jest to przykład ciągu nieskończonego, dla którego nie można podać wzoru określającego wyrazy ciągu (d_n).

Czy potrafisz podać inne przykłady ciągów?

Przypomnijmy jeszcze pojęcie ciągu monotonicznego. Czy pamiętasz, jak definiuje się ciągi rosnące czy też ciągi malejące?

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy* ***rosnącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest większy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} > a_n.$$

W wielu przypadkach prostsze jest zbadanie znaku liczby, niż rozważać nierówność. Podamy teraz oczywisty warunek równoważny na to, aby ciąg był ciągiem rosnącym.

Uwaga. *Ciąg* (a_n) *jest ciągiem rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_{n+1} - a_n > 0$.

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy* ***niemalejącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niemniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \geqslant a_n.$$

Uwaga. *Ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.*

Definicja. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* ***malejącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} < a_n.$$

Uwaga. *Ciąg* (a_n) *jest ciągiem malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_{n+1} - a_n < 0$.

Definicja. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* ***nierosnącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niewiększy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Uwaga. *Ciąg* (a_n) *jest ciągiem nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

Wprost z definicji ciągów rosnących, niemalejących, malejących i nierosnących wynika następująca obserwacja.

Wniosek 1. *Każdy ciąg rosnący jest ciągiem niemalejącym i każdy ciąg malejący jest ciągiem nierosnącym.*

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem* ***monotonicznym****, jeśli jest albo ciągiem nierosnącym albo ciągiem niemalejącym.*

Wykorzystując warunki równoważne opisujące ciągi monotoniczne, tzn. ciągi niemalejące i ciągi nierosnące można sformułować kolejny wniosek:

Wniosek 2. *Jeśli różnice kolejnych dwóch wyrazów ciągu przyjmują zarówno wartości dodatnie jak i wartości ujemne, to ciąg ten nie jest ciągiem monotonicznym.*

Powróćmy do naszych przykładów. Czy potrafisz stwierdzić, które z rozważanych ciągów są ciągami monotonicznymi? Czy są to ciągi rosnące, czy malejące.

Ciąg (d_n) kwadratów odwrotności kolejnych liczb naturalnych jest ciągiem malejącym (różnice $c_{n+1} - c_n$ są ujemne). Z kolei ciąg (b_n), gdzie $b_n = (-1)^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, nie jest ciągiem monotonicznym, gdyż nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym (zbadaj różnice $b_{n+1} - b_n$ dla różnych wartości n). Na koniec ciąg (d_n) kolejnych przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem liczby $\sqrt{3}$ jest ciągiem rosnącym (różnice $d_{n+1} - d_n$ są dodatnie).

Uwaga. *Monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich można rozstrzygać badając iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$:*

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *to ciąg (a_n) jest rosnący,*

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *to ciąg (a_n) jest niemalejący,*

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ *to ciąg (a_n) jest nierosnący,*

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *to ciąg (a_n) jest malejący.*

Podobnie jak to było w przypadku badania różnic kolejnych dwóch wyrazów, również dla ilorazów kolejnych wyrazów ciągu o wyrazach dodatnich można sformułować następującą obserwację:

Wniosek 3. *Jeśli ilorazy kolejnych dwóch wyrazów ciągu o wyrazach dodatnich przyjmują zarówno wartości większe od* 1*, jak też wartości mniejsze od* 1*, to ciąg ten nie jest ciągiem monotonicznym.*

Zadanie 3. *Dla zadanych ciągów zbadać ich monotoniczność*

1. $a_n = 2n - 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
2. $b_n = \frac{n-1}{n+2}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
3. $c_n = n^2 - 5n + 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
4. $d_n = 2 + (-1)^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
5. $e_n = n + (-1)^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
6. $f_n = 2 \cdot 6^{n-1}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
7. $g_n = -4 \cdot (-3)^{n+1}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Rozwiązanie. *Prawidłowe odpowiedzi to:*

1. *ciąg* (a_n) *jest rosnący,*
2. *ciąg* (b_n) *jest malejący,*
3. *ciąg* (c_n) *nie jest ani cięgiem rosnącym ani ciągiem malejącym,*
4. *ciąg* (d_n) *nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym,*
5. *ciąg* (e_n) *nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym,*
6. *ciąg* (f_n) *jest ciągiem rosnącym,*
7. *ciąg* (g_n) *nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym.*

Chcąc rozstrzygnąć monotoniczność ciągu (a_n) badaliśmy różnice $a_{n+1} - a_n$, a w przypadku ciągów o wyrazach dodatnich iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. W dalszej kolejności zajmiemy się ciągami (a_n), dla których różnice $a_{n+1} - a_n$ bądź ilorazy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ są stałe.

Przykład 4. *Niech* (g_n) *będzie ciągiem stałym, tzn.*

$$g_n = c \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg ten ma każdą różnicę $g_{n+1} - g_n$ *równą* 0.

