Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Funkcja wykładnicza

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicję i własności funkcji wykładniczej poprzedzimy definicją potęgi o wykładniku rzeczywistym. Poprawna i pełna definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym składa się z kilu kroków. W pierwszym etapie definiujemy potęgę o wykładniku naturalnym, a następne kroki to: definicja potęgi o wykładniku całkowitym, definicja pierwiastka arytmetycznego, oraz definicja potęgi o wykładniku wymiernym. Ostatnim etapem konstrukcji jest definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Przyjmiemy następujące oznaczenia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$,

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,

$[x]$ - część całkowita (cecha) liczby rzeczywistej x.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początek powiemy, jak rozumieć będziemy potęgę liczby zero.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 1. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Przyjmujemy

$$0^x = 0.$$

Uwaga 1. Wyrażenie 0^0, pomimo swojej wygody przy uogólnieniach pewnych wzorów i konwencji, nie ma żadnego sensu liczbowego.

Prześledzimy teraz kolejne kroki naszej konstrukcji. W pierwszym kroku określimy potęgę liczby o wykładniku będącym liczbą naturalną bądź zerem.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 2. Niech $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. **Potęgę liczby a o wykładniku naturalnym** określamy następująco:

$$\begin{cases} a^1 = a, \\ a^{n+1} = a^n \cdot a \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 2. Z definicji potęgi o wykładniku naturalnym wynika, że a^n jest iloczynem n jednakowych czynników równych a, tzn.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicję potęgi o wykładniku naturalnym można, z pewnym zastrzeżeniem, rozszerzyć do potęg o wykładniku równym 0.

Definicja 3. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiujemy

$$a^0 = 1.$$

W kolejnych krokach definicji potęgi wykorzystamy następujący lemat. Dowód tego lematu wobec oczywistości zawartych w nim stwierdzeń zostanie pominięty.

Lemat 1. *Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą oraz niech n będzie liczbą naturalną. Wówczas $a^n > 0$. Ponadto*

(i) jeśli $a > 1$, to $a^n > 1$,

(ii) jeśli $a < 1$, to $a^n < 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W kolejnym etapie zdefiniujemy potęgę liczby o wykładniku całkowitym. Wiadomo już, jak należy rozumieć potęgę liczby o wykładniku naturalnym i o wykładniku równym zero. Pozostaje więc zdefiniować potęgę liczby o wykładniku całkowitym ujemnym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 4. Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **Potęgą liczby a o wykładniku całkowitym ujemnym m** nazywamy liczbę $\frac{1}{a^{-m}}$, tzn.

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z},\ m < 0.$$

Definicje 2–4 poprawnie określają potęgę liczby rzeczywistej o wykładniku całkowitym. Tak zdefiniowana potęga ma następujące własności.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *oraz dla dowolnych* $m, n \in \mathbb{Z}$ *zachodzi*

(i) $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$,

(ii) $a^m a^n = a^{m+n}$,

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$,

(iv) $(a^m)^n = a^{mn}$,

(v) $a^m b^m = (ab)^m$,

(vi) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Przedstawimy teraz dowody tych własności.

Dowód (i)-(vi) dla takich $m, n \in \mathbb{Z}$, *że* $m \cdot n = 0$.

Zauważmy, że z definicji potęgi o wykładniku 0 otrzymamy, że dowodzone własności są prawdziwe, jeśli $m = 0$ lub $n = 0$.

Dowód (i).
W definicji potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym mamy równość

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z},\ m < 0,$$

którą w równoważny sposób zapisać można w postaci

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \text{dla } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ m \in \mathbb{Z},\ m < 0.$$

Równości te łącznie implikują własność (i).

Dowód (ii) dla liczb naturalnych.

Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$ i zauważmy, że równość $a \cdot a^n = a^{1+n}$ jest konsekwencją definicji potęgi o wykładniku naturalnym. Załóżmy więc dalej, że dla pewnej liczby naturalnej m prawdziwa jest równość

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Wówczas, wykorzystując założenie indukcyjne otrzymamy

$$a^{m+1} \cdot a^n = a \cdot a^m \cdot a^n = a \cdot a^{m+n} = a^{1+m+n}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona własność jest prawdziwa dla każdego $m \in \mathbb{N}$. Wobec dowolności $n \in \mathbb{N}$ dostajemy prawdziwość tej równości dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$.

Dowód (ii) dla $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \cdot n \leqslant 0$, $m + n \geqslant 0$.
Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $m, n \in \mathbb{Z}$ są takie, że $m \geqslant 0$ oraz $n < 0$. Ponieważ $-n > 0$, więc

$$a^{m+n} \cdot a^{-n} = a^{(m+n)-n} = a^m,$$

Wykorzystując udowodnioną już własność (i) otrzymamy wtedy

$$a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n.$$

Dowód (ii) dla $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \cdot n \leqslant 0$, $m + n < 0$.

Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $m, n \in \mathbb{Z}$ są takie, że $m \geqslant 0$ oraz $n < 0$. Ponieważ $-m - n > 0$ oraz $m \geqslant 0$, więc

$$a^{-m-n} \cdot a^m = a^{(-m-n)+m} = a^{-n}.$$

Stąd

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}},$$

więc wykorzystując udowodnioną już własność (i) otrzymamy

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = a^{m+n}.$$

Dowód (ii) dla ujemnych liczb $m, n \in \mathbb{Z}$.
Ponieważ $-n > 0$ oraz $m + n < 0$, więc

$$a^{m+n} \cdot a^{-n} = a^{(m+n)-n} = a^m.$$

Stąd

$$a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^n.$$

To kończy dowód własności (ii).

Dowód (iii).
Ustalmy dowolnie liczby całkowite $m, n \in \mathbb{Z}$. Wówczas na podstawie własności (ii) otrzymamy

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m,$$

co implikuje prawdziwość (iii).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iv) dla takich $m, n \in \mathbb{Z}$, *że* $n \geqslant 1$.
Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem n. Ustalmy więc dowolnie liczbę całkowitą $m \in \mathbb{Z}$. Zauważmy, że dowodzona równość jest oczywista dla $n = 1$. Załóżmy więc prawdziwość tej równości dla pewnej liczby naturalnej n. Wówczas, wykorzystując założenie indukcyjne i udowodnioną własność (ii) otrzymamy

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \cdot a^m = a^{mn} \cdot a^m = a^{mn+m} = a^{m(n+1)}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (iv) dla $m, n \in \mathbb{Z}$.
Zauważmy, że własność (iv) jest prawdziwa dla $n = 0$. Pozostaje więc rozważyć przypadek $n < 0$. Załóżmy więc, że $m, n \in \mathbb{Z}$ oraz $n < 0$. Wtedy $-n > 0$. Stąd wykorzystując własność (i) otrzymamy

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn},$$

co należało udowodnić.

