E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

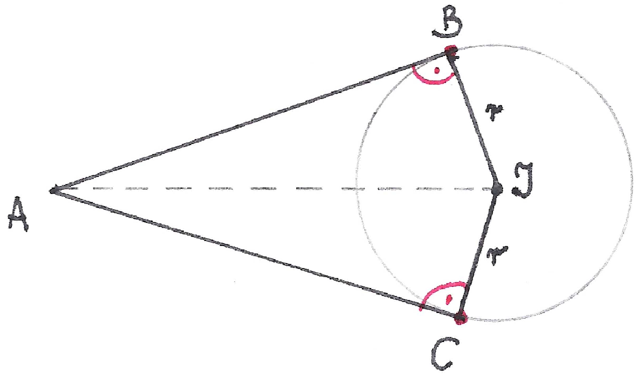
Temat: Planimetria

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

1. Najmocniejsze twierdzenie geometrii

Jeżeli w ramiona kąta wpiszemy okrąg, to odcinki łączące wierzchołek z punktami styczności są przystające (rys.1). „aaa ”



Rysunek 1

Dowód. Styczna jest prostopadła do promienia okręgu, $IB = IC = r$, przeciwprostokątna IA wspólna, zatem trójkąty prostokątne ABI i ACI są przystające. Stąd $AB = AC$.

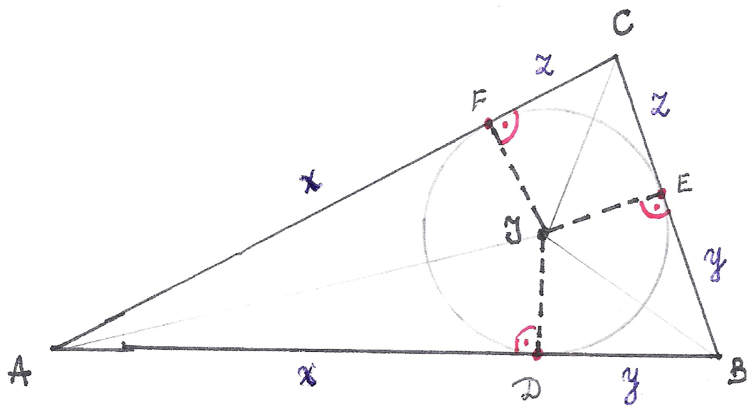
Uwaga 1. *Punkt P leży na dwusiecznej kąta wtedy i tylko wtedy gdy jest jednakowo odległy od ramion tego kąta.*

Niech w trójkącie ABC $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ oraz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi r. Wtedy pole S trójkąta ABC wynosi

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr,$$

gdzie parametr $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ jest połową obwodu trójkąta. Tak więc możemy napisać wzór na promień okręgu wpisanego w trójkąt o polu S jako

$$r = \frac{S}{s}.$$



Rysunek 2

Ponadto (rys.2) $2x+2y+2z = a+b+c$, czyli $x+y+z = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$. Tak więc odległość wierzchołka A od punktu styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC wynosi

$$AD = x = s - (y+z) = s - a.$$

Wniosek 1. *Pole trójkąta opisanego na okręgu jest równe połowie obwodu razy promień tego okręgu.*

Ćwiczenie 1. *Sprawdź, że tak jest dla każdego wielokąta opisanego na okręgu.*

[Wskazówka] [Połącz wierzchołki wielokąta ze środkiem okręgu wpisanego dzieląc tym samym figurę na trójkąty, których podstawami są boki wielokąta a wysokościami opuszczonymi na te podstawy odpowiednie promienie okręgu].

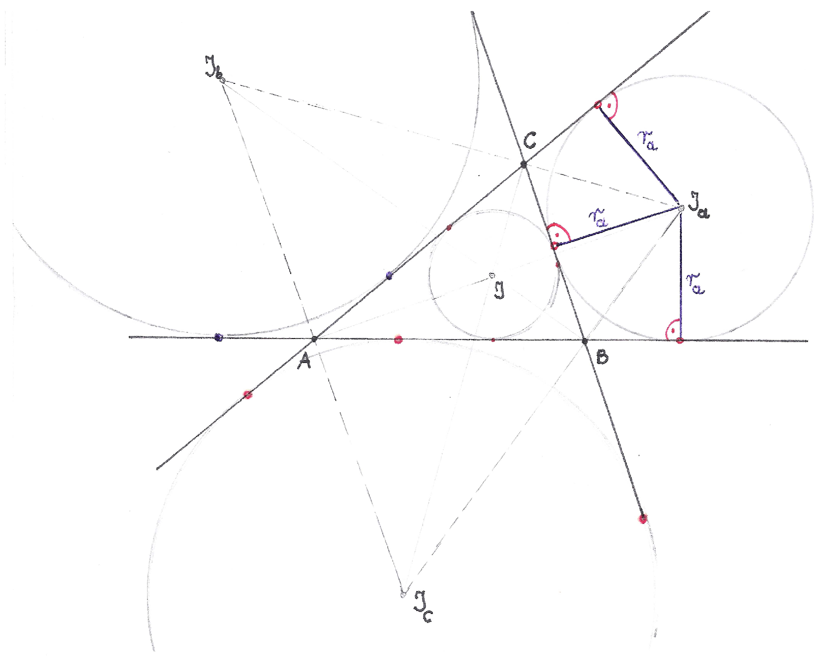
Definicja 1. *Okrąg styczny do jednego z boków trójkąta i przedłużeń dwu pozostałych boków nazywamy okręgiem "dopisanym"do trójkąta.*

Pytanie. Ile jest takich okręgów?

Korzystając z Uwagi 1 widzimy, że środek okręgu *"dopisanego"* do trójkąta leży na przecięciu dwusiecznych dwu kątów zewnętrznych trójkąta i dwusiecznej kąta wewnętrznego przy przeciwległym wierzchołku(dlaczego?). [Wskazówka] [Odległości środka okręgu dopisanego od wybranego boku i przedłużeń pozostałych dwu boków trójkąta powinny być takie same.]

Twierdzenie 1. *Niech r_a, r_b, r_c będą promieniami trzech okręgów "dopisanych" do trójkąta ABC o polu S(rys.3). Wtedy*

$$r_a = \frac{S}{s-a},\ r_b = \frac{S}{s-b},\ r_c = \frac{S}{s-c}.$$



Rysunek 3

Dowód. Oznaczmy przez $[F]$ pole figury F i niech I_a będzie środkiem okręgu dopisanego do trójkąta stycznego do boku o długości a (rys.3). Wtedy

$$S = [ABI_a] + [ACI_a] - [BCI_a] =$$
$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}(c+b-a)r_a =$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c-2a)r_a = (s-a)r_a.$$

Stąd $r_a = \frac{S}{s-a}$. Analogicznie dowodzimy, że $r_b = \frac{S}{s-b}$ i $r_c = \frac{S}{s-c}$.

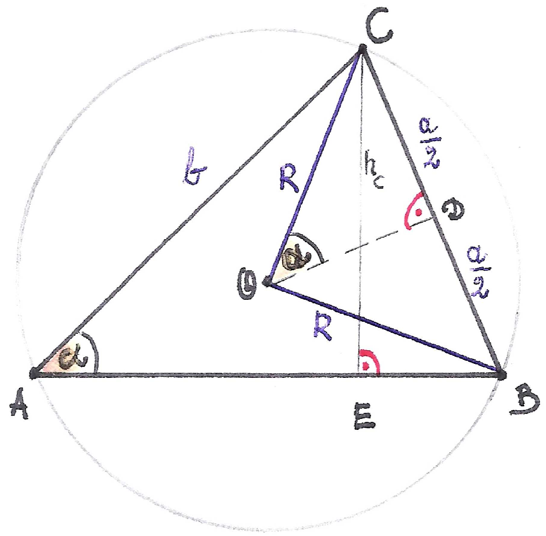
[Wskazówka] [Zauważ, że dwusieczne kąta wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta poprowadzone z tego samego wierzchołka trójkąta są do siebie prostopadłe. Wynika stąd natychmiast iż wysokości trójkąta $I_aI_bI_c$ zawierają się w dwusiecznych odpowiednich kątów wewnętrznych trójkąta ABC - a co za tym idzie - środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC pokrywa się ze środkiem ortycznym trójkąta $I_aI_bI_c$ (rys.3).]

2. Promień okręgu opisanego na trójkącie

Twierdzenie 2. *Jeżeli w trójkącie ABC a, b i c są długościami jego boków natomiast R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, to zachodzi związek*

$$R = \frac{abc}{4S},$$

gdzie S oznacza pole rozważanego trójkąta.



Rysunek 4

Dowód. Kąt środkowy BOC jest dwa razy większy od kąta wpisanego BAC opartego na tym samym łuku(rys.4). W trójkącie równoramiennym BOC wysokość OD zawiera się w dwusiecznej kąta BOC więc $sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Z drugiej strony w trójkącie ABC $sin\alpha = \frac{h_c}{b}$, gdzie h_c jest wysokością opuszczoną z wierzchołka C na bok AB. Porównując strony prawe w ostatnich dwu równościach mamy $\frac{a}{2R} = \frac{h_c}{b}$ czyli $R = \frac{ab}{2h_c}$. Wobec wzoru $S = \frac{c}{2} \cdot h_c$ wyliczamy, że $\frac{1}{2h_c} = \frac{c}{4S}$. Po podstawieniu ostatniego związku do wzoru na R ostatecznie dostajemy

$$R = \frac{abc}{4S},$$

co kończy dowód twierdzenia.

Uwaga 2. *Na lekcjach geometrii poznaliście wzór Herona*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

na pole S trójkąta w zależności od długości a, b, c jego boków.

Teraz przez wymnożenie i redukcję łatwo sprawdzić, że

$$s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c) = abc.$$

Zatem

$$S \cdot 4R = abc = s(s-b)(s-c) + s(s-a)(s-c) + s(s-a)(s-b) - (s-a)(s-b)(s-c) =$$

$$= \frac{S^2}{s-a} + \frac{S^2}{s-b} + \frac{S^2}{s-c} - \frac{S^2}{s} = S(r_a + r_b + r_c - r)$$

skąd po wykasowaniu pola S otrzymujemy piękny wzór wiążący rozważane pięć promieni - mianowicie

$$4R \;=\; (r_a + r_b + r_c - r).$$

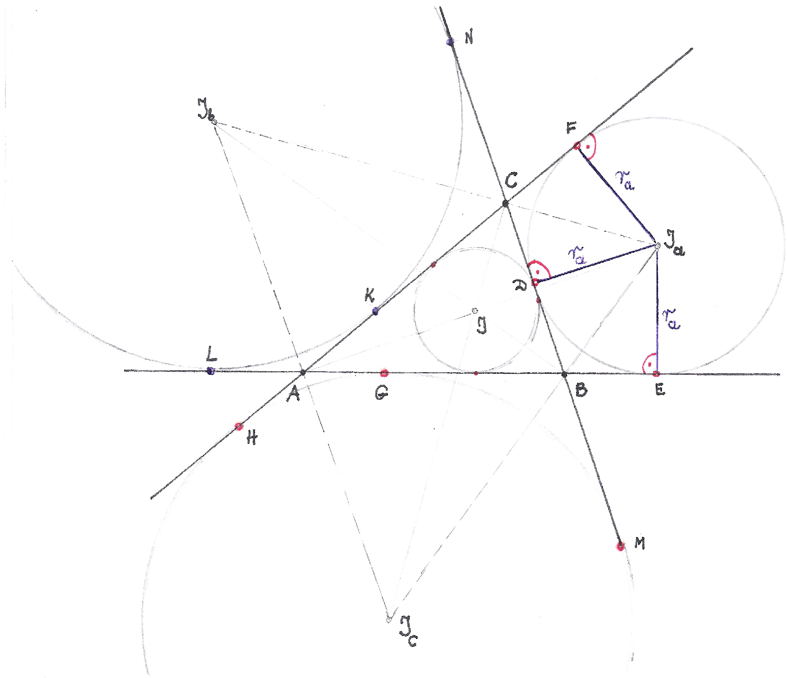
3. Zadania

Zadanie 1. *Wykazać, że* $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \ = \ \frac{1}{r}$.

ZADANIE 2. *Wykazać, że długości stycznych poprowadzonych z wierzchołka A trójkąta ABC do punktów styczności okręgu wpisanego i trzech okręgów dopisanych do tego trójkąta wynoszą odpowiednio:*

$$s-a,\ \ s,\ \ s-b,\ \ s-c.$$

[Wskazówka] [Wcześniej wykazaliśmy już, że długość odcinka stycznej poprowadzonej z wierzchołka A do punktu styczności z okręgiem wpisanym wynosi $s-a$. Wzbogaćmy zatem rysunek 3 o kolejne punkty styczności prostych zawierających boki trójkąta z trzema okręgami dopisanymi do trójkąta (rys.5). Teraz na przykład dla okręgu o środku I_a mamy



RYSUNEK 5

$$BE = BD, \quad DC = CF \quad \text{i} \quad AE = AF.$$

Zatem

$$2\cdot AE = AE + AF = (AB+BD)+(AC+DC) = a+b+c,$$

czyli

$$AE = \frac{a+b+c}{2} = s.$$

Startując z wierzchołka B względnie C wykazujemy analogicznie iż $BL = s$ oraz $CH = s$. Stąd już łatwo zauważyć pozostałe zależności. I tak

$$AG = AH = CH - AC = s-b$$

oraz

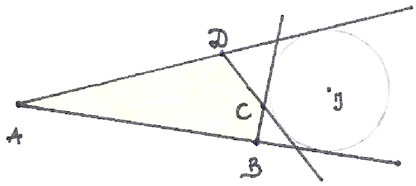
$$AK = AL. = BL - AB = s-c.$$

Zadanie zostało więc rozwiązane.]

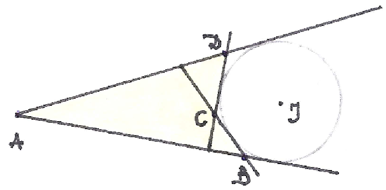
Zadanie 3. *Przez dany punkt A poprowadzić prostą odcinającą od danego kąta trójkąt o danym obwodzie.*

[Wskazówka] [Zauważ, że mając dany obwód, możesz skonstruować okrąg dopisany do trójkąta styczny do boku przeciwległego wierzchołkowi zadanego kąta (porównaj zadanie 2). Teraz zadanie sprowadza się do poprowadzenia przez punkt A prostej stycznej do wspomnianego okręgu (ile takich prostych jest?, - i przy jakich założeniach?).]

