E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Wybrane zagadnienia z geometrii trójkąta

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

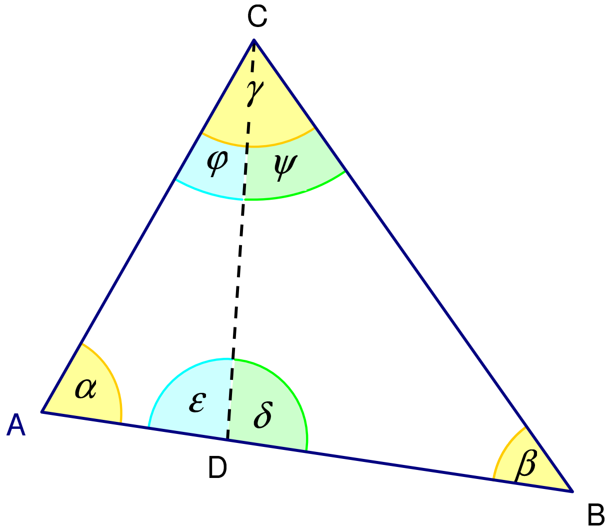
Mierzenie i pojęcia z mierzeniem związane zajmują wiele miejsca w szkolnej matematyce. Odległość (długość) i pole (miara płaska) to wielkości, którymi posługiwano się w starożytnym Babilonie i Egipcie. Pierwsi matematycy byli przede wszystkim praktykami, w Egipcie - urzędnikami panującego faraona. Każdego roku mieli oni do rozwiązania takie samo zadanie. Wylewający Nil niszczył granice poletek uprawianych przez fellachów (egipskich rolników - poddanych faraona). Należało więc na nowo wytyczyć działki i drogi do nich prowadzące. Ważne było, by drogi prowadzące do pól umożliwiały szybkie dotarcie do celu, a więc były możliwie najkrótsze (chodzimy na skróty i dzisiaj, co widać szczególnie zimą, gdy ludzie wydeptują ścieżki niezgodne z wytyczonymi, bo tak jest bliżej). Aby uniknąć sporów urzędnicy faraona musieli zadbać o to, żeby działki różnych rolników nie zachodziły na siebie i można je było w jakiś sposób porównywać (od wielkości działki zależały na ogół plony , a więc i zyski). Działki, podobnie jak i w naszych czasach, miały kształt wielokąta (najczęściej trójkąta lub czworokąta). Wymyślono więc metody porównywania wielokątów.

Pytanie. *Czy potrafisz podzielić obszar w kształcie trójkąta na dziewięć trójkątnych działek o równych polach?*

Od czasów Talesa i Pitagorasa matematycy wiedzą o tym, że odkryte twierdzenia (własności) należy uzasadnić (udowodnić).

Pytanie. *Czy następujące rozumowanie możemy uznać za dowód twierdzenia: Suma kątów wewnętrznych w trójkącie ma* $180°$ *?*

W trójkącie ABC poprowadźmy odcinek CD .



Oznaczmy sumę kątów wewnętrznych trójkąta przez x. Wówczas mamy

$$\alpha + \beta + \gamma = x,$$

$$\alpha + \varepsilon + \varphi = x,$$

$$\beta + \delta + \psi = x.$$

Zatem

$$\alpha + \varepsilon + \varphi + \delta + \beta + \psi = 2x.$$

Ale

$$\varphi + \psi = \gamma \quad \text{i} \quad \varepsilon + \delta = 180^\circ$$

(ε i δ są kątami przyległymi). Stąd

$$x + 180^\circ = 2x.$$

Zatem

$$x = 180^\circ.$$

Twierdzenia mogą być stosowane do rozwiązywania zadań bądź wykorzystywane przy dowodzeniu innych twierdzeń. Przypomnimy np. jak wykorzystać własności pola przy wyprowadzaniu wzorów na pole trójkąta, równoległoboku, trapezu. Wykorzystamy te wiadomości dowodząc twierdzenia Pitagorasa, a przy uzasadnianiu twierdzenia Talesa wykorzystamy własności pola i twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie Talesa są znane z gimnazjum, jednak ze względu na ich zastosowania warto do tych twierdzeń wrócić. Udowodnimy twierdzenia Carnota i Stewarta i wykorzystamy je do wyznaczenia długości wysokości trójkąta, długości środkowych i długości odcinków dwusiecznych trójkąta. Uzasadnimy wzór Herona. Przypomnimy wiele związków miarowych dla wielkości związanych z trójkątem (długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt, długości promieni okręgów dopisanych do trójkąta, długość promienia okręgu opisanego na trójkącie). Poznamy twierdzenia Menelaosa i Cevy.

Przed studiowaniem tych zagadnień spróbuj rozwiązać następujące zadanie:

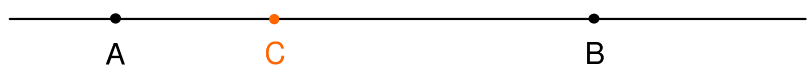
Na środkowym szczeblu drabiny (o nieparzystej liczbie szczebli) opartej o ścianę i śliską posadzkę siedzi mucha. Drabina ześlizguje się po posadzce w dół. Wzdłuż jakiej krzywej będzie poruszać się mucha?

Stosunek podziału odcinka punktem

Na płaszczyźnie jest określona odległość, która każdej parze punktów A i B przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $|AB|$ i przyporządkowanie to ma następujące własności:

1. $|AB| \geqslant 0$,
2. $|AB| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$,
3. $|AB| = |BA|$,
4. dla każdych punktów A, B, C zachodzi $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$,
5. dla każdych punktów A, B i C punkty te są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| = |AC| + |CB|$ lub $|AC| = |AB| + |BC|$ lub $|BC| = |BA| + |AC|$.

Definicja. Niech punkty A, B będą różne. Mówimy, że punkt C, $C \neq A$, $C \neq B$, leży między punktami A i B , gdy $|AB| = |AC| + |CB|$.



Definicja. **Odcinkiem AB, gdzie $A \neq B$, nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich punktów leżących między punktami A i B oraz punktów A, B. Punkty A, B nazywamy końcami odcinka. Odcinek AB będziemy oznaczać symbolem $\overline{AB}$.**

Uwaga. Jeżeli $A = B$, to zbiór $\overline{AA} = \{A\}$ będziemy nazywali odcinkiem zerowym (trywialnym).

Definicja. **Długością odcinka AB nazywamy odległość jego końców.**

Definicja. **Punkt S nazywamy środkiem odcinka AB, gdy $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$.**

Twierdzenie. **Każdy odcinek ma dokładnie jeden środek.**

Niech A i B będą różnymi punktami. Dla każdego punktu P odcinka AB, $P \neq B$, rozważmy stosunek $\frac{|AP|}{|PB|}$.

Umówmy się, że będziemy ten stosunek oznaczać symbolem $k(P)$.

Łatwo zauważyć, że

1. $k(P) \geqslant 0$, dla $P \in \overline{AB}$ i $P \neq B$,

2. $k(A) = 0$,

3. $k(S) = 1$,

4. jeżeli P leży między punktami A i S, to $k(P) < 1$,

5. jeżeli P leży między punktami S i B, to $k(P) > 1$.

Twierdzenie. Jeżeli dowolne punkty K, L należą do odcinka AB, są różne od punktu B i $K \neq L$, to $k(K) \neq k(L)$.

Dowód. Ponieważ punkty K i L należą do odcinka AB, to

$$|AK| + |KB| = |AB| \quad \text{i} \quad |AL| + |LB| = |AB|.$$

Stąd

$$\frac{|AK|}{|KB|} + 1 = \frac{|AB|}{|KB|} \quad \text{i} \quad \frac{|AL|}{|LB|} + 1 = \frac{|AB|}{|LB|}.$$

Gdyby dla pewnych punktów K, L było

$$\frac{|AK|}{|KL|} = \frac{|AL}{|LB|},$$

to

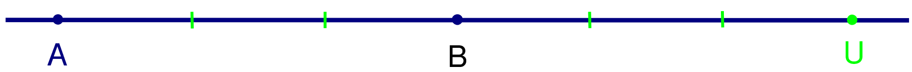
$$\frac{|AB|}{|KB|} = \frac{|AB|}{|LB|}$$

i mielibyśmy $|KB| = |LB|$. Zatem $K = L$, co nie jest możliwe.

Pojęcie stosunku możemy określić także dla punktów prostej AB nie należących do odcinka AB. Jednak wtedy nie będziemy mieć różnowartościowości.

Przykład. Na odcinku AB o długości 3 wybierzmy punkt T taki, że $|AT| = 2$, $|TB| = 1$.

Oczywiście
$$\frac{|AT|}{|TB|} = 2.$$
Na półprostej o początku A, do której należy punkt B, wybierzmy punkt U taki, że $|AU| = 2|AB|$.



Mamy więc
$$\frac{|AU|}{|UB|} = 2.$$
Zatem $T \neq U$ i $\dfrac{|AT|}{|TA|} = \dfrac{|AU|}{|UB|}$.

Pytanie. *Na odcinku AB o długości 3 wybierzmy punkt Q taki, że $|AQ| = 1$, $|QB| = 2$. Czy na prostej AB znajdziemy taki punkt V, że $\dfrac{|AV|}{|VB|} = \dfrac{|AQ|}{|QB|} = \dfrac{1}{2}$?*

Pytanie. *Dla jakiego punktu prostej AB stosunek długości odcinków nie jest określony?*

Pytanie. *Czy na prostej AB istnieje punkt L różny od środka odcinka AB, dla którego $\dfrac{|AL|}{|LB|} = 1$?*

Definicja. Stosunkiem podziału niezerowego odcinka AB punktem P prostej AB, $P \neq B$, nazywamy liczbę $(AB;P)$ określoną w następujący sposób

$$(AB;P) = \begin{cases} \dfrac{|AP|}{|PB|}, & P \in \overline{AB} \setminus \{B\}, \\ -\dfrac{|AP|}{|PB|}, & P \in \mathbf{pr}\ AB \setminus \overline{AB}. \end{cases}$$

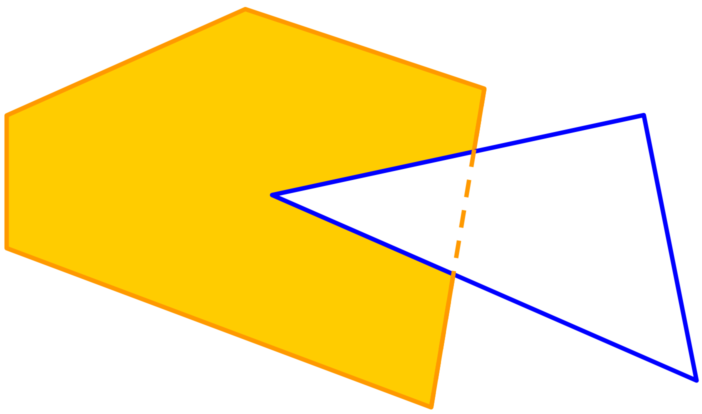
Własności stosunku podziału odcinka punktem:

1. Dla każdego punktu P, $P \in \mathrm{pr}\ AB \setminus \{B\}$,
$$|(AB;P)| = \frac{|AP|}{|PB|}.$$
2. Dla każdych punktów P, Q, $P,Q \in \mathrm{pr}\ AB \setminus \{B\}$, jeżeli $P \neq Q$, to $(AB;P) \neq (AB;Q)$.
3. Dla każdego punktu P, $P \in \mathrm{pr}\ AB \setminus \{B\}$,
$$(AB;P) \neq -1.$$
4. Dla każdej liczby rzeczywistej ν, $\nu \neq -1$ istnieje dokładnie jeden punkt P, $P \in \mathrm{pr}\ AB \setminus \{B\}$ dla którego
$$(AB;P) = \nu.$$

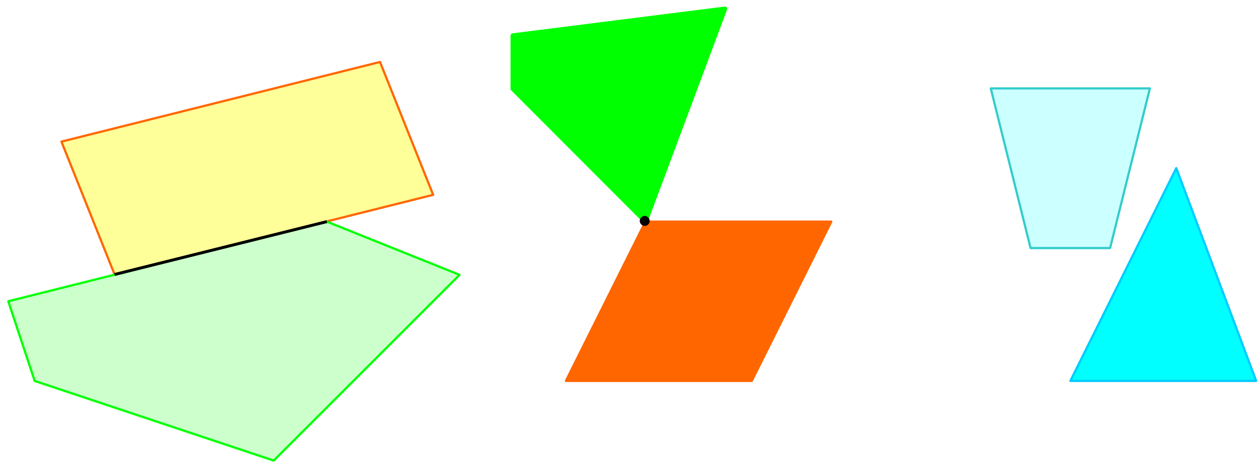
Pole wielokąta

Rozważmy zbiór wszystkich wielokątów zawartych w płaszczyźnie .