Dowód (v) dla $m, n \in \mathbb{N}$.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem m. Zauważmy, że własność (v) jest oczywista dla $m = 1$. Załóżmy więc, że własność ta pozostaje słuszna dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Wykorzystując założenie indukcyjne otrzymamy wówczas

$$a^{m+1}b^{m+1} = a^m a b^m b = a^m b^m \cdot ab = (ab)^m \cdot (ab) = (ab)^{m+1}.$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzona równość jest prawdziwa dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Dowód (v) dla $m \in \mathbb{Z}$.

Zauważmy, że własność (v) jest prawdziwa dla $m = 0$. Rozważmy więc jeszcze przypadek $m < 0$. Wtedy $-m > 0$. Stąd wykorzystując własność (i) otrzymamy

$$a^m b^m = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{b^{-m}} = \frac{1}{a^{-m} b^{-m}} = \frac{1}{(ab)^{-m}} = (ab)^m.$$

co należało udowodnić.

Dowód (vi).

Niech $m \in \mathbb{Z}$. Wówczas wykorzystując udowodnioną własność (v) otrzymamy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot b^m = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^m = a^m,$$

co implikuje

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

To kończy dowód własności (vi) i dowód całego twierdzenia. $\square$

Dla utrwalenia własności potęg o wykładniku całkowitym proponujemy wykonać następujące ćwiczenie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1.

(i) Oblicz:

(a) $\frac{2^{-3} \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4}{2^{-5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 6^{-2}}$ (b) $\frac{(0{,}9)^0 - (0{,}2)^{-2}}{\left(\frac{3}{2^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$.

(ii) Przedstawić wyrażenia w postaci potęgi liczby a $(a \neq 0)$:

(a) $\frac{a^{-4} \cdot (a^2)^4}{a^{-2} \cdot a^{-3}}$ (b) $\frac{a^3 \cdot a^{-1}}{a^2 \cdot a^{-5}} \cdot \left(-a^{-2}\right)^3$.

(iii) Przedstawić wyrażenie w postaci iloczynu potęg $(x, y \neq 0)$:

(a) $\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} x^3 y^{-2}\right)^{-2}$ (b) $\left(\frac{1}{5}\left((-x)^{-2}\right)^{-3} \left(y^3\right)^{-2}\right)^{-1}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Poprawne odpowiedzi to:

(i) (a) $\frac{1}{36}$ (b) -4.

(ii) (a) a^9 (b) $-a^{-1}$.

(iii) (a) $3^{-12}x^{-6}y^4$ (b) $5x^{-6}y^6$.

Kolejnym etapem konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym jest definicja pierwiastka arytmetycznego z nieujemnej liczby rzeczywistej. Poprawność tej definicji wynika z następującego lematu, który przytoczymy bez dowodu.

Lemat 2. *Dla dowolnej nieujemnej liczby rzeczywistej a i dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, równanie*

$$x^n = b$$

ma dokładnie jedno nieujemne rozwiązanie.

Wykorzystując przytoczoną własność możemy teraz poprawnie zdefiniować pojęcie pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej.

Definicja 5. **Pierwiastkiem arytmetycznym** n-tego stopnia ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) **z rzeczywistej liczby nieujemnej** a nazywamy taką nieujemną liczbę rzeczywistą b, że

$$b^n = a.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 3. Na oznaczenie pierwiastka arytmetycznego n-tego stopnia z liczby a używa się symboli $\sqrt[n]{a}$ oraz $a^{\frac{1}{n}}$. Z definicji wynika więc, że liczba $\sqrt[n]{a}$ jest **jedynym** nieujemnym rozwiązaniem równania

$$x^n = a.$$

Oznacza to również, że

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Dla uproszczenia zapisów przyjmuje się również konwencję $\sqrt[1]{a} = a$, zaś pierwiastek arytmetyczny stopnia 2 nazywa się **pierwiastkiem kwadratowym** i w miejsce $\sqrt[2]{}$ używa się symbolu $\sqrt{}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 4. W definicji pierwiastka arytmetycznego istotna jest zakładana **nieujemność** liczb. Pomimo, że, dla przykładu, $(-3)^2 = 9$, to liczba -3 nie może być przyjęta jako $\sqrt{9}$, bo $-3 < 0$. Z drugiej strony, definicja pierwiastka arytmetycznego jest niekiedy uogólniana dla nieparzystych stopni i dla liczb ujemnych poprzez przyjęcie

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \quad \text{dla } a > 0 \text{ oraz } n \text{ nieparzystego.}$$

W wielu krajach (Austria, Niemcy) takie uogólnienie jest niedopuszczalne i w tych materiałach nie będziemy z tego uogólnienia korzystać!

Pierwiastek arytmetyczny ma następujące własności.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych liczb naturalnych* m, n *oraz dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych* a, *zachodzi:*

(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

(ii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ dla $b > 0$,

(iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$,

(iv) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Przeprowadzimy teraz dowody tych własności.

Dowód (i).
Musimy wykazać, że liczba $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ jest rozwiązaniem równania

$$x^n = ab.$$

Istotnie, z własności potęg (por. Twierdzenie 1 (ii)) mamy

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b.$$

Dowód (ii).

Wykażemy teraz, że liczba $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ jest rozwiązaniem równania

$$x^n = \frac{a}{b}.$$

Z własności potęg (por. Twierdzenie 1 (iii)) mamy

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii).
Wykażemy, że liczba $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ jest rozwiązaniem równania

$$x^{mn} = a.$$

Z własności potęg (por. Twierdzenie 1 (iv)) mamy

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (iv).
Udowodnimy, że liczba $(\sqrt[n]{a})^m$ jest rozwiązaniem równania

$$x^n = a^m.$$

Z własności potęg (por. Twierdzenie (iv)) mamy

$$((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = (\sqrt[n]{a})^{nm} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m.$$

$\square$

W celu utrwalenia przedstawionych własności pierwiastków arytmetycznych proponujemy wykonać następujące ćwiczenie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2.

(i) Obliczyć:

(a) $\sqrt[3]{25 \cdot 135}$ (b) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

(ii) Obliczyć:

(a) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

(b) $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

(i) (a) 15 (b) $\frac{3}{2}$,

(ii) (a) 6 (b) 1.

Do poprawnego zdefiniowania potęgi o wykładniku rzeczywistym potrzebna będzie następująca własność pierwiastków arytmetycznych.