Uwaga 3. *Rozważmy na płaszczyźnie cztery proste w położeniu ogólnym.*



(a)



(b)

Rysunek 6

[Wskazówka] [Proste znajdują się w położeniu ogólnym, jeśli żadne trzy nie należą do jednego pęku]. Proste te wyznaczają dwa rodzaje czworokątów: czworokąt wypukły $ABCD$ (rys 6a) oraz czworokąt wklęsły (rys6b). Ponadto proste te dzielą płaszczyznę na 11 obszarów, z których dwa są czworokątne - jeden ograniczony, drugi nieograniczony. Jeżeli istnieje okrąg zawarty w nieograniczonej czworokątnej części i styczny do wszystkich czterech prostych, to mówimy, że do czworokąta $ABCD$ można dopisać okrąg.

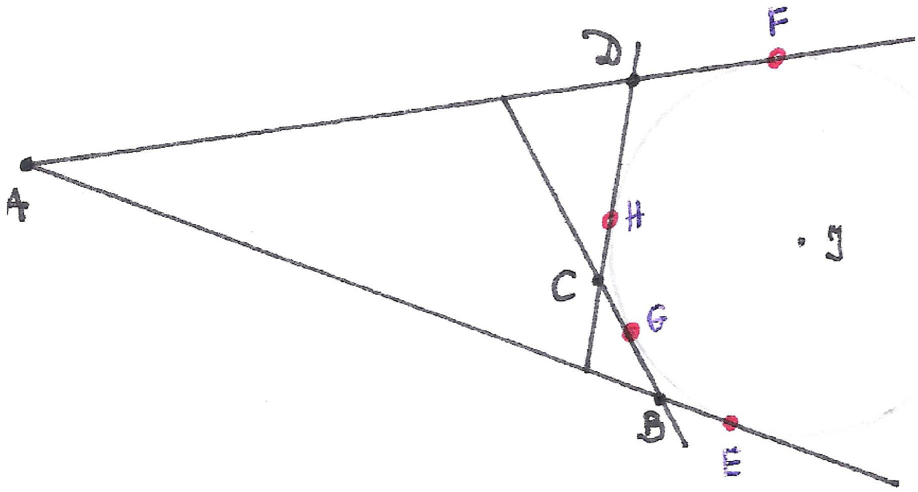
Dla ustalenia uwagi oznaczmy wierzchołki czworokąta (wypukłego lub wklęsłego) tak, jak pokazano na rysunkach 6a,6b, tzn. przyjmujemy, że punkt C jest wspólnym wierzchołkiem dwóch czworokątnych obszarów.

Na lekcjach geometrii poznaliście twierdzenie W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są równe.

Zadanie 4. *Udowodnić, że do czworokąta $ABCD$ (niezależnie od tego, czy jest on wypukły, czy wklęsły) można dopisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy*

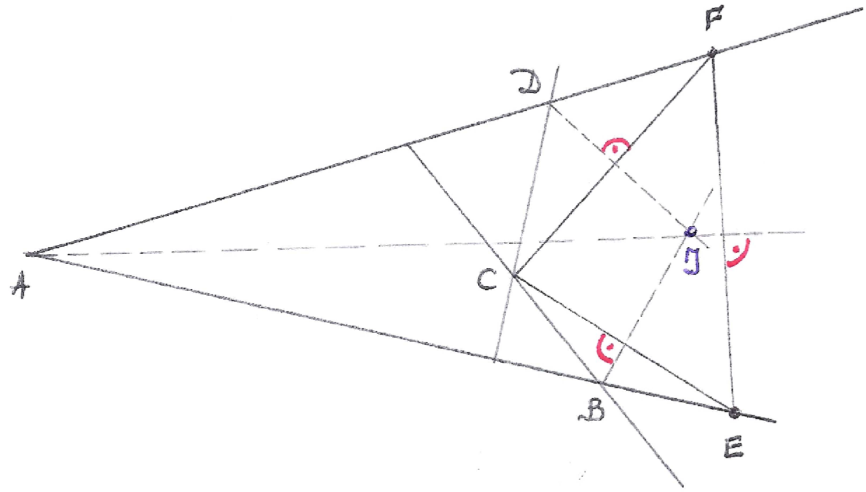
$$AB + BC = AD + DC. \tag{1}$$

[Wskazówka] [Dowód w obydwu przypadkach, tzn. czworokąta wypukłego lub wklęsłego jest podobny, poprowadzimy go na przykładzie czworokąta wklęsłego (rys.6b), drugi przypadek czworokąta wypukłego pozostawiamy czytelnikowi do uzupełnienia. Dowód (w prawo). Załóżmy zatem,że istnieje okrąg dopisany do czworokąta wklęsłego $ABCD$ styczny do prostych AB, AD, CB, CD odpowiednio w punktach E, F, G, H (rys.7). Okrąg ten jest wpisany



Rysunek 7

w ramiona kątów o wierzchołkach C, B, D i A. Skoro $CG = CH$, to dowodzona równość (1) sprowadza się do wykazania, że $AB + BG = AD + DH$. Jednakże $BG = BE$ oraz $DH = DF$, więc wystarczy wykazać, że $AB + BE = AD + DF$. Ostatnia równość jest równoważna warunkowi $AE = AF$, który jest spełniony jako, że odcinki łączące wierzchołek A z punktami styczności okręgu wpisanego w ramiona kąta EAF są przystające.
Dowód (w lewo). Złóżmy, że w czworokącie wklęsłym $ABCD$ zachodzi równość (1). Na prostej AB obieramy taki punkt E, że $BC = BE$ oraz punkt B leży pomiędzy punktami A i E (rys.8). Analogicznie na prostej AD znajdujemy taki punkt F, że $CD = DF$ oraz punkt D



Rysunek 8

leży pomiędzy punktami A i F. Wówczas z równości (1) wynika, że $AE = AF$. W ten sposób otrzymaliśmy trzy trójkąty równoramienne CBE, CDF oraz EAF. Pamiętamy, że w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta wierzchołkowego jest jednocześnie symetralną podstawy tego trójkąta. Zatem dwusieczne kątów CBE, CDF oraz EAF są zarazem symetralnymi odcinków CE, CF oraz EF. Symetralne trzech boków trójkąta ECF przecinają się w jednym punkcie - oznaczmy go przez I. Jak zauważyliśmy wyżej punkt ten leży jednocześnie na dwusiecznych kątów CBE, CDF oraz EAF więc odległości jego od prostych AB, AD, CB, CD są równe. Istnieje zatem okrąg o środku I styczny do wszystkich tych czterech prostych. Ponieważ punkt I znajduje się w nieograniczonej części czworokątnej, więc jest on środkiem okręgu dopisanego do czworokąta $ABCD$.]

Zadanie 5. *$ABCD$ jest czworokątem wypukłym. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne do AC odpowiednio w punktach P i R. Wykazać, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $P = R$.*

Zadanie 6. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Wykazać, że jeżeli okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne, to i okręgi wpisane w trójkąty BCD i BAD są styczne.*

[Wskazówka] [Wskazówka. Skorzystaj z Zadania 5].

4. Kąty w okręgu

Kąty wpisane w dany okrąg są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających łukach.

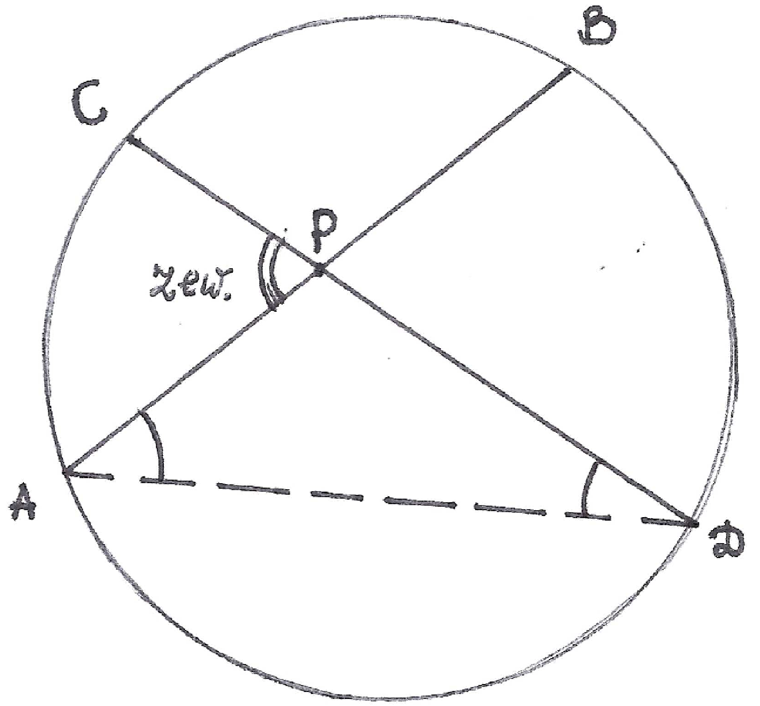
Istotnie, jeśli kąt środkowy okręgu o promieniu r ma miarę wyrażoną w radianach równą α, to długość d łuku na którym jest oparty ten kąt środkowy wynosi

$$d = \alpha \cdot r,$$

czyli kąty środkowe danego okręgu są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na łukach przystających. Kąt wpisany z kolei ma miarę równą połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku - stąd kąty wpisane w dany okrąg są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających łukach.

Uwaga 4. *Jeżeli dane zadanie, rozważany problem nie zależy od przyjętej jednostki (tak jest dla miar kątów w ustalonym okręgu - patrz $\alpha = \frac{d}{r}$), to bardzo wygodnym jest mierzenie kątów, ich porównywanie, właśnie długością łuków.*

Przykład 1. *Dwie cięciwy AB i CD okręgu (celowo pomijamy długość promienia tego okręgu) przecinają się w punkcie P wewnątrz tego okręgu. Wtedy kąt APC mierzy się połową sumy łuków AC (do którego nie należy punkt B) i BD (do którego nie należy punkt A) (rys.9).*



Rysunek 9

Istotnie, jeśli połączymy punkty A i D cięciwą, to kąt APC jako zewnętrzny trójkąta APD jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Kąt PDA mierzy się połową łuku AC (jako równy wpisanemu ADC), natomiast kąt PAD połową łuku BD (na potrzeby niniejszego kursu łuk będziemy oznaczać symbolem $\smile$). Zatem kąt APC możemy mierzyć średnią arytmetyczną

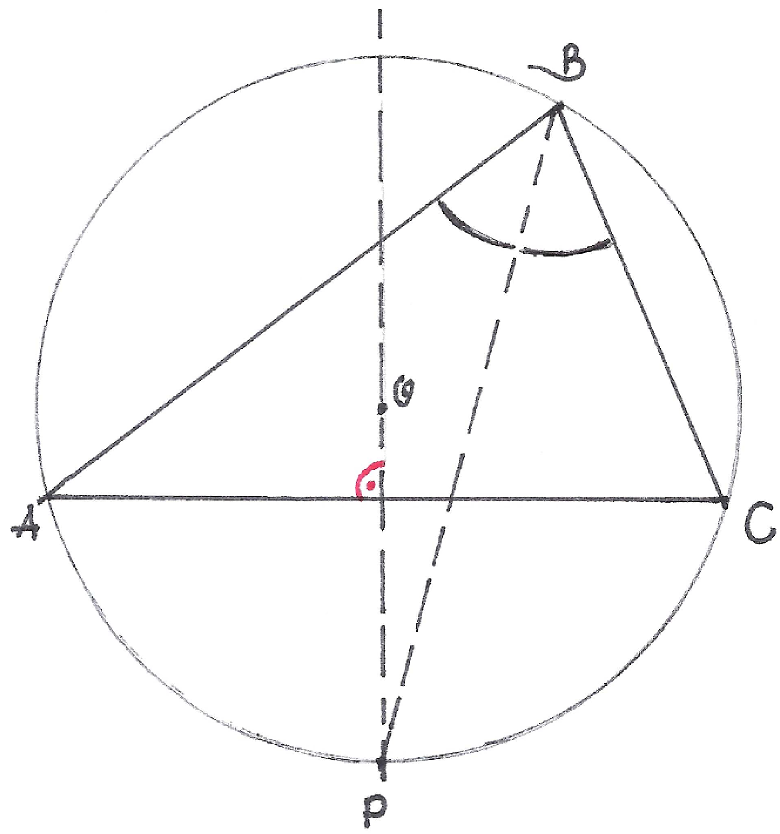
$$\frac{1}{2}(\smile AC + \smile BD).$$

W szczególności $\measuredangle APC$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $\smile AC + \smile BD$ jest półokręgiem.

Proponuję zrobić proste ćwiczenie.