Przykład 5. *Ciąg* (b_n) *w którym* $b_1 = -1$, $b_2 = 4$ *zaś* $b_3 = 9$ *stanowi przykład prostego trójelementowego ciągu, dla którego zachodzi* $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = 5$.

Przykład 6. *Rozważmy jeszcze raz analizowany już wcześniej ciąg skumulowanych odsetek od kapitału* 2000 *PLN. Pamiętasz, że wówczas* $c_1 = 40$, $c_2 = 80$, $c_3 = 120$ *zaś* $c_4 = 160$. *Zatem mamy*

$$c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = c_4 - c_3 = 40.$$

Analizowane tu przykłady ciągów stanowią na tyle ważną klasę i mają tak charakterystyczne własności, że nadano im osobną nazwę.

Definicja. *Ciąg liczbowy* (a_n) *(skończony, bądź nieskończony) nazywamy ciągiem* ***arytmetycznym*** *(używa się też pojęcia* ***postęp arytmetyczny****), jeśli różnica każdych dwóch kolejnych jego wyrazów jest stała.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Wprost z definicji wynika, że nieskończony ciąg liczbowy* (a_n) *jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *różnica* $a_{n+1} - a_n$ *jest stała. Podobnie, dla* $m \geqslant 3$, m*-wyrazowy ciąg liczbowy* $(a_n)_{n\in\{1,\ldots,m\}}$ *jest ciągiem arytmetycznym (ciągów dwuwyrazowych nie uznaje się za arytmetyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ *różnica* $a_{n+1}-a_n$ *jest wielkością stałą.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja. *Jeśli* (a_n) *jest skończonym bądź też nieskończonym ciągiem arytmetycznym, to stałą wielkość* $r = a_{n+1} - a_n$ *nazywamy* ***różnicą*** *ciągu arytmetycznego.*

Okazje się, że ciąg arytmetyczny można definiować rekurencyjnie, tj. podając wyraz początkowy i opisując regułę otrzymania n-tego wyrazu w zależności od wyrazów poprzednich.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Nieskończony ciąg arytmetyczny można też opisać rekurencyjnie warunkami*

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a,\\
&a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

W przypadku ciągu m-wyrazowego analogiczne warunki przybierają postać

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a,\\
&a_{n+1} = a_n + r \quad \text{dla każdego } n \in \{1, \ldots, m-1\}.
\end{aligned}
$$

*Wynika stąd, że ciąg arytmetyczny jest jednoznacznie wyznaczony poprzez podanie **wyrazu pierwszego** a_1 oraz **różnicy** r.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pamiętasz oczywiście, że monotoniczność ciągów badaliśmy rozważając różnice kolejnych jego wyrazów. Dla ciągów arytmetycznych te różnice są stałe i równe r, więc bardzo łatwo jest określić monotoniczność ciągów arytmetycznych. Czy potrafisz powiedzieć, kiedy ciąg arytmetyczny jest ciągiem rosnącym, a kiedy jest ciągiem malejącym?

Odpowiedź na to pytanie podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy r.*

(i) *Ciąg (a_n) jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy $r > 0$.*

(ii) *Ciąg (a_n) jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy $r < 0$.*

(iii) *Ciąg (a_n) jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy $r = 0$.*

Ciągi arytmetyczne mają ważną własność, którą opiszemy w twierdzeniu. Punktem wyjścia będzie następująca obserwacja:

Obserwacja. Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym. Wtedy dla $n \geqslant 2$ mamy

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Stąd, wyliczając a_n, otrzymamy

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

$\square$

Można więc sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Dla każdego ciągu arytmetycznego i dla dowolnych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.*

Uwaga . *W przypadku nieskończonych ciągów arytmetycznych otrzymamy więc własność, którą można zapisać w postaci*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N},n\geqslant 2} \quad a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

zaś dla ciągów m-wyrazowych mamy warunek

$$\bigwedge_{n\in\{2,\ldots,m-1\}} \quad a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

Okazuje się, że własność ciągów arytmetycznych opisana w poprzednim twierdzeniu jest charakteryzacją ciągów arytmetycznych, tzn. prawdziwe jest też następujące twierdzenie, które podamy bez uzasadnienia.

Twierdzenie 4. *Jeśli w ciągu liczbowym dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich, to ciąg ten jest ciągiem arytmetycznym.*

Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. *Liczby* $2x^3 - 5x$, $x^2 + x$ *oraz* $3x + 4$ *(w podanej kolejności) są wyrazami trójelementowego ciągu arytmetycznego o wyrazach całkowitych. Wyznacz różnicę tego ciągu.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. *Wykorzystując udowodnioną w Twierdzeniu 3 własność ciągu arytmetycznego otrzymamy*

$$x^2 + x = \frac{(2x^3 - 5x) + (3x + 4)}{2}.$$

Rozwiązując otrzymane równanie wyznaczymy jego rozwiązania $x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt{2}$ *oraz* $x_3 = \sqrt{2}$, *z których ostatnie dwa należy odrzucić (dlaczego?). Wtedy*

$$r = 3x + 4 - (x^2 + x) = 5.$$

Odp. *Różnica badanego ciągu arytmetycznego równa jest* 5.