Lemat 3. *Niech* a *będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech* n *będzie liczbą naturalną. Wówczas* $\sqrt[n]{a} > 0$*. Ponadto,*

(i) jeśli $a > 1$*, to* $\sqrt[n]{a} > 1$*,*

(ii) jeśli $a < 1$*, to* $\sqrt[n]{a} < 1$*.*

Podamy dowód tego lematu.

Dowód.
Zauważmy, że dla każdego $a > 0$ zachodzi $\sqrt[n]{a} > 0$.
(i) Załóżmy, że $a > 1$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\sqrt[n]{a} \leqslant 1$. Wykorzystując Lemat 1 (ii) oraz Uwagę 3 otrzymamy

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \leqslant 1,$$

co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $a > 1$.
(ii) W przypadku $a \in (0, 1)$ przypuśćmy, że $\sqrt[n]{a} \geqslant 1$. Jak poprzednio, podstawie Lematu 1 (i) oraz Uwagi 3 mamy

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \geqslant 1,$$

co daje sprzeczność i kończy dowód twierdzenia. $\square$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kolejnym etapem konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym jest potęga o wykładniku wymiernym. Do poprawnego jej określenia wykorzystamy następujący (prosty w dowodzie) lemat.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Lemat 4. *Dla dowolnych takich liczb całkowitych* k, l, m, n, *że* $l > 1, n > 1$ *oraz* $\frac{k}{l} = \frac{m}{n}$ *i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej* a *zachodzi*

$$\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Podamy dowód lematu 4.

Dowód.
Z założenia wynika, że $kn = lm$. Wtedy $a^{kn} = a^{lm}$, więc na podstawie własności potęg i pierwiastków z Twierdzeń 1 oraz 2 otrzymamy

$$a^k = \sqrt[n]{(a^k)^n} = \sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{a^{lm}}.$$

Wówczas, wykorzystując jeszcze raz odpowiednie własności potęg i pierwiastków, dostajemy

$$\sqrt[l]{a^k} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{lm}}} = \sqrt[l]{\sqrt[n]{(a^m)^l}} = \sqrt[l]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^l} = \sqrt[n]{a^m},$$

co należało udowodnić. □

Można więc następująco zdefiniować potęgę liczby o wykładniku wymiernym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 6. **Potęgą dodatniej liczby rzeczywistej a o różnym od zera wykładniku wymiernym w** nazywamy liczbę $\sqrt[n]{a^m}$, gdzie m, n są takimi liczbami całkowitymi, że $w = \frac{m}{n}$, $m \neq 0$ oraz $n > 1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 5. Potęgę dodatniej liczby rzeczywistej a o niezerowym wykładniku wymiernym w oznaczamy symbolem a^w. Wprost z definicji wynika więc, że

$$a^w = \sqrt[n]{a^m}$$

dla $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$, $w = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n > 1$. Ponadto

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

dla $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ oraz $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Potęga o wykładniku wymiernym ma takie same własności jak potęga o wykładniku całkowitym. Sformułujemy je bez dowodu w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b oraz dla wszystkich liczb wymiernych u, w zachodzą równości:*

(i) $a^w = \frac{1}{a^{-w}}$,

(ii) $a^u a^w = a^{u+w}$,

(iii) $\frac{a^u}{a^w} = a^{u-w}$,

(iv) $(a^u)^w = a^{uw}$,

(v) $a^w b^w = (ab)^w$,

(vi) $\frac{a^w}{b^w} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$.

Ćwiczenie 3.

(i) Oblicz:

(a) $8^{-\frac{5}{6}} \cdot 16^{\frac{3}{8}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$ (b) $9^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\frac{5}{6}}$.

(ii) Przedstawić wyrażenie w postaci potęgi o podstawie a $(a > 0)$:

(a) $a^{0,3}a^{-1,7}a^{\frac{1}{4}}$ (b) $\frac{a^{2,4}}{a^{-0,8}} \cdot a^{-1,6}$.

Odp.

(i) (a) $2^{\frac{1}{3}}$ (b) $2^{\frac{3}{2}}$,

(ii) (a) $a^{1,15}$ (b) $a^{1,6}$.

W konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym potrzebna będzie też następująca własność dotycząca potęg o wykładniku wymiernym.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 5. *Niech* a *będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech* w *będzie liczbą wymierną. Wtedy* $a^w > 0$. *Jeśli ponadto* $w > 0$, *to*

(i) $a^w > 1$ *dla* $a > 1$,

(ii) $a^w < 1$ *dla* $a < 1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przeprowadzimy dowód tego lematu.

Dowód.

Niech na początek $w = \frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{Z}$ są takie, że $n > 1$. Jeśli $m > 0$, to $a^m > 0$ na podstawie Lematu 1. Oczywiście $a^0 = 1$, zaś z Lematu 1 wynika $a^{-m} = \frac{1}{a^m} > 0$. Wówczas, z Lematu 3,

$$a^w = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 0.$$

Załóżmy teraz, że $a > 1$ oraz $w = \frac{m}{n} > 0$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ są takie, że $n > 1$. Wtedy, na mocy Lematu 1 (i) otrzymamy $a^m > 1$. Następnie, Lemat 3 (i) implikuje

$$a^w = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1.$$

W przypadku $a \in (0, 1)$ dowód jest analogiczny. $\square$

Ostatnim etapem naszej konstrukcji jest potęga o wykładniku rzeczywistym. Poprawne i kompletne zdefiniowanie potęgi o wykładniku rzeczywistym jest zaawansowane matematycznie i wymaga znajomości faktów dotyczących ciągów liczbowych. Przypomnimy więc na początek elementarne fakty dotyczące ograniczoności i monotoniczności ciągów.

Definicja 7. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista M, że $a_n \leqslant M$ dla każdej liczby naturalnej n.

Definicja 8. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista m, że $a_n \geqslant m$ dla każdej liczby naturalnej n.

Definicja 9. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **ograniczonym**, jeśli (a_n) jest jednocześnie ograniczony z góry i ograniczony z dołu. Jest to równoważne z istnieniem takiej nieujemnej liczby rzeczywistej M, że $|a_n| \leqslant M$ dla każdej liczby naturalnej n.

Definicja 10. Ciąg (a_n) nazywamy **rosnącym**, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest większy od wyrazu poprzedniego, czyli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} > a_n.$$

Definicja 11. Ciąg (a_n) nazywamy **niemalejącym**, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niemniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} \geqslant a_n.$$

Definicja 12. Ciąg (a_n) nazywamy **malejącym**, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} < a_n.$$

Definicja 13. Ciąg (a_n) nazywamy **nierosnącym**, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niewiększy od wyrazu poprzedniego, czyli

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Definicja 14. Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem **monotonicznym**, jeśli jest albo ciągiem nierosnącym albo ciągiem niemalejącym.

Monotoniczność ciągu (a_n) o wyrazach dodatnich można rozstrzygać badając iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Lemat 6. *Niech (a_n) będzie ciągiem o wyrazach dodatnich.*

(i) *Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

(ii) *Ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$.

(iii) *Ciąg (a_n) jest ciągiem nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$.

(iv) *Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

Przypomnimy jeszcze definicję ciągu zbieżnego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 15. Mówimy, że ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych **jest zbieżny do liczby rzeczywistej** g (co zapisujemy $g = \lim_{n\to\infty} a_n = g$), jeśli spełniony jest następujący warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n).

Definicja 16. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy **zbieżnym**, jeśli jest zbieżny do skończonej granicy.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym wykorzystamy lemat o monotonicznych ciągach ograniczonych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 7.

(i) *Każdy niemalejący ciąg ograniczony z góry jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.*

(ii) *Każdy nierosnący ciąg ograniczony z dołu jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przystąpimy teraz do konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym. Poprawność naszej definicji wynika z następującego twierdzenia. Wykorzystamy tutaj fakt, że dla każdej liczby niewymiernej znajdziemy ciąg kolejnych jej przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem.

Twierdzenie 4. *Ustalmy dodatnią liczbę rzeczywistą a oraz dowolną liczbę niewymierną x. Niech (c_n) będzie ciągiem jej kolejnych dziesiętnych przybliżeń z niedomiarem, tzn. $c_1 = x_0$, $c_2 = x_0,x_1$, $c_3 = x_0,x_1x_2$, $c_4 = x_0,x_1x_2x_3$, ..., gdzie $x_0 = [x]$ jest częścią całkowitą liczby x oraz $x_1, x_2, x_3, \ldots$ są kolejnymi cyframi w rozwinięciu dziesiętnym liczby x. Wówczas istnieje skończona granica*

$$\lim_{n\to\infty} a^{c_n}.$$

Ponadto, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{c_n} > 0$.

Udowodnimy teraz nasze twierdzenie. Dowód podzielimy na dwa przypadki, z których każdy podzielimy na kroki.

Dowód w przypadku $a > 1$, *krok* 1.

Pokażemy, że (a^{c_n}) jest ciągiem ograniczonym z góry. Niech $M = a^{[x]+1}$. Zauważmy, że $c_n \leqslant [x] + 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\frac{a^{[x]+1}}{a^{c_n}} = a^{([x]+1)-c_n} \geqslant 1,$$

stąd

$$\frac{a^{c_n}}{a^{[x]+1}} \leqslant 1.$$

Ponieważ na podstawie Lematu 5 mamy $a^{[x]+1} > 0$, więc

$$a^{c_n} \leqslant a^{[x]+1} = M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

co oznacza, że ciąg (a^{c_n}) jest ograniczony z góry przez $M = a^{[x]+1}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód w przypadku $a > 1$, krok 2.

Pokażemy, że (a^{c_n}) jest ciągiem niemalejącym. Ustalmy dowolnie $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ (c_n) jest ciągiem niemalejącym (dlaczego?), więc $c_{n+1} - c_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto $c_{n+1} - c_n \in \mathbb{Q}$. Z Lematu 5 otrzymujemy wtedy

$$\frac{a^{c_{n+1}}}{a^{c_n}} = a^{c_{n+1}-c_n} \geqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Na podstawie Lematu 6 (a^{c_n}) jest ciągiem niemalejącym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód w przypadku $a > 1$, *krok* 3.
W poprzednich krokach udowodniliśmy, że (a^{c_n}) jest ograniczonym z góry ciągiem niemalejącym. Na mocy Lematu 7 otrzymamy, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n\to\infty} a^{c_n}.$$

Zauważmy jeszcze, że skoro (a^{c_n}) jest ciągiem niemalejącym, to na podstawie Lematu 5 (liczba całkowita jest liczbą wymierną!),

$$0 < a^{[x]} = a^{c_1} \leqslant a^{c_n} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

więc $\lim_{n\to\infty} a^{c_n} > 0$.

Dowód w przypadku $a < 1$, *krok* 1.

Pokażemy teraz, że (a^{c_n}) jest ciągiem ograniczonym z dołu. Niech $m = a^{[x]+1}$ i zaobserwujmy, że $c_n \leqslant [x] + 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\frac{a^{[x]+1}}{a^{c_n}} = a^{([x]+1)-c_n} \leqslant 1,$$

Zatem

$$\frac{a^{c_n}}{a^{[x]+1}} \geqslant 1.$$

Z Lematu 5 mamy $a^{[x]+1} > 0$, więc z powyższa nierówność implikuje

$$a^{c_n} \geqslant a^{[x]+1} = m \quad \textbf{dla każdego} \ \ n \in \mathbb{N},$$

co oznacza, że ciąg (a^{c_n}) jest ograniczony z dołu przez $m = a^{[x]+1}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód w przypadku $a < 1$, *krok* 2.

Pokażemy, że (a^{c_n}) jest ciągiem nierosnącym. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ dowolnie. Ciąg (c_n) jest ciągiem niemalejącym, więc $c_{n+1} - c_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jednocześnie $c_{n+1} - c_n \in \mathbb{Q}$. Na podstawie Lematu 5 otrzymujemy

$$\frac{a^{c_{n+1}}}{a^{c_n}} = a^{c_{n+1}-c_n} \leqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Z Lematu 6 wynika wtedy, że (a^{c_n}) jest ciągiem nierosnącym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód w przypadku $a < 1$, *krok* 3.

W poprzednich dwóch krokach udowodniliśmy, że (a^{c_n}) jest nierosnącym ciągiem ograniczonym z dołu. Z Lematu 7 wynika, że istnieje skończona granica

$$\lim_{n \to \infty} a^{c_n}.$$

Ponieważ zaś

$$a^{c_n} \geqslant a^{[x]+1} > 0 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

więc również $\lim_{n \to \infty} a^{c_n} > 0$. □

Możemy już teraz poprawnie zdefiniować potęgę o wykładniku rzeczywistym niewymiernym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 17. Ustalmy dowolnie dodatnią liczbę rzeczywistą a oraz dowolną liczbę niewymierną x. Niech (c_n) będzie ciągiem kolejnych dziesiętnych przybliżeń z niedomiarem liczby x. **Potęgą liczby a o wykładniku niewymiernym x** nazywamy liczbę będącą granicą ciągu (a^{c_n}) i oznaczamy ją symbolem a^x.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Aby udowodnić własności potęgi o wykładniku rzeczywistym, przytoczymy bez dowodu następujący lemat. Jego dowód jest skomplikowany i znacznie wykracza poza tematykę tej prezentacji, więc zostanie pominięty.