Definicja. **Mówimy że wielokąty na siebie nie zachodzą, gdy nie mają one wspólnych punktów wewnętrznych.**



Wielokąty zachodzą na siebie



Wielokąty nie zachodzą na siebie

Każdemu wielokątowi w jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba dodatnia $P(w)$, zwana jego polem (miarą płaską).

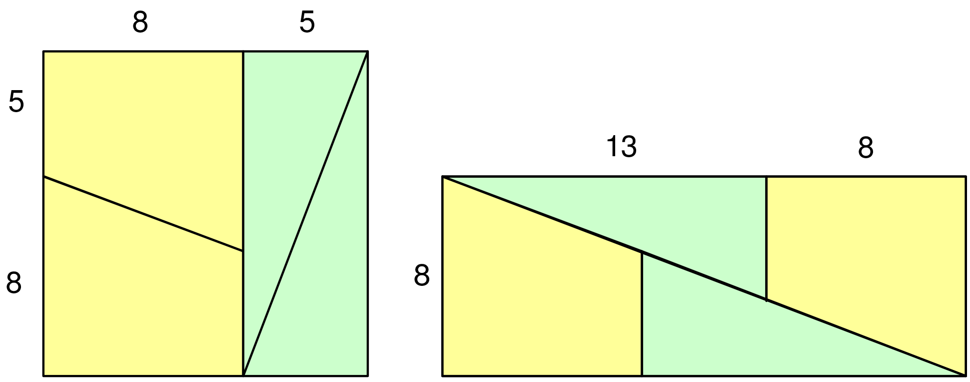
To przyporządkowanie ma następujące własności:

1. każde dwa wielokąty przystające mają równe pola,
2. pole każdego wielokąta, który jest sumą mnogościową dwóch wielokątów nie zachodzących na siebie, jest sumą pól tych dwóch wielokątów,
3. pole kwadratu , którego bok ma długość 1, jest równe 1.

Twierdzenie. **Jeżeli boki prostokąta p mają długości a i b, to**

$$P(p) = ab.$$

Przykład. Kwadrat podzielono na cztery figury - dwa przystające trapezy i dwa przystające trójkąty prostokątne. Z tych figur złożono prostokąt tak jak na rysunku.



$13 \cdot 13 = 169$ $\qquad$ $21 \cdot 8 = 168$

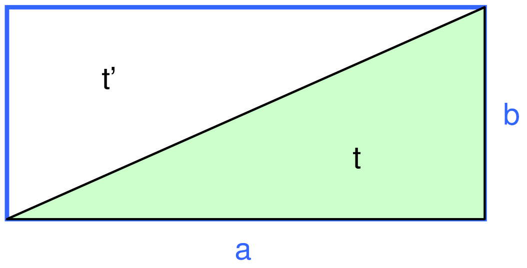
Gdzie podział się taki kwadracik ?

Pytanie. *Dlaczego kwadrat i prostokąt mają różne pola?*

Wniosek. Jeżeli t jest trójkątem prostokątnym, którego przyprostokątne mają długości a i b, to

$$P(t) = \frac{1}{2}ab.$$

Dowód.



$p = t \cup t'$, t przystaje do t' i te trójkąty nie zachodzą na siebie. Zatem

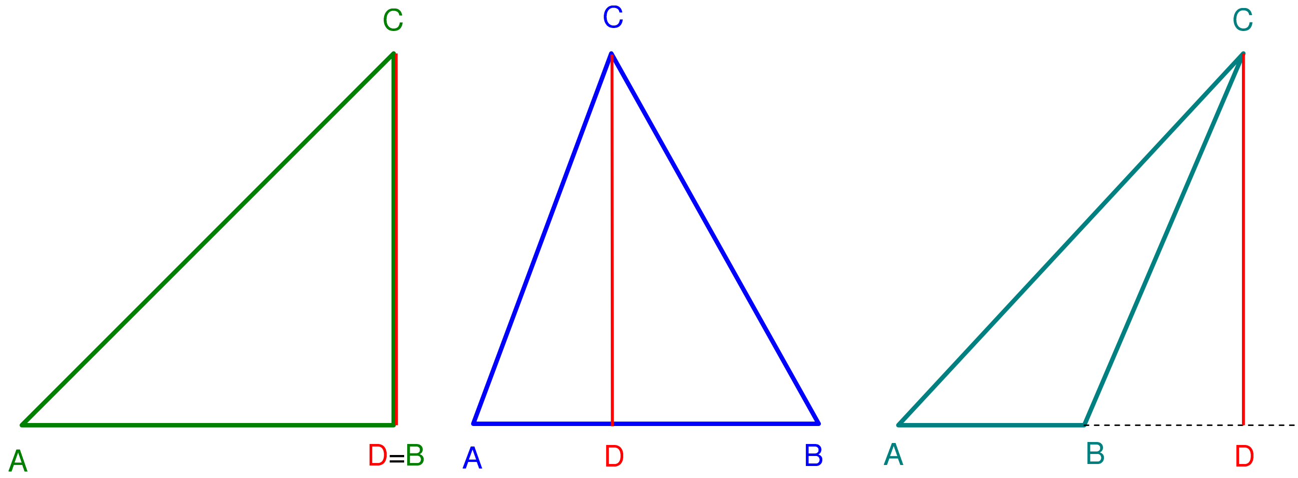
$$ab = P(p) = P(t \cup t') = P(t) + P(t') = 2P(t).$$

Stąd

$$P(t) = \frac{1}{2}ab.$$

Niech t będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach A, B, C. Z wierzchołka C poprowadźmy wysokość CD. Możliwe są trzy przypadki:

1. $D = A$ lub $D = B$,
2. D leży między punktami A i B,
3. D leży na prostej AB poza odcinkiem AB.



W pierwszym przypadku $\triangle ABC$ jest prostokątny, więc na podstawie poprzednich rozważań

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|AB||CD|.$$

W drugim $\triangle ABC$ jest sumą dwóch nie zachodzących na siebie trójkątów prostokątnych, więc

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ADC) + P(\triangle DBC) = \frac{1}{2}|AD||CD| + \frac{1}{2}|DB||CD| = \frac{1}{2}|AB||CD|.$$

W trzecim przypadku trójkąt prostokątny ADC jest sumą trójkąta ABC i trójkąta prostokątnego BDC. Ponieważ te trójkąty na siebie nie zachodzą, to

$$\frac{1}{2}|AD||CD| = P(\triangle ABC) + \frac{1}{2}|BD||CD|.$$

Stąd

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|AD||CD| - \frac{1}{2}|BD||CD| = \frac{1}{2}|AB||CD|.$$

Przyjmijmy, że $h_c = |CD|$ i $c = |AB|$. Wówczas

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ch_c.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowania dla pozostałych boków trójkąta ABC otrzymamy

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2} a h_a,$$

$$P(\triangle ABC) = \frac{1}{2} b h_b.$$

Twierdzenie. **Jeżeli boki trójkąta t mają długości a, b, c, a opuszczone na te boki wysokości mają długości h_a, h_b, h_c, to**

$$P(t) = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c.$$

Wniosek. Jeżeli trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe długości wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków C i C', to

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle A'B'C')}.$$

Twierdzenie. Pole równoległoboku jest równe iloczynowi długości jego boku i długości wysokości opuszczonej na ten bok.

Jeżeli długość boku równoległoboku jest równa a, wysokość opuszczona na ten bok ma długość h, to jego pole

$$P = ah.$$

Twierdzenie. Pole trapezu jest równe iloczynowi połowy sumy długości jego podstaw (boków równoległych) i długości wysokości trapezu (odległości podstaw).

Jeżeli długości podstaw trapezu są równe a, b, zaś wysokość ma długość h, to jego pole

$$P = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

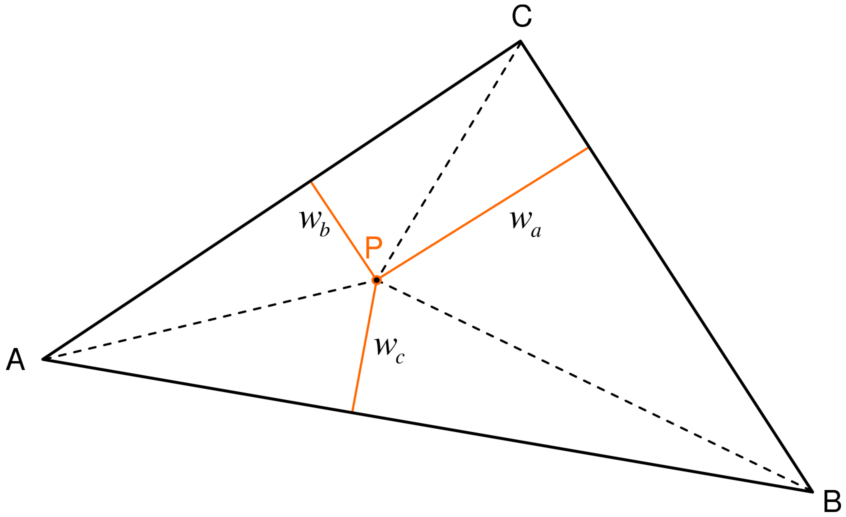
Polecenie. *Udowodnij twierdzenia o polu równoległoboku i polu trapezu.*

Zadanie. Punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC. Jeżeli w_a, w_b, w_c oznaczają odległości punktu P odpowiednio od boków BC, AC, AB, to

$$\frac{w_a}{h_a} + \frac{w_b}{h_b} + \frac{w_c}{h_c} = 1.$$

(h_a, h_b, h_c są długościami wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C.

Rozwiązanie.



Ponieważ trójkąty ABP, BCP, CAP nie zachodzą na siebie oraz $\triangle ABC = \triangle ABP \cup \triangle BCP \cup \triangle CAP$, to

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle ABP) + P(\triangle BCP) + P(\triangle CAP).$$

Stąd, oznaczając krótko trójkąt ABC literą t, otrzymujemy

$$P(t) = \frac{1}{2}\left(aw_a + bw_b + cw_c\right).$$

Ale

$$a = \frac{2P(t)}{h_a},$$
$$b = \frac{2P(t)}{h_b},$$
$$c = \frac{2P(t)}{h_c}.$$

więc

$$P(t) = \left(\frac{w_a}{h_a} + \frac{w_b}{h_b} + \frac{w_c}{h_c}\right) P(t).$$

Zatem

$$\frac{w_a}{h_a} + \frac{w_b}{h_b} + \frac{w_c}{h_c} = 1.$$

Uwaga. Jeżeli punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC i r jest długością promienia tego okręgu, to

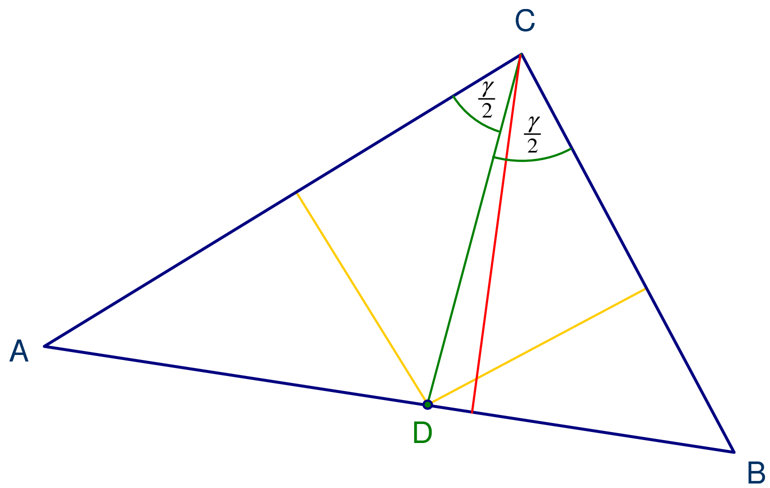
$$w_a = w_b = w_c = r.$$

Stąd

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Zadanie (twierdzenie o podziale boku trójkąta dwusieczną kąta wewnętrznego). Dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.

Rozwiązanie. W trójkącie ABC poprowadźmy dwusieczną kąta wewnętrznego o wierzchołku C. Ta dwusieczna przecina bok AB w punkcie D.



Trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C, dlatego

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{P(\triangle ADC)}{P(\triangle BDC)}.$$

Punkt D leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego o wierzchołku C, więc jego odległości od ramion CA i CB są równe. Te odległości są równe długościom wysokości opuszczonych w trójkątach ADC i BDC z wierzchołka D. Stąd

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{P(\triangle ADC)}{P(\triangle BDC)}$$

Zatem

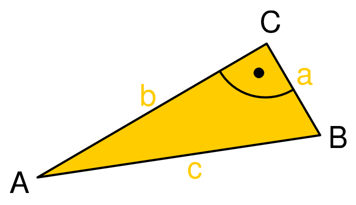
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Twierdzenia Pitagorasa, Carnota i Stewarta

Pitagorasowi przypisuje się udowodnienie twierdzenia

Twierdzenie (Pitagorasa). Jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest prosty, to

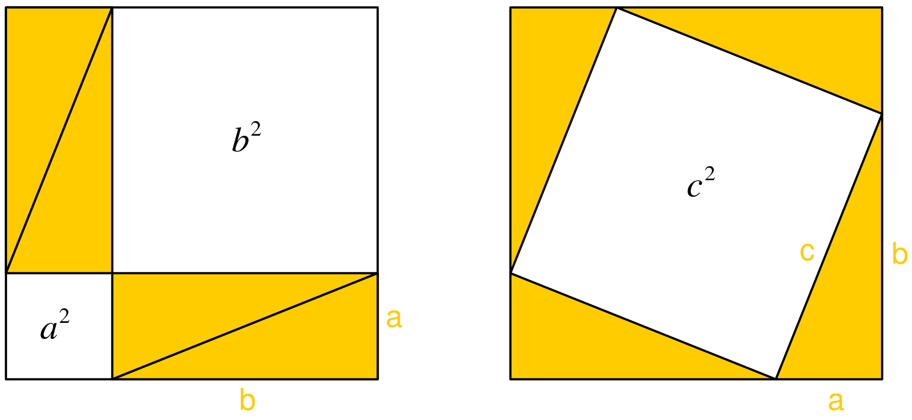
$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2.$$



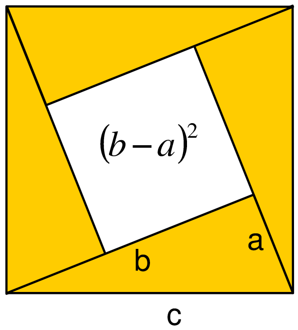
Twierdzenie Pitagorasa bywa wypowiadane na wiele sposobów. W podręcznikach szkolnych spotykamy np. takie sformułowania:
"Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych."
"Kwadrat długości przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego jest równy sumie kwadratów jego przyprostokątnych."

Istnieje bardzo dużo różnych dowodów tego twierdzenia, a wśród nich są dowody , w których wykorzystuje się własności pola.

Dowód I.



Dowód II.



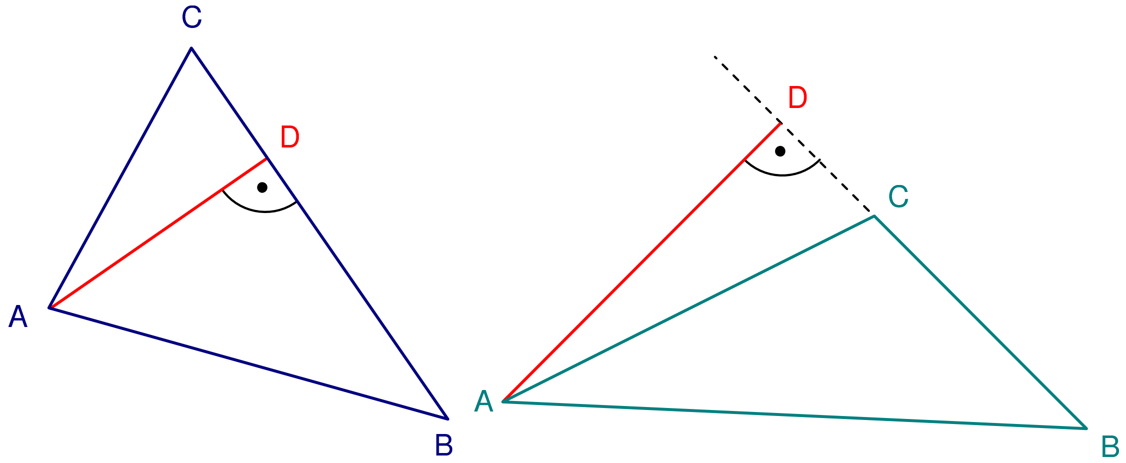
Uogólnieniem twierdzenia Pitagorasa jest twierdzenie Carnota.

Twierdzenie (Carnota). **Jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest ostry i punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, to**

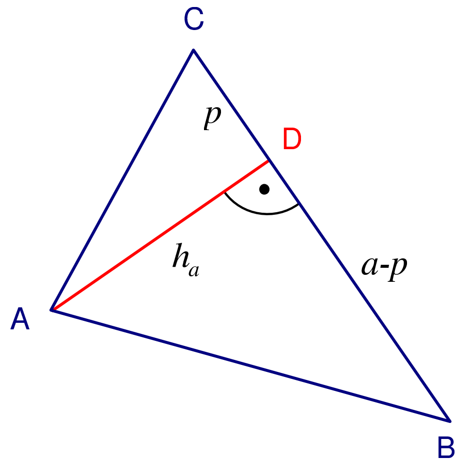
$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||DC|.$$

Jeżeli w trójkącie ABC kąt ACB jest rozwarty i punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A, to

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 + 2|BC||DC|.$$



Dowód. Załóżmy, że kąt ACB jest ostry. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Przyjmijmy, że $h_a = |AD|$, $p = |CD|$ i tradycyjnie $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.



Ponieważ trójkąty ADC i ADB są trójkątami prostokątnymi, to

$$h_a^2 = b^2 + p^2$$

i

$$h_a^2 = c^2 - (a-p)^2.$$

Stąd

$$c^2 - (a-p)^2 = b^2 - p^2,$$

a po prostych rachunkach mamy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ap.$$

Zatem

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC||DC|.$$

Ćwiczenie. Udowodnij (w analogiczny sposób), że gdy kąt ACB jest rozwarty, to przy takich samych oznaczeniach mamy

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ap,$$

czyli

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 + 2|BC||DC|.$$

Długości wysokości trójkąta i wzór Herona

Rozważmy trójkąt ABC, w którym kąt wewnętrzny ACB jest ostry lub rozwarty. Na mocy twierdzenia Carnota możemy napisać, że

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\varepsilon ap,$$

gdzie $\varepsilon = 1$, gdy $\measuredangle ACB$ jest ostry, a $\varepsilon = -1$, gdy $\measuredangle ACB$ jest rozwarty. Stąd

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\varepsilon a}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$h_a^2 = b^2 - p^2,$$

to po wstawieniu za p otrzymamy

$$\begin{aligned} h_a^2 = b^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2+b^2-c^2)^2 &= \frac{1}{4a^2}\left(4a^2b^2 - \left[a^2+b^2-c^2\right]^2\right) = \\ &= \frac{1}{4a^2}\left[2ab + (a^2+b^2-c^2)\right]\left[2ab - (a^2+b^2-c^2)\right] = \\ &= \frac{1}{4a^2}\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right] = \\ &= \frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \end{aligned}$$

Przyjmując, że $2s = a+b+c$ (s jest połową obwodu trójkąta ABC) otrzymamy

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Zauważmy, że gdy kąt ACB jest prosty, to po pierwsze $c^2 = a^2 + b^2$ i po drugie $h_a = b$. Wtedy również

$$\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2} = b.$$

Zatem, niezależnie od tego czy kąt ACB jest ostry, prosty bądź rozwarty otrzymamy

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Uwaga. Dla dwóch pozostałych wysokości mamy

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Wniosek. (wzór Herona). Jeżeli P jest polem trójkąta, którego boki mają długości a, b, c, a s jest połową jego obwodu, to

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Uwaga. Z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia Carnota wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli kąt ACB jest ostry, to
$$|AB|^2 < |BC|^2 + |AC|^2.$$
2. Jeżeli kąt ACB jest prosty, to
$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2.$$
3. Jeżeli kąt ACB jest rozwarty, to
$$|AB|^2 > |BC|^2 + |AC|^2.$$

Zauważmy, że założenia tych wniosków wyczerpują wszystkie możliwości i nawzajem się wykluczają. Podobnie i tezy tych wniosków wyczerpują wszystkie możliwości, i nawzajem się wykluczają. Dlatego prawdziwe są następujące twierdzenia:

1. Jeżeli $|AB|^2 < |BC|^2 + |AC|^2$, to kąt ACB jest ostry.
2. Jeżeli $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$, to kąt ACB jest prosty.
3. Jeżeli $|AB|^2 > |BC|^2 + |AC|^2$, to kąt ACB jest rozwarty.

Polecenie. *Uzasadnij te twierdzenia, dowodząc je nie wprost.*

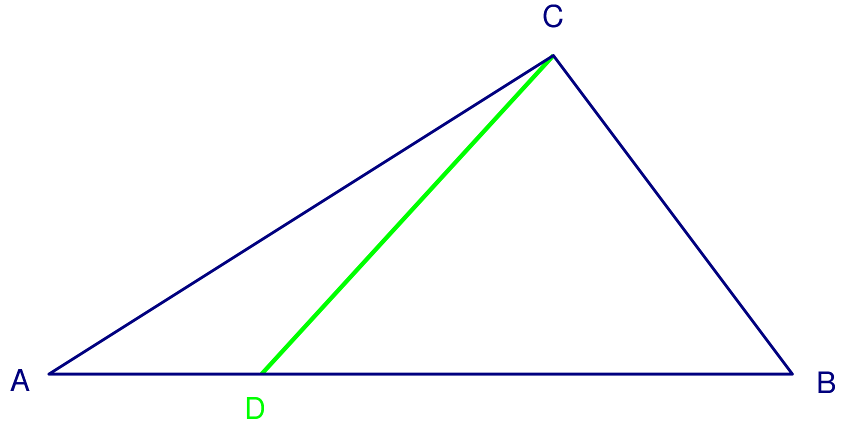
Prawdziwe jest więc twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenie (odwrotne do twierdzenia Pitagorasa). **Jeżeli w trójkącie** ABC **jest** $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ **, to kąt** ACB **jest prosty.**

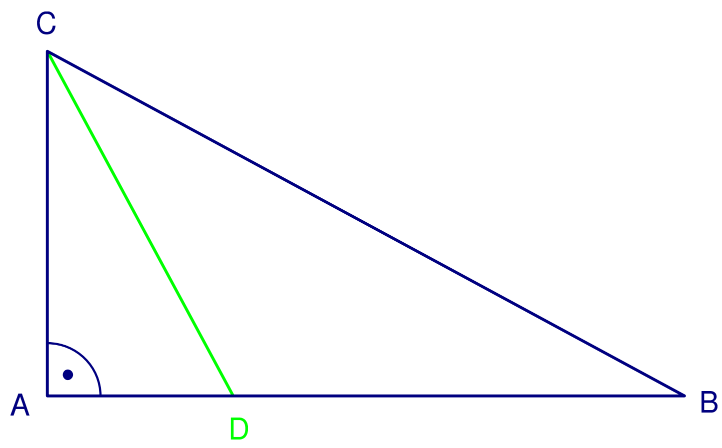
Twierdzenie Stewarta

Twierdzenie (Stewarta). **Jeżeli w trójkącie ABC punkt D należy do boku AB, to**

$$|CD|^2|AB| = |BC|^2|AD| + |AC|^2|DB| - |AB||AD||DB|.$$



Dowód. Założymy, że $D \neq A$, $D \neq B$, ponieważ w przeciwnym razie teza twierdzenia jest oczywista. Jeżeli kąt BAC jest kątem prostym,



to, stosując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

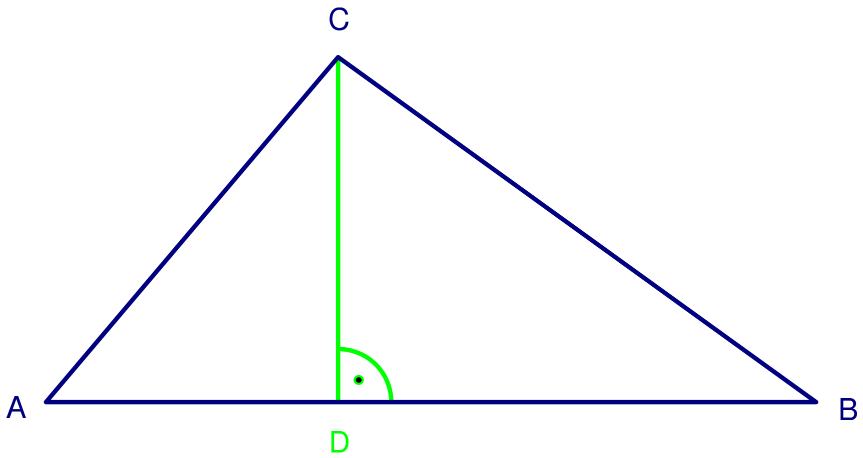
$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2,$$

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2.$$

Stąd

$$
\begin{gathered}
|BC|^2|AD| + |AC|^2|DB| - |AB||AD||DB| = \\
= |AB|^2|AD| + |AC|^2|AD| + |AC|^2|DB| - |AB||AD||DB| = \\
= |AC|^2\left(|AD| + |DB|\right) + |AB||AD|\left(|AB| - |DB|\right) = \\
= |AC|^2|AB| + |AD|^2|AB| = |CD|^2|AB|.
\end{gathered}
$$

Jeżeli punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C,



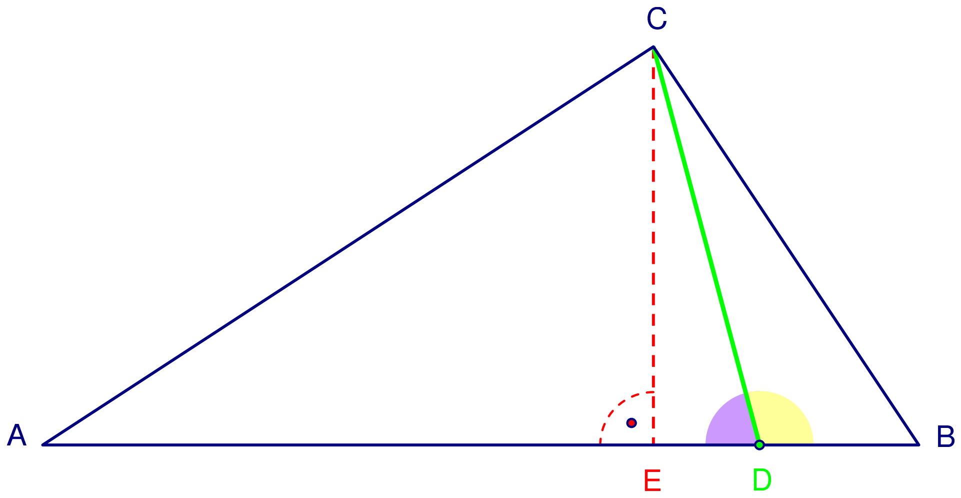
to korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$
\begin{aligned}
|BC|^2 &= |CD|^2 + |DB|^2, \\
|AC|^2 &= |CD|^2 + |AD|^2.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$|BC|^2|AD| + |AC|^2|DB| - |AB||AD||DB| =$$
$$= \left(|CD|^2 + |DB|^2\right)|AD| + \left(|CD|^2 + |AD|^2\right)|DB| - |AB||AD|DB| =$$
$$= |CD|^2\left(||AD| + |DB|\right) + |AD||DB|\left(|AD| + |DB| - |AB|\right) =$$
$$= |CD|^2|AB|.$$

Pozostaje rozpatrzyć przypadek, gdy kąt BAC nie jest prosty i odcinek CD nie jest wysokością trójkąta ABC.



Jeden z kątów $\measuredangle ADC$ lub $\measuredangle BDC$ jest kątem ostrym. Przyjmijmy (bez zmniejszania ogólności rozważań), że $\measuredangle ADC$ jest kątem ostrym. Wówczas kąt $\measuredangle BDC$ jest kątem rozwartym jako kąt przyległy do kąta ostrego. Do trójkątów ADC i BDC stosujemy twierdzenie Carnota i otrzymujemy równości

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD||ED|,$$

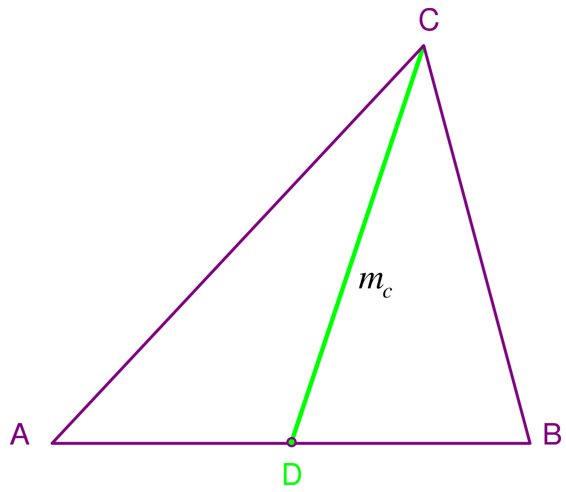
$$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2|DB||ED|.$$

Pierwszą z tych równości mnożymy przez $|DB|$, a drugą przez $|AD|$ i tak otrzymane równości dodajemy stronami. Po prostych rachunkach otrzymujemy tezę twierdzenia.

Twierdzenie Stewarta możemy wykorzystać rozwiązując następujące zadania.

Zadanie. Wyznacz długości środkowych trójkąta ABC, którego boki mają długości a, b, c.

Oznaczmy przez m_a, m_b, m_c długości środkowych, których jednym końcem jest odpowiednio wierzchołek A,B, C.



Niech odcinek CD będzie środkową o długości m_c. Wówczas $|AD| = DB| = \frac{c}{2}$ i na mocy twierdzenia Stewarta mamy

$$m_c^2 c = b^2 \frac{c}{2} + a^2 \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\frac{c}{2}c.$$

Po skróceniu przez c i wyłączeniu przed nawias ułamka $\frac{1}{4}$ otrzymujemy

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

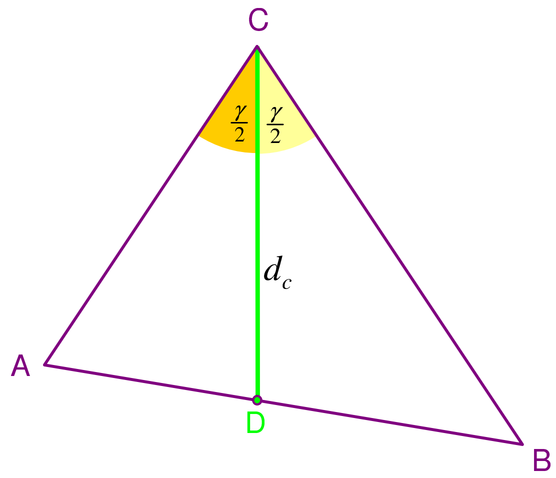
Oczywiście

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right),$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right).$$

Zadanie. Wyznacz długości odcinków dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC , którego boki mają długości a, b, c.

Oznaczmy przez d_a, d_b, d_c długości odcinków dwusiecznych o początku odpowiednio w punkcie A, B, C.



Niech odcinek CD będzie odcinkiem dwusiecznej o długości d_c. Wówczas z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie $|AD| = \frac{bc}{a+b}$, $|DB| = \frac{ac}{a+b}$ i na mocy twierdzenia Stewarta

$$d_c^2 c = b^2 \frac{ac}{a+b} + a^2 \frac{bc}{a+b} - \frac{ac}{a+b} \frac{bc}{a+b} c.$$

Po skróceniu przez c i wyłączeniu przed nawias czynnika $\frac{ab}{a+b}$ otrzymujemy

$$d_c^2 = \frac{ab}{a+b} \left(a + b - \frac{c^2}{a+b} \right).$$

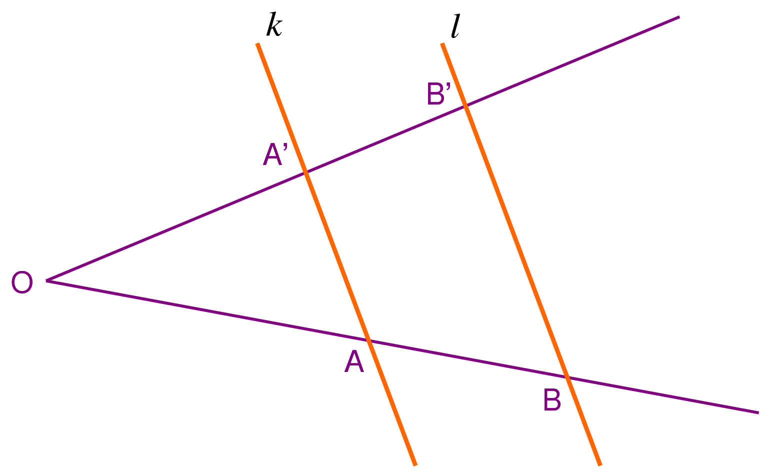
Oczywiście

$$d_a^2 = \frac{bc}{b+c} \left(b + c - \frac{a^2}{b+c} \right),$$

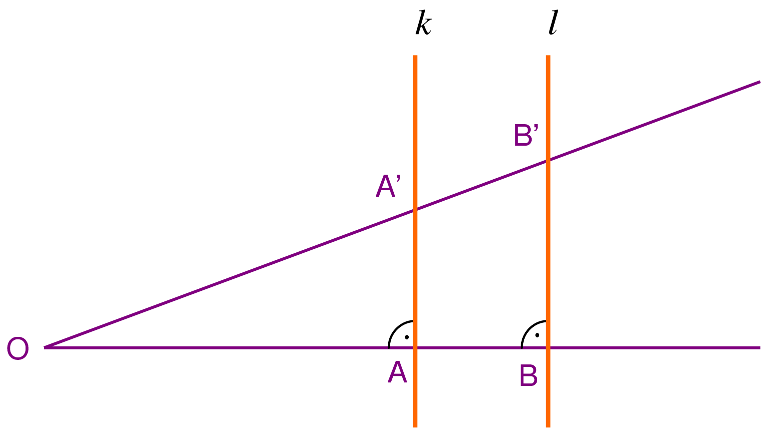
$$d_b^2 = \frac{ac}{a+c} \left(a + c - \frac{b^2}{a+c} \right).$$

Twierdzenie Talesa

Twierdzenie (**Talesa**). **Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to stosunek długości odcinków wyznaczonych przez wierzchołek kąta i te proste na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez wierzchołek kąta i te proste na drugim ramieniu.**



Dowód. Załóżmy najpierw, że proste k i l są prostopadłe do jednego z ramion kąta.



Ponieważ trójkąt OAA' i trapez $ABB'A'$ nie zachodzą na siebie, a ich suma jest trójkątem OBB', to

$$\frac{1}{2}|BB'||OB| = \frac{1}{2}\left(|BB'| + |AA'|\right)|AB| + \frac{1}{2}|AA'||OA|.$$

Po prostych rachunkach otrzymamy

$$|BB'||OA| = |AA'||OB|,$$

a więc

$$\frac{|BB'|}{|AA'|} = \frac{|OB|}{|OA|}.$$

Oznaczając ten stosunek przez ν mamy równości

$$|BB'| = \nu|AA'|$$

i

$$|OB| = \nu|OA|.$$

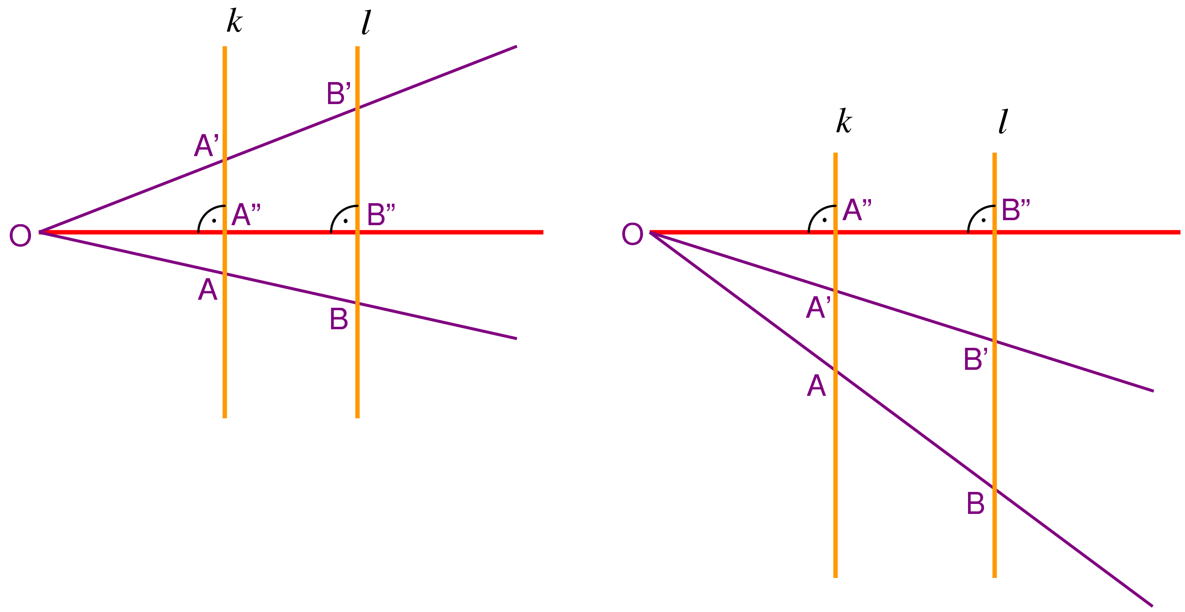
Z twierdzenia Pitagorasa (trójkąty OAA' , OBB' są prostokątne)

$$|OB'| = \sqrt{|BB|^2 + |OB|^2} = \sqrt{\nu^2\left(|AA'|^2 + |OA|^2\right)} = \nu|OA'|.$$

Zatem

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$

Niechaj teraz żadne z ramion kąta nie będzie prostopadłe do prostych k i l. Wówczas kreślimy z wierzchołka O prostą prostopadłą do prostych równoległych k i l. Przecina ona te proste odpowiednio w punktach A'' i B''.



Na podstawie poprzednich rozważań mamy

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB''|}{|OA''}$$

i

$$\frac{|OB'|}{|OA'|} = \frac{|OB''|}{|OA''|}.$$

Stąd

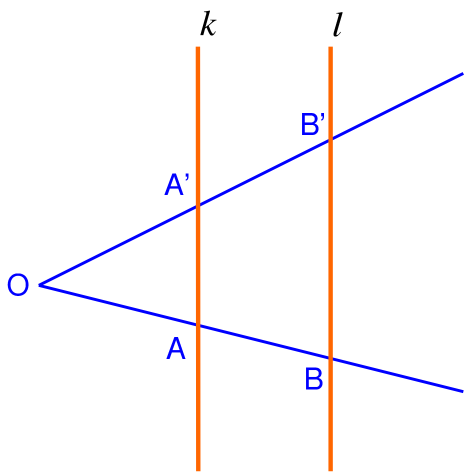
$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$

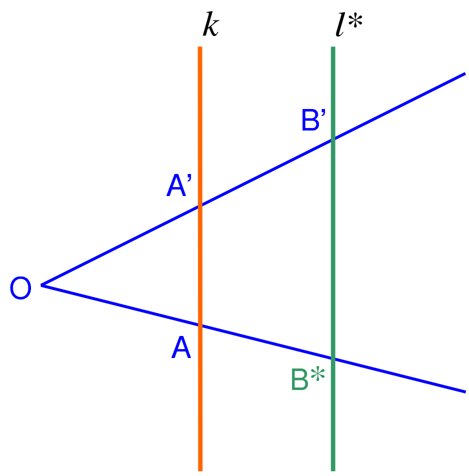
Wniosek. Jeżeli proste k i l są równoległe i przecinają ramiona kąta odpowiednio w punktach A, B oraz A', B', to

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA'|}{|OB'|}, \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}, \quad \frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}.$$

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Twierdzenie. **Jeżeli ramiona kąta przecięte są dwiema prostymi i stosunek długości odcinków wyznaczonych przez wierzchołek kąta i te dwie proste na jednym ramieniu kąta jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez wierzchołek i te proste na drugim ramieniu, to te proste są równoległe.**





Dowód. (nie wprost). Przypuśćmy, że proste k i l nie są równoległe. Poprowadźmy przez punkt B' prostą l^* równoległą do prostej k. Przetnie ona ramię OB w punkcie B^*. Z twierdzenia Talesa (zastosowanego do ramion danego kąta i prostych k i l^*) otrzymamy

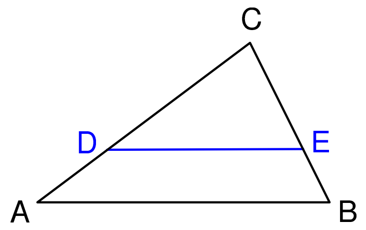
$$\frac{|OB^*|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$

Stąd i z założenia musi być $|OB| = |OB^*|$ i w konsekwencji $B = B^*$. Proste l i l^* są identyczne, a więc $k||l$. Dwie proste k i l nie mogą być jednocześnie równoległe i nierównoległe. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Wnioski z twierdzenia Talesa i twierdzenia doń odwrotnego przydatne w geometrii trójkąta.

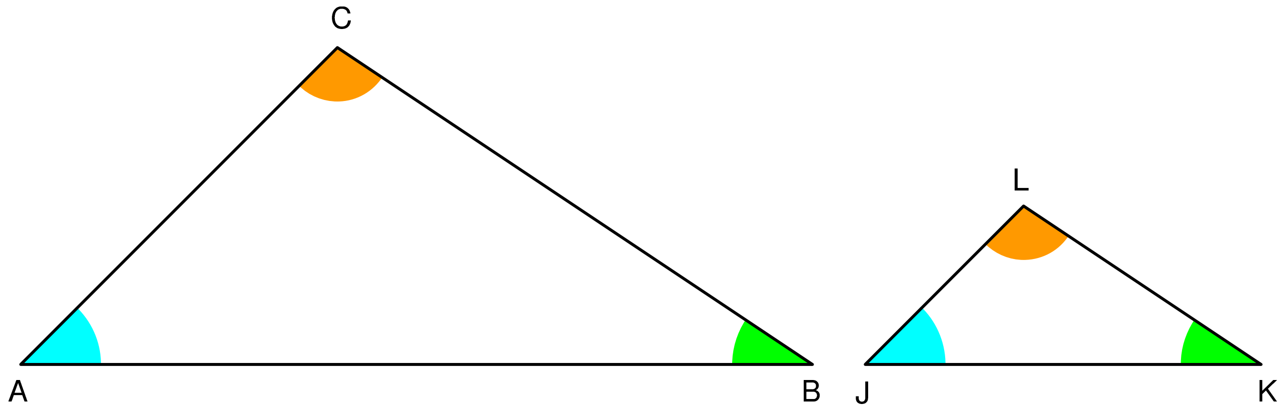
Wniosek. Jeżeli w trójkącie ABC punkt D należy do boku AC, punkt E należy do boku BC i odcinek DE jest równoległy do boku AB, to

$$\frac{|CA|}{|CD|} = \frac{|CB|}{|CE|}.$$

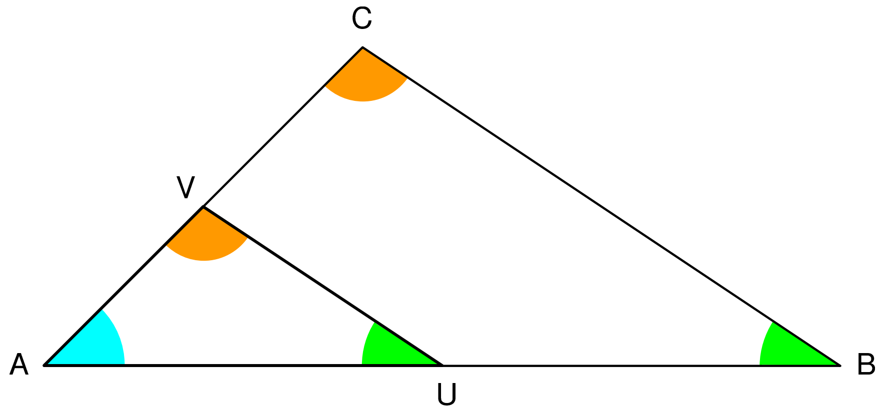


Wniosek. Jeżeli punkt D należy do boku AC, a punkt E należy do boku BC trójkąta ABC oraz
$$\frac{|CA|}{|CD|} = \frac{|CB|}{|CE|},$$
to odcinek DE jest równoległy do boku AB.

Wniosek. Jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta ABC są równe kątom wewnętrznym trójkąta JKL: $\measuredangle A = \measuredangle J$, $\measuredangle B = \measuredangle K$, $\measuredangle C = \measuredangle L$, to długości boków trójkąta ABC są proporcjonalne do długości odpowiednich boków trójkąta JKL:
$$\frac{|BC|}{|KL|} = \frac{|CA|}{|LJ|} = \frac{|AB|}{|JK|}.$$



Dowód. Jeżeli np. $|AB| = |JK|$, to trójkąty ABC i JKL są przystające (kbk) i wszystkie stosunki długości odpowiednich boków są równe 1. Przyjmijmy (bez zmniejszania ogólności rozważań), że $|AB| > |JK|$ i na boku AB trójkąta ABC odłóżmy odcinek AU taki, że $|AU| = |JK|$. Przez punkt U poprowadźmy prostą równoległą do prostej BC. Prosta ta przetnie bok AC w punkcie V.



Z twierdzenia Talesa (i odpowiednich wniosków) wynika, że

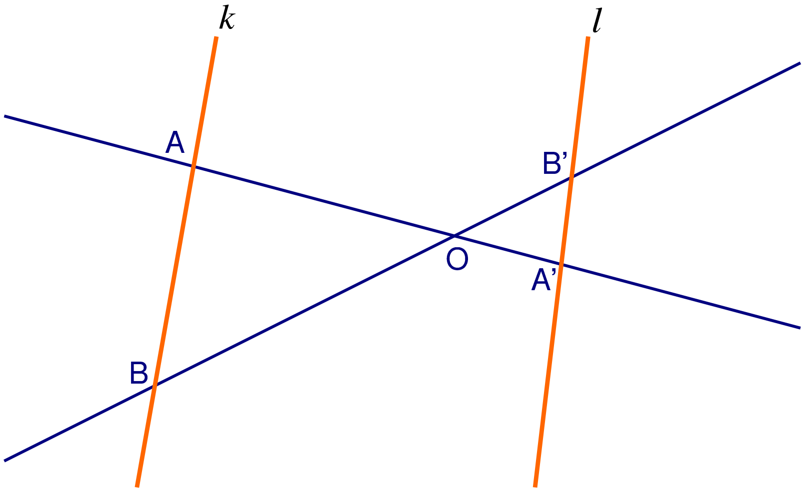
$$\frac{|AB|}{|AU|} = \frac{|AC|}{|AV|} = \frac{|BC|}{|UV|}.$$

Ale trójkąty AUV i JKL są przystające, więc

$$\frac{|BC|}{|KL|} = \frac{|CA|}{|LJ|} = \frac{|AB|}{|JK|}.$$

Wniosek. Jeżeli proste k i l przecinają ramiona kątów wierzchołkowych o wierzchołku O odpowiednio w punktach A, A' oraz B, B' i są równoległe, to

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}.$$



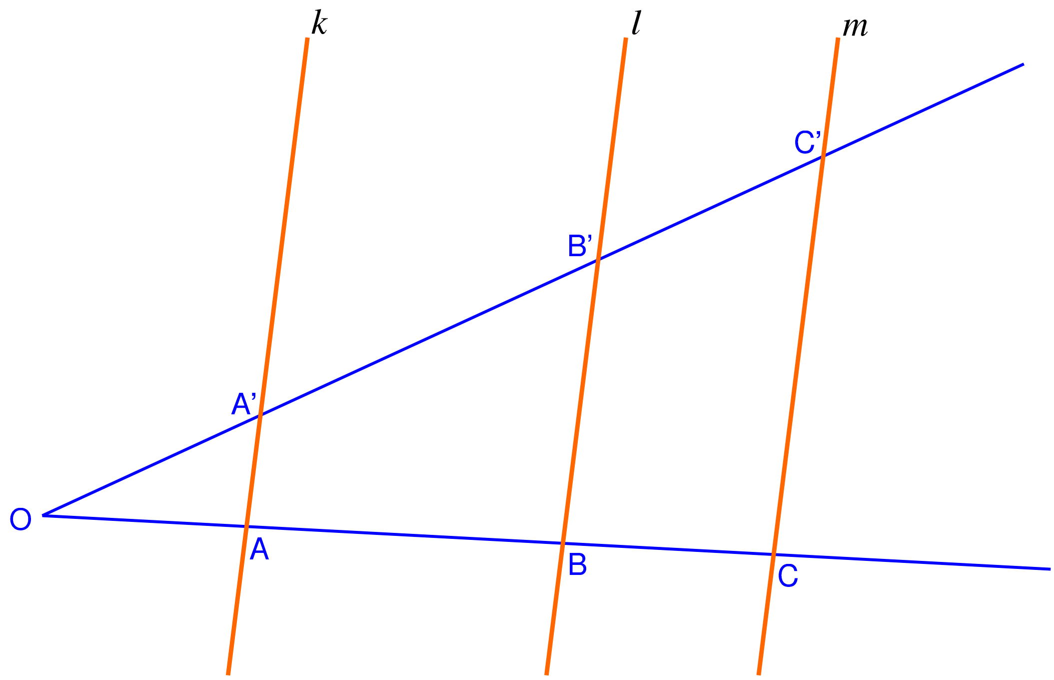
. **Wniosek.** Jeżeli proste k i l przecinają ramiona kątów wierzchołkowych o wierzchołku O odpowiednio w punktach A, A' oraz B, B' i

$$\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|},$$

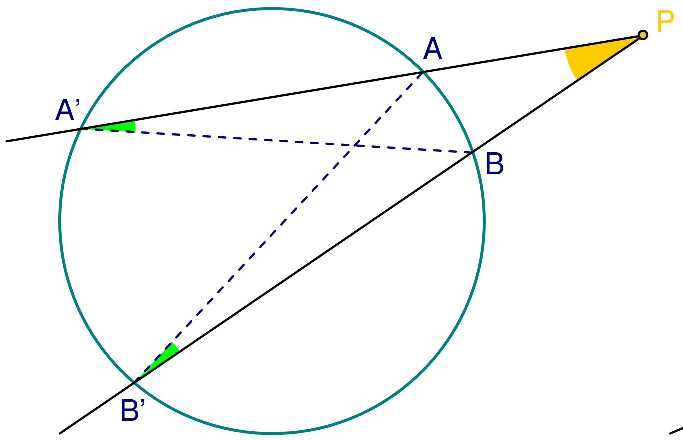
to proste k i l są równoległe.

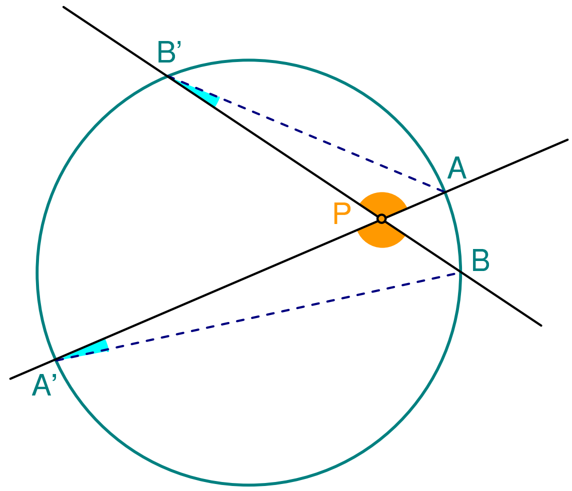
Wniosek.. Jeżeli proste równoległe k, l, m przecinają ramiona kąta odpowiednio w punktach A, B, C i A', B', C', to

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|}.$$



Przykład. Udowodnij, że jeżeli sieczne okręgu poprowadzone z punktu P, nie należącego do tego okręgu, przecinają okrąg odpowiednio w punktach A, A' i B, B', to $|PA||PA'| = |PB||PB'|$.





Trójkąty PBA' i PAB' mają takie same kąty wewnętrzne, zatem długości ich odpowiednich boków są proporcjonalne

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|PB'|}{|PA'|}.$$

Stąd $|PA||PA'| = |PB||PB'|$.

Ważne związki miarowe w trójkącie

Trójkąt będziemy ABC oznaczać symbolem $\triangle ABC$. Długości boków BC, AC, AB oznaczamy odpowiednio literami a, b, c zaś rozwartości kątów wewnętrznych o wierzchołkach A, B, C odpowiednio literami α, β, γ.

Przypomnimy teraz podstawowe twierdzenia geometrii trójkąta.

Twierdzenie. Jeżeli α, β, γ są rozwartościami kątów wewnętrznych trójkąta, to $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Twierdzenie. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$.

Umawiamy się ponadto, że

1. wysokości opuszczone na boki o długościach a, b lub c mają odpowiednio długości h_a, h_b, h_c,
2. środkowe, których jednym końcem jest wierzchołek A, B lub C, mają odpowiednio długości m_a, m_b, m_c,
3. odcinki dwusiecznych, których jednym końcem jest wierzchołek A, B lub C, mają odpowiednio długości d_a, d_b, d_c,
4. promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość R,
5. promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma długość r,
6. połowa obwodu tego trójkąta jest równa s,
7. pole tego trójkąta jest równe P.

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$|b-c| < a < b+c,$$

$$|a-c| < b < a+c,$$

$$|a-b| < c < a+b.$$

Polecenie. Udowodnij wniosek.

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqslant a,$$

$$\sqrt{b^2-(c-a)^2} \leqslant b,$$

$$\sqrt{c^2-(a-b)^2} \leqslant c.$$

Polecenie. Udowodnij wniosek.

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

Dowód. Zauważmy (patrz poprzedni wniosek), że

$$\left[a^2-(b-c)^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]\left[c^2-(a-b)^2\right] \leqslant a^2b^2c^2.$$

Rozkładając lewą stronę tej nierówności na czynniki i korzystając z przemienności iloczynu otrzymamy

$$(b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2 \leqslant a^2b^2c^2.$$

Stąd

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

Uwaga. Nierówność

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

można zapisać w postaci

1) $(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \frac{1}{8}abc$

lub

2) $\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \leqslant \frac{1}{8}abc$

lub

3) $\frac{P^2}{s} \leqslant \frac{1}{8}abc.$

Polecenie. Uzasadnij 1), 2) i 3).

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

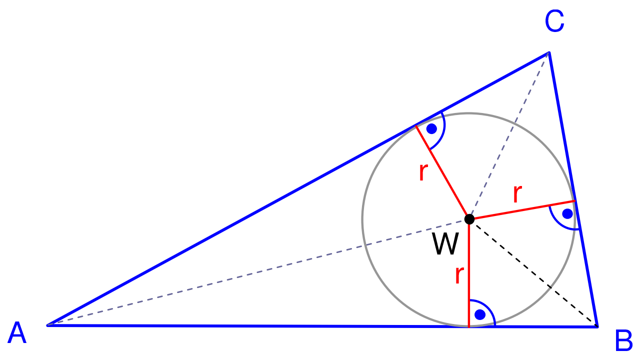
$$\frac{ab}{h_c} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ca}{h_b} = \frac{abc}{2P}.$$

Pytanie. *Czy wiesz jaką interpretację geometryczną ma wielkość* $\frac{abc}{2P}$*?*

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$r = \frac{P}{s}.$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy własności pola.



Trójkąty ABW, BCW i ACW nie zachodzą na siebie i w sumie dają trójkąt ABC. Pole P trójkąta ABC jest równe sumie pól trójkątów ABW, BCW i ACW. Stąd

$$P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}r = sr.$$

Zatem

$$r = \frac{P}{s}.$$

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$R = \frac{abc}{4P}$$

Pytanie. *Czy potrafisz uzasadnić ten wniosek? Jeśli nie, poszukaj odpowiedzi w uzupełnieniach na końcu kursu.*

Wniosek. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$2r \leqslant R.$$

Polecenie. Udowodnij ten wniosek.

Punkty charakterystyczne trójkąta

Niech będzie dany trójkąt ABC. Punktami charakterystycznymi tego trójkąta nazywamy następujące punkty:

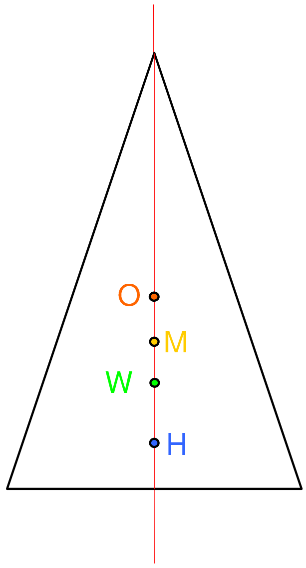
1. Punkt O - środek okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli punkt, w którym przecinają się symetralne trzech boków trójkąta;
2. Punkt W - środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, czyli punkt, w którym przecinają się dwusieczne trzech kątów wewnętrznych trójkąta;
3. Punkt M - środek barycentryczny (barycentrum) tego trójkąta, czyli punkt, w którym przecinają się trzy środkowe trójkąta;
4. Punkt H - środek ortyczny (ortocentrum) tego trójkąta, czyli punkt, w którym przecinają się trzy proste zawierające wysokości trójkąta.

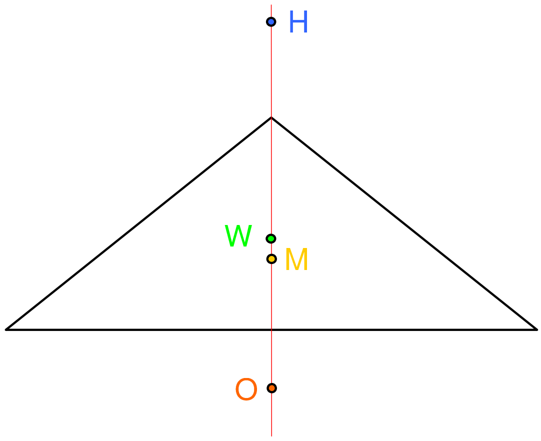
Wniosek. Jeżeli trójkąt ABC jest równoboczny, to $O = W = W = M = H$
.

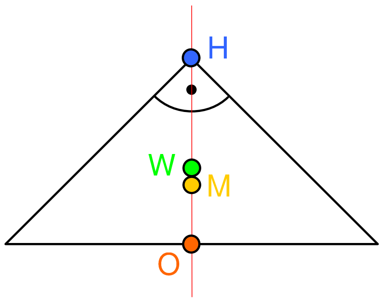
Wniosek. Jeżeli w trójkącie ABC zachodzi $O = W$ lub $O = M$ lub $O = H$ lub $W = M$ lub $W = H$ lub $M = H$, to trójkąt jest równoboczny.

Polecenie. Wybierz jeden z warunków i uzasadnij wniosek.

Jeżeli trójkąt jest równoramienny ale nie jest równoboczny, to punkty O, W, M, H są różne i należą do jednej prostej (są współliniowe). Tą prostą jest symetralna podstawy trójkąta równoramiennego.

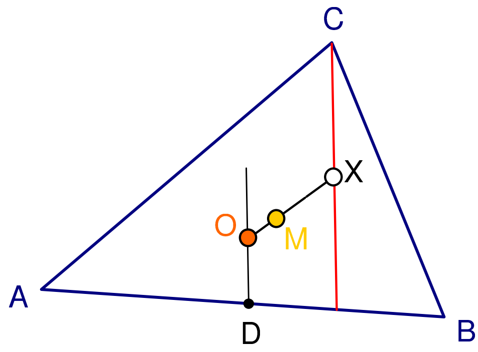



H
W
M
O


H
W
M
O

Twierdzenie (**Eulera**). **W każdym trójkącie ABC punkty O, M, H są współliniowe.**

Dowód. Załóżmy, że trójkąt ABC nie jest równoramienny.



Na prostej OM $(O \neq M)$ wybieramy punkt X taki, że

$$|OX| = 3|OM|,$$

$$|OM| + |MX| = |OX|.$$

Stąd

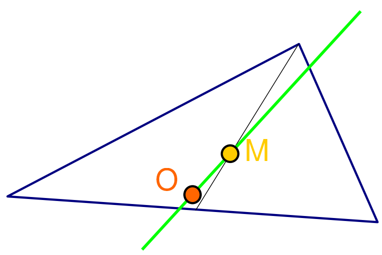
$$|MX| = 2|OM|.$$

Z twierdzenia o środkowych wynika, że

$$|MC| = 2|MD|.$$

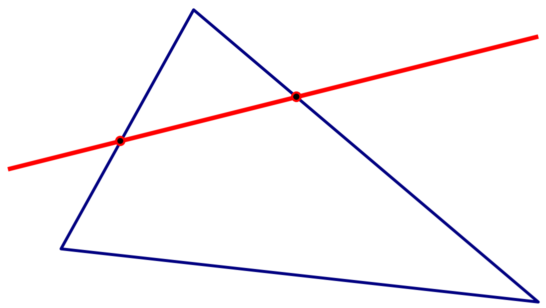
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że prosta OD jest równoległa do prostej CX. Ale prosta OD jest symetralną boku AB jest więc do prostej AB prostopadła. W takim razie prosta CX jest prostopadła do prostej AB. Rozumując analogicznie udowodnimy, że prosta BX jest prostopadła do prostej AC oraz prosta AX jest prostopadła do prostejBC. Proste AX, BX, CX zawierają wysokości trójkąta ABC, zatem $X = H$. Punkt H należy więc do prostej OM. Punkty O, M, H są współliniowe.

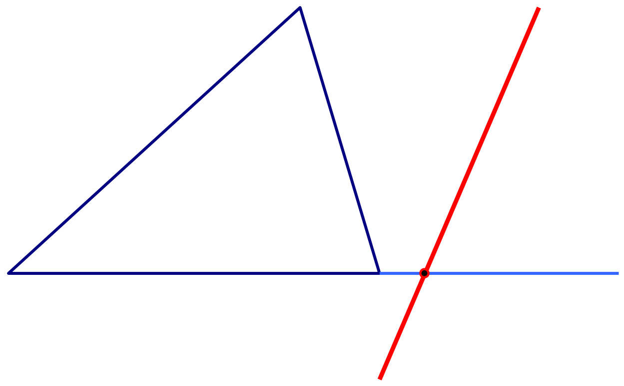
Uwaga. Prostą, wyznaczoną przez punkty O i M w trójkącie nierównobocznym, nazywamy prostą Eulera.



Twierdzenie Menelaosa

Definicja. **Mówimy, że prosta przecina bok trójkąta lub jego przedłużenie, gdy ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą zawierającą ten bok i punkt ten jest różny od wierzchołków trójkąta.**



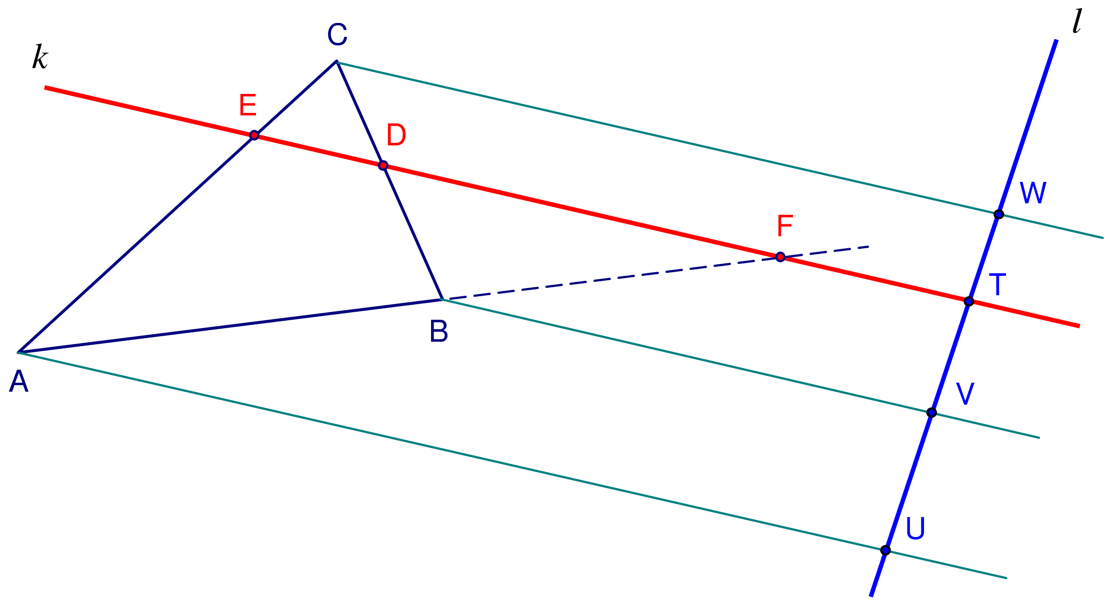


Polecenie. Zbadaj wzajemne położenie trójkąta i prostej na płaszczyźnie.

Twierdzenie. **Jeżeli prosta przecina boki BC, CA, AB trójkąta ABC lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach D, E, F, to**

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Dowód. Załóżmy, że prosta k przecina dwa boki trójkąta i przedłużenie trzeciego boku.



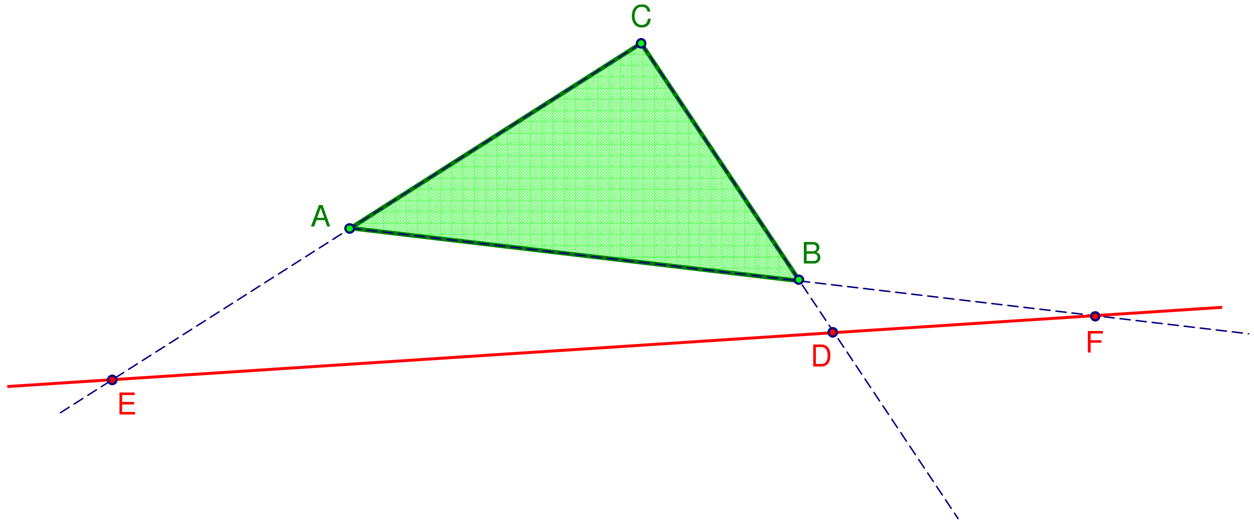
Wybierzmy na płaszczyźnie prostą l, która nie jest równoległa do prostej k ani do żadnego boku trójkąta i nie ma z tym trójkątem punktów wspólnych. Przez wierzchołki trójkąta poprowadźmy proste równoległe do prostej k. Stosując odpowiedni wniosek z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|TU|}{|TV|}, \quad \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|VT|}{|TW|}, \quad \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|WT|}{|TU|}.$$

Mnożąc te równości stronami otrzymujemy

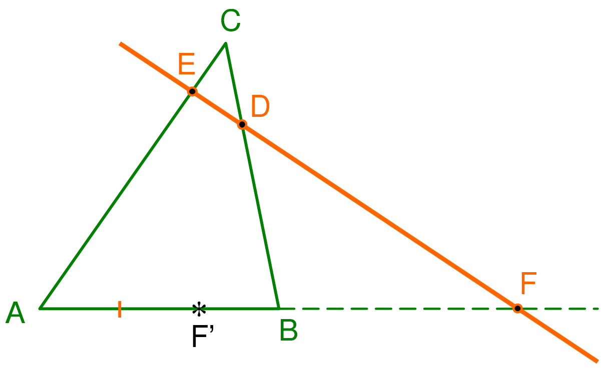
$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|TU|}{|TV|}\frac{|VT|}{|TW|}\frac{|WT|}{|TU|} = 1.$$

Podobnie postępujemy, gdy prosta przecina przedłużenia trzech boków trójkąta.



Polecenie. *Przeprowadź dowód w tym przypadku.*

Twierdzenie odwrotne do udowodnionego nie jest prawdziwe.



Ponieważ

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AF'|}{|F'B|},$$

to

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

lecz punkty D, E, F' nie są współliniowe.

Rozważmy zamiast stosunków $\frac{|AF|}{|FB|}$, $\frac{|BD|}{|DC|}$, $\frac{|CE|}{|EA|}$ stosunki podziału odcinka punktem $(AB;F)$, $(BC;D)$, $(CA;E)$. W zależności od położenia prostej k względem trójkąta dwa spośród tych stosunków są dodatnie, a jeden ujemny lub wszystkie trzy są ujemne. Zatem

$$(AB;F)(BC;D)(CA;E) = -1.$$

Mamy więc takie twierdzenie

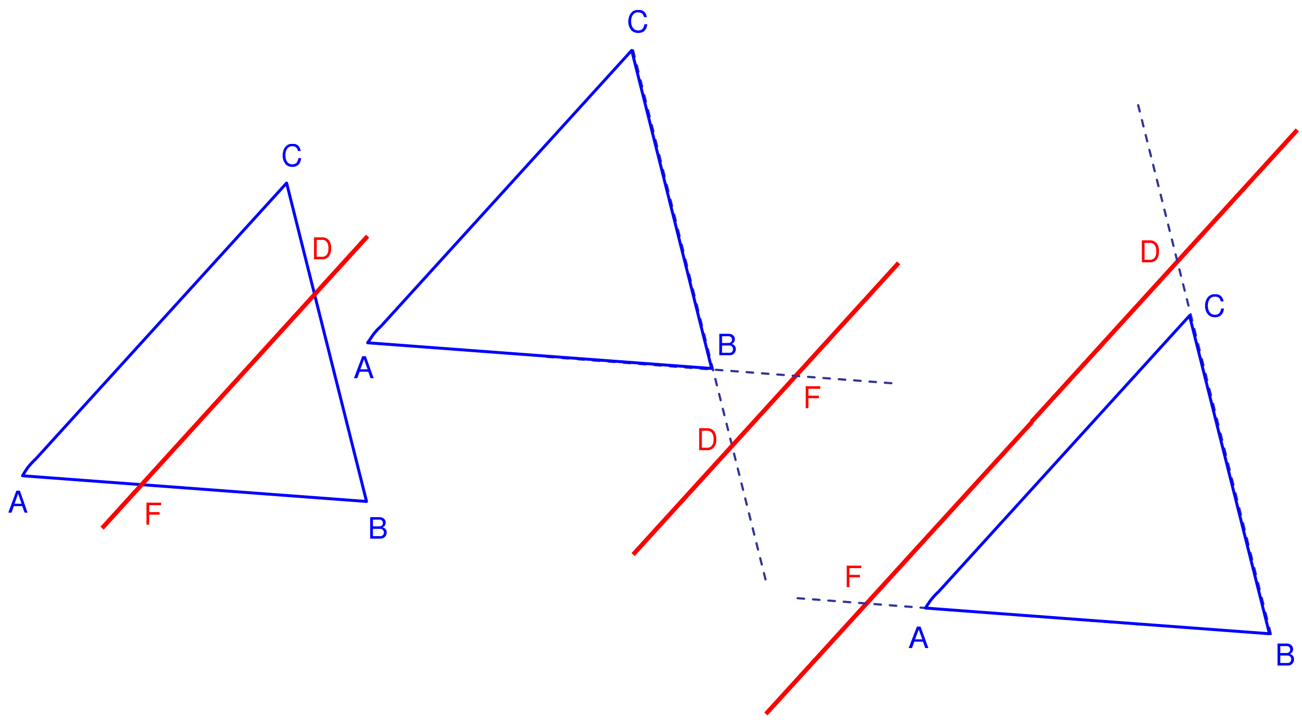
Twierdzenie (**Menelaosa**). **Jeżeli prosta przecina boki BC, CA, AB trójkąta ABC lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach D, E, F, to**

$$(AB;F)(BC;D)(CA;E) = -1.$$

Pokażemy, że twierdzenie odwrotne do tego twierdzenia jest prawdziwe.

Twierdzenie (**odwrotne do twierdzenia Menelaosa**). **Jeżeli punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC lub ich przedłużeń, są różne od wierzchołków i $(AB;F)(BC;D)(CA;E) = -1$, to punkty D, E, F są współliniowe.**

Dowód (nie wprost). Przypuśćmy, że punkty D, E, F nie są współliniowe. Zatem $D \notin$ pr EF lub $E \notin$ pr DF lub $F \notin$ pr DE. Przyjmijmy, że $E \notin$ pr DF. Pokażemy najpierw, że prosta DF przecina bok AC lub jego przedłużenie. Gdyby prosta DF była równoległa do prostej AC,



to z wniosków z twierdzenia Talesa wynika, że we wszystkich przypadkach mamy

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|CD|}{|DB|}.$$

Ponadto w pierwszym przypadku

$$(AB;F) = \frac{|AF|}{|FB|}, \quad (BC;D) = \frac{|BD|}{|DC|},$$

a w drugim i trzecim

$$(AB;F) = -\frac{|AF|}{|FB|}, \quad (BC;D) = -\frac{|BD|}{|DC|}.$$

Zatem we wszystkich przypadkach

$$(AB;F)(BC;D) = 1.$$

Mielibyśmy więc

$$(CA;E) = -1,$$

co jest niemożliwe.

Niech E' będzie punktem, w którym prosta DF przecina bok AC lub jego przedłużenie. Ponieważ punkty D, E', F są współliniowe, to

$$(AB; F)(BC; D)(CA; E') = -1.$$

Stąd i z założenia twierdzenia otrzymujemy

$$(CA; E) = (CA; E'),$$

więc $E = E'$. Punkt E należy do prostej DF, co nie jest możliwe.

Polecenie. *Uzasadnij pozostałe dwa przypadki.*

Twierdzenie Cevy

Rozważmy trójkąt ABC, dla ułatwienia ostrokątny i przyjmijmy, że punkty D, E, F są

1. środkami odpowiednio boków BC, CA, AB,
2. punktami, w których dwusieczne kątów wewnętrznych odpowiednio przy wierzchołkach A, B, C przecinają boki przeciwległe tym wierzchołkom,
3. spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C na boki przeciwległe tym wierzchołkom.

W każdym przypadku mamy trzy proste, które przechodzą przez wierzchołki trójkąta i przecinają się w punkcie należącym do jego wnętrza.

Zadanie. Uzasadnij, że w każdym przypadku

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

ad 1. Ponieważ punkty D, E, F są środkami boków trójkąta, to $|AF| = |FB|$, $|BD| = |DC|$, $|CE| = |EA|$. Stąd

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

.

ad 2. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta otrzymujemy kolejno

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|CB|},$$
$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$
$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Stąd

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AC|}{|CB|}\frac{|AB|}{|AC|}\frac{|BC|}{|AB|} = 1.$$

ad 3. Niech punkty D, E, F będą spodkami wysokości trójkąta ABC. Zauważmy, że jeśli zatoczymy okrąg , którego średnicą będzie bok BC, to przetnie on pozostałe boki w punktach E i F. Podobnie okrąg, którego średnicą jest bok AC przecina pozostałe boki w punktach D i F, a okrąg o średnicy AB przetnie pozostałe boki w punktach E i D. Z własności siecznych okręgu o średnicy BC poprowadzonych z punktu A otrzymujemy

$$|AF||AB| = |AE||AC|.$$

Analogiczne równości mamy dla siecznych okręgów o średnicach AC i AB poprowadzonych odpowiednio z punktów B i C

$$|BD||BC| = |BF||AB|,$$

$$|CE||AC| = |CD||BC|.$$

Przekształcając uzyskane równości dostaniemy

$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

$$\frac{|BD|}{|BF|} = \frac{|AB|}{|BC|},$$

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Stąd

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{|AF|}{|AE|}\frac{|BD|}{|BF|}\frac{|CE|}{|CD|} =$$

$$= \frac{|AC|}{|AB|}\frac{|AB|}{|BC|}\frac{|BC|}{|AC|} = 1.$$

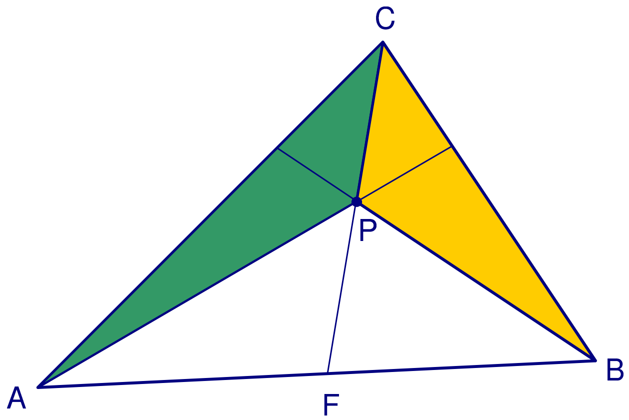
Uwaga. Łatwo zauważyć, że rozważania prowadzone w punktach 1 i 2 nie wymagają założenia ostrokątności trójkąta ABC.

W rozważanych przykładach iloczyn trzech stosunków jest równy 1. Okazuje się, że nie jest to przypadek. Tak jest zawsze, gdy trzy różne proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta przecinają się w punkcie wewnętrznym tego trójkąta.

Twierdzenie (**Cevy**). **Jeżeli punkt** P **należy do wnętrza trójkąta** ABC**, a proste** AP, BP, CP **przecinają boki** BC, AC, AB **trójkąta odpowiednio w punktach** D, E, F**, to**

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy własności pola i pewne własności proporcji.



Zauważmy, że trójkąty AFP i BFP mają identyczne wysokości opuszczone z wierzchołka P. Podobnie, trójkąty AFC i BFC mają identyczne wysokości opuszczone z wierzchołka C. Stąd

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{P(\triangle AFP)}{P(\triangle BFP)} = \frac{P(\triangle AFC)}{P(\triangle BFC)}.$$

Trójkąty AFP i APC nie zachodzą na siebie, więc

$$P(\triangle APC) = P(\triangle AFC) - P(\triangle AFP).$$

Trójkąty BFP i BPC także nie zachodzą na siebie, wobec tego

$$P(\triangle BPC) = P(\triangle BFC) - P(\triangle BFP).$$

Zatem

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{P(\triangle AFP) - P(\triangle AFC)}{P(\triangle BFP) - P(\triangle BFC)} = \frac{P(\triangle APC)}{P(\triangle BPC}.$$

W podobny sposób można pokazać, że

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P(\triangle BPA)}{P(\triangle CPA}.$$

i

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P(\triangle CPB)}{P(\triangle APB)}.$$

Iloczyn trzech stosunków $\frac{|AF|}{|FB|}, \frac{|BD|}{|DC|}, \frac{|CE|}{|EA|}$ jest równy 1 .

Twierdzenie (**odwrotne do twierdzenia Cevy**). **Jeżeli punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC, są różne od jego wierzchołków i**

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

to proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie należącym do wnętrza trójkąta ABC.

Dowód. Proste AD i BE przecinają się w punkcie P należącym do wnętrza trójkąta ABC. Prosta CP przetnie bok AB w punkcie F'. Na mocy twierdzenia Cevy mamy

$$\frac{|AF'|}{|F'B|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

Stąd i z założenia otrzymujemy

$$\frac{|AF'|}{|F'B|} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Ponieważ punkty F i F' należą do odcinka AB, to $F = F'$. Zatem proste AD, BE, CF przecinają w punkcie należącym do wnętrza trójkąta ABC.

Uwaga. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy i rozwiązanego wcześniej zadania wynika, że w każdym trójkącie proste zawierające środkowe przecinają się w jednym punkcie, proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie, a jeśli trójkąt jest ostrokątny, to proste zawierające wysokości przecinają się w jednym punkcie.

Można teraz postawić następujące pytanie: Czy w twierdzeniu Cevy musimy zakładać, że proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta przecinają się w punkcie wewnętrznym tego trójkąta? Okazuje się, że:

1. punkt, w którym przecinają się trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta nie musi być punktem wewnętrznym tego trójkąta,

2. trzy proste przechodzące przez wierzchołki trójkąta mogą być równoległe.

Niektóre proste przecinają wówczas przedłużenia boków trójkąta.

Pytanie. *Jak myślisz, ile przedłużeń boków i ile boków te trzy proste przecinają (zrób rysunek!)?*

Pytanie. *Czy twierdzenie odwrotne (w tej nowej sytuacji) będzie prawdziwe? Jeśli nie, to jak zmienić tezę*

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1,$$

aby prawdziwe było twierdzenie odwrotne?

Polecenie. *Wróć do twierdzenia Menelaosa i pomyśl.*

Zadanie. Punkt F należy do odcinka AB, jest różny od środka tego odcinka i jego końców. Skonstruuj punkt Q należący do prostej AB, $Q \neq F$ taki, że

$$\frac{|AQ|}{|QB|} = \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Opis konstrukcji

1. Wybieramy punkt C, który nie należy do prostej AB.
2. Prowadzimy prostą FC i na niej wybieramy punkt P należący do wnętrza trójkąta ABC.
3. Kreślimy proste AP i BP, które przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach D i E.
4. Prosta DE przecina prostą AB w szukanym punkcie Q.

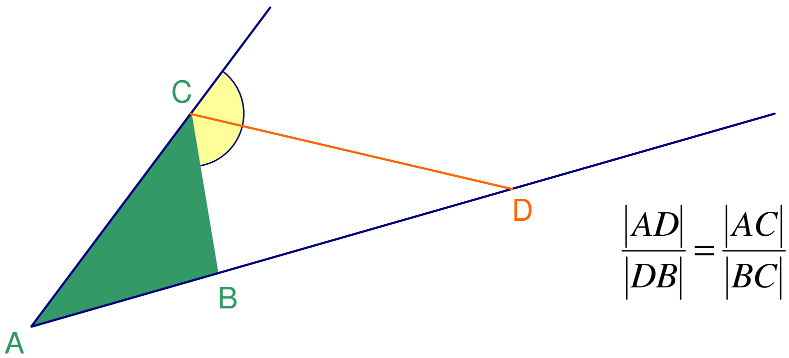
Polecenie. *Uzasadnij, stosując twierdzenia Menelaosa i Cevy, poprawność tej konstrukcji.*

Zadania

1. Dane są trzy punkty A, B, C takie, że $|AB| = 4$, $|BC| = 6$, $|AC| = 8$. Czy te punkty są współliniowe?

2. Czy na płaszczyźnie znajdziemy takie punkty A, B, C, dla których $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AC| = 7$?

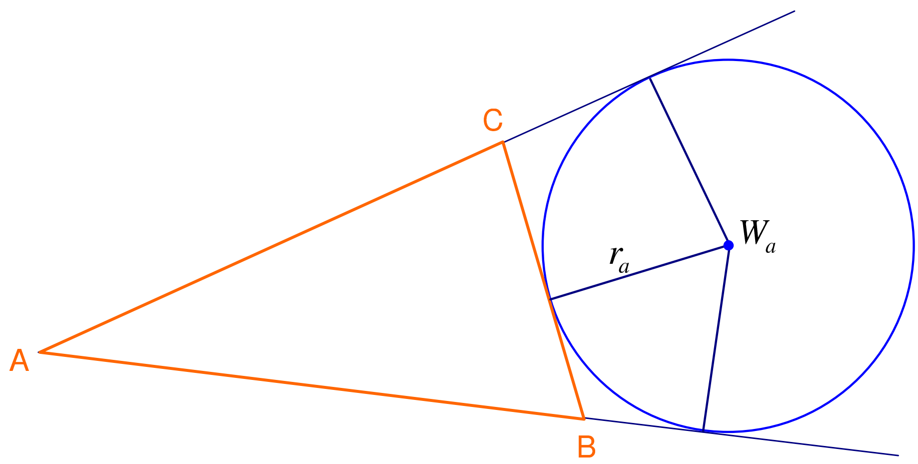
3. Korzystając z własności pola udowodnij twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie.



$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

4. Wyznacz zbiór wszystkich punktów P należących do wnętrza trójkąta ABC, dla których
$$P(\triangle APC) = P(\triangle BCP).$$

5. Definicja. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg, do którego są styczne boki trójkąta, a jego środek nie należy do wnętrza tego trójkąta.



r_a, r_b, r_c to długości promieni okręgów dopisanych do trójkąta ABC, których środki leżą po przeciwnej stronie boków przeciwległych odpowiednio wierzchołkom A, B, C. Udowodnij (korzystając z własności pola), że
$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}.$$

6. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$a^2 < 2b^2 + 2c^2,$$

$$b^2 < 2c^2 + 2a^2,$$

$$c^2 < 2a^2 + 2b^2.$$

7. Udowodnij, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to

$$2rR = \frac{abc}{a+b+c}.$$

8. Wykaż, że

$$\frac{1}{P^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

9. Wyraź długości a, b, c boków trójkąta przez długości h_a, h_b, h_c jego wysokości.

10. Czy odcinki o długościach $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ mogą być bokami pewnego trójkąta? Jeśli tak, to oblicz pole tego trójkąta.

11. Wyraź długości a, b, c boków trójkąta przez długości m_a, m_b, m_c jego środkowych.

12. Wyraź długości a, b, c boków trójkąta przez długości d_a, d_b, d_c odcinków dwusiecznych jego kątów wewnętrznych przy założeniu, że trójkąt jest równoramienny.

13. Dane są długości b, c boków trójkąta i $b \leqslant c$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{2}(c-b) < m_a < \frac{1}{2}(c+b),$$

$$0 < d_a < \frac{2bc}{b+c}.$$

14. Wykaż, że w trójkącie prostokątnym wierzchołek kąta prostego, spodek wysokości opuszczonej z tego wierzchołka, środki boków trójkąta leżą na jednym okręgu. Udowodnij, że promień tego okręgu nie zależy od długości przyprostokątnych trójkąta.

15. Prosta równoległa do podstaw trapezu przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych tego trapezu. Udowodnij, że ten punkt jest środkiem odcinka wyznaczonego na tej prostej przez ramiona trapezu.

16. Dane są pola P_1 i P_2 dwóch trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem tych trójkątów jest punkt przecięcia przekątnych trapezu. Oblicz pole tego trapezu.

17. Punkty a, B, C, D są środkami boków czworokąta. Udowodnij, że

(I) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

(II) stosunek pola danego czworokąta do pola tego równoległoboku jest równy 2.

18. Punkty E i F są środkami odpowiednio boków AB i BC prostokąta $ABCD$, a punkt G jest wspólnym punktem odcinków AF i CE. Oblicz stosunek pól czworokątów $AGCD$ i $EBFG$.

19. Punkty D i E należą odpowiednio do boków BC i AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie U należącym do wnętrza tego trójkąta, a prosta CU przecina bok AB w punkcie D. Udowodnij następujące twierdzenia:

(I) Jeżeli prosta ED jest równoległa do prostej AB, to punkt D jest środkiem boku AB. (II) Jeżeli punkt D jest środkiem boku AB, to prosta ED jest równoległa do prostej AB.

20. Udowodnij twierdzenie Cevy : Jeżeli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC, a proste AP, BP, CP przecinają boki BC, AC, AB trójkąta odpowiednio w punktach D, E, F, to

$$\frac{|AF|}{|FB|}\frac{|BD|}{|DC|}\frac{|CE|}{|EA|} = 1.$$

W dowodzie zastosuj twierdzenie Menelaosa do trójkąta AFC i prostej BE oraz trójkąta FBC i prostej AD.

Test

1. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Przez każdą parę różnych punktów prowadzimy prostą. Czy proste te przecinają się w pięciu lub sześciu, lub siedmiu punktach?

◯ TAK ◯ NIE

Prawidłowa odpowiedź to TAK

2. Czy trójkąty nieprzystające mogą mieć równe pola?

◯ TAK ◯ NIE

Prawidłowa odpowiedź to TAK

3. Czy pole rombu jest równe iloczynowi długości jego przekątnych?

◯ TAK ◯ NIE

Jednak NIE

4. Czy wielokąty nie zachodzące na siebie mogą mieć wspólny bok?

◯ TAK ◯ NIE

Jak narysujesz, to zobaczysz, że TAK

5. Czy prawdą jest, że jeżeli w trójkącie ABC

$$|AB|^2 < |BC|^2 + |AC|^2,$$

to kąt ACB jest rozwarty?

◯ TAK ◯ NIE

NIE! Zobacz twierdzenie Carnota.

6. Czy w trójkącie równoramiennym o ramionach długości a i podstawie długości c

$$m_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}?$$

◯ TAK ◯ NIE

NIE

7. Czy średnica okręgu wpisanego w trójkąt może być równa promieniowi okręgu opisanego na tym trójkącie?

◯ TAK ◯ NIE

TAK. To był wniosek

8. Czy trójka O, M, H punktów charakterystycznych trