E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

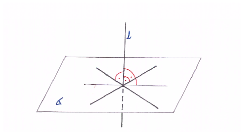
Temat: Stereometria

Materiały merytoryczne do kursu

1 Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę. Kąt dwuścienny

Przypomnijmy niektóre fakty geometrii przestrzennej znane z nauki szkolnej

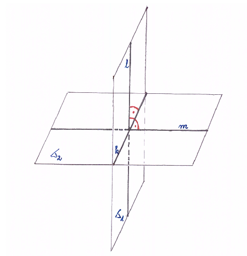
Definicja. Prosta i płaszczyzna są do siebie prostopadłe, jeśli prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie i przecinającej daną prostą (Rys.1).



Rysunek 1:

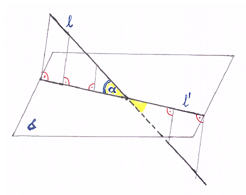
Twierdzenie. Prosta l jest prostopadła do płaszczyzny σ wtedy i tylko wtedy, gdy jest protopadła do dwóch różnych prostych leżących na płaszczyźnie σ i przecinających prostą l.

Definicja. Płaszczyzna σ_1 jest prostopadła do płaszczyzny σ_2, jeśli w płaszczyżnie σ_1 jest zawarta prosta prostopadła do płaszczyzny σ_2 (Rys.2.)



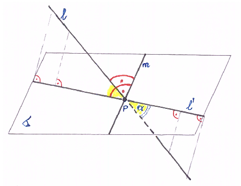
Rysunek 2:

Definicja. Kątem między prostą l (przebijającą płaszczyznę σ i nieprostopadłą do niej) a płaszczyzną σ nazywamy kąt między prostą l a jej rzutem prostokątnym l' na płaszczyznę σ (Rys.3).



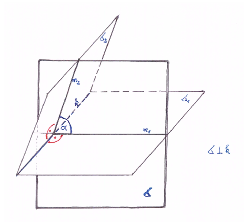
Rysunek 3:

Twierdzenie. (o trzech prostopadłych). Jeżeli prosta l przebija płaszczyznę σ w punkcie P i nie jest do niej prostopadła, to prosta m leżąca w płaszczyźnie σ i przechodząca przez punkt P jest prostopadła do l wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do rzutu prostokątnego l' prostej l na płaszczyznę σ (Rys.4).



Rysunek 4:

Definicja. Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy część wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi (Rys.5).



Rysunek 5:

Za miarę kąta dwuściennego przyjmuje się miarę tego kąta liniowego. Z twierdzenia o trzech prostopadłych wynika, że krawędź kąta dwuściennego jest prostopadła do ramion odpowiadającego mu kąta linowego.

ZADANIA

Zadanie 1. Dana jest płaszczyzna σ oraz dwie proste skośne l_1 i l_2.Poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny σ i przecinającą proste l_1 i l_2.

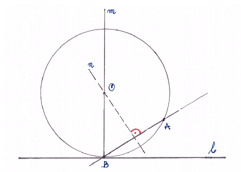
[klik] [Przypadek 1 - żadna z prostych l_1 i l_2 nie jest prostopadła do płaszczyzny σ. Wtedy przez proste l_1 i l_2płaszczyzny σ prowadzimy płaszczyzny prostopadłe do . Krawędź k przecięcia tych płaszczyzn jest szukaną prostą. Przypadek 2 - płaszczyzna σ jest prostopadła do jednej z danych prostych np. $l_1 \perp \sigma$. Postępując tak jak w przypadku 1 otrzymujemy krawędź k która jest równoległa do l_1. Zadanie w tym przypadku (w przestrzeni euklidesowej) nie ma rozwiązania.]

Zadanie 2. Dane są dwie proste skośne l_1 i l_2 oraz punkt A nie należący do żadnej z tych prostych. Przez punkt A poprowadzić prostą przecinającą proste l_1 i l_2.

[klik] [Przez punkt A i prostą l_1 prowadzimy jedną płaszczyznę, a przez punkt A i prostą l_2 drugą. Wtedy krawędź k przecięcia tych dwóch płaszczyzn jest szukaną prostą.]

Zadanie 3. Zbudować sferę przechodzącą przez dany punkt A i styczną do danej płaszczyzny σ w punkcie B (oczywiście A nie leży na σ).

[klik] [Załóżmy, że dana jest sfera którą mamy skonstruować. W wyniku przekroju tej sfery płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny σ i przechodzącą przez punkty A i B otrzymujemy krawędź l przekroju z płaszczyzną σ styczną do okręgu (wielkiego koła sfery) w punkcie B, do którego to okręgu należy również punkt A (Rys.6). Prosta m prostopadła do l wystawiona w punkcie B i symetrlana n odcinka AB przecinają się w punkcie O będącym środkiem sfery.

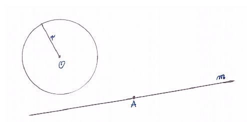


Rysunek 6:

Mając środek O sfery i jej promień $|OB|$ mamy również sferę jako ogół punktów przestrzeni oddalonych od O o stałą odległość równą promieniowi $|OB|$.]

Zadanie 4. Dana jest kula $k(O,r)$, płaszczyzna σ rozłączna z daną kulą oraz punkt $A \in \sigma$. Zbudować kulę styczną do płaszczyzny σ w punkcie A oraz do danej kuli.