Lemat 8. *Ustalmy dowolnie dodatnią liczbę rzeczywistą* a *i niech* (x_n) *będzie dowolnym ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do liczby rzeczywistej* x. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Przytoczony lemat pozwoli nam udowodnić następujące własności potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich* a, b *oraz dla wszystkich liczb rzeczywistych* x, y *zachodzą równości:*

(i) $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$,

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(iii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(v) $a^x b^x = (ab)^x$,

(vi) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Przeprowadzimy dowód tego twierdzenia, pomijając własność (iii), której dowód wymaga wiadomości dotyczących ciągłości funkcji, co znacznie wykracza poza ramy tej prezentacji. Własność ta nie jest jednak istotna przy samej definicji funkcji wykładniczej.

W dowodach własności wykorzystamy analogiczne własności potęg o wykładniku wymiernym oraz następując lemat dotyczący działań arytmetycznych na granicach ciągów.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 9. *Niech* (x_n) *oraz* (y_n) *będą ciągami zbieżnymi i niech* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ *dla pewnych liczb rzeczywistych* x, y*. Wówczas*

(i) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$*,*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$*,*

(iii) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$*,*

(iv) jeśli $y_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $y \neq 0$*, to* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y}$*.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód Twierdzenia 5 (i).
Ustalmy ciąg (x_n) liczb wymiernych zbieżny do x. Z Twierdzenia 3 (i) wynika, że $a^{x_n} = \frac{1}{a^{-x_n}}$. Wykorzystując Lemat 8 oraz Lemat 9 (iv) otrzymamy

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{-x_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{-x_n}}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(-x_n) = -x$, więc z Lemat 8 dostaniemy

$$a^x = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{-x_n}} = \frac{1}{a^{-x}},$$

co kończy dowód własności (i).

Dowód Twierdzenia 5 (ii).
Niech (x_n) oraz (y_n) będą ciągami liczb wymiernych zbieżnymi, odpowiednio, do x oraz y. Z Twierdzenia 3 (ii) wynika, że $a^{x_n}a^{y_n} = a^{x_n+y_n}$. Wykorzystując Lemat 8 oraz Lemat 9 (iii) dostajemy

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n}a^{y_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n}.$$

Ponieważ (por. Lemat 9 (i)) $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = x+y$, więc z Lematu 8 otrzymamy

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y},$$

co należało udowodnić.

Dowód Twierdzenia 5 (iii).
Ustalmy ciągi (x_n) oraz (y_n) liczb wymiernych zbieżne, odpowiednio, do x oraz y. Z Twierdzenia 3 (iii) otrzymamy $\frac{a^{x_n}}{a^{y_n}} = a^{x_n - y_n}$. Na podstawie Lematu 8 oraz Lematu 9 (iv) dostajemy wtedy

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}}{a^{y_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n - y_n}.$$

Ponieważ (por. Lemat 9 (ii)) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y$, na podstawie Lematu 8 otrzymamy

$$\frac{a^x}{a^y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n - y_n} = a^{x-y},$$

co należy udowodnić.

Dowód Twierdzenia 5 (v).
Niech (x_n) będzie ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x. Z Twierdzenia 3 (v) dostajemy $a^{x_n}b^{x_n} = (ab)^{x_n}$. Wykorzystując Lemat 8 oraz Lemat 9 (iii) otrzymamy

$$\begin{aligned} a^x b^x &= \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{x_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (a^{x_n} b^{x_n}) = \lim_{n\to\infty} (ab)^{x_n} = (ab)^x, \end{aligned}$$

co było do udowodnienia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód Twierdzenia 5 (vi).

Ustalmy ciąg (x_n) liczb wymiernych zbieżny do x. Z Twierdzenia3 (vi) dostaniemy $\frac{a^{x_n}}{b^{x_n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x_n}$. Z Lematu 8 oraz z Lematu 9 (iii) wynika

$$\frac{a^x}{b^x} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{x_n}}{b^{x_n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x},$$

co kończy dowód Twierdzenia 5. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ukończyliśmy tym samym konstrukcję potęgi o wykładniku rzeczywistym oraz udowodnione zostały jej najważniejsze własności. W celu utrwalenia tych własności proponujemy wykonanie kilku ćwiczeń.

Ćwiczenie 4.

(i) Zapisać w postaci potęgi:

(a) $2^{4-\sqrt{3}} \cdot 2^{-3+2\sqrt{3}}$ (b) $3^{\sqrt{5}-5\sqrt{2}} \cdot 3^{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

(c) $\dfrac{5^{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}}$ (d) $\left(3^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\right)^2 \cdot 9^{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Odp. Poprawne odpowiedzi to:

(i) (a) $2^{1+\sqrt{3}}$ (b) $3^{-\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

(c) $5^{-\sqrt{7}-3\sqrt{3}}$ (d) $9^{2\sqrt{5}} = 3^{4\sqrt{5}}$.

W dowodach własności funkcji wykładniczej istotne będą pewne własności potęgi o wykładniku rzeczywistym, które wynikają z konstrukcji potęgi o wykładniku rzeczywistym i z Lematu 5.

Lemat 10. *Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas $a^x > 0$. Ponadto,*

(i) jeśli $a > 1$, to $a^x > 1$,

(ii) jeśli $a < 1$, to $a^x < 1$.

Zauważmy, że jeśli x jest liczbą wymierną, to dowodzone własności wynikają z Lematu 5. Ponadto, dodatniość potęgi o wykładniku niewymiernym wynika z Twierdzenia 4. Dlatego pozostaje przeprowadzić dowód obu własności dla x niewymiernych. W tym celu wykorzystamy konstrukcję potęgi o wykładniku niewymiernym.

Dowód (i).