Zadanie 5. *Wykorzystując definicję ciągu arytmetycznego wyznacz sześć pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego* (d_n)*, w którym pierwszy wyraz jest równy* 7*, zaś jego różnica wynosi* -3*.*

Odp. *Oczywiście prawidłowa odpowiedź to* $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$, $d_4 = -2$, $d_5 = -5$ *oraz* $d_6 = -8$.

Kolejne wyrazy ciągu d_n z rozważonego przykładu można otrzymać z wyrazu poprzedniego poprzez dodanie do niego różnicy r. Czy potrafisz odpowiedzieć na pytanie ile jest równy np. 237 wyraz tego ciągu? A ile 2011 wyraz? Pomocne tu będzie twierdzenie opisujące dowolny wyraz ciągu arytmetycznego w zależności od wyrazu pierwszego i różnicy rozważanego ciągu arytmetycznego.

Przed sformułowaniem naszego twierdzenia i jego indukcyjnym dowodem spróbujmy odkryć prawidłowość.

Obserwacja. Zauważmy, że jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to wprost z definicji otrzymamy, że $a_2 - a_1 = r$, czyli

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot r.$$

Dalej, $a_3 - a_2 = r$, więc wykorzystując powyższą równość mamy

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + 1 \cdot r) + r = a_1 + 2 \cdot r.$$

Następnie $a_4 - a_3 = r$, stąd i z powyższej równości otrzymamy

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2 \cdot r) + r = a_1 + 3 \cdot r.$$

Postępowanie to sugeruje prawidłowość sformułowaną w następującym twierdzeniu. □

Twierdzenie 5. *Niech* $(a_n)_{n\in I}$ *będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy* r, *gdzie* $I = \mathbb{N}$ *w przypadku ciągu nieskończonego oraz* $I = \{1, \ldots, m\}$ *w przypadku ciągu* m*-elementowego. Wówczas*

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \text{dla każdego } n \in I.$$

Dowód.

1) Zauważmy, że $a_1 + (1-1)r = a_1$, więc dowodzona równość prawdziwa jest dla $n = 1$.

2) Ustalmy dowolnie $k \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$a_k = a_1 + (k-1)r.$$

Wtedy, z definicji ciągu arytmetycznego, wykorzystując założenie indukcyjne otrzymamy

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest słuszna dla każdej liczby naturalnej n. □

Zadanie 6. *Wyznacz wyrazy* 237 *oraz* 2011 *rozważanego ciągu* (d_n) *(Zadanie 5,* $d_1 = 7$ *oraz* $r = -3$*).*

Odp. *Proste rachunki pokazują, że* $d_{237} = -701$ *oraz* $d_{2011} = -6023$.

Zadanie 7. *Wyznacz n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (b_n), jeśli $b_3 = 15$ oraz $b_{11} = -17$.*

Rozwiązanie. *Z warunków zadania otrzymamy* $b_3 = b_1 + 2r$ *oraz* $b_{11} = b_1 + 10r$, *co prowadzi do układu równań*

$$\begin{cases} b_1 + 2r &= 15 \\ b_1 + 10r &= -17. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $b_1 = 23$ *oraz* $r = -4$. *Stąd*

$$b_n = 23 + (n-1)\cdot(-4) = 27 - 4n \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Odp. n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego opisany jest wzorem* $b_n = 27 - 4n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Dla ciągu arytmetycznego nietrudno jest obliczyć sumę jego początkowych wyrazów. Czy spróbujesz odkryć ten wzór? Zróbmy to razem.

Do wyprowadzenia naszego wzoru wykorzystamy równość udowodnioną indukcyjnie w Zadaniu 1, tzn.

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{dla } \ n\in\mathbb{N}.$$

W istocie potrzebna będzie ta równość zapisana w postaci

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2} \quad \text{dla } \ n\geqslant 2.$$

Obliczymy teraz sumę pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r. Mamy więc

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&\quad = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n-1)r) = \\
&\quad = na_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1))r
\end{aligned}
$$

Wykorzystując udowodnioną indukcyjnie równość otrzymamy

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&\quad = na_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1))r = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r.
\end{aligned}
$$

Przekształcając otrzymane wyrażenie dostaniemy jeszcze

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r =$$
$$= n\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} = n\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Można więc sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Suma* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *pierwszych* n *wyrazów ciągu arytmetycznego* (a_n) *o różnicy* r *wyraża się wzorami*

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Przedstawione przed twierdzeniem rozumowanie stanowi formalny dowód tego twierdzenia. Można jednak przeprowadzić indukcyjny dowód tego twierdzenia nie odwołujący się do udowodnionej wcześniej równości. Udowodnimy pierwszą z równości opisanych w twierdzeniu. Druga równość jest konsekwencją pierwszej.