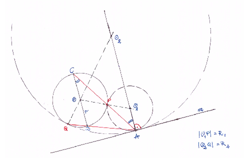
[klik] [Wystarczy znaleźć środek i promień szukanej kuli. W tym celu przez punkty A i O prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny σ. W wyniku przekroju płaszczyzną prostopadłą otrzymujemy okrąg $o(O,r)$ oraz krawędź m na której leży punkt A rozłączną z okręgiem (Rys. 7). Teraz zadanie sprowadza się do znalezienia



Rysunek 7:

okręgu stycznego do prostej m w punkcie A i do okręgu $o(O,r)$. Środek szukanego okręgu będzie leżał na prostej n prostopadłej do prostej m wystawionej w punkcie A (styczna do okręgu jest prostopadła do promienia). Prowadząc przez punkt O średnicę CD równoległą do prostej n, nietrudno wykazać że prosta AC przecina dany okrąg w punkcie P styczności zewnętrznej z szukanym okręgiem $o(O_1, |O_1A|)$ natomiast prosta AD w punkcie Q styczności wewnętrznej z szukanym okręgiem $o(O_2, |O_2A|)$, gdzie $O_1 = n \cap \mathrm{pr}OP$ i $O_2 = n \cap \mathrm{pr}OQ$

(Rys 8). Istotnie, z równości odpowiednich kątów przy



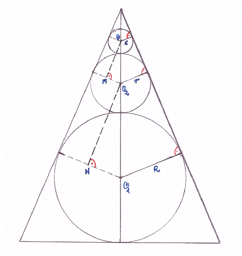
Rysunek 8:

prostych równoległych przeciętych trzecią prostą wynika, że trójkąty COP i PO_1A są podobne (ściślej jednokładne względem środka P). Skoro $|OC| = |OP| = r$, więc $|O_1A| = |O_1P| = R_1$ i $|OO_1| = r + R_1$. Analogicznie jednokładnymi są trójkąty OQD i O_2QA a więc warunek $|OQ| = |OD| = r$ pociąga równość $|O_2Q| = |O_2A| = R_2$ przy czym $|OO_2| = R_2 - r$.

Przy przyjętych założeniach istnieją zawsze dwie kule; $k(O_1, |O_1A|)$ styczna zewnętrznie z dana kulą $k(O, r)$ oraz $k(O_2, |O_2A|)$ styczna wewnętrznie z ta kulą - przy czym obydwie kule odpowiednio o środkach O_1 i O_2 są jednocześnie styczne do płaszczyzny σ w punkcie A.]

Zadanie 5. Dane są dwie kule $k(O_1, R)$ i $k(O_2, r)$, gdzie $R > r$, styczne zewnętrznie i wpisane w stożek. Znaleźć promień x kuli stycznej zewnętrznie do mniejszej z kul i stycznej do powierzchni bocznej stożka (wzdłuż całego okręgu).

[klik] [Weźmy przekrój osiowy rozważanej figury (Rys.9). Przujmując oznaczenia jak na rysunku 9 - z podobieństwa



Rysunek 9:

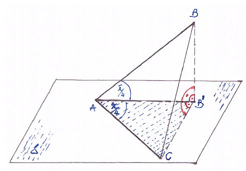
trójkątów OMO_2 i O_2NO_1 mamy proporcję

$$\frac{r-x}{r+x} = \frac{R-r}{R+r}.$$

Wyliczamy stąd $x = \frac{r^2}{R}$.]

Zadanie 6. Prosta AB tworzy z płaszczyzną σ kąt miary $\frac{\pi}{4}$, a prosta AC leżąca w płaszczyźnie σ, tworzy z rzutem prostokątnym prostej AB na płaszczyznę σ również kąt miary $\frac{\pi}{4}$. Oblicz miarę kąta zawartego między prostymi AB i AC.

[klik] . [Poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do rzutu prostokątnego AB' prostej AB na płaszczyznę σ (Rys. 10). Wygodnie jest przyjąć, że B' jest również rzutem

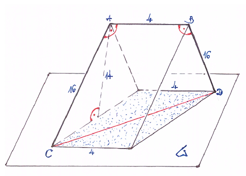


Rysunek 10:

prostokątnym punktu C (na rzut prostokątny prostej AB w płaszczyźnie σ). Trzy trójkąty prostokątne $AB'B$, $AB'C$ i $BB'C$ tworzą naroże sześcianu, dla którego AB, BC i CA są przekątnymi ścian schodzących się w wierzchołku B'. Tak więc trójkąt ABC jest równoboczny o kątach równych $\frac{\pi}{3}$.]

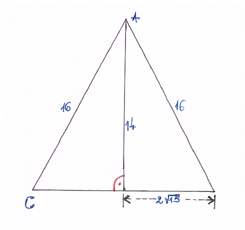
Zadanie 7. Odcinek AB długości 4 cm jest równoległy do płaszczyzny σ i leży w odległości 14 cm od tej płaszczyzny. Punkty C,D leżą na płaszczyźnie σ tak, że $|AC| = |BD| = 16$cm i odcinki AC, BD są prostopadłe do AB lecz do siebie nie są równoległe. Oblicz długość odcinka CD.

[klik] [Płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzny σ poprowadzone odpowiednio przez punkty A i B oraz płaszczyzny ABC i ABD wraz z płaszczyzną σ ograniczają graniastosłup którego podstawami są trójkąty równoramienne (Rys. 11). Należy obliczyć długość przekątnej CD



Rysunek 11:

ściany bocznej graniastosłupa ("podłogi namiotu" na rysunku) leżącej w płaszczyźnie σ. Wymiary tego prostokąta to 4 cm i $4\sqrt{15}\ cm$.
Istotnie, podstawą graniastosłupa jest trójkąt równoramienny o wymiarach jak przedstawiono na rysunku 12. Podstawa tego trójkąta równoramiennego wynosi $2\sqrt{16^2 - 14^2} = 4\sqrt{15}$. Szukaną długość przekątnej CD prostokąta o po-



Rysunek 12:

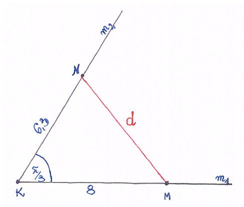
danych wymiarach wyliczamy z twierdzenia Pitagorasa

$$|CD| = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 15} \text{ cm} = 4 \cdot \sqrt{16} \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$$

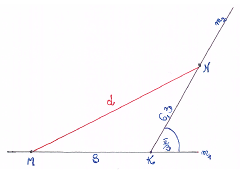
Ten wynik jest odpowiedzią w postawionym zadaniu.]