Niech (c_n) będzie ciągiem przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem dodatniej liczby niewymiernej x i niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$c_n > 0 \quad \text{dla} \;\; n \geqslant n_0$$

Jeśli więc $a > 1$, to (a^{c_n}) jest ciągiem niemalejącym (por. dowód Twierdzenia 4). Z monotoniczności (a^{c_n}) i z Lematu 5 dostaniemy

$$a^{c_n} \geqslant a^{c_{n_0}} > 1 \quad \text{dla} \;\; n \geqslant n_0.$$

Wykorzystując jeszcze raz monotoniczność ciągu (a^{c_n}), otrzymamy

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{c_n} > 1.$$

Dowód (ii).
Niech (c_n) będzie ciągiem przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem dodatniej liczby niewymiernej x i niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że

$$c_n > 0 \quad \text{dla} \ \ n \geqslant n_0.$$

Ponieważ $a \in (0,1)$, więc (a^{c_n}) jest ciągiem nierosnącym (por. dowód Twierdzenia 4). Z monotoniczności (a^{c_n}) i z Lematu 5 wynika

$$a^{[x]+1} \leqslant a^{c_n} \leqslant a^{c_{n_0}} < 1 \quad \text{dla} \ \ n \geqslant n_0.$$

Stąd, wykorzystując monotoniczność ciągu (a^{c_n}), otrzymamy

$$0 < a^{[x]+1} \leqslant a^x = \lim_{n\to\infty} a^{c_n} < 1.$$

□

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania funkcji wykładniczej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 18. **Funkcją wykładniczą o podstawie** a, gdzie a jest taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że $a \neq 1$, nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ określoną wzorem

$$f(x) = a^x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 6. Poprawność określenia funkcji wykładniczej wynika z Lematu 10, gdyż

$$a^x > 0 \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, funkcji stałej $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1$ **nie traktuje się** jako szczególnego przypadku funkcji wykładniczej, stąd założenie $a \neq 1$. Funkcję wykładniczą o podstawie a oznacza się też symbolem $\exp_a$. Zatem

$$\exp_a(x) = a^x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 7. Dla funkcji wykładniczej można sformułować i udowodnić twierdzenie ogólniejsze od Lematu 8.

Twierdzenie 6. *Ustalmy dodatnią liczbę rzeczywistą a. Dla dowolnie ustalonego $x \in \mathbb{R}$ niech (x_n) będzie dowolnym takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $x_n \neq x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Twierdzenie 6 implikuje ciągłość funkcji wykładniczej $\exp_a$ dla $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (pojęcie ciągłości funkcji tematem oddzielnej prezentacji).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przed wykreśleniem wykresów funkcji wykładniczych dla pewnych podstaw, przeanalizujemy wybrane ich własności. Nim to jednak uczynimy, przypomnimy niezbędne definicje. Rozpoczniemy od definicji funkcji różnowartościowej.

Definicja 19. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. Funkcję f nazywamy **różnowartościową**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right).$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Warunek definicyjny pozwalający stwierdzić lub wykluczyć różnowartościowość funkcji jest bardzo intuicyjny. Stwierdza on, że funkcja jest różnowartościowa, jeśli różnym argumentom przyporządkowane są różne wartości. Pozwala on prosto stwierdzić, kiedy dana funkcja nie jest różnowartościowa (istnieją wówczas dwa różne argumenty, dla których funkcja przyjmuje równe wartości). Niemniej jednak, tak intuicyjnego warunku nie można wykorzystać do dowodu różnowartościowości funkcji. W tym celu użyć należy następującego lematu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 11. *Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. Funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Kolejnymi ważną własnością funkcji jest jej monotoniczność.

Definicja 20. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem i niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ odwzorowuje zbiór X w zbiór liczb rzeczywistych. Mówimy, że funkcja f jest:

(i) **rosnąca w zbiorze X**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\right);$$

(ii) **malejąca w zbiorze X**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right).$$

W przypadku funkcji o wartościach dodatnich sformułować można następujące warunki równoważne na to, aby funkcja była rosnąca bądź też malejąca

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 12. *Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem i niech $f : X \to (0, \infty)$. Funkcja f jest*

(i) rosnąca w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} > 1 \right);$$

(ii) malejąca w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2)}{f(x_1)} < 1 \right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ostatnim istotnym dla nas pojęciem jest definicja zbioru wartości funkcji.

Definicja 21. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. **Zbiorem wartości funkcji** f nazywamy zbiór $W_f \subset Y$,

$$W_f = \left\{ y \in Y : \bigvee_{x \in X} y = f(x) \right\}.$$

Możemy teraz przystąpić do sformułowania własności funkcji wykładniczej. Własności te pomogą nam wykonać wykresy funkcji wykładniczych.

Twierdzenie 7. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) *Zbiorem wartości funkcji* $\exp_a$ *jest przedział* $(0, \infty)$.

(ii) *Dla* $a > 1$ *funkcja* $\exp_a$ *jest rosnąca w* $\mathbb{R}$.

(iii) *Dla* $a < 1$ *funkcja* $\exp_a$ *jest malejąca w* $\mathbb{R}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód pierwszej z własności tego twierdzenia nie jest prosty i wykorzystuje m.in. własność Darboux przysługującą funkcjom ciągłym. Udowodnimy tutaj więc jedynie monotoniczność funkcji wykładniczej w poszczególnych przypadkach. Jednocześnie, funkcja wykładnicza przyjmuje jedynie wartości dodatnie, więc w dowodzie jej monotoniczności wykorzystamy Twierdzenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (ii) oraz (iii).

(i) Niech $a > 1$. Ustalmy dowolnie takie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, że $x_1 < x_2$. Wówczas $x_2 - x_1 > 0$ i z Lematu 10 (i) wynika

$$\frac{\exp_a(x_2)}{\exp_a(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} > 1.$$

Z Lematu 12 wiadomo, że wówczas funkcja $\exp_a$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$.

(ii) Jeśli $a \in (0,1)$ oraz $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ są takie, że $x_1 < x_2$, to $x_2 - x_1 > 0$ i z Lematu 10 (ii) otrzymamy

$$\frac{\exp_a(x_2)}{\exp_a(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} < 1.$$

Z Lematu 12 wynika, że funkcja $\exp_a$ jest rosnąca w $\mathbb{R}$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z Twierdzenia 7 wyprowadzimy kolejne ważne własności funkcji wykładniczej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 1. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) *Funkcja* $\exp_a$ *jest funkcją różnowartościową.*

(ii) *Jeśli* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$.

(iii) *Jeśli* $a > 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$.

(iv) *Jeśli* $a > 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} \leqslant a^{x_2} \iff x_1 \leqslant x_2$.

(v) *Jeśli* $a < 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2$.

(vi) *Jeśli* $a < 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} \leqslant a^{x_2} \iff x_1 \geqslant x_2$.

Dowód.
(i) Różnowartościowość funkcji $\exp_a$ jest natychmiastową konsekwencją jej monotoniczności (por. Twierdzenie 7 (ii) oraz (iii)).

Warunek (ii) jest z kolei konsekwencją różnowartościowości funkcji wykładniczej oraz Lematu 11.

Na koniec, warunki (iii)–(vi) wynikają z monotoniczności funkcji wykładniczej (por. Twierdzenie 7 (ii) oraz (iii)). $\square$

Wykorzystując uzasadniony wniosek Rozwiążemy teraz proste równania i nierówności wykładnicze.