Dowód. 1) Dla $n = 1$ mamy $S_1 = \frac{2a_1+0r}{2} \cdot 1 = a_1$.
2) Ustalmy dowolnie $k \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $S_k = \frac{2a_1+(k-1)r}{2}k$. Wówczas, wykorzystując założenie indukcyjne otrzymamy

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{2a_1 + (k-1)r}{2}k + (a_1 + kr) =$$
$$= \frac{2a_1}{2}k + \frac{k^2 - k}{2}r + a_1 + kr =$$
$$= \frac{2a_1}{2}(k+1) + \frac{k^2+k}{2}r = \frac{2a_1 + kr}{2}(k+1).$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n. $\square$

Zadanie 8. *Wiadomo, że* (a_n) *jest takim ciągiem arytmetycznym, że* $a_4 = 11$ *oraz* $a_3 + a_7 = 28$*. Ile początkowych wyrazów tego ciągu sumuje się do liczby* 126*?*

W pierwszym kroku spróbuj wyznaczyć wielkości jednoznacznie określające ten ciąg, tzn. na podstawie warunków zadania wyznacz a_1 oraz r. Następnie skorzystaj z udowodnionego wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego.

Odp. 9 *pierwszych wyrazów badanego ciągu arytmetycznego sumuje się do* 126.

Zadanie 9. *Firma oferuje wykopanie studni na następujących warunkach. Wykopanie pierwszego metra kosztuje* 210 *PLN, zaś za wykopanie każdego następnego metra należy zapłacić o* 30 *PLN więcej, niże za wykopanie poprzedniego. Właściciel posesji zlecił wykopanie studni. Średni koszt wykopania jednego metra wyniósł* 360 *PLN. Jak głęboka była ta studnia i ile zapłacił za jej wykopanie właściciel posesji?*

Rozwiązanie. *Niech* a_n *będzie ceną wykopania* n*-tego metra studni. Zatem* $a_1 = 210$ *oraz* $r = 30$*. Suma* S_k *jest kosztem wykopania studni o głębokości* k *metrów. Z drugiej strony, średni koszt wykopania jednego metra wyniósł* 360 *PLN, więc całkowity koszt wykopania studni wynosi* $360 \cdot k$*. Otrzymamy więc równanie*

$$\frac{420 + 30(k-1)}{2}k = 360k,$$

którego niezerowym rozwiązaniem jest $k = 11$*. Stąd całkowity koszt wykopania tej studni wyniósł* $360 \cdot 11 = 3960$ *PLN.*

Odp. *Za kwotę* 3960 *PLN wykopano studnię o głębokości* 11 *m.*

Zadanie 10. *Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych.*

W naszym zadaniu należy zsumować wszystkie liczby naturalne od 100 do 999. Mamy więc do wyznaczenia sumę ciągu arytmetycznego (oznaczmy go np. przez (f_n)) w którym $f_1 = 100$ oraz $r = 1$. Do rozstrzygnięcia jest jedynie, ile jest tych liczb? Potrafisz określić n potrzebne we wzorze na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego?

Odp. *Tych cyfr jest* 900. *Ich suma jest równa* 494550.

Zadanie 11. *Wyznaczyć n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), dla którego*

$$S_n = 2n^2 - 14n \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli można coś zasugerować, to poobserwuj równość

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Czy potrafisz wyznaczyć a_1 oraz $a_1 + a_2$? Jak to wykorzystać?

Oczywiście $a_1 = S_1 = -12$ oraz $a_1 + a_2 = S_2 = -20$. Czy już wiesz, jak teraz wyznaczyć a_n?

Rozwiązanie. *Z otrzymanych równości obliczamy* $a_2 = -8$, *więc* $r = a_2 - a_1 = 4$. *Wtedy*

$$a_n = -12 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 16.$$

Odp. n*-ty wyraz poszukiwanego ciągu* (a_n) *ma postać* $4n - 16$.

Zauważ, że do rozwiązania poprzedniego zadania nie wykorzystaliśmy wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego!

Przeanalizujemy dalej drugi ważny rodzaj ciągów, tzn. ciągi (na początek załóżmy, że rozważamy jedynie ciągi o wyrazach różnych od 0), dla których iloraz wyrazu następnego przez wyraz poprzedni jest wielkością stałą.

Przykład 7. *Zbadajmy ciąg* (a_n) *kolejnych potęg liczby* -2, *tzn. ciąg* $1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots$. *Łatwo można sprawdzić, że*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = -2.$$

A może odrobinę fizyki?

Zadanie 12. *Sprężystą piłkę opuszczono z wysokości* 2 *m. Po każdym odbiciu piłeczka wznosi się na* $\frac{3}{4}$ *wysokości, z której poprzednio rozpoczynała spadek. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka po* 4 *odbiciu?*

Rozwiązanie. *Niech* $h_0 = 2$ *i niech* h_n *oznacza wysokość, na jaką wzniesie się piłeczka po* n*-tym odbiciu. Mamy wtedy*

- $h_1 = \frac{3}{4}h_0 = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$,
- $h_2 = \frac{3}{4}h_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$,
- $h_3 = \frac{3}{4}h_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$,
- $h_4 = \frac{3}{4}h_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{27}{32} = \frac{81}{128}$.

Odp. *Po* 4 *odbiciu piłka wzniesie się na wysokość* $\frac{81}{128}$ *m.*

Po tych przykładach czas już na ścisłą definicję nowej klasy ciągów. Aby dopuścić również ciągi o wyrazach równych 0 definicja zostanie nieco zmodyfikowana przez zastąpienie ilorazów przez pewne iloczyny, co w przypadku ciągów o wyrazach niezerowych będzie równoważne badaniu ilorazów.

Definicja. *Ciąg liczbowy* (a_n) *(skończony, bądź nieskończony) nazywamy ciągiem* ***geometrycznym*** *(używa się też pojęcia* ***postęp geometryczny****), jeśli każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę* q*. Liczbę* q *nazywamy* ***ilorazem*** *ciągu geometrycznego.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Z definicji wynika, że nieskończony ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Podobnie, jeśli $m \geqslant 3$, to m-wyrazowy ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\{1,\ldots,m\}}$ jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \textit{dla każdego } n \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Na koniec, jeśli dopuścimy jedynie ciągi o wyrazach niezerowych, to w obu przypadkach otrzymamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Spróbujmy teraz zbadać monotoniczność ciągów geometrycznych. Pamiętasz zapewne, że w przypadku ciągów arytmetycznych rozwiązanie problemu (Twierdzenie 3) było raczej proste, gdyż badanie monotoniczności ciągu sprowadza się do określenia znaku różnic $a_{n+1} - a_n$. W przypadku ciągów geometrycznych problem jest bardziej skomplikowany, a jego rozwiązanie przedstawia następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7. *Niech $(a_n)_{n\in I}$ będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q, gdzie $I = \mathbb{N}$ lub $I = \{1, \dots, m\}$.*

(i) *Jeśli $q < 0$ i $a_1 \neq 0$, to (a_n) jest ciągiem naprzemiennym,*

(ii) *Jeśli $q = 1$ lub $a_1 = 0$, to (a_n) jest ciągiem stałym,*

(iii) *Jeśli $q \in (0, 1)$ i $a_1 < 0$, to (a_n) jest ciągiem rosnącym,*

(iv) *Jeśli $q \in (0, 1)$ i $a_1 > 0$, to (a_n) jest ciągiem malejącym,*

(v) *Jeśli $q > 1$ i $a_1 < 0$, to (a_n) jest ciągiem malejącym,*

(vi) *Jeśli $q > 1$ i $a_1 > 0$, to (a_n) jest ciągiem rosnącym.*

Pamiętasz zależność łączącą trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego? Oczywiście, dla każdej trójki kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, wyraz środkowy był średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich. Rozwiążmy następujące zadanie:

Zadanie 13. *Dany jest ciąg geometryczny (a_n). Czy mając dane wyrazy a_{n-1} oraz a_{n+1} można wyznaczyć wyraz a_n?*

Rozwiązanie. *Ustalmy ciąg geometryczny* (a_n) *o ilorazie* q *oraz trzy jego kolejne wyraz* a_{n-1}, a_n, a_{n+1}*. Na mocy definicji ciągu geometrycznego mamy*

$$a_{n+1} = a_n q = a_{n-1} q^2 \quad \textit{oraz} \quad a_n = a_{n-1} q.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} &= \\ &= (a_{n-1}q)^2 - a_{n-1}a_{n-1}q^2 = a_{n-1}^2 q^2 - a_{n-1}^2 q^2 = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

Przedstawione rozwiązane stanowi dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 8. *Dla dowolnego ciągu geometrycznego i dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, kwadrat wyrazu środkowego jest równy iloczynowi sąsiednich wyrazów.*

Zadanie 14. *Pomiędzy liczby* 9 *oraz* 4 *wstawić taką liczbę* z*, aby ciąg* $(-12, z, -3)$ *tworzył rosnący ciąg geometryczny.*

Rozwiązanie . *Wykorzystując własność trójwyrazowego ciągu geometrycznego* $(-12, z, -3)$ *(Twierdzenie 8) otrzymamy*

$$z^2 = -12 \cdot (-3) = 36.$$

Zatem $z = -6$ *lub* $z = 6$*. Spośród tych dwóch rozwiązań drugie należy odrzucić (dlaczego?).*

Odp. *Poszukiwany ciąg geometryczny, to* $(-12, -6, -3)$.

Powróćmy jeszcze do średnich. Okazuje się, że dla pewnej podklasy ciągów geometrycznych Twierdzenie 8 można sformułować używając właśnie średnich.