Zadanie 8. Płaszczyzny σ_1 i σ_2 przecinają się pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Proste m i n są równoległe i zawierają się odpowiednio w płaszczyznach σ_1 i σ_2. Odległość prostej m od krawędzi przecięcia tych płaszczyzn jest równa 8 cm, a odległość prostej n od tej krawędzi wynosi 6,3 cm. Oblicz odległość między prostymi m i n.

[klik] [Przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny σ_1 i σ_2 przedstawia rysunek 13a i 13b, gdzie M i N to punkty przebicia płaszczyzny przekroju odpowiednio prostymi m i n. Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta KMN



Rysunek 13:



Rysunek 14:

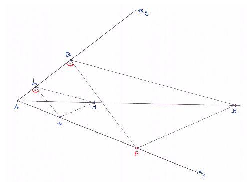
mamy

a) $|MN|^2 = 8^2 + (6,3)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6,3 \cdot cos\frac{\pi}{3} = 53,29.$
Zatem $d = |MN| = 7,3\ cm,$

b) $|MN|^2 = 8^2 + (6,3)^2 + 2 \cdot 8 \cdot 6,3 \cdot cos\frac{\pi}{3} = 154,09$
co daje
$d = \sqrt{154,09}\ cm.$]

Zadanie 9. Wewnątrz wypukłego kąta dwuściennego dana jest prosta równoległa do krawędzi kąta. Na jednej z płaszczyzn kąta dwuściennego wyznacz zbiór punktów równo oddalonych od drugiej płaszczyzny i od danej prostej.

[klik] [Prowadzimy przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego. Niech m_1, m_2 będą ramionami kąta liniowego o wierzchołku A tego kąta dwuściennego, B punktem przebicia płaszczyzny przekroju daną prostą równoległą do krawędzi (Rys.14) Na ramie-



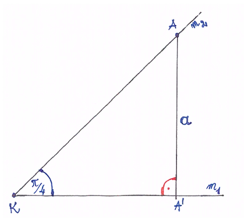
Rysunek 15:

niu m_1 należy znaleźć punkt P jednakowo odległy od punktu B i od ramienia m_2. Wtedy rozwiązaniem zadania będzie prosta zawarta w płaszczyźnie σ_1 kąta dwuściennego równoległa do krawędzi kąta i odległa o $|AP|$ od tej krawędzi.
By znaleźć punkt P konstruujemy dowolny trójkąt LKM (co bardzo łatwo uczynić) taki by $K \in m_1$, $M \in \text{pr}AB$, $L \in m_2$, $KL \perp m_2$ i $|KM| = |KL|$. Niech $s = \frac{|AB|}{|AM|}$.

Szukany punkt $P = J_A^s(K)$ tzn. jest obrazem punktu K w jednokładności o środku A i skali s.]

Zadanie 10. Płaszczyzny σ_1 i σ_2 tworzą kąt $\frac{\pi}{4}$. Prosta k leży na płaszczyźnie σ_2, jest równoległa do płaszczyzny σ_1 i jej odległość od płaszczyzny σ_1 jest równa a. Prosta m zawiera się w płaszczyźnie σ_2 i tworzy z prostą k kąt $\frac{\pi}{4}$. Prosta m przecina prostą k w punkcie A, natomiast płaszczyznę σ_1 przecina w punkcie B. Znajdź długość odcinka AB.

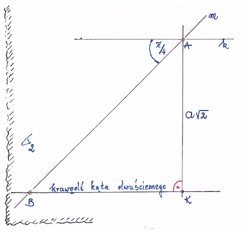
[klik] [Przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego i przechodzącą przez punkt A przedstawia rysunek 15 gdzie A' jest rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę σ_1, natomiast K rzutem prostokątnym punktu A na krawędź kąta dwuściennego. Ry-



Rysunek 16:

sunek 16 przedstawia sytuację na płaszczyźnie σ_2. Przekątna kwadratu jest większa od boku w skali $\sqrt{2}$ zatem $|AK| = a\sqrt{2}$. Prosta k jest z kolei równoległa do krawędzi kąta dwuściennego, dwuściennego więc prostopadła do AK, zatem

$$|AB| = |AK| \cdot \sqrt{2} = 2a.$$



Rysunek 17:

2 Wielościany. Wielościany foremne

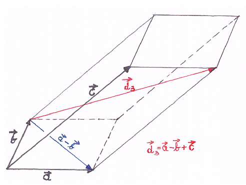
ZADANIA

Zadanie 11. W każdym równoległościanie suma kwadratów przekątnych równa jest sumie kwadratów wszystkich jego krawędzi.

[klik] [Niech równoległościan będzie rozpięty na wektorach $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ wtedy jego cztery przekątne to (rys. 17)

$$\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d_3} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d_4} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} -$$

Wykorzystując własności iloczynu skalarnego widzimy,



Rysunek 18:

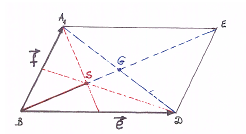
że

$$|\overrightarrow{d_1}|^2+|\overrightarrow{d_2}|^2+|\overrightarrow{d_3}|^2+|\overrightarrow{d_4}|^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2+(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})^2+(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

co było do okazania.]

Zadanie 12. Przez końce trzech krawędzi równoległościanu, spotykających się w jednym wierzchołku, poprowadzono płaszczyznę. Wykaż, że dzieli ona w stosunku 1 : 3 przekątną równoległościanu wychodzącą z tego samego wierzchołka.

[klik] [I Sposób. Środek ciężkości trójkąta rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{e}$ i $\overrightarrow{f}$ wynosi $\frac{1}{3}(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f})$ (rys. 18). Istotnie



Rysunek 19:

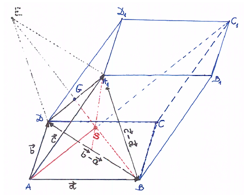
$$\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}).$$

Niech równoległościan będzie rozpięty na wektorach $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Płaszczyzna przekroju poprowadzona przez końce trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka przecina ten równoległościan wzdłuż trójkąta rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$ (rys. 19). Zatem

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{a} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}.$$

]

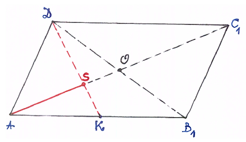
[klik] [II Sposób. Krawędzie AD i B_1C_1 równoległościanu (rys. 19) są do siebie równoległe. Prowadzimy przez



Rysunek 20:

nie płaszczyznę przekroju tego równoległościanu otrzymując równoległobok AB_1C_1D (rys. 20).

Ściana ABB_1A_1 (rys. 19) jest równoległobokiem które-



Rysunek 21:

go przekątne przecinają się w punkcie K. Zatem K jest środkiem boku AB_1 naszego równoległoboku. Płaszczyzna przekroju równoległościanu poprowadzona przez końce trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka przecina przekątną AC_1 równoległościanu w punkcie S (równoległobok ABB_1A_1 wzdłuż przekątnej A_1B która właśnie przecina się z AB_1 w punkcie K).

W trójkącie AB_1D środkowe AO i DK dzielą się w stosunku $2:1$ zatem

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$$

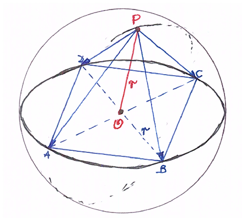
co było do okazania.]

Zadanie 13. W koło wielkie kuli o promieniu r wpisano kwadrat. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu P powierzchni kuli od wierzchołków kwadratu równa jest $8r^2$.

[klik] [I Sposób. W trójkątach APC i BPD (rys. 21) środkowa $\overrightarrow{PO}$ wynosi

$$\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}).$$

Punkt P leży na sferze więc obydwa trójkąty są prosto-



Rysunek 22:

kątne co pociąga, że iloczyn skalarny

$$\overrightarrow{PA} \circ \overrightarrow{PC} = 0 \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PB} \circ \overrightarrow{PD} = 0.$$

Podnosząc poprzednie równości stronami do kwadratu, a następnie dodając, otrzymujemy

$$2\overrightarrow{PO}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PD}^2).$$

Skoro $\overrightarrow{PO}^2 = r^2$, więc $\overrightarrow{PA}^2 + \overrightarrow{PB}^2 + \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{PD}^2 = 8r^2$.
]

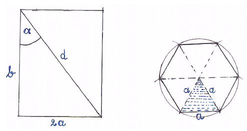
[klik] [II.Sposób. Zauważmy, że obydwa trójkąty APC i BPD są wpisane w wielkie koła sfery o średnicach odpowiednio AC i BD, a więc są prostokątne. Ich przeciwprostokątne AC i BD, które są średnicami, wobec twierdzenia Pitagorasa, wynoszą

$$4r^2 = AC^2 = PA^2 + PC^2 \text{ i } 4r^2 = BD^2 = PB^2 + PD^2.$$

Dodając stronami ostatnie dwie równości mamy $8r^2 = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.]

Zadanie 14. Najdłuższa przekątna prawidłowego graniastosłupa sześciokątnego jest równa d i tworzy z krawędzią boczną kąt α. Znajdź objętość tego graniastosłupa.

[klik] [Graniastosłup jest prawidłowy sześciokątny zatem jego podstawą jest sześciokąt foremnny. Przyjmijmy, że długość krawędzi podstawy graniastosłupa wynosi a natomiast długość jego bocznej krawędzi b. Rysunek 22 przedstawia płaski przekrój graniastosłupa płaszczyzną prostopadłą do podstawy i zawierającą najdłuższą przekątną oraz osobno podstawę tego graniastosłupa. Przy



Rysunek 23:

tak przyjętych oznaczeniach objętość V graniastosłupa wynsi

$$V = P_p \cdot b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot b = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 b\ .$$

Teraz pozostaje wyrazić wielkości a i b w zależności od danych w zadaniu; długości d najdłuższej przekątnej graniastosłupa i kąta α jaki tworzy ta przekątna z krawędzią boczną tegoż graniastosłupa.
Zgodnie z oznaczeniami jak na rysunku 22 widzimy, że

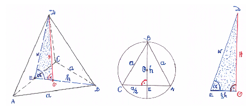
$b = d \cdot \cos\alpha$, $2a = d \cdot \sin\alpha$ czyli $a = \frac{1}{2} d \cdot \sin\alpha$. Po podstawieniu wyliczonych wielkości a i b do wzoru na objętość otrzymujemy ostatecznie

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{8} d^3 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \, .$$

]

Zadanie 15. W prawidłowym ostrosłupie trójkątnym ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz objętość V i pole powierzchni całkowitej S tego ostrosłupa, jeżeli krawędź podstawy równa jest a.

[klik] [Ostrosłup jest prawidłowy trójkątny więc jego podstawą jest trójkąt równoboczny, spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, ściany boczne są trójkątami przystającymi do siebie. Oznaczmy wysokość podstawy ostrosłupa, wysokość jego ściany bocznej i wysokość samego ostrosłupa odpowiednio przez h, w i H (rys. 23). W trójkącie równobocz-



Rysunek 24:

nym o boku a wysokość $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i środkowe (tu zarazem wysokości) dzielą się w trójkącie w stosunku $2:1$ zatem $OE = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. W trójkącie BDE wysokość $H = OE \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Stąd objętość V ostrosłupa wynosi

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{24}\operatorname{tg}\alpha \; .$$

Z kolei $w = ED = \frac{OE}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6\cos\alpha}$. Tak więc

$$S = P_{\triangle ABC} + 3 \cdot P_{\triangle ACD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1 + \frac{1}{\cos\alpha})\ .$$

Zauważ ponadto, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + 1}{2\cos\alpha} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\ .$$

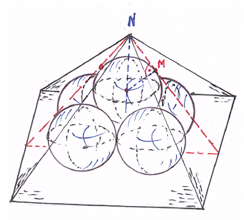
Wobec powyższego całkowite pole

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\ .$$

]

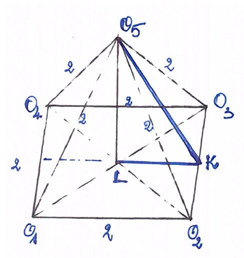
Zadanie 16. W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym znajduje się pięć kul o promieniu długości 1. Cztery z nich są styczne do podstawy, a każda z tych czterech do dwu ścian bocznych i dwóch spośród pozostałych trzech kul. Piąta jest styczna do tych czterech kul i wszystkich ścian bocznych. Oblicz objętość V ostrosłupa (Rys. 24).