Ćwiczenie 5. Znaleźć liczbę x spełniającą równanie

$$2^x = 32.$$

Rozwiązanie. Nasze równanie możemy zapisać w postaci

$$2^x = 2^5.$$

Wtedy, wykorzystując Wniosek 1 (ii) otrzymamy $x = 5$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 6. Wyznaczyć wszystkie liczby spełniające nierówność

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} \leqslant 9.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Nierówność z ćwiczenia zapisujemy w postaci

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-2},$$

ponieważ zaś $\frac{1}{3} < 1$, więc z Wniosku 1 (vi) wynika $x \geqslant -2$.

Znając własności funkcji wykładniczej, a w szczególności jej ciągłość i monotoniczność, możemy spróbować wyrysować wykres funkcji wykładniczej dla pewnego a.

Ćwiczenie 7. Narysować wykres funkcji $\exp_2$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

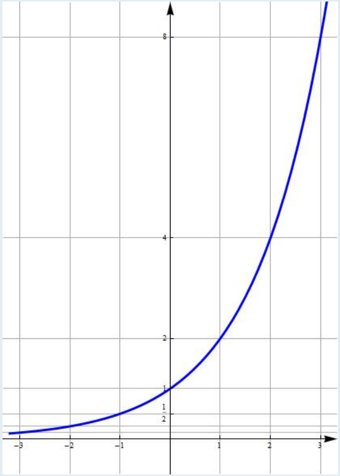
Spróbuj sporządzić tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 8. Narysować wykres funkcji $\exp_{\frac{1}{2}}$.

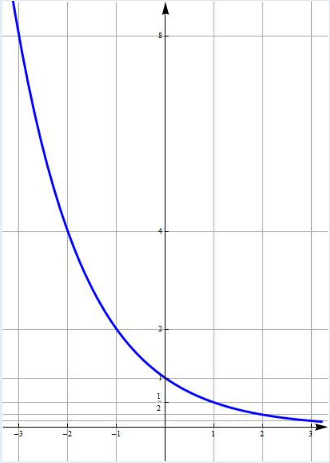
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jak poprzednio, wykonaj tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów, a następnie wyrysuj wykres.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Definicja 22. **Krzywą wykładniczą** nazywamy wykres dowolnej funkcji wykładniczej.

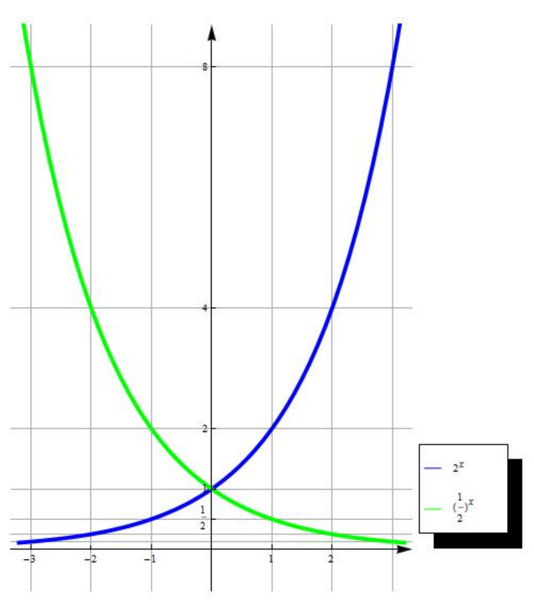
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1. Opisać związek pomiędzy wykresami funkcji wykładniczych z ćwiczeń 1 oraz 2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Spróbuj narysować wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Porównanie tabel wartości funkcji $\exp_2$ oraz $\exp_{\frac{1}{2}}$ i ich wykresów sugeruje, że krzywe wykładnicze o równaniach $y = 2^x$ oraz $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ są symetryczne względem osi OY. Jest to oczywiście konsekwencją odpowiedniej własności potęg oraz równości

$$\exp_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x} = \exp_2(-x) \quad \text{dla} \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zaobserwowana własność sugeruje następujące twierdzenie, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

Wniosek 2. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *oraz* $a \neq 1$. *Krzywe wykładnicze* $y = a^x$ *oraz* $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ *są symetryczne względem osi* OY.

Dla wprawy sugerujemy wykonanie następujących zadań.

Zadanie 2. Naszkicować wykresy następujących funkcji:

1. $f_1(x) = \exp_3(x)$,
2. $f_2(x) = \exp_{\frac{1}{3}}(x)$,
3. $f_3(x) = \exp_2(2x)$.

Zadanie 3. Wykorzystując wiadomości dotyczące przekształcania wykresów funkcji naszkicować wykresy następujących funkcji wykładniczych:

1. $g_1(x) = \exp_3(-x)$,
2. $g_2(x) = \exp_2(x) - 2$,
3. $g_3(x) = \exp_2(x+1)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zastanówmy się jeszcze nad wzajemnym położeniem wykresów funkcji wykładniczych dla różnych podstaw a oraz b.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

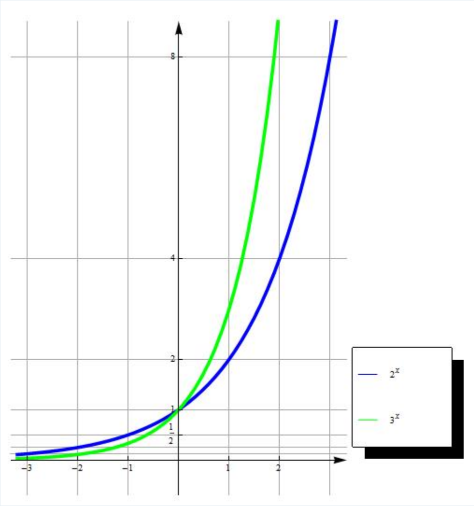
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 9. Narysować krzywe wykładnicze $y = 2^x$, $y = 3^x$ w jednym układzie współrzędnych. Jaką prawidłowość można zaobserwować?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.



Można zauważyć, że $3^x < 2^x$ dla $x < 0$ oraz $3^x > 2^x$ dla $x > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 10. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 1$ narysować krzywe wykładnicze $y = a^x$ oraz $y = b^x$ oraz sformułować zaobserwowaną prawidłowość.

Prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 3.

(i) Dla ustalonych liczb rzeczywistych $1 < a < b$ *zachodzi*

$$b^x < a^x \quad \textsf{dla} \;\; x < 0 \qquad \textsf{oraz} \qquad b^x > a^x \quad \textsf{dla} \;\; x > 0.$$

(ii) Dla ustalonych liczb rzeczywistych $0 < a < b < 1$ *zachodzi*

$$b^x > a^x \quad \textsf{dla} \;\; x < 0 \qquad \textsf{oraz} \qquad b^x < a^x \quad \textsf{dla} \;\; x > 0.$$

Zadanie 4.