Twierdzenie 9. *Dla dowolnego ciągu geometrycznego **o wyrazach dodatnich** i dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, tzn.*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad \textit{dla odpowiednich } n.$$

Przeanalizujemy jeszcze ważny przykład zastosowania ciągu geometrycznego w ekonomii.

Przykład 8. *Prześledzimy wartość rocznej lokaty (kwota inwestycji nie jest ważna, ale dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że inwestujemy* 2000 *PLN) przy założeniu, że bank stosuje kapitalizację złożoną kwartalną przy stopie rocznej równej* 8%.

Uwaga. *Przy kapitalizacji złożonej odsetki naliczane są od całej zgromadzonej na daną chwilę inwestycji (por. pojęcie kapitalizacji prostej przy ciągu arytmetycznym!).*

Rozwiązanie. *W kolejnych kwartałach otrzymamy następujące wartości inwestycji*

1 kwartał $K_1 = 2000 + 2000 \cdot \frac{8\%}{4} = 2040,$

2 kwartał $K_2 = 2040 + 2040 \cdot \frac{8\%}{4} = 2080,8,$

3 kwartał $K_3 = 2080,8 + 2080,8 \cdot \frac{8\%}{4} = 2122,416,$

4 kwartał $K_4 = 2122,416 + 2122,416 \cdot 4 \cdot \frac{8\%}{4} = 2164,86432.$

Uwaga. *Tak wysoka precyzja nie ma oczywiście większego sensu finansowego.*

Zastanówmy się teraz, czy rozwiązanie naszego problemu z ekonomii można opisać jednym wzorem? Czy w przeprowadzonych rachunkach znajdujesz jakąś prawidłowość?

Oznaczmy kapitał początkowy przez K_0. Można oczywiście zauważyć, że

$$K_1 = K_0\left(1+\frac{8\%}{4}\right).$$

Dalej oczywiście mieć będziemy

$$K_2 = K_1\left(1+\frac{8\%}{4}\right) = K_0\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^2,$$
$$K_3 = K_2\left(1+\frac{8\%}{4}\right) = K_0\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^3,$$
$$K_4 = K_3\left(1+\frac{8\%}{4}\right) = K_0\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^4.$$

Czy przedstawione na poprzednim slajdzie rachunki mogą sugerować jakąkolwiek prawidłowość dotyczącą wyrazów ciągu geometrycznego? Można zauważyć, że kolejne wyrazy ciągu są iloczynem zadanej wartości początkowej i pewnej potęgi.

Obserwacja. Zauważmy, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q, to wprost z definicji otrzymamy

$$a_2 = a_1 q.$$

Dalej wykorzystując powyższą równość mamy

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2.$$

Następnie, z powyższej równości otrzymamy

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3.$$

Postępowanie to pokazuje prawidłowość ukazaną w następującym twierdzeniu. □

Twierdzenie 10. *Niech* $(a_n)_{n\in I}$ *będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq 0$, *gdzie* $I = \mathbb{N}$ *w przypadku ciągu nieskończonego oraz* $I = \{1, \ldots, m\}$ *w przypadku ciągu* m*-elementowego. Wtedy*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{dla każdego } n \in I.$$

Formalny dowód Twierdzenia 10 oparty jest na zasadzie indukcji matematycznej.

Dowód.
1) Zauważmy, że $a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1 q^0 = a_1$.
2) Ustalmy dowolnie $k \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że

$$a_k = a_1 q^{k-1}.$$

Wtedy, wykorzystując założenie indukcyjne otrzymamy

$$a_{k+1} = a_k q = a_1 q^{k-1} q = a_1 q^k.$$

Na podstawie zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest słuszna dla każdej liczby naturalnej n. $\square$

Zadanie 15. *Dla ciągu geometrycznego* (b_n) *wiadomo, że* $b_2 = -3$, *zaś* $b_6 = -48$. *Wyznaczyć wartość* b_5.

Rozwiązanie. *Z warunków zadania, wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, otrzymamy układ równań*

$$\begin{cases} -3 = b_2 = b_1 q \\ -48 = b_6 = b_1 q^5. \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań wyznaczymy jego rozwiązania

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{3}{2} \\ q = 2 \end{cases} \quad \textit{lub} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{3}{2} \\ q = -2. \end{cases}$$

Istnieją dwa rozwiązania: $b_5 = b_1 q^4 = -24$ *lub* $b_5 = b_1 q^4 = 24.$

Odp. *Istnieją dwa ciągi spełniające warunki zadania, dla których* $b_5 = -24$ *lub* $b_5 = 24.$

Zadanie 16. *Czwarty wyraz ciągu geometrycznego równy jest* 8. *Oblicz iloczyn pierwszych siedmiu wyrazów tego ciągu.*

Rozwiązanie. *Niech* (a_n) *będzie poszukiwanym ciągiem geometrycznym o ilorazie* q. *Z warunków zadania wynika*

$$8 = a_4 = a_1 q^3.$$

Zauważmy, że

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_6 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 q \cdot \ldots \cdot a_1 q^5 \cdot a_1 q^6 =$$

$$= a_1^7 q^{0+1+\ldots+6+7} = a_1^7 q^{21} = \left(a_1 q^3\right)^7 = 8^7.$$

Odp. *Iloczyn pierwszych siedmiu wyrazów tego ciągu wznosi* 8^7.