[klik] [Rozważmy pomocniczo ostrosłup wyznaczony



Rysunek 25:

przez środki O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 tych pięciu wpisanych w ostrosłup kul(Rys. 25) Odległość srodków dwóch kul



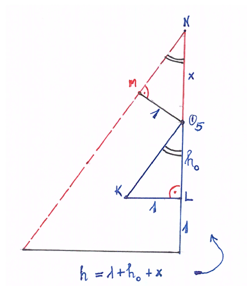
Rysunek 26:

stycznych zewnętrznie równa się sumie ich promieni - zatem pomocniczy ostrosłup (prawidłowy czworokątny) ma wszystkie krawędzie długości 2. Ponadto, wyjściowy ostrosłup jest podobny do pomocniczego w skali k, gdzie skalę podobieństwa znajdziemy jako stosunek odpowiadających sobie wielkości liniowych w obydwu ostrosłupach (np. wysokości lub krawędzi).Z warunków zadania widać bowiem, że tak podstawa jak i każda ściana wyjściowego ostrosłupa jest równoległa odpowiednio do podstawy i stosownej ściany ostrosłupa pomocniczego będąc " odsunięta" o 1. Jeżeli V_0 jest objętością ostrosłupa pomocniczego, to $V = k^3 \cdot V_0$, gdzie skala podobieństwa $k = \frac{h}{h_0}$. Wysokość h_0 ostrosłupa pomocniczego wynosi $\sqrt{2}$, pole podstawy 4, zatem

$$V_0 \ = \ \frac{1}{3} P_0 \cdot h_0 \ = \ \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \ = \ \frac{4}{3}\sqrt{2}\ .$$

Aby znaleźć wysokość h wyjściowego ostrosłupa weźmy jego przekrój płaszczyzną prostopadłą do podstawy wzdłuż wysokości przeciwległych ścian bocznych ostrosłupa (zawiera ona dwa punkty styczności dwu par z dolnych czterech kul i środek O_5 piątej kuli górnej). Połowę tego przekroju przedstawia rysunek 26 Teraz łatwo zauważyć, że $h = 1 + h_0 + x$, gdzie z przystawania trójkątów prostskątnych NMO_5 i O_5LK wynika iż $x = \sqrt{3}$. Zatem

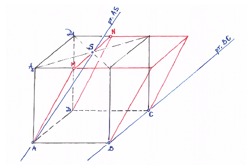
$$V \ = \ (\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^3 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} \ = \ \frac{2}{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 \quad .$$



Rysunek 27:

Zadanie 17. Dany jest sześcian o podstawie $ABCD$ i krawędzi $AB = a$. Oblicz odległość prostej BC od prostej przechodzącej przez punkt A i środek S ściany przeciwległej do podstawy.

[klik] [Ponieważ prosta BC jest równoległa do prostej AD, więc prosta BC jest równoległa do płaszczyzny ADS. Weźmy pod uwagę przekrój $AMND$ sześcianu płaszczyzną ADS (Rys. 27). Objętość równoległościanu



Rysunek 28:

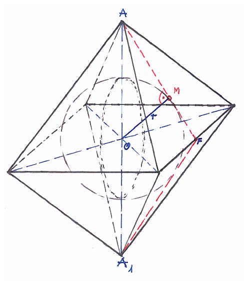
o podstawie $ABCD$ i ścianie $AMND$ wynosi a^3. Niech x będzie odległością krawędzi BC od płaszczyzny $AMND$. Skoro $MN = a$, $AM = \sqrt{(AA_1)^2 + (A_1M)^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, więc porównując dwojako wyrażoną objętość równoległościanu mamy równanie

$$a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot x = a^3 , \quad \text{czyli} \quad x = \frac{2a}{\sqrt{5}} .$$

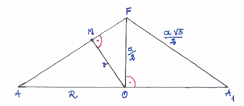
]

Zadanie 18. Znajdź promienie r kuli wpisanej i R kuli opisanej na ośmiościanie foremnym o krawędzi a.

[klik] [Zauważmy, że przeciwległe ściany ośmiościanu foremnego są do siebie równoległe, więc płaski przekrój osiowy ośmiościanu foremnego o krawędzi a wzdłuż wysokości równoległych ścian jest rombem o boku $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i przekątnych odpowiednio dłuższej równej $a\sqrt{2}$ oraz krótszej równej a (rys.28 i rys.29). Istotnie, AA_1 jako przekąt-



Rysunek 29:



Rysunek 30:

na kwadratu o boku a ma długość $a\sqrt{2}$, zatem promień kuli opisanej na ośmiościanie foremnnym o krawędzi a wynosi $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Obliczmy zatem promień r kuli wpisanej w ten ośmiościan. AF jest środkową w trójkącie równobocznym o boku a, kula wpisana w ośmiościan jest styczna do niej w punkcie M . Z podobieństwa trójkątów prostokątnych OMF i FOA mamy proporcję

$$\frac{|OM|}{|FO|} = \frac{|AO|}{|AF|} \; .$$

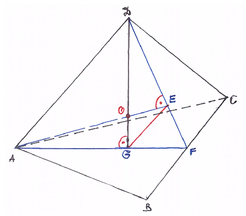
Skoro $|AF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|AO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|FO| = \frac{a}{2}$ i $|OM| = r$, więc po podstawieniu do wypisanej proporcji tych danych dostajemy równanie z niewiadomą r, mianowicie

$$\frac{2r}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \; .$$

Stąd już widzimy, że promień $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. $[klik]^2$ [Z rozwiązania zadania bezpośrednio wynika wniosek iż odległość równoległych ścian ośmiościanu foremnego o krawędzi a wynosi $d = 2r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz, że środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego są punktami styczności kuli wpisanej w ten ośmiościan.]]