(i) Wykorzystując własności funkcji wykładniczej porównać liczby:

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(3^{-1})}$ oraz $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,333}$ (b) $2^{\sqrt{2}}$ oraz $\left(\sqrt{2}\right)^{2}$

(c) $(0,4)^{-3}$ oraz $(0,4)^{4}$ (d) 2^{π} oraz $\pi^{\frac{1}{2}}$

(e) $(0,02)^{-45}$ oraz 50^{30} (f) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{8}$ oraz $\left(\frac{5}{2}\right)^{6}$.

(ii) Uporządkować podane liczby od największej do najmniejszej:

(a) $10^{-3\pi}$, $(0,1)^{\sqrt{3}}$, $(0,0001)^{-5}$, $100^{\sqrt{20}}$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{17}}$,

(b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\pi}$, 1, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Prawidłowe odpowiedzi to

(i) (a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(3^{-1}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}333}$

(b) $2^{\sqrt{2}} > 2^1 = \left(\sqrt{2}\right)^2$

(c) $(0,4)^{-3} > (0,4)^4$

(d) $2^\pi > 2^3 > 2 = 4^{\frac{1}{2}} > \pi^{\frac{1}{2}}$

(e) $(0,02)^{-45} = \left(\frac{1}{50}\right)^{-45} = 50^{45} > 50^{30}$

(f) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^8 = \frac{5^4}{2^8} < \frac{5^6}{2^6} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$.

(ii) (a) $(0,0001)^{-5} = 10^{20}$, $100^{\sqrt{20}} = 10^{2\sqrt{20}}$,

$(0,1)^{\sqrt{3}} = 10^{-\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{10}\right)^{\sqrt{17}} = 10^{-\sqrt{17}}$, $10^{-3\pi}$,

(b) $\left(\frac{3}{2}\right)^\pi = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\pi}$, $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{7}}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 1. Funkcja wykładnicza o podstawie π jest funkcją:

(a) rosnącą,

(b) stałą,

(c) malejącą,

(d) ani rosnącą ani malejącą.

Pytanie 2. Funkcja wykładnicza o podstawie $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1}$ jest funkcją:

(a) rosnącą,

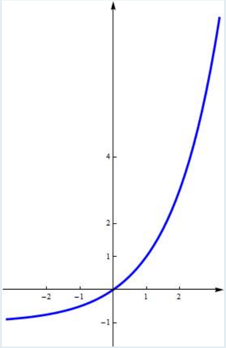
(b) stałą,

(c) malejącą,

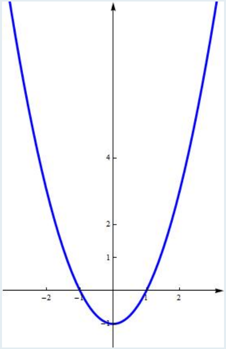
(d) ani rosnącą ani malejącą.

Pytanie 3. Wykres funkcji wykładniczej $\exp_a$ dla pewnego $a \in (0,1)$ jest przedstawiony na rysunku

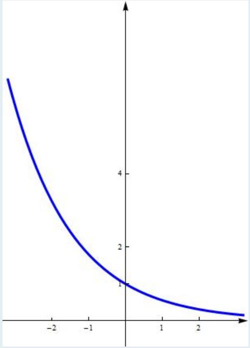
(a)



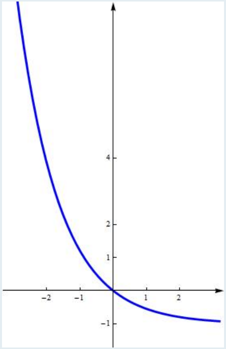
(b)



(c)

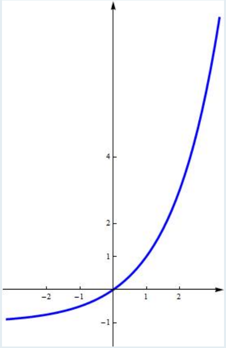


(d)

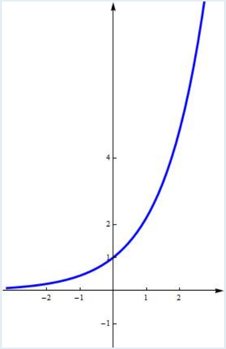


Pytanie 4. Wykres funkcji wykładniczej $\exp_a$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ jest przedstawiony na rysunku

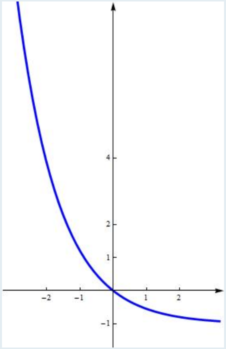
(a)



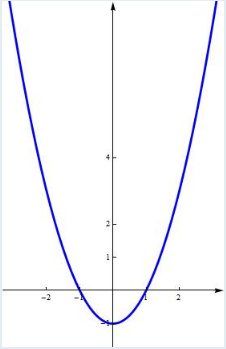
(b)



(c)



(d)



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 5. Spośród liczb $2^{\sqrt{17}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{8}}$, $\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$, $3^{\sqrt{8}-1}$ największą jest

(a) pierwsza,

(b) druga,

(c) trzecia,

(d) czwarta.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 6. Spośród liczb $2^{\sqrt{17}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\sqrt{8}}$, $\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}$, $3^{\sqrt{8}-1}$ najmniejszą jest

(a) pierwsza,

(b) druga,

(c) trzecia,

(d) czwarta.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 7. Równanie $\pi^{x^2-x-2} = -2$

(a) ma jedno rozwiązanie dodatnie,

(b) ma jedno rozwiązanie ujemne,

(c) ma dwa rozwiązania różnych znaków,

(d) nie ma rozwiązania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 8. Rozwiązaniem nierówności $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \geqslant \frac{27}{8}$ jest przedział

(a) $(-\infty, -\frac{3}{2})$,

(b) $(-\infty, -\frac{3}{2}]$,

(c) $(-\infty, \frac{3}{2})$,

(d) $(-\infty, \frac{3}{2}]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 9. Rozwiązaniem nierówności $(1,6)^{\frac{2}{5}x} < \frac{25}{64}$ jest przedział

(a) $(-\infty, -5)$,

(b) $(-\infty, -5]$,

(c) $(-\infty, 5)$,

(d) $(-\infty, 5]$.

Pytanie 10. Jednym z rozwiązań równania $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x^2-4} = 1$ jest liczba

(a) 1,

(b) 0,

(c) -2,

(d) -1.

Klucz odpowiedzi:

1(a), 2(c), 3(c), 4(b), 5(b), 6(d), 7(d), 8(b), 9(a), 10(c).