Spróbujmy na koniec, podobnie jak to było dla ciągów arytmetycznych, wyznaczyć sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego. Pamiętasz zapewne, że w przypadku ciągu arytmetycznego nie było to takie proste. Również w przypadku ciągu geometrycznego problem nie jest łatwy, ale opierając się na pewnych obserwacjach i prawidłowościach można wyprowadzić wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Krok 1 Zaobserwujmy pewne prawidłowości. Wykonując mnożenia można zweryfikować następujące równości:

- $(1+x)(1-x)=1-x^2$,
- $(1+x+x^2)(1-x)=1-x^3$,
- $(1+x+x^2+x^3)(1-x)=1-x^4$.

Czy na podstawie tych równości potrafisz powiedzieć, ile równy jest następujący iloczyn:

$$(1+x+\ldots+x^{n-1})(1-x)$$

Oczywiście, można poczynić obserwację, że

$$(1 + x + \ldots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n$$

Krok 2 Spróbujmy teraz obliczyć sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymamy

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \\ &= a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Załóżmy na początek, że $q = 1$. W tym przypadku

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = n a_1.$$

W przypadku $q \neq 1$, wykorzystując wyprowadzony w pierwszym kroku wzór, otrzymamy

$$
\begin{aligned}
S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = \\
= a_1 \frac{\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right)(1-q)}{1-q} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Tym samym prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11. *Suma* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *pierwszych* n *wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie* q *wyraża się wzorem*

(i) $S_n = na_1$ *w przypadku, gdy* $q = 1$,

(ii) $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ *w przypadku, gdy* $q \neq 1$.

Przeprowadźmy dowód indukcyjny tego twierdzenia.

Dowód. W pierwszym przypadku równość jest oczywista (dlaczego?). Zajmijmy się więc przypadkiem (ii).

1) Wystarczy zaobserwować, że $S_1 = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} = a_1$.

2) Ustalmy dowolnie k i załóżmy, że $S_k = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}$. Na mocy poczynionego założenia otrzymamy wtedy

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = a_1 \frac{1-q^k}{1-q} + a_1 q^k =$$
$$= a_1 \frac{1-q^k+q^k-q^{k+1}}{1-q} = a_1 \frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$

Za mocy zasady indukcji matematycznej dowodzony wzór jest słuszny dla każdej liczby naturalnej n. $\square$

Projekt współfinansowany przez ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 17. *Oblicz sumę* 2011 *pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego* (a_n), *dla którego* $a_1 = \pi$ *oraz* $q = -1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Czy do rozwiązanie tego zadania musisz zastosować wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego? A może wystarczy jedynie trochę pomyśleć?

Jeśli jeszcze nie wiesz, to spróbuj wypisać pierwszych kilkanaście wyrazów tego ciągu. Ile wynosi suma pierwszych 5 wyrazów tego ciągu? A ile równa jest suma pierwszych 7 wyrazów? Widzisz już prawidłowość?

Tak, prawidłowa odpowiedź, to $S_{2011} = \pi$.

Zadanie 18. *Dany jest ciąg geometryczny* (c_n), *w którym* $c_2 = -6$ *oraz* $c_5 = -162$. *Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu równa jest* -728*?*

Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, spróbuj na podstawie warunków zadania wyznaczyć c_1 oraz iloraz ciągu q. Następnie podstaw otrzymane wartości do wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego (przypadek $q \neq 1$, dlaczego?) i wyznacz n.

Jeśli jeszcze nie potrafisz tego zrobić, do obejrzyj następny slajd!

Rozwiązanie. *Z warunków zadania wynika następujący układ równań*

$$\begin{cases} -6 = c_2 = c_1 q \\ -162 = c_5 = c_1 q^4. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest para $c_1 = -2$, $q = 3$. *Podstawiając otrzymane wielkości do wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego otrzymamy równanie*

$$-728 = (-2) \cdot \frac{1-3^n}{1-3},$$

którego rozwiązaniem jest liczba $n = 6$.

Odp. *Pierwszych* 6 *wyrazów ciągu* (c_n) *daje sumę* -728.

W dalszej części zaproponowane zostaną zadania do samodzielnego rozwiązania. Do części z tych zadań podane będą wskazówki dotyczące ich rozwiązania, zaś do wszystkich podane zostaną prawidłowe odpowiedzi.

Zadanie 19. *Znajdź ciąg arytmetyczny (a_n) w którym suma drugiego i piątego wyrazu równa jest 16, zaś różnica wyrazów czwartego i pierwszego wynosi 6.*

Wskazówka: Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu, z warunków zadania wyprowadź układ równań.

Odp. *Poszukiwany ciąg* (a_n) *dany jest wzorem* $a_n = 2n + 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 20. *Dla jakich liczb x oraz y wartości wyrażeń $x + y$, $4x - y$, $3x + 4y + 1$ oraz $9x - 4y + 1$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?*

Wskazówka: Wykorzystaj fakt, że jeśli liczby a_1, a_2, a_3, a_4 są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to spełniony jest układ równości

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \\ a_2 - a_1 = a_4 - a_3. \end{cases}$$

Odp. *Poszukiwane wartości to* $x = 2$ *oraz* $y = 1$.

Zadanie 21. *O ciągu arytmetycznym* (c_n) *wiadomo, że* $c_3 = 12$ *oraz* $r = -4$. *Ile wyrazów tego ciągu sumuje się do liczby* -780*?*

Wskazówka: Porównaj Zadanie 8.

Odp. *Pierwszych* 26 *wyrazów ciągu* (c_n) *daje w sumie liczbę* 780.

Zadanie 22. *Pierwszy, trzeci oraz jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz iloraz tego ciągu geometrycznego.*

Wskazówka: Wykorzystaj Twierdzenie 8.

Odp. *Iloraz tego ciągu jest równy* 4.

Zadanie 23. *Spośród liczb* a, b, c, d *pierwsze trzy tworzą ciąg arytmetyczny, zaś ostatnie trzy – monotoniczny ciąg geometryczny. Suma pierwszej trójki liczb wynosi* 12*, ostatniej –* 19*. Wyznacz te liczby.*

Wskazówka: Z warunków zadania należy wyprowadzić układ czterech równań z niewiadomymi a, b, c, d.

Odp. *Poszukiwane liczby to* $2, 4, 6, 9$.

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Pytanie 1. *Ciąg arytmetyczny o różnicy $-\pi$ jest ciągiem*

(a) rosnącym,

(b) stałym,

(c) malejącym,

(d) ani rosnącym ani malejącym.

Pytanie 2. *W ciągu arytmetycznym trzeci wyraz jest równy* -1*, zaś różnica tego ciągu jest równa* 3*. Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy*

(a) 0,

(b) 1,

(c) 5

(d) 8.

Pytanie 3. *W ciągu arytmetycznym dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią*

(a) arytmetyczną,

(b) geometryczną,

(c) harmoniczną,

(d) kwadratową,

wyrazów sąsiednich.

Pytanie 4. *Jeśli czwarty i ósmy wyraz pewnego ciągu arytmetycznego są sobie równe, to ciąg ten jest*

(a) malejący,

(b) stały,

(c) rosnący,

(d) ani malejący ani rosnący.

Pytanie 5. *Jeśli ciąg* (a_1, a_2, a_3) *jest ciągiem arytmetycznym o różnicy* r, *to ciąg* $(2a_3, 2a_2, 2a_1)$ *jest*

(a) *ciągiem arytmetycznym o różnicy* $2r$,

(b) *ciągiem arytmetycznym o różnicy* $-2r$,

(c) *ciągiem arytmetycznym o różnicy* $\frac{2}{r}$,

(d) *nie jest ciągiem arytmetycznym.*

Pytanie 6. *Ciąg geometryczny o ilorazie $q < 0$ jest ciągiem*

(a) *malejącym,*

(b) *stałym,*

(c) *rosnącym,*

(d) *naprzemiennym.*

Pytanie 7. *Ciąg* (a_1, a_2, a_3) *jest zarówno ciągiem arytmetycznym o różnicy* r, *jak też ciągiem geometrycznym o ilorazie* q. *Wtedy*

(a) $r = 1$ *oraz* $q = 0$,

(b) $r = 1$ *oraz* $q = -1$

(c) $r = 0$ *oraz* $q = 1$,

(d) $r = -1$ *oraz* $q = 1$.

Pytanie 8. *W ciągu geometrycznym dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią*

(a) arytmetyczną,

(b) geometryczną,

(c) harmoniczną,

(d) kwadratową,

wyrazów sąsiednich.

Pytanie 9. *Jeśli ciąg* (d_1, d_2, d_3) *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq 0$*, to ciąg* (d_3^4, d_2^4, d_1^4) *jest*

(a) ciągiem geometrycznym o ilorazie q^4*,*

(b) ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{q^2}$*,*

(c) ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{q^4}$*,*

(d) nie jest ciągiem geometrycznym.

Pytanie 10. *Jeśli ciąg* (d_1, d_2, d_3), *gdzie* $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$, *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq 0$, *to ciąg* $\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}\right)$ *jest*

(a) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* $\frac{1}{q}$,

(b) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q^2,

(c) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q,

(d) *nie jest ciągiem geometrycznym.*

Klucz odpowiedzi:

1(c), 2(c), 3(a), 4(b), 5(b), 6(d), 7(c), 8(b), 9(c), 10(a).