Zadanie 19. Znajdź promień r kuli wpisanej w czworościan foremnny o krawędzi a

[klik] [Wykażemy najpierw, że w czworościanie foremnnym wysokości przecinają się w stosunku 1:3 (Rys. 30). Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 30. Spodki E i G



Rysunek 31:

dwu wysokości czworościanu są środkami ciężkości ścian odpowiednio BCD i ABC i leżą w płaszczyźnie AFD dzieląc odpowiednie środkowe DF i AF w stosunku 1:2, tzn. $EF = \frac{1}{3}DF$ i $GF = \frac{1}{3}AF$. Wnioskujemy stąd, że

$$\text{pr.}EG \parallel \text{pr.}AD \quad \text{oraz} \quad EG = \frac{1}{3}AD \ .$$

Z podobieństwa trójkątów OGE i AOD wynika iż również $OG = \frac{1}{3}DO$ czyli

$$\frac{OG}{DO} = \frac{1}{3}$$

jak chcieliśmy.
Teraz, jeśli bok $AB = a$, to $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $GF = \frac{1}{3}DF =$

$\frac{a\sqrt{3}}{6}$ więc wysokość

$$DG = \sqrt{(DF)^2 - (GF)^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

oraz

$$r = \frac{1}{4}DG = \frac{a\sqrt{6}}{3} .$$

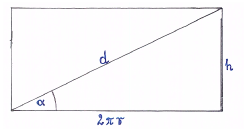
]

3 Bryły obrotowe

ZADANIA

Zadanie 20. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu jest prostokątem, którego przekątna jest równa d i tworzy z podstawą kąt α. Znajdź objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

[klik] [Niech r będzie promieniem podstawy walca, h jego wysokością. Z warunków zadania wiemy, że (rys. 31) $2\pi r = d \cdot \cos\alpha$ i $h = d \cdot \sin\alpha$. Zatem $r = \frac{d}{2\pi} \cdot \cos\alpha$ i



Rysunek 32:

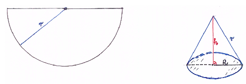
$$V = \pi r^2 \cdot h = \frac{d^3}{4\pi}\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \quad ,$$

$$S = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 = d^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \frac{d^2}{2\pi}\cos^2\alpha = d^2\cos\alpha(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2\pi})$$

]

Zadanie 21. Znajdź objętość stożka wiedząc, że jego powierzchnia boczna po rozwinięciu jest półkolem o promieniu r.

[klik] [Niech R będzie promieniem podstawy stożka, wtedy (rys. 32) $2\pi R = \pi r$ czyli $R = \frac{1}{2}r$ i $h = \sqrt{r^2 - R^2} =$



Rysunek 33:

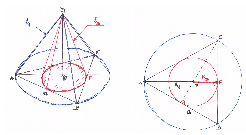
$\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Ze wzoru na objętość stożka obrotowego mamy

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{24}.$$

]

Zadanie 22. Dany jest czworościan foremny.Wierzchołek tego czworościanu jest wierzchołkiem dwóch stożków. Podstawa jednego z nich jest wpisana w podstawę czworościanu, a podstawa drugiego jest opisana na podstawie czworościanu. Oblicz stosunek pól powierzchni bocznych i stosunek objętości tych stożków.

[klik] [Przyjmijmy długość krawędzi czworościanu foremnego równa a. Wtedy, wobec oznaczeń jak na rysunku 33, mamy $AB = a$, $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R_1 = AO = \frac{2}{3}AF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,



Rysunek 34:

$R_2 = OF = \frac{1}{3}AF = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Ponadto $l_1 = DA = a$ oraz $l_2 = DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Stosunek pól powierzchni bocznych wynosi

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\pi R_1 l_1}{\pi R_2 l_2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} : \frac{a^2}{4} = \frac{4}{\sqrt{3}} ,$$

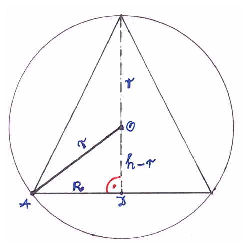
natomiast stosunek objętości stożków

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{{R_1}^2}{{R_2}^2} = \frac{36}{9} = \frac{4}{1}.$$

]

Zadanie 23. Stożek o wysokości h wpisano w kulę. Oblicz objętość kuli wiedząc, że jest ona cztery razy większa od objętości stożka.

[klik] [Przyjmijmy, że stożek o wysokości h i promieniu podstawy R jest wpisany w kulę o promieniu r. Przekrój osiowy tak uzyskanej bryły przedstawiamy na rysunku 34. Ze wzorów na objętość kuli i stożka przy przyjętych



Rysunek 35:

oznaczeniach z warunku zadania wynika równość $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$ czyli

$$r^3 \;=\; R^2h \;\; .$$

W trójkącie prostokątnym ADO (rys. 34) $R^2 = r^2 - (h - r)^2$ czyli $R^2 = 2hr - h^2$, co po podstawieniu do równania wcześniej uzyskanego z warunku zadania daje równanie trzeciego stopnia na niewiadomą r w zależności od stałej h, mianowicie

$$r^3 - 2h^2r + h^3 = 0 \;\; .$$

Rozwiązując ostatnie równanie łatwo zauważyć, że h jest jednym z pierwiastków równania (geometrycznie odpowiada to sytuacji,gdy podstawa stożka jest wielkim kołem - inaczej mówiąc stożek owysokości h jest wpisany w półkulę o promieniu r). Tak więc $r = h$ lub $r^2 + hr - h^2 = 0$. Równanie to ma dwa pierwiaski algebraiczne, którego ujemny nie spełnia warunków geometrycznych zadania (promień kuli winien być dodatni) natomiast dodatni pierwiastek wynosi $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot h$.