ĆWICZENIE 2. *Jeśli średnica okręgu połowi cięciwę nie przechodzącą przez środek okręgu, to jest doń prostopadła; odwrotnie, jeśli średnica okręgu jest prostopadła do cięciwy nie będącej średnicą, to ją połowi.*

Twierdzenie 3. *Jeżeli w trójkącie ABC bok AB jest różny od boku BC, to dwusieczna kąta przy wierzchołku B przecina symetralną boku AC w punkcie należącym do okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys.10).*

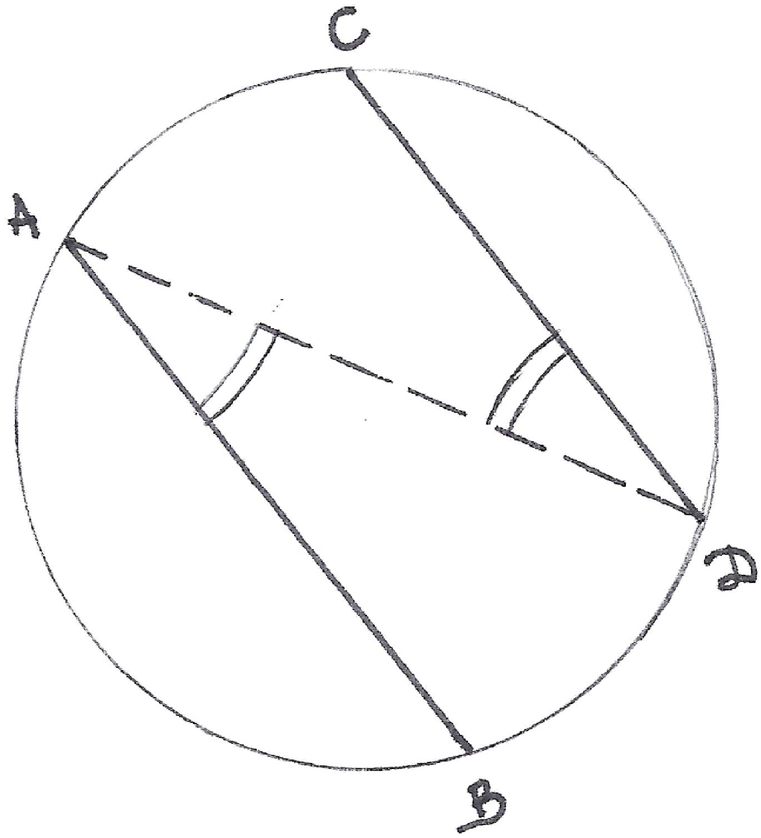


Rysunek 10

Dowód. Wystarczy zauważyć, że zarówno symetralna boku AC (która jest zarazem średnicą okręgu) jak i dwusieczna kąta ABC dzielą łuk AC okręgu na połowy. Zatem środek P łuku AC leży na jednej i drugiej.

Przykład 2. *Dwie cięciwy okręgu są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy odcinają przystające łuki zawarte pomiędzy nimi (rys.11), tzn.*

$$AB \parallel CD \qquad \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad \smile AC \equiv \smile DB.$$



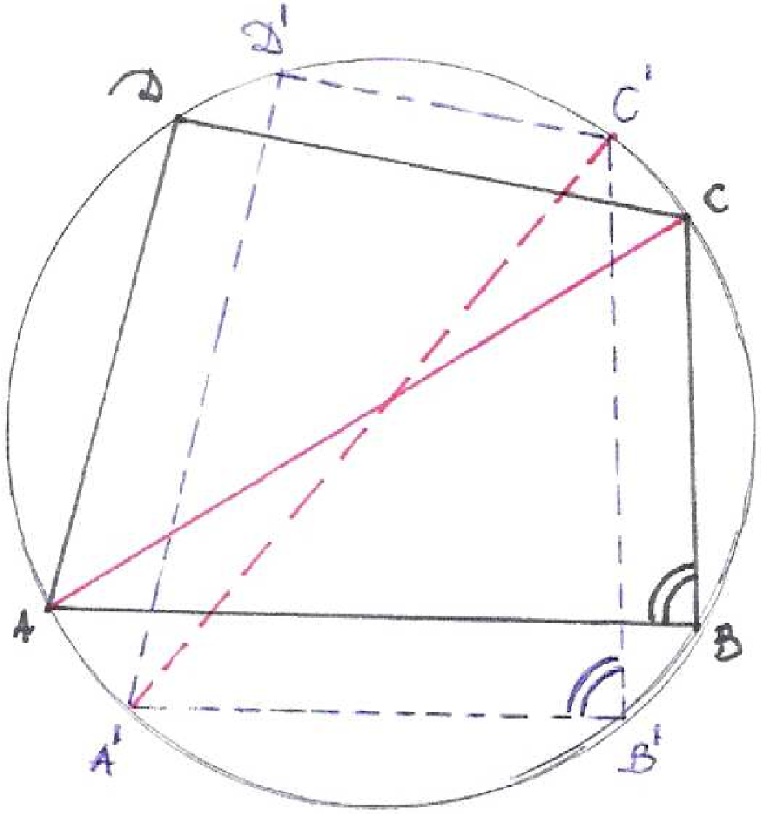
Rysunek 11

Istotnie, jeśli proste AB i CD przetniemy trzecią prostą AD, to proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy kąty naprzemianległe wewnętrzne BAD i ADC są przystające. Kąty te jako wpisane w okrąg są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy przystającymi są łuki AC i DB. W konsekwencji, na przykład, na trapezie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trapez jest równoramienny. Istotnie, jeśli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to odcinek AB jest równoległy do odcinka CD wtedy i tylko wtedy, gdy przystającymi są łuki: AD (do którego nie należy punkt B) i BC (do którego nie należy punkt A). Z kolei przystające łuki wyznaczają przystające cięciwy.

5. Zadania

Zadanie 7. *Dwa czworokąty o bokach odpowiednio równoległych są wpisane w ten sam okrąg. Wykaż, że przekątne jednego z tych czworokątów są równe odpowiednim przekątnym drugiego czworokąta.*

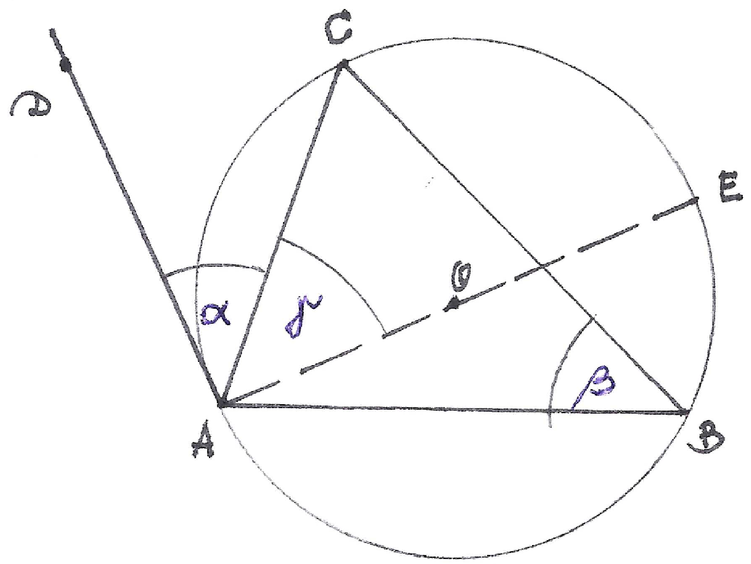
[Wskazówka] [Kąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, gdyż mają parami równoległe odpowiednie ramiona. Stąd łuki ADC i $A'D'C'$ są przystające, a więc odcinają przystające cięciwy (rys.12).]



Rysunek 12

Zadanie 8. *Prosta AD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Kąt ABC jest wpisany w ten okrąg, oparty na łuku zawartym w kącie CAD. Wykaż, że kąty ABC i CAD są przystające.*

[Wskazówka] [Poprowadźmy w okręgu średnicę AE i oznaczmy dla przejrzystości zapisu kąty CAD, ABC i CAE odpowiednio przez α, β i γ (rys.13). Z założenia styczna AD jest prosto-

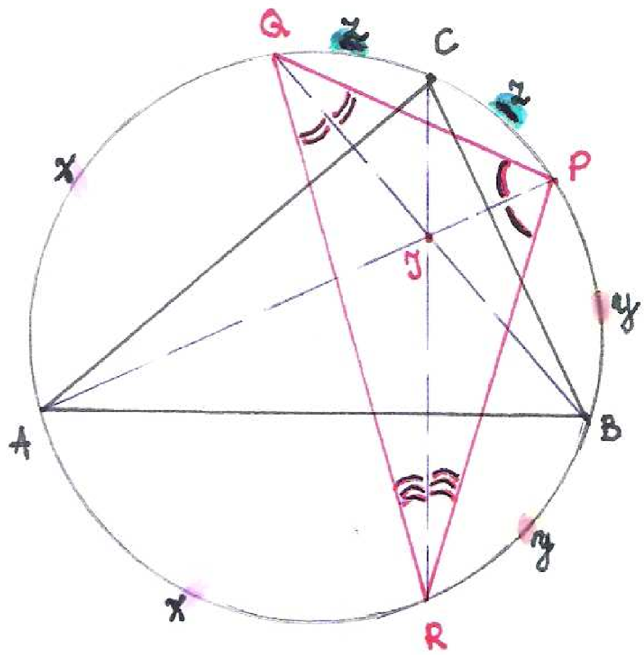


Rysunek 13

padła do średnicy AE, więc $\alpha \cup \gamma$ jest kątem prostym. Suma łuków AC i CE jest półokręgiem, więc suma kątów wpisanych opartych na tych łukach, czyli $\beta \cup \gamma$, jest też kątem prostym. Okazało się, że każdy z kątów α i β dopełnia kąt γ do kąta prostego. Stąd $\alpha \equiv \beta$.]]

Zadanie 9. *Trójkąty ostrokątne ABC i PQR są wpisane w ten sam okrąg. Wykaż, że proste AP, BQ, CR zawierają wysokości trójkąta ABC wtedy i tylko wtedy, gdy zawierają dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta PQR.*

[Wskazówka] [Dowód (w lewo).Załóżmy zatem, że proste AP, BQ, CR zawierają dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta PQR. Wtedy następujące łuki są parami przystające(rys.14)



Rysunek 14

$$\smile QA \equiv \smile AR \qquad \text{oznaczmy każdy z nich przez } x,$$

$$\smile RB \equiv \smile BP \qquad \text{oznaczmy każdy z nich przez } y,$$

$$\smile PC \equiv \smile CQ \qquad \text{oznaczmy każdy z nich przez } z,$$

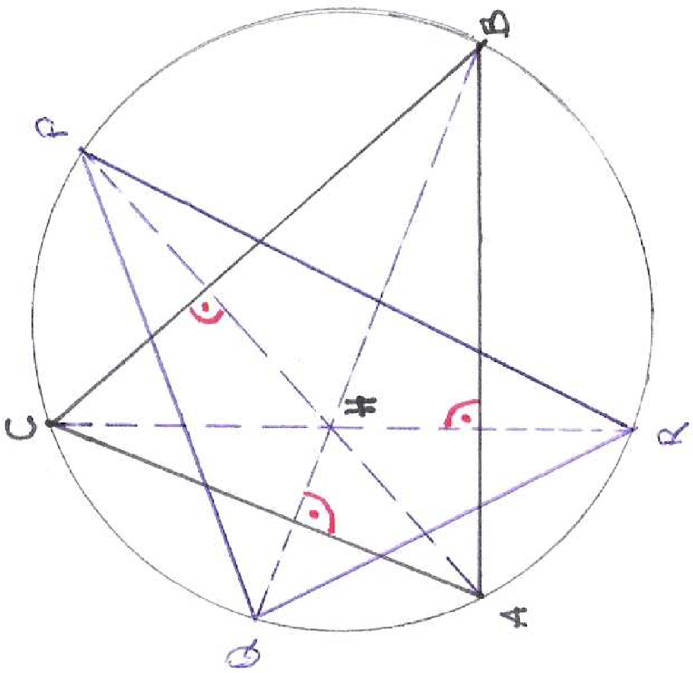
zatem $x \cup y \cup z$ jest półokręgiem. Teraz, na przykład, CR jest prostopadłe do AB gdyż suma

łuków RB i CA (zawierającego Q) jest półokręgiem. Analogicznie wykazujemy, że $BQ \perp AC$ oraz $AP \perp BC$. Dowód (w prawo).Niech proste AP, BQ, CR zawierają wysokości trójkąta

ABC. Wystarczy wykazać przystawanie łuków (rys.15);

$$\smile QA \equiv \smile AR, \quad \smile RB \equiv \smile BP, \quad \smile PC \equiv \smile CQ.$$

I tak, suma łuków RB i CQA jest półokręgiem, gdyż $CR \perp AB$ oraz suma łuków BP i CQA

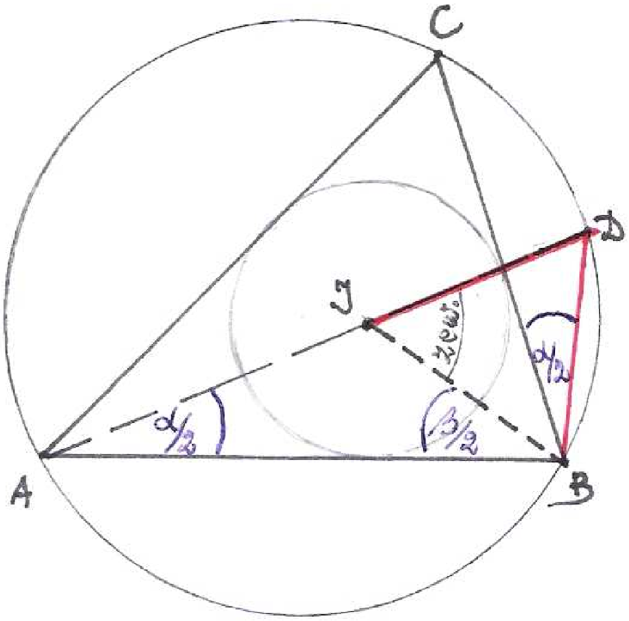


Rysunek 15

jest również półokręgiem, gdyż $AP \perp BC$. Stąd $\smile RB \equiv \smile BP$. Analogicznie wykazujemy pozostałe dwa warunki tzn., że $\smile QA \equiv \smile AR$, i $\smile PC \equiv \smile CQ$.]]

Zadanie 10. *Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Prosta AI przecina okrąg opisany na ABC w punkcie D. Wykazać, że $DB = DI$.*

[Wskazówka] [Wystarczy wykazać, że trójkąt BDI jest równoramienny którego wierzchołkiem jest punkt D, tzn., że kąty DBI i DIB są przystające (rys.16). Oznaczmy tym razem przez α



Rysunek 16

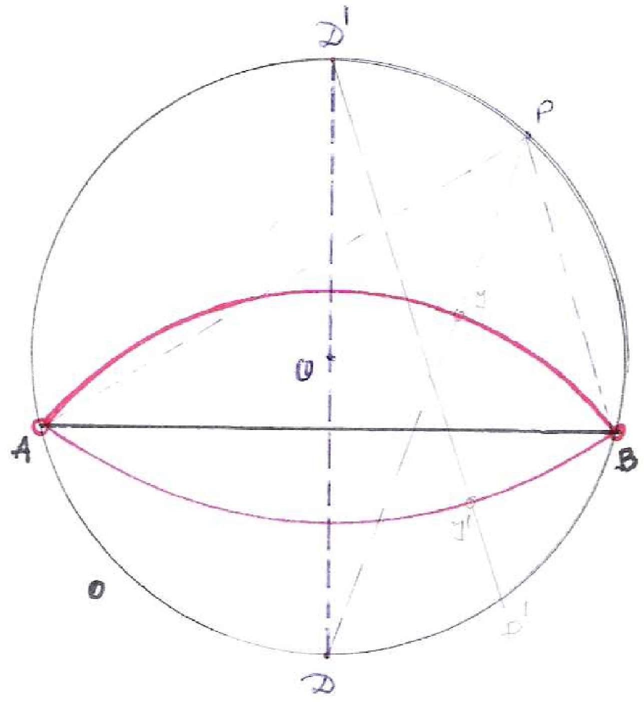
i β miary kątów wewnętrznych trójkąta ABC odpowiednio przy wierzchołku A i B. Jak wiemy, środek I okręgu wpisanego leży na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta. Na łuku CD opierają się przystające kąty wpisane CAD i CBD o mierze $\frac{\alpha}{2}$. Kąt DBI ma zatem miarę równą $\frac{\alpha}{2} + \frac{beta}{2}$. Z kolei miara kąta DIB jako zewnętrznego w trójkącie AIB równa się sumie miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych, czyli też $\frac{\alpha}{2} + \frac{beta}{2}$. Stąd $DB = DI$.]

Zadanie 11. *Punkty A i B należą do okręgu o. Znaleźć zbiór środków okręgów wpisanych w takie trójkąty ABP, że P należy do okręgu o.*

[Wskazówka] [Środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABP leży na dwusiecznej kąta APB. Dwusieczna ta i symetralna boku AB przecinają się w punkcie D należącym do okręgu o (patrz tw. 3). Wobec zadania 10

$$DA = DI = DB.$$

Prowadzimy zatem symetralną odcinka AB, która wyznacza zarazem średnicę DD' okręgu o



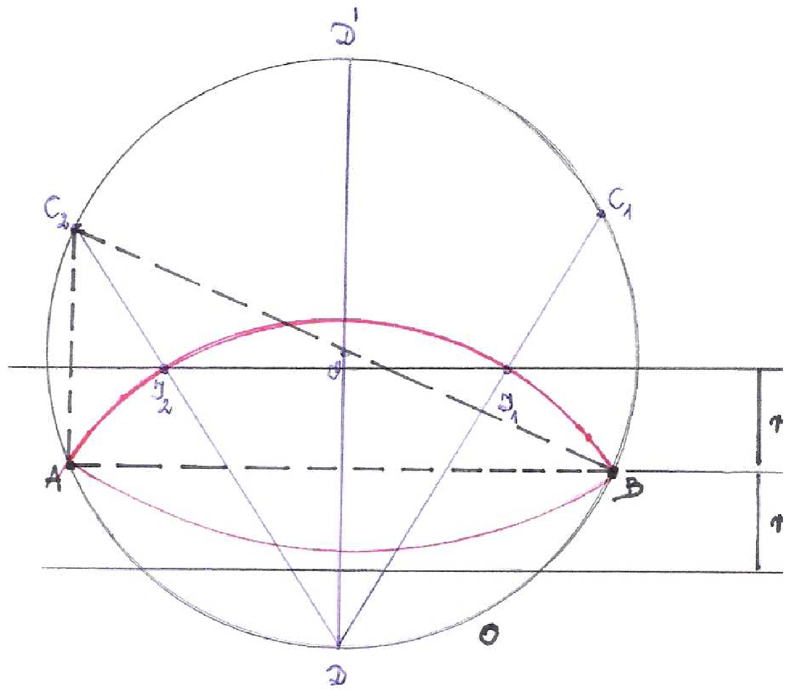
Rysunek 17

(patrz przykład 2). Z punktów D i D' zakreślamy łuki okręgów odpowiednio o promieniu DA i $D'A$. Suma łuków tych okręgów zawarta we wnętrzu okręgu o stanowi zbiór szukanych punktów (rys.17).]

Zadanie 12. *Wpisać w dany okrąg o trójkąt ABC mając dane punkty A i B oraz promień r okręgu wpisanego w ten trójkąt.*

[Wskazówka] [[Wsk. Przy zadanym boku AB ogół środków okręgów wpisanych w trójkąty ABC, gdzie $C \in o$ został znaleziony w zadaniu 11. Mając dany promień r okręgu wpisanego wyznaczamy ogół punktów odległych od prostej AB o r (dwie proste równoległe).Przekrój tych dwóch zbiorów daje środki okręgów wpisanych w szukane trójkąty. Półprosta o początku w punkcie D i przechodząca przez I w przecięciu z okręgiem o wyznacza trzeci wierzchołek C trójkąta. Rozważyć wszystkie przypadki, tzn. przy jakich założeniach otrzymujemy:

- cztery trójkąty,
- trzy trójkąty,
- dwa trójkąty,
- jeden trójkąt,
- brak rozwiązania.



Rysunek 18

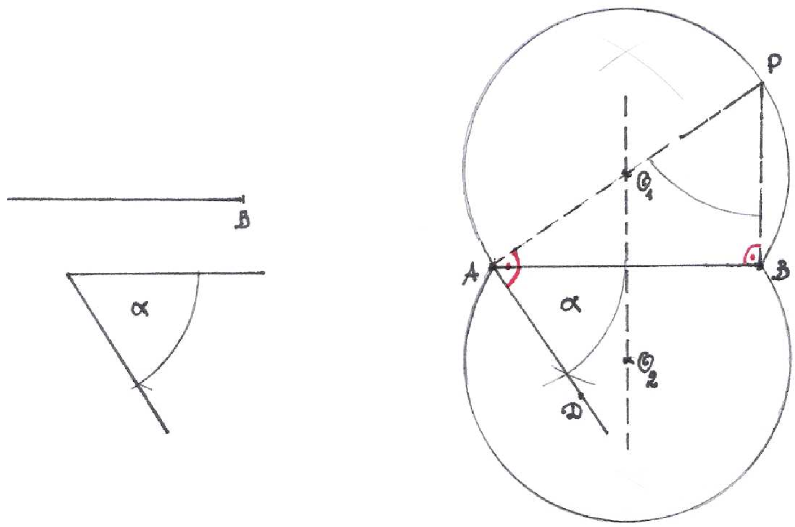
Na rysunku 18 przedstawiono przypadek trzeci.]]

6. Łuki Talesa, czworokąty wpisywalne w okrąg

Cięciwę okręgu widać pod tym samym kątem z każdego punktu jednego łuku odciętego tą cięciwą
Na wstępie opiszemy konstrukcję takich łuków.

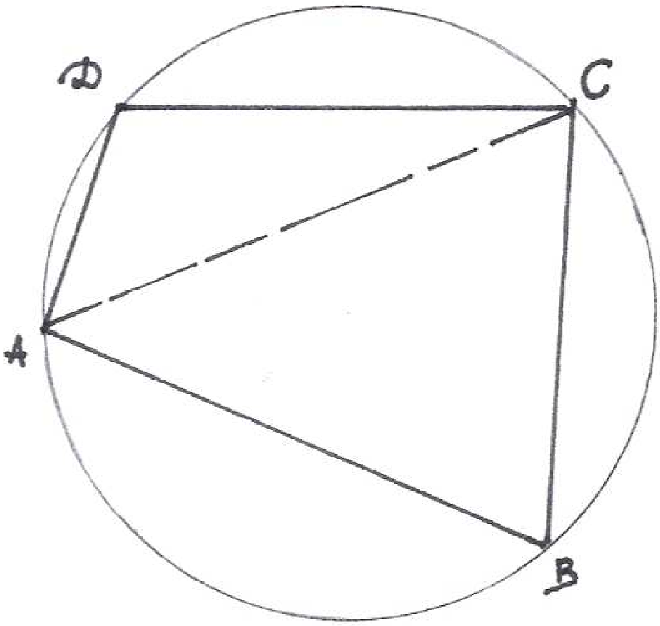
Ćwiczenie 3. *Dane są dwa różne punkty A i B, oraz kąt α. Skonstruować zbiór punktów, z których odcinek AB widać pod kątem α.*

Przy jednym z końców odcinka AB (np.A) odkładamy kąt BAD równy kątowi α i wystawiamy z punktu A prostopadłą do ramienia AD odłożonego kąta. Symetralna odcinka AB przecina prostopadłą w punkcie O_1, który jest środkiem okręgu o promieniu O_1A zawierającym szukany łuk.
Istotnie, jeśli przedłużymy odcinek AO_1 do punktu P przecięcia z okręgiem, to zarówno kąt APB jak i DAB dopełniają kąt BAP do kąta prostego a więc są równe (zauważ, że kąt PBA jako wpisany oparty na półokręgu jest prosty). Symetryczny do O_1 względem prostej AB punkt O_2 jest środkiem okręgu zawierającego symetryczny łuk do wcześniej uzyskanego. Suma tych dwu łuków jest szukanym zbiorem punktów (rys.19). Weźmy dowolną cięciwę AC okręgu oraz



Rysunek 19

punkty B i D na okręgu leżące po przeciwnych stronach cięciwy (rys.20). Łuki ADC i ABC dopełniają się do pełnego okręgu zatem kąty wpisane ABC i ADC oparte na tych łukach dopełniają się do kąta półpełnego (tzn. dwu kątów prostych).



RYSUNEK 20

UWAGA 5. *Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to sumy kątów wewnętrznych przy przeciwległych wierzchołkach są równe (dwu kątom prostym).*

Również na odwrót, jeśli sumy kątów wewnętrznych czworokąta wypukłego przy przeciwległych wierzchołkach są równe, to na tym czworokącie można opisać okrąg.
Istotnie, niech w czworokącie wypukłym $ABCD$ sumy kątów wewnętrznych przy przeciwległych wierzchołkach będą równe. Skonstruujmy łuki o tej własności, że z każdego punktu tego zbioru widać cięciwę AC pod kątem ADC. Wtedy punkt D leży na jednym z nich. Jednakże, z każdego punktu łuku dopełniającego łuk ADC do okręgu widać cięciwę AC pod kątem ABC. Skoro czworokąt $ABCD$ jest wypukły, to D i C leżą na łukach dopełniających tego samego okręgu - więc na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Wykazaliśmy twierdzenie

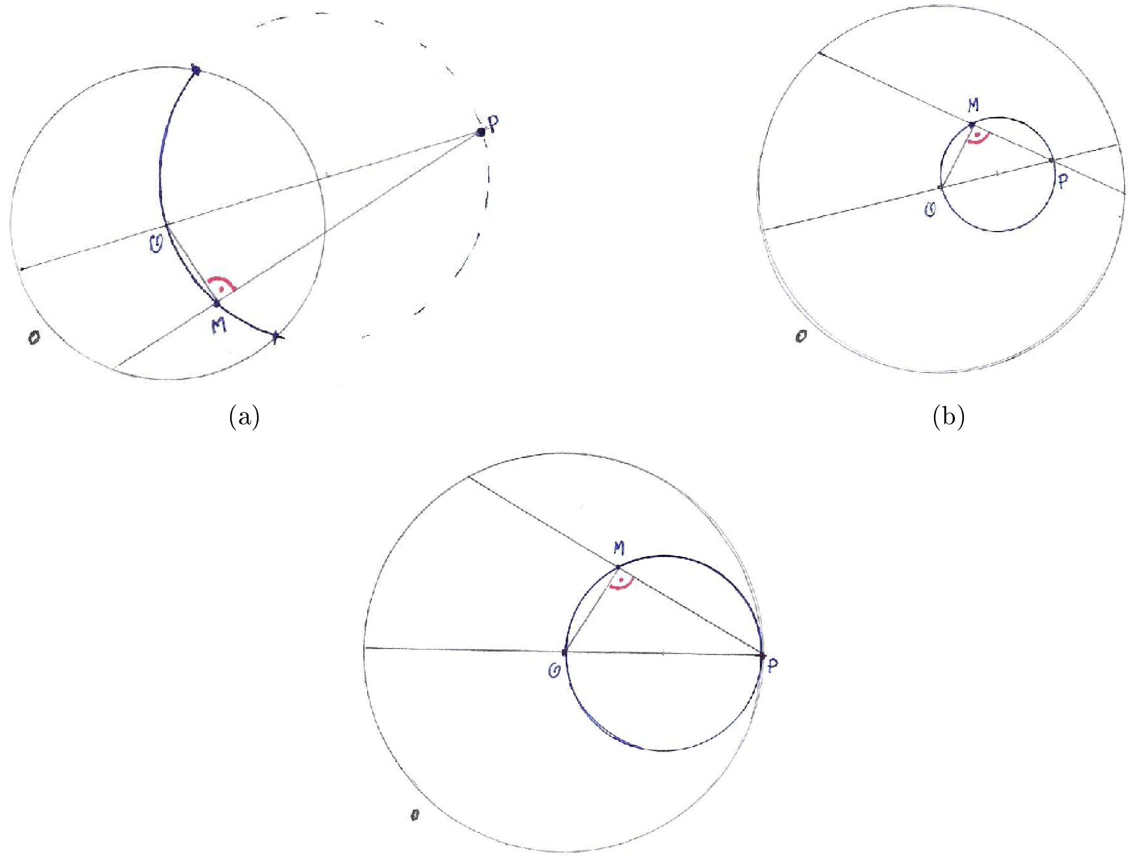
Twierdzenie 4. *Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kątów wewnętrznych przy przeciwległych wierzchołkach są równe.*

Zadanie 13. *Dany jest okrąg o i punkt P. Znaleźć zbiór środków cięciw, wyznaczonych na okręgu o przez proste przechodzące przez punkt P (rozważyć wszystkie przypadki).*

[Wskazówka] [Zgodnie z ćwiczeniem 1 średnica połowi cięciwę nie przechodzącą przez środek okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy jest do niej prostopadła.
Na rysunkach 21 a), b), c) przedstawiono możliwe przypadki gdy punkt P leży;

- a)na zewnątrz okręgu o,
- b)wewnątrz okręgu o (co będzie szukanym zbiorem gdy $P = O$?),
- c)na okręgu o.

Zauważ ponadto, że kąt prosty OMP opiera się na średnicy OP okręgu OMP.]

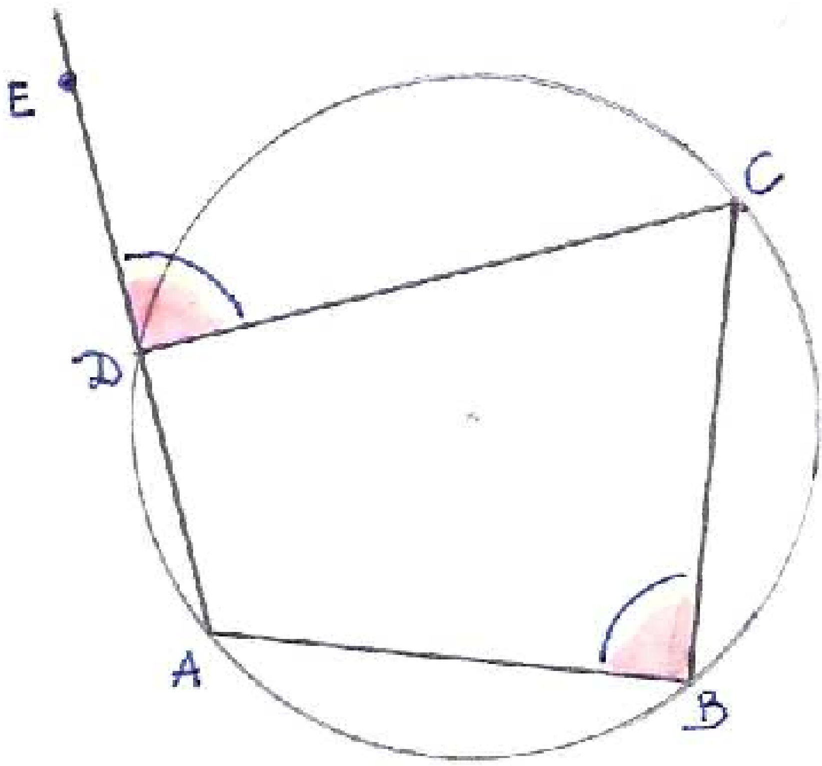


(a) (b) (c)

Rysunek 21

Zadanie 14. *Wykazać, że na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z kątów wewnętrznych czworokąta przystaje do kąta zewnętrznego przy przeciwległym wierzchołku.*

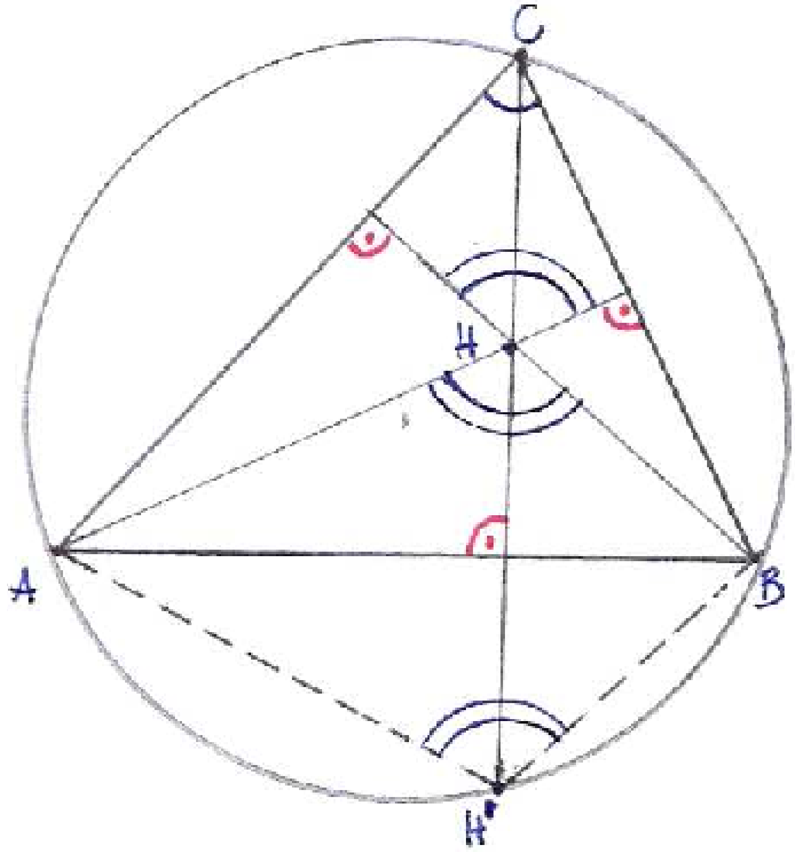
[Wskazówka] [Zauważ, że zarówno kąt wewnętrzny ABC jak i kąt zewnętrzny EDC dopełniają kąt ADC do półpełnego wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg (rys.22).]



Rysunek 22

Zadanie 15. *Wykaż, że obraz ortocentrum trójkąta ABC przy symetrii względem prostej AB należy do okręgu opisanego na trójkącie ABC.*

[Wskazówka] [Oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC. Niech H' będzie punktem przecięcia prostej CH z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys.23) Wystarczy

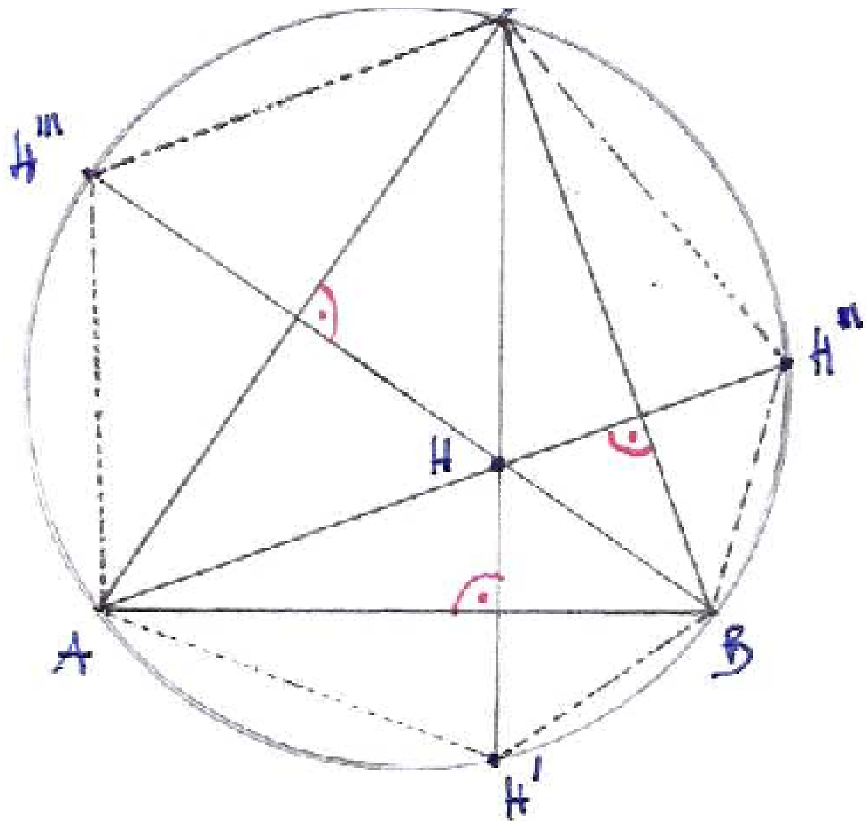


Rysunek 23

wykazać, że kąty AHB i $AH'B$ są przystające, wtedy bowiem ze względu na prostopadłość prostych AB i CH' przystającymi będą trójkąty AHB i $AH'B$ i w konsekwencji H' będzie obrazem ortocentrum H przy symetrii względem prostej AB.
Równość wspomnianych kątów wynika stąd, że zarówno kąt $AH'B$ jak i kąt wierzchołkowy równy kątowi AHB dopełniają kąt ACB do kąta półpełnego (patrz na czworokącie $AH'BC$ można opisać okrąg).
Rozważyć pozostałe przypadki, gdy trójkąt ABC jest prostokątny lub rozwartokątny.]

Zadanie 16. *Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ABH, BCH i CAH są przystające.*

[Wskazówka] [Niech H', H'', H''' będą obrazami ortocentrum H trójkąta ABC w symetrii odpowiednio względem prostych AB, BC i CA (rys.24) Wobec zadania 3 leżą one na okręgu

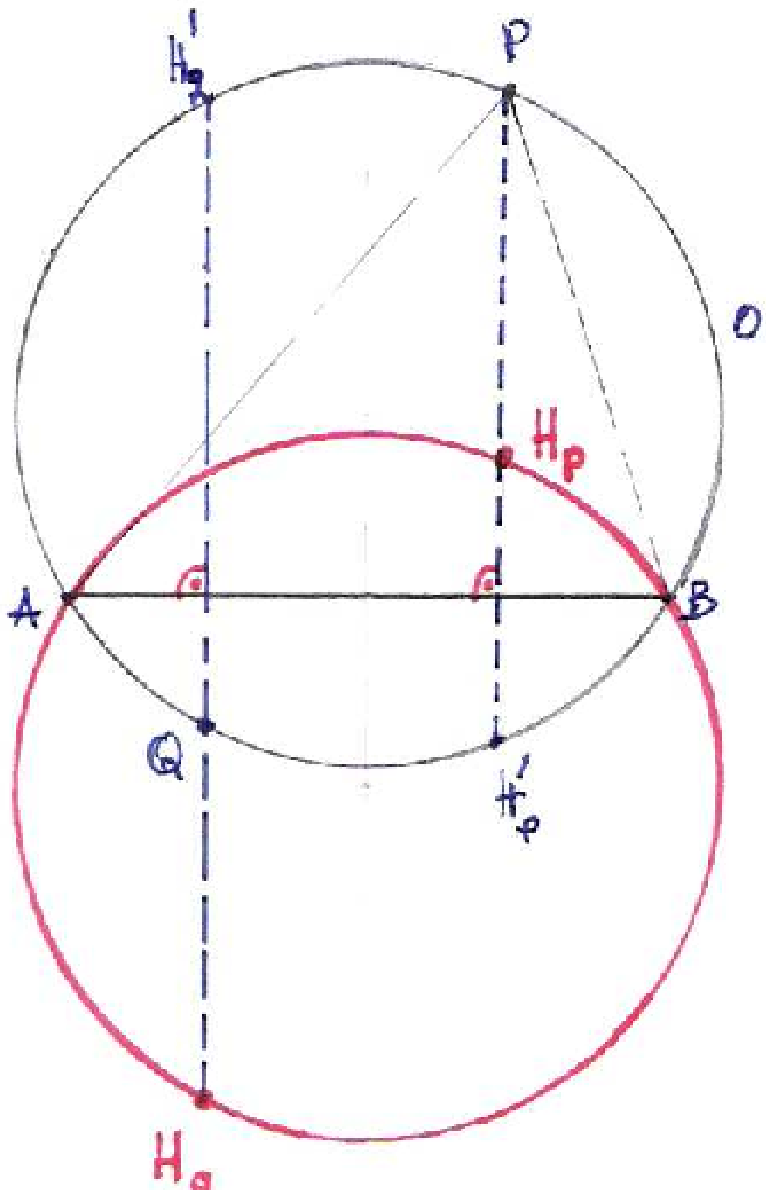


Rysunek 24

opisanym na trójkącie ABC. Tak więc trójkąty $AH'B$, $BH''C$ i $CH'''A$ mają ten sam okrąg opisany co trójkąt ABC. Przystające trójkąty ABH, BCH i CAH odpowiednio do trójkątów $AH'B$, $BH''C$ i $CH'''A$ mają zatem przystające do okręgu ABC okręgi opisane.]

ZADANIE 17. *Punkty A i B należą do okręgu o. Znaleźć zbiór ortocentrów takich trójkątów ABP, że P należy do okręgu o.*

[Wskazówka] [Symetria osiowa jest *inwolucją* [Wskazówka][2] [Odwzorowanie f różne od identyczności, którego złożenie samego z sobą jest identycznością (tzn. $f \neq id$ i $f \circ f = id$) nazywamy inwolucją. Inwolucjami na płaszczyźnie są: symetria osiowa, symetria środkowa (półobrót), inwersja względem okręgu] więc jeśli - wobec zadania 3 - obraz ortocentrum trójkąta ABP względem prostej AB leży na łuku AQB, to sam ortocentr H_p leży na obrazie symetrycznym tego łuku względem AB. Podobnie ortocentrum trójkąta ABQ leży na obrazie symetrycznym względem prostej AB łuku APB okręgu o.
Szukany zbiór zaznaczono na czerwono na rysunku 25 - jest to okrąg, który jest obrazem okręgu

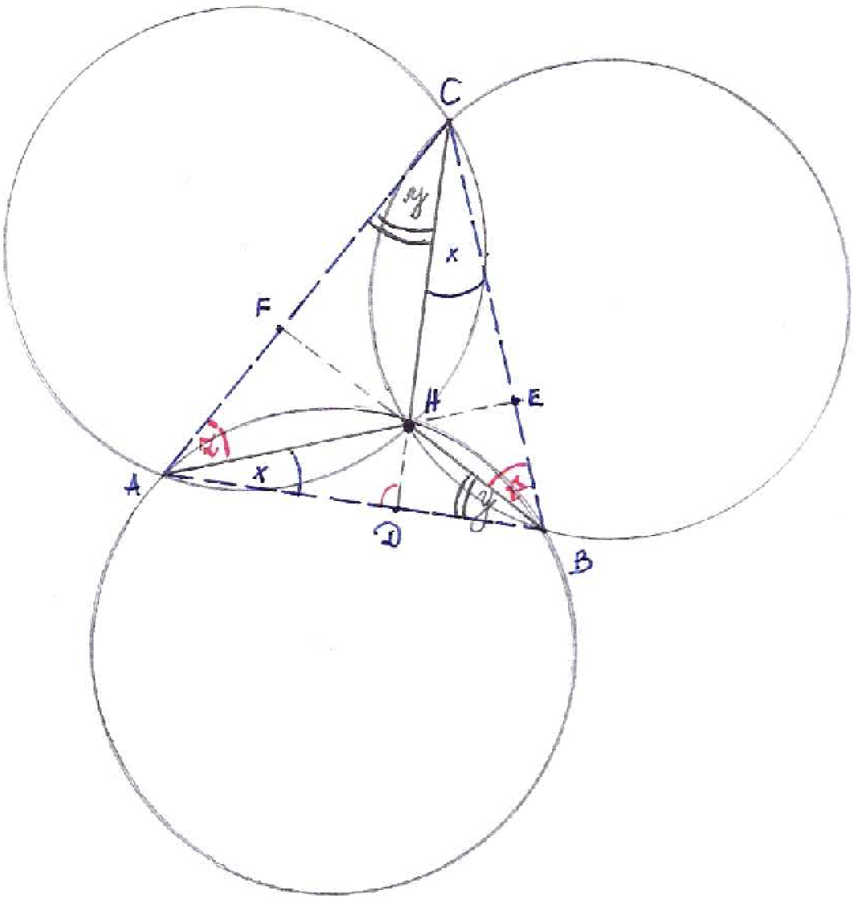


RYSUNEK 25

o w symetrii względem prostej AB.]

Zadanie 18. *Trzy okręgi o równych promieniach przecinają się w punkcie H. Wykaż, że punkt H jest ortocentrum trójkąta, którego wierzchołkami są drugie punkty przecięcia tych okręgów.*

[Wskazówka] [Oznaczmy drugie punkty przecięcia okręgów przez A, B, C. Łuki okręgów przystających symetryczne odpowiednio względem wspólnej cięciwy AH, względnie BH, czy też CH są przystające; zatem przystającymi są odpowiednie kąty wpisane w te okręgi oparte na przystających łukach jak zaznaczono na rysunku 26. Dla trójkąta ABC suma $2x + 2y + 2z$ jest



Rysunek 26

kątem półpełnym, więc suma $x + y + z$ jest kątem prostym. Tak więc np. w trójkącie ADC kąt ADC jest prosty, gdyż dopełnia sumę $x + y + z$ do kąta półpełnego. Analogicznie wykazujemy, że E i F są spodkami wysokości trójkąta ABC.]

8. Twierdzenie Euklidesa. Figury podobne

Jeżeli poprowadzimy linię prostą równolegle do jednego boku trójkąta, to prosta ta przetnie pozostałe boki dzieląc je na odcinki proporcjonalne; jeżeli dwa boki trójkąta podzielimy proporcjonalnie, to prosta łącząca punkty podziału jest równoległa do trzeciego boku.
W szczególności jako wnioski z tego twierdzenia otrzymujemy znane z nauki szkolnej twierdzenia

Twierdzenie 5. *Odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do boku trzeciego i równy jego połowie.*

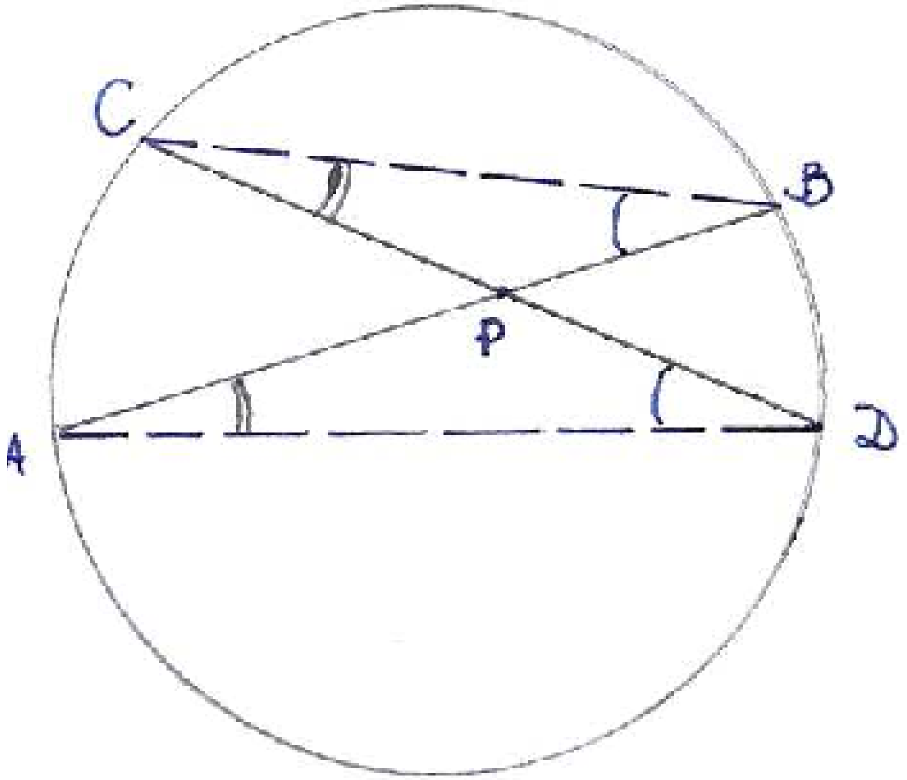
Twierdzenie 6. *Jeżeli odpowiednie kąty dwóch trójkątów są sobie równe, to odpowiednie boki są proporcjonalne.*

Przy zastosowaniach twierdzenia 6 trzeba być uważnym, układając proporcje należy jako odpowiednie boki brać boki leżące naprzeciw równym kątom trójkątów.
Zilustrujemy to wyprowadzając ważną własność siecznych okręgu.

Twierdzenie 7. *Jeżeli sieczne AB i CD danego okręgu przecinają się w punkcie P, to*

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

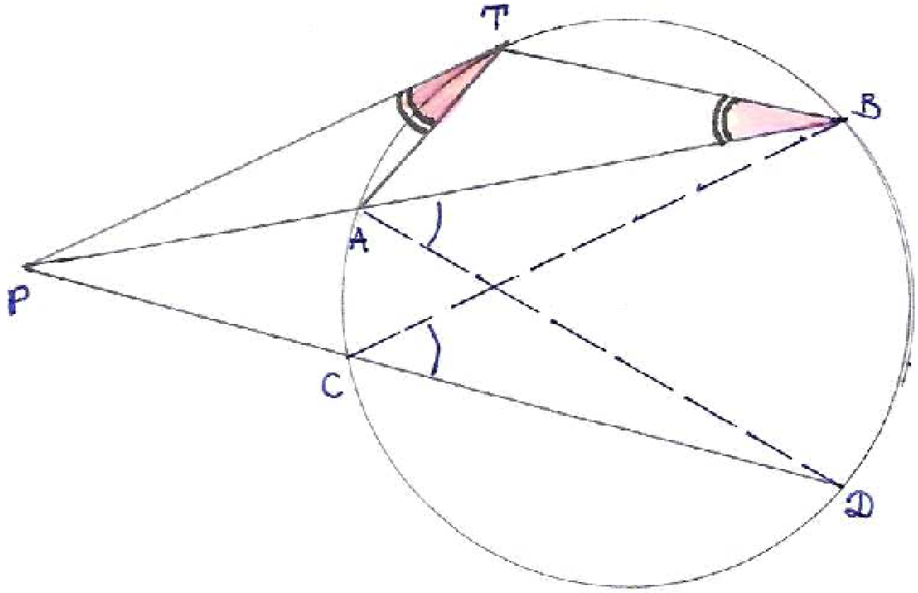
Dowód. Przypadek I. Sieczne przecinają się wewnątrz okręgu (rys.27). Na łuku AC opierają



Rysunek 27

się równe kąty wpisane ABC i ADC, również kąty BAD i BCD są równe jako wpisane oparte na łuku BD. Z podobieństwa trójkątów APD i BPC wynika proporcja $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$ a z niej po przekształceniu $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Przypadek II. Sieczne przecinają się na zewnątrz okręgu (rys.28). Wizualnie, w tym przy-



Rysunek 28

padku, sytuacja wygląda inaczej jednakże rozumowanie i formalny zapis (nie zmieniając oznaczeń) można przeprowadzić analogicznie jak w Przypadku I.

Zauważmy dodatkowo

Twierdzenie 8. *Jeżeli z punktu poza okręgiem poprowadzimy sieczną i styczną, to iloczyn całej cięciwy razy jej część zewnętrzna równa się kwadratowi stycznej (rys.28) tj.*

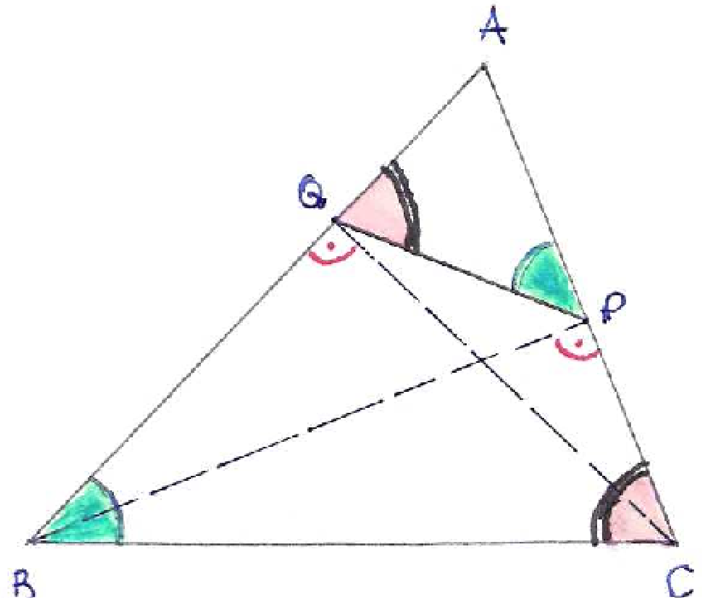
$$BP \cdot AP \ = \ PT^2.$$

Dowód. Kąt PTA między styczną PT a cięciwą AT równy jest kątowi ABT wpisanemu w okrąg opartemu na tej cięciwie o wierzchołku B leżącym na łuku zewnętrznym kąta (patrz zadanie 2). Tym samym kąt PBT równy jest kątowi PTA. Trójkąty PTA i PBT mają dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku P zatem są podobne. Z ich podobieństwa wynika proporcja $\frac{PT}{AP} = \frac{BP}{PT}$. Iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi środkowych czyli $AP \cdot BP \ = \ PT^2$.

9. Zadania

Zadanie 19. *Wykaż, że jeżeli BP i CQ są wysokościami trójkąta ABC, to trójkąty ABC i APQ są podobne.*

[Wskazówka] [Na czworokącie $BCPQ$ można opisać okrąg o średnicy BC (patrz kąty BPC i BQC są proste). Na podstawie zadania 2 z poprzedniego rozdziału wnosimy, że kąt wewnętrzny przy wierzchołku B przystaje do kąta zewnętrznego przy wierzchołku P oraz kąt wewnętrzny przy wierzchołku C przystaje do kąta zewnętrznego przy wierzchołku Q. Stąd podobieństwo trójkątów ABC i APQ (rys.29).]

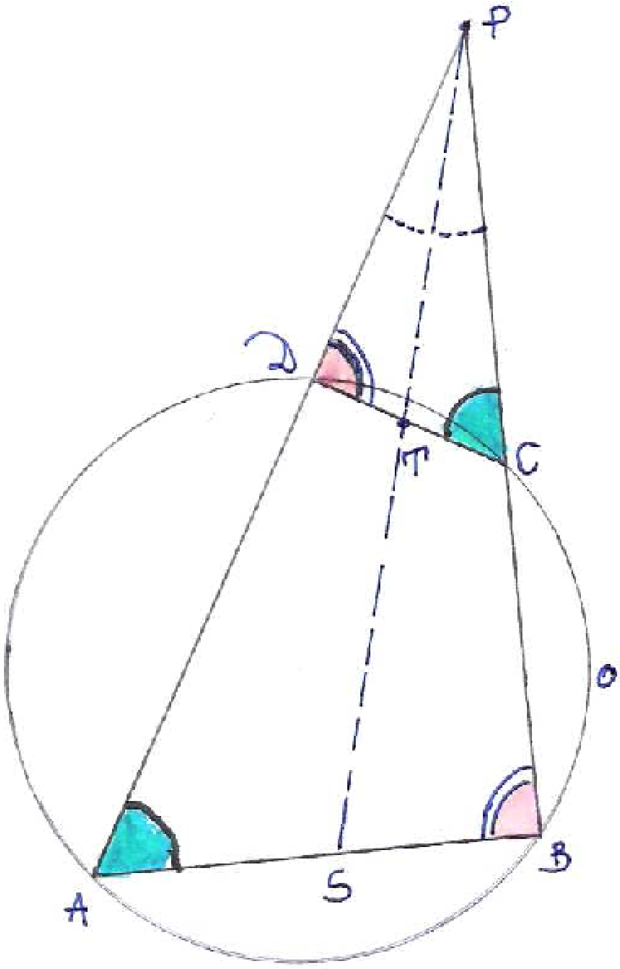


Rysunek 29

Zadanie 20. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o, a proste AD i BC przecinają się w punkcie P. Dwusieczna kąta APB przecina odcinki AB i CD odpowiednio w punktach S i T. Wykaż, że*

$$BS \cdot CT \;=\; AS \cdot DT.$$

[Wskazówka] [Wobec zadania 2 z poprzedniego rozdziału dla czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg kąt wewnętrzny przy wierzchołku A przystaje do kąta zewnętrznego przy wierzchołku C oraz kąt wewnętrzny przy wierzchołku B przystaje do kąta zewnętrznego przy wierzchołku D (rys.30). Z podobieństwa trójkątów ABP i CDP mamy



Rysunek 30

$$\frac{AP}{BP} = \frac{CP}{DP}.$$

Stosując twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego do obydwu trójkątów ABP i CDP mamy wobec powyższego równości

$$\frac{AS}{BS} = \frac{AP}{BP} = \frac{CP}{DP} = \frac{CT}{DT}$$

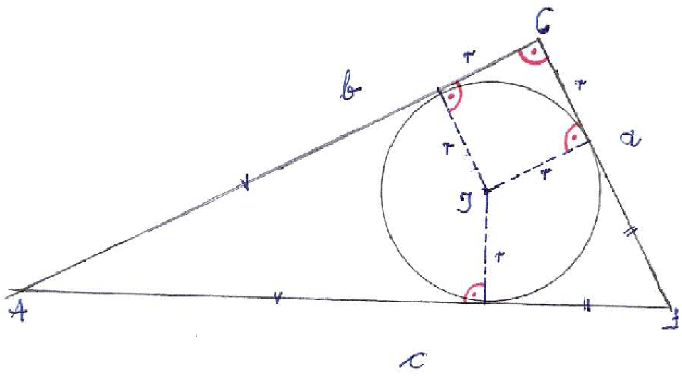
czyli proporcję

$$\frac{AS}{BS} = \frac{CT}{DT}.$$

Stąd otrzymujemy tezę $AS \cdot DT = BS \cdot CT$.]

Zadanie 21. *Skonstruować trójkąt prostokątny mając daną długość przeciwprostokątnej i sumę długości przyprostokątnych.*

[Wskazówka] [Wskazówka. Przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego na szukanym trójkącie. Należy przy tym zauważyć, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych równa jest sumie średnic okręgu wpisanego i opisanego (rys.31). Zatem $a + b = c + 2r$



Rysunek 31

czyli

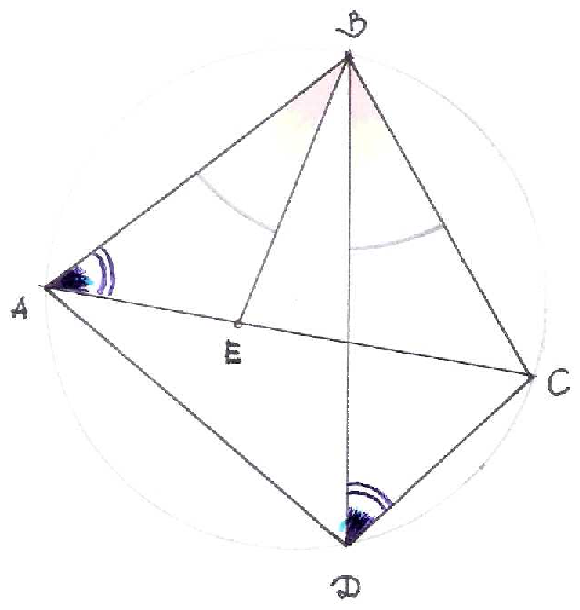
$$r = \frac{(a+b)-c}{2},$$

gdzie wielkościami danymi są przeciwprostokątna c oraz suma przyprostokątnych $(a+b)$. Teraz znając promień r okręgu wpisanego dalej postępujemy jak w zadaniu 6 poprzedniego rozdziału]

Zadanie 22. *Wykazać, że jeżeli czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to*

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD.$$

[Wskazówka] [Na cięciwie BC oparte są równe kąty wpisane BAC i BDC. Obieramy na przekątnej AC punkt E tak, by kąt ABE przystawał do kąta DBC (rys.32). Z podobieństwa



Rysunek 32

trójkątów ABE i DBC mamy

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DC} = \frac{BE}{BC},$$

więc

$$AB \cdot DC = BD \cdot AE. \tag{2}$$

Zauważmy również, że trójkąty BAD i BEC są podobne, gdyż mają równe kąty ($\measuredangle DBA \equiv \measuredangle CBE$) zawarte między proporcjonalnymi bokami (patrz $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$). Dlatego $\frac{BC}{BD} = \frac{EC}{AD}$ czyli

$$BC \cdot AD = BD \cdot EC. \tag{3}$$

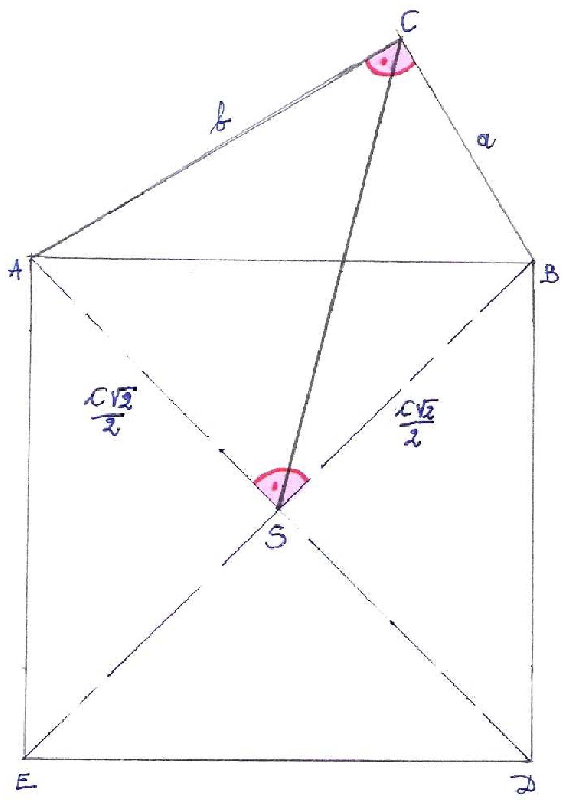
Dodając stronami równości (2) i (3) otrzymujemy

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD(AE + EC)$$

czyli naszą tezę, gdyż $AE + EC = AC$.]

ZADANIE 23. *Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC (o przyprostokątnych długości a i b), na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat $ABDE$. Środkiem tego kwadratu jest punkt S. Znajdź długość odcinka CS.*

[Wskazówka] [Jeżeli c jest długością przeciwprostokątnej AB, to przekątne kwadratu $ABDE$ wynoszą $c\sqrt{2}$. Zatem $AS = BS = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ (rys.33). Na czworokącie $ASBC$ można opisać okrąg



RYSUNEK 33

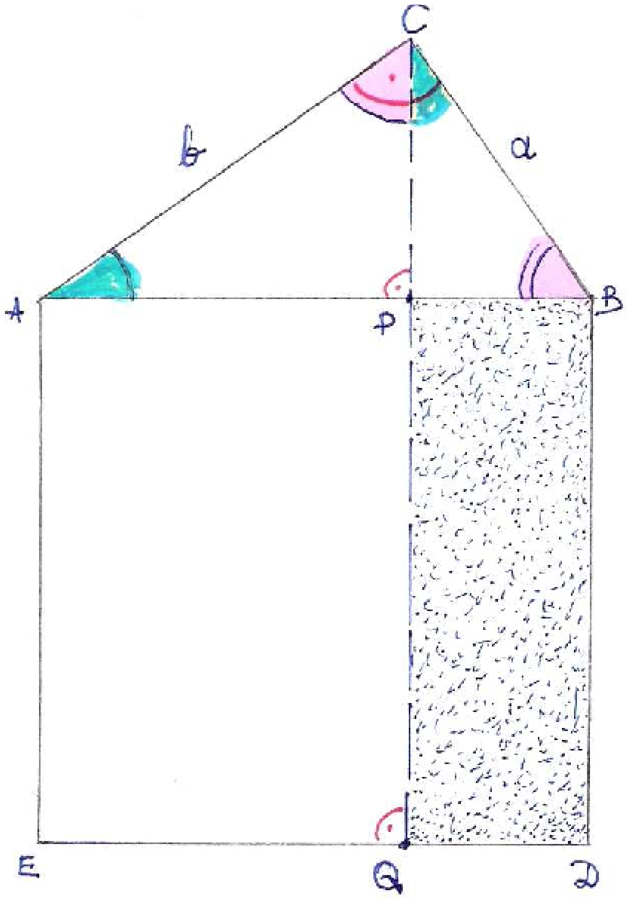
więc wobec zadania 4

$$CS \cdot c \;=\; (a+b) \cdot \frac{c\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd $CS = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.]

Zadanie 24. *Na zewnątrz trójkąta prostokątnego ABC (o przyprostokątnych długości a i b), na przeciwprostokątnej zbudowano kwadrat $ABDE$. Prosta prostopadła do AB, przechodząca przez C, przecina AB i DE odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że pola prostokątów $APQE$ i $BPQD$ są równe odpowiednio polom kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta.*

[Wskazówka] [Z podobieństwa trójkątów prostokątnych ABC i ACP mamy $\frac{AB}{b} = \frac{b}{AP}$ (rys.34). Stąd



Rysunek 34

$$AB \cdot AP = b^2. \tag{4}$$

Z kolei z podobieństwa trójkątów prostokątnych ABC i CBP mamy $\frac{AB}{a} = \frac{a}{PB}$. Stąd

$$AB \cdot PB = a^2. \tag{5}$$

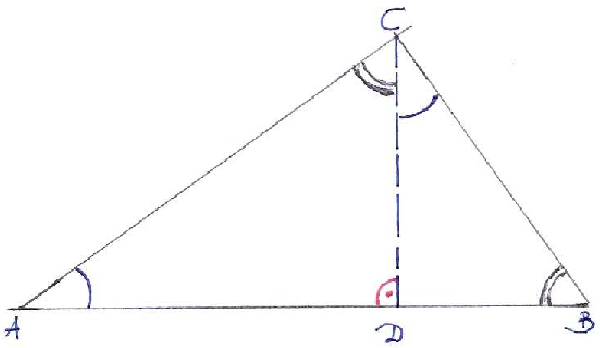
Skoro $AB = AE = BD$ więc (4) i (5) stanowią rozwiązanie zadania. Zauważ, że dodając stronami (4) i (5) otrzymujemy tezę twierdzenia Pitagorasa. Istotnie $AB \cdot (AP + PB) = a^2 + b^2$ czyli $AB^2 = a^2 + b^2$.]

10. Własność pola

Stosunek pól trójkątów (ogólnie mierzalnych figur) podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa
Oto pierwsze z zastosowań tej własności

Twierdzenie 9. *(PITAGORASA). W trójkącie prostokątnym kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów przyprostokątnych.*

Dowód. W trójkącie ABC, o kącie prostym C, poprowadźmy prostopadłą CD do przeciwprostokątnej AB, jak na rysunku 35. Tym samym otrzymaliśmy trzy podobne trójkąty prostokątne



Rysunek 35

ABC, ACD i CBD o przeciwprostokątnych odpowiednio AB, AC i CB. Z własności pola wynika związek

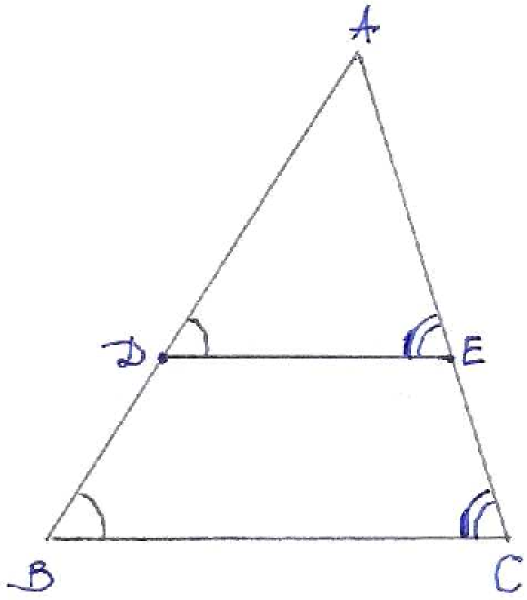
$$\frac{[ABC]}{AB^2} = \frac{[ACD]}{AC^2} = \frac{[CBD]}{CB^2}.$$

Skoro $[ABC] = [ACD] + [CBD]$, to $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

10.1. **Zadania.**

Zadanie 25. *Prosta równoległa do boku trójkąta, dzieli ten trójkąt na dwie figury o równych polach. Wykaż, że stosunek odcinków wyznaczonych przez tę prostą na jednym lub drugim z pozostałych boków wynosi* $\sqrt{2}+1$.

[Wskazówka] [Niech prosta DE równoległa do boku BC dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach (rys.36). Trójkąt ADE jest podobny do trójkąta ABC. Z treści zadania i z



Rysunek 36

własności pola wynika, że

$$k^2 = frac[ABC][ADE] = 2,$$

tzn. skala podobieństwa $k = \sqrt{2}$. Zatem $\sqrt{2} = \frac{AB}{AD} = \frac{AD+DB}{AD} = 1 + \frac{DB}{AD}$. Tak więc $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2} - 1$ i w konsekwencji $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$.]

Zadanie 26. *Wysokość trójkąta prostokątnego ABC, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o obwodach $2p$ i $2q$. Znajdź obwód trójkąta ABC.*

[Wskazówka] [W trójkącie ABC, o kącie prostym C, poprowadźmy wysokość CD, jak na rysunku 35. Oznaczając obwód trójkąta ABC przez $2s$, wobec podobieństwa trójkątów prostokątnych ABC, ACD i CBD oraz własności pola mamy

$$\frac{[ACD]}{[ABC]} = (\frac{p}{s})^2 \text{ i } \frac{[CBD]}{[ABC]} = (\frac{q}{s})^2.$$

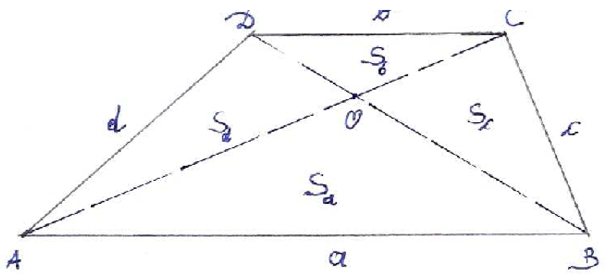
Dodając stronami te równości i wiedząc, że pole trójkąta ABC jest sumą pól trójkątów ACD i CBD mamy

$$1 = \frac{p^2 + q^2}{s^2} \quad \text{czyli} \quad 2s = 2\sqrt{p^2 + q^2}.$$

]

ZADANIE 27. *Przekątne trapezu dzielą ten trapez na cztery trójkąty. Oblicz pole S trapezu mając dane pola S_a i S_b trójkątów, których bokami są podstawy trapezu.*

[Wskazówka] [Oznaczmy pola tych czterech trójkątów przez S_a, S_b, S_c i S_d jak na rysunku 37. Z podobieństwa trójkątów AOB i COD mamy



RYSUNEK 37

$$\frac{S_a}{S_b} = \left(\frac{AO}{OC}\right)^2 \quad \text{czyli} \quad \frac{\sqrt{S_a}}{\sqrt{S_b}} = \frac{AO}{OC}.$$

Zauważmy również, że trójkąty AOD i DOC mają wspólną wysokość, zatem

$$\frac{S_d}{S_b} = \frac{AO}{OC}.$$

Stąd

$$\frac{\sqrt{S_a}}{\sqrt{S_b}} = \frac{S_d}{S_b} \quad \text{czyli} \quad S_d = \sqrt{S_a S_b}.$$

Analogicznie $S_c = \sqrt{S_a S_b}$,więc

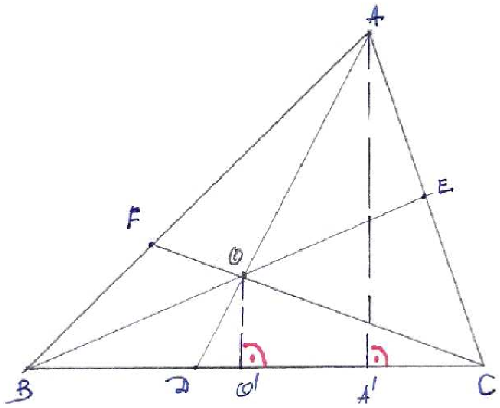
$$S = S_a + S_b + 2\sqrt{S_a S_b} = (\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b})^2.$$

]

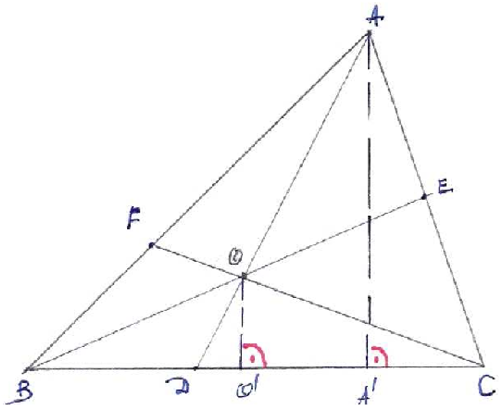
10.2. **Twierdzenie G e r g o n n e‘ a.** Matematyk francuski *Gergonne* udowodnił w roku 1818 następujące twierdzenie

Twierdzenie 10. *(GERGONNE‘A). Jeżeli proste AD, BE, CF przechodzące przez wierzchołki trójkąta ABC, przecinają się w punkcie O wewnątrz trójkąta (rys.39), to*

$$\frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1 \ textrmi \ \frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$



Rysunek 38



Rysunek 39

Dowód. Zauważmy, że stosunek pól trójkątów BOC i BAC jest równy stosunkowi ich wysokości opuszczonych na wspólny bok BC, a ten stosunek równy jest z kolei stosunkowi OD do AD (gdyż opuszczając wysokości OO' i AA' na bok BC otrzymujemy podobne trójkąty prostokątne $OO'D$ i $AA'D$), więc

$$\frac{[BOC]}{[BAC]} = \frac{OD}{AD}.$$

Analogicznie stwierdzamy, że $\frac{[AOC]}{[ABC]} = \frac{OE}{BE}$ i $\frac{[AOB]}{[ACB]} = \frac{OF}{CF}$. Dodając stronami te trzy równości otrzymujemy

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = \frac{[BOC] + [AOC] + [AOB]}{[ABC]} = 1.$$

Pierwsza część twierdzenia została udowodniona. Teraz

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AD - OD}{AD} = 1 - \frac{OD}{AD}, \ \frac{BO}{BE} = 1 - \frac{OE}{BE}, \ \frac{CO}{CF} = 1 - \frac{OF}{CF},$$

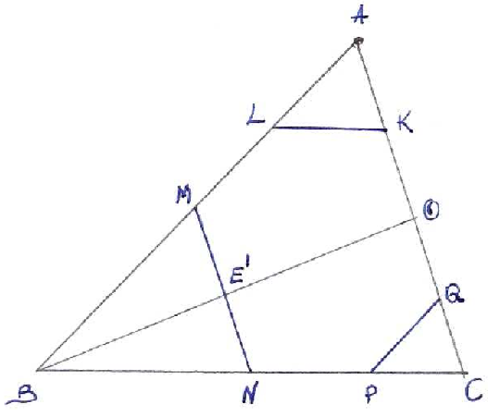
więc

$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 3 - (\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF}) = 2.$$

Twierdzenie Gergonne'a pozostaje słuszne również, gdy O leży na boku trójkąta ABC (rys.40). Faktycznie, uważając AC raz jako prostą poprowadzoną z wierzchołka A, a drugi raz - jako prostą poprowadzoną z wierzchołka C, dostajemy

$$\frac{OC}{AC} + \frac{OA}{CA} = 1.$$

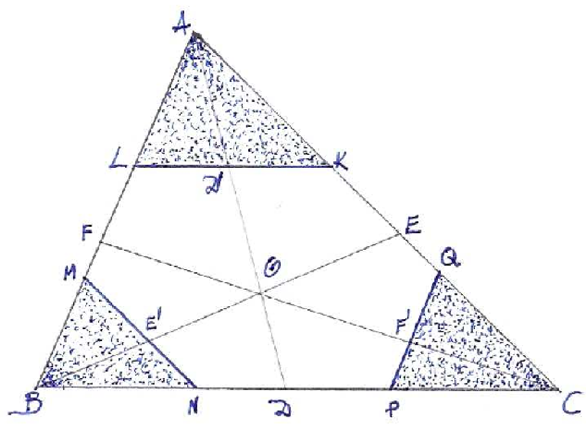
Trzeci składnik jest równy zeru.



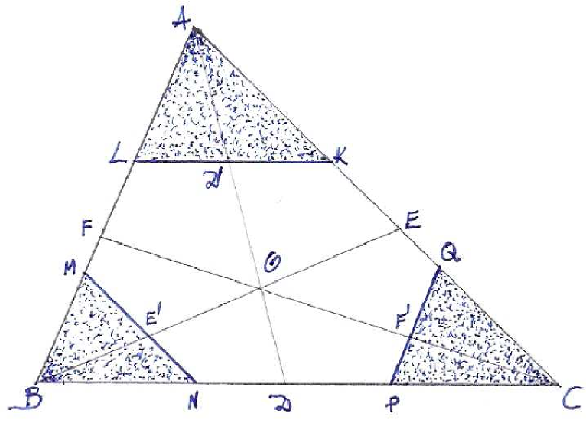
Rysunek 40

Pamiętając, że proste poprowadzone równolegle do boków trójkąta odcinają trójkąty podobne do danego możemy wykazać

Twierdzenie 11. *Jeżeli przez środki odcinków łączących wierzchołki danego trójkąta z dowolnym punktem leżącym wewnątrz niego lub na jego obwodzie poprowadzimy proste równoległe do jego boków, to suma odpowiednich elementów liniowych otrzymanych trzech trójkątów równa jest odpowiedniemu elementowi danego trójkąta.*



Rysunek 41



Rysunek 42

Dowód. Weźmy dowolny punkt O wewnątrz trójkąta ABC (rys.42) lub na jego obwodzie (rys.40) przez który przechodzą proste AD, BE i CF. Niech D‘, E‘, F‘ będą środkami odcinków OA, OB, OC. Przez te punkty prowadzimy proste równoległe odpowiednio do boków BC, CA, AB. Stosunki odpowiednich elementów liniowych par trójkątów LAK i BAC, MBN i ABC, PCQ i BCA oznaczmy odpowiednio przez k_A, k_B, k_C. Mamy

$$k_A = \frac{AD'}{AD} = \frac{1}{2}\frac{AO}{AD}, \quad k_B = \frac{1}{2}\frac{BO}{BE}, \quad k_C = \frac{1}{2}\frac{CO}{CF}$$

i dalej

$$k_A + k_B + k_C = \frac{1}{2}(\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF}) = 1.$$

Mnożąc obydwie strony otrzymanej równości przez długość d odpowiedniego elementu liniowego trójkąta ABC, otrzymujemy

$$k_A \cdot d + k_B \cdot d + k_C \cdot d = d$$

czyli

$$d_A + d_B + d_C = d,$$

gdzie d_A, d_B, d_C oznaczają długości odpowiednich elementów liniowych w trójkątach LAK, MBN i PCQ.

Przyjmując d równe np. obwodowi trójkąta ABC, promieniowi r okręgu wpisanego, promieniowi R okręgu opisanego, ect... otrzymujemy wnioski:

1) suma obwodów odciętych trójkątów równa jest obwodowi danego trójkąta,
2) suma promieni okręgów wpisanych w odcięte trójkąty równa jest promieniowi okręgu wpisanego w dany trójkąt,
3) suma promieni okręgów opisanych na odciętych trójkątach równa jest promieniowi okręgu opisanego na danym trójkącie

etc...

10.3. **Zadania.**

ZADANIE 28. *Oznaczmy pola powierzchni trójkątów LAK, MBN i PCQ (rys.40 i 42) odpowiednio przez S_A, S_B, S_C. Udowodnić, że*

$$\sqrt{S_A} + \sqrt{S_B} + \sqrt{S_C} = \sqrt{S}.$$

[Wskazówka] [Z własności pola wiemy, że $\frac{S_A}{S} = k_A^2$, $\frac{S_B}{S} = k_B^2$, $\frac{S_C}{S} = k_C^2$. Zatem

$$\frac{\sqrt{S_A}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_B}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_C}}{\sqrt{S}} = k_A + k_B + k_C = 1.$$

Stąd już

$$\sqrt{S_A} + \sqrt{S_B} + \sqrt{S_C} = \sqrt{S}.$$

]

Zadanie 29. *Znaleźć wewnątrz trójkąta punkt O taki, żeby suma pól powierzchni trójkątów LAK, MBN i PCQ (rys.42) była najmniejsza.*

[Wskazówka] [Z zadania 4 wiemy, że $\sqrt{S_A} + \sqrt{S_B} + \sqrt{S_C} = \sqrt{S}$. Zatem

$$S_A + S_B + S_C + 2\sqrt{S_A S_B} + 2\sqrt{S_A S_C} + 2\sqrt{S_B S_C} = S.$$

Ponieważ $2\sqrt{S_A S_B} \leq\leq S_A + S_B$ (nierówność między średnimi - geometryczną a arytmetyczną) $2\sqrt{S_A S_C} \leq\leq S_A + S_C$ i $2\sqrt{S_B S_C} \leq\leq S_B + S_C$ więc

$$S \leq\leq S_A + S_B + S_C + (S_A + S_B) + (S_A + S_C) + (S_B + S_C) = 3(S_A + S_B + S_C)$$

czyli $S_A + S_B + S_C \geq\geq \frac{S}{3}$.
Suma $S_A + S_B + S_C$ nie jest nigdy mniejsza niż $\frac{S}{3}$; wartość tę osiąga dla $S_A = S_B = S_C$, gdyż dla tych wartości średnie geometryczne są równe średnim arytmetycznym. Tak więc w przypadku minimum

$$S_A = S_B = S_C = \frac{S}{9}.$$

Widzimy zatem, że w przypadku minimum $k_A = k_B = k_C = \frac{1}{3}$ co oznacza, że

$$\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{BE} = \frac{CO}{CF} = \frac{2}{3}.$$

Ten warunek spełnia punkt przecięcia środkowych, a więc w przypadku żądanego minimum O jest środkiem ciężkości trójkąta ABC. Z rozwiązania zadania wynika, że pole powierzchni sześciokąta $KLMNPQ$ (rys.42) jest nie większe od $\frac{2}{3}$ pola powierzchni trójkąta ABC; maksimum osiąga wtedy, gdy punkt O przecięcia prostych AD, BE i CF jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.]

Zadanie 30. *Wykaż, że równoległe boki sześciokąta $KLMNPQ$ (rys.40 i 42) są równe.*

[Wskazówka] [Przy oznaczeniach jak na rysunku 42, wobec $k_A + k_B + k_C = 1$ mamy

$$KL = k_A \cdot BC = (1 - k_B - k_C) \cdot BC = BC - k_B \cdot BCk_C \cdot BC = BC - BN - PC = NP.$$

co było do okazania. Analogicznie dowodzimy, że $MN = QK$ i $PQ = LM$.
Warto przy okazji zauważyć, że sześciokąt $KLMNPQ$ jest figurą środkowo symetryczną, jego trzy przekątne KN, LP i MQ przechodzą przez środek symetrii figury.]

11. Test

Zadanie 31. *Wykaż, że w dowolnym trójkącie zachodzi zależność*

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

gdzie h_a , h_b , h_c *są trzema wysokościami trójkąta opuszczonymi odpowiednio na boki o długości* a, b *i* c, *natomiast* r *jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.*

ZADANIE 32. *Okręgi, których średnicami są ramiona trapezu, są styczne zewnętrznie. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.*

ZADANIE 33. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $\measuredangle AFB + \measuredangle CED = \measuredangle APD$.*

Zadanie 34. *Wykaż, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\dots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się, w jednym punkcie.*

Zadanie 35. *Punkty P, Q, R należą odpowiednio do boków AB, BC i CA trójkąta ABC, okręgi opisane na trójkątach PBQ i QCR przecinają się w punktach Q i S. Wykaż, że na czworokącie $APSR$ można opisać okrąg.*

ZADANIE 36. *Środki kolejnych boków czworokąta wypukłego połączono odcinkami. Wykaż, że suma pól powstałych czterech trójkątów jest równa polu powstałego czworokąta.*

ZADANIE 37. *W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości a i b. Na krótszej przyprostokątnej jako na średnicy zbudowano okrąg. Oblicz długości odcinków na jakie ten okrąg podzielił przeciwprostokątną.*

ZADANIE 38. *W okręgu o promieniu 5 poprowadzono dwie wzajemnie prostopadłe cięciwy AB i CD. Oblicz CD jeśli wiadomo, że $AB = 8$, a średnice poprowadzone z punktów A i B dzielą cięciwę CD na trzy równe części.*

[Wskazówka] [Odp. $x = CD = \frac{90}{\sqrt{97}}$.]

Zadanie 39. *Prostopadłe opuszczone z dwóch wierzchołków prostokąta na jego przekątną dzielą ją na trzy równe części. Oblicz długość krótszego boku prostokąta jeśli dłuższy ma długość* $2\sqrt{2}$.

[Wskazówka] [Odp. Krótszy bok ma długość 2.]

Zadanie 40. *Kwadrat $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu R. Wykaż, że dla dowolnego punktu P leżącego na tym okręgu*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 8R^2.$$