Jak łatwo sprawdzić $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^3 = \sqrt{5} - 2$ zatem odpowiedzią w zadaniu jest objętość

$$V = \frac{4}{3}\pi h^3 \quad \text{lub} \quad V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-2)h^3 \quad .$$

]

Zadanie 24. Wykazać, że stosunek objętości stożka do objętości wpisanej weń kuli jest równy stosunkowi pola całkowitej powierzchni stożka do pola powierzchni kuli.

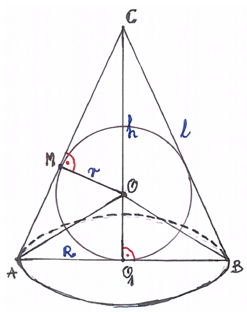
[klik] [Przyjmując oznaczenia jak na rysunku 35 mamy wykazać, że

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\pi R(R+l)}{4\pi r^2}$$

czyli

$$Rh = Rr + lr \quad .$$

Zauważmy, że iloczyn Rh równy jest polu trójkąta ABC,



Rysunek 36:

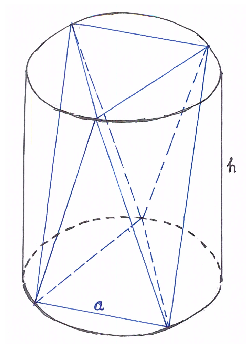
iloczyn Rr polu trójkąta ABO, natomiast iloczyn lr sumie pól trójkątów ACO i BCO. Ponieważ

$$\text{pole}ABC = \text{pole}ABO + 2 \cdot \text{pole}ACO \quad ,$$

więc żądana równość jest prawdziwa, a to oznacza, że wymagana proporcja też jest prawdziwa.]

Zadanie 25. Znajdź objętość walca opisanego na ośmiościanie foremnym o krawędzi a w ten sposób, że dwie przeciwległe ściany danego ośmiościanu są trójkątami wpisanymi w podstawy walca.

[klik] [Promień r podstawy walca jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o boku a(rys. 36) a więc $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (patrz $a = r\sqrt{3}$, więc $r = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$). Wysokość h walca równa jest odległości ścian przeciwległych ośmiościanu foremnego czyli średnicy kuli wpisanej w ten ośmiościan, tj. $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. $[klik]^2$ [Porównaj zadanie 18 z rozdziału 2-go] Zatem



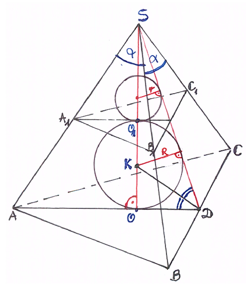
Rysunek 37:

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{9}.$$

]

Zadanie 26. W kąt trójścienny o kątach płaskich równych α wpisano dwie kule wzajemnie styczne. Znajdź stosunek promieni tych kul.

[klik] [Kule te możemy przyjąć jako wpisane w prawidłowe ostrosłupy trójkątne $A_1B_1C_1S$ i $ABCS$ styczne w punkcie O_1 a ich środki znajdują się na prostej SO prostopadłej do płaszczyzny trójkąta ABC (rys.37) Jeśli K



Rysunek 38:

jest środkiem kuli wpisanej w ostrosłup $ABCS$, to KD jest dwusieczną kąta ODS i z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie ODS mamy

$$\frac{SK}{KO} = \frac{SD}{DO} \quad .$$

W trójkącie równoramiennym ABC, $OD = \frac{1}{3}AD = \frac{BC\sqrt{3}}{6}$, stąd $BC = 2\sqrt{3}DO$.
Z kolei z trójkąta BDS wyliczamy $SD = BD \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} =$

$DO\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Tak więc stosunek

$$\frac{SK}{KO} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \ .$$

Ostrosłupy $ABCS$ i $A_1B_1C_1S$ są podobne, więc stosunek promieni kul wpisanych w te ostrosłupy równy jest stosunkowi wysokości tych ostrosłupów, tzn.

$$\frac{R}{r} = \frac{SO}{SO_1} = \frac{SK+KO}{SK-KO} = \frac{\frac{SK}{KO}+1}{\frac{SK}{KO}-1} \ .$$

Znając wcześniej wyliczoną wartość stosunku $\frac{SK}{KO}$, po podstawieniu przeliczamy, że

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+1}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}60^\circ}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}60^\circ} = \frac{\sin(60^\circ+\frac{\alpha}{2})}{\sin(60^\circ-\frac{\alpha}{2})} \ .$$

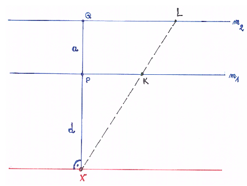
$[klik]^2$ [Zauważ na koniec, że wyrażenie ostatnie zawsze ma sens, tzn. $\frac{R}{r}$ jest dodatnie, gdyż $\alpha \in (0, 120^\circ)$ aby trzy ściany o kątach α mogły tworzyć naroże !]]

4 Test

ZADANIA

Zadanie 27. Dane są dwie równoległe płaszczyzny σ_1 i σ_2 oddalone o a. Jaką figurę tworzą punkty X takie, że w jednokładności J_X^s, gdzie $s > 1$, obrazem płaszczyzny σ_1 jest płaszczyzna σ_2.

[klik] [Odpowiedź: Szukaną figurą jest płaszczyzna równoległa do danych płaszczyzn oddalona od płaszczyzny σ_1 o $d = \frac{a}{s-1}$ i położona w stosunku do σ_2 po przeciwnej stronie płaszczyzny σ_1 (patrz $s > 1$). $[klik]^2$ [Istotnie, biorąc przekrój płaszczyzną prostopadłą do danych płaszczyzn widzimy, że dowolny punkt X spełniający warunki zadania - na prostej prostopadłej do m_1 i m_2 (Rys. 38) - jest z definicji jednokładności jednoznacznie określony równaniem $\overrightarrow{XQ} = s \cdot \overrightarrow{XP}$, co uwzględniając uporządkowanie punktów X, P, Q daje $\frac{a+d}{d} = s$ i stąd już $d = \frac{a}{s-1}$.]]



Rysunek 39:

Zadanie 28. Znajdź zbiór wszystkich punktów przestrzeni równo oddalonych od wierzchołków danego trójkąta.

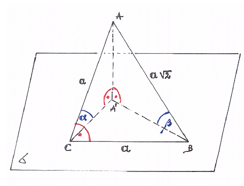
[klik] [Odpowiedź: Prosta prostopadła do płaszczyzny trójkąta przechodząca przez środek okręgu opisanego na tym trójkącie.]

Zadanie 29. Znajdź zbiór wszystkich punktów przestrzeni równo oddalonych od boków danego trójkąta.

[klik] [Odpowiedź: Prosta prostopadła do płaszczyzny trójkąta przechodząca przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.]

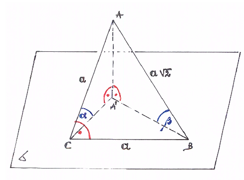
Zadanie 30. Jedna z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równoramiennego leży w płaszczyźnie σ, a druga tworzy z płaszczyzną σ kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .Znajdź miarę kąta jaki tworzy przeciwprostokątna tego trójkąta z płaszczyzną σ.

[klik] [Odpowiedź: $\beta = \frac{\pi}{6}$ (rys. 39) . [*klik*]^2 [Przyjmij-



Rysunek 40:

my, że przyprostokątne trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC o kącie prostym C mają długość a oraz, że BC leży w płaszczyźnie σ. Jeśli A' jest rzutem prosto-

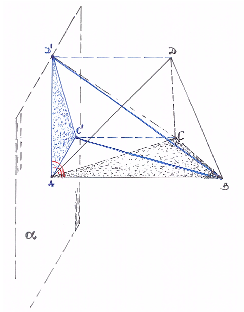


Rysunek 41:

kątnym wierzchołka A na płaszczyznę σ, to $AB = a\sqrt{2}$, $AA' = a \sin \frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ i w trójkącie prostokątnym $AA'B$ mamy $\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{2}} : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}$. Stąd $\beta = \frac{\pi}{6}$.]]

Zadanie 31. Oblicz objętość V czworościanu $ABCD$ mając długość d krawędzi AB oraz pole S rzutu czworościanu na płaszczyznę prostopadłą do prostej AB.

[klik] [Odpowiedź: $V = \frac{1}{3}Sd$ (rys. 40) [*klik*]^2 [Popro-

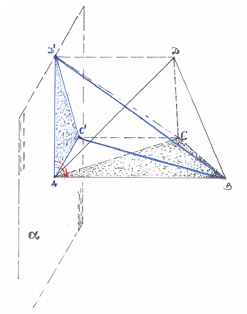


Rysunek 42:

wadźmy przez wierzchołek A czworościanu $ABCD$ płaszczyznę α prostopadłą do krawędzi AB, a przez punkty C i D poprowadźmy proste równoległe do prostej AB aż do przecięcia z płaszczyzną α w punktach C' i D'. Rzutem prostokątnym czworościanu $ABCD$ na płaszczyznę α jest trójkąt $AC'D'$ (patrz rys. 40).

1) pr.$DD' \parallel$ pr.AB więc pr.$DD' \parallel$ pł.ABC.
Czworościany $ABCD$ i $ABCD'$ mają tę samą podstawę ABC i wobec 1) równe wysokości, zatem

$$\text{obj.}ABCD = \text{obj.}ABCD' \ .$$



Rysunek 43:

Analogicznie

2) pr.$CC' \parallel$ pr.AB więc pr.$CC' \parallel$ pł.ABD'.
Czworościany $ABCD'$ i $ABC'D'$ mają tę samą podstawę ABD' i wobec 2) równe wysokości, zatem

$$\text{obj.}ABCD' = \text{obj.}ABC'D' \ .$$

Ponieważ pr.$AB \perp \alpha$ więc obj.$ABC'D' = \frac{1}{3}(\text{pole}AC'D')\cdot AB = \frac{1}{3}Sd$. Ostatecznie

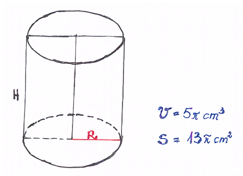
$$V = \frac{1}{3}Sd \ .$$

]]

Zadanie 32. Wykaż, że dla każdego wielościanu opisanego na kuli o promieniu R stosunek objętości wielościanu do jego pola powierzchni jest wielkością stałą i równą $\frac{R}{3}$.

Zadanie 33. Oblicz długość promienia podstawy walca wiedząc, że objętość walca jest równa $5\pi\ cm^3$, a pole jego powierzchni całkowitej równa się $13\pi\ cm^2$.

[klik] [Odpowiedź: $R = 2\ cm$ lub $R = \frac{\sqrt{14}-2}{2}\ cm$ (rys. 41) . $[klik]^2$ [Zapiszmy wzory na objętość walca i pole

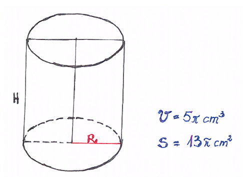


Rysunek 44:

jego powierzchni całkowitej

$$V = \pi R^2 \cdot H \quad \text{i} \quad S = 2\pi R \cdot H + 2 \cdot \pi R^2$$

(Rys. 41) Z pierwszego równania wyliczamy wysokość



Rysunek 45:

$H = \frac{V}{\pi R^2}$, co po podstawieniu do drugiego i prostym przekształceniu daje $2\pi R^3 - SR + 2V = 0$. Uwzględniając dane $V = 5\pi\ cm^3$ i $S = 13\pi\ cm^2$ z zadania mamy równanie trzeciego stopnia z niewiadomą R (wyrażoną w centymetrach)

$$2R^3 - 13R + 10 \ = \ 0 \ \ .$$

Jednym z jego pierwiastków jest liczba 2, a dodatni pierwiastek równania $2R^2 + 4R - 5 \ = \ 0$ to $\frac{\sqrt{14}-2}{2}$. Stąd odpowiedź $R = 2 \ cm$ lub $R = \frac{\sqrt{14}-2}{2} \ cm$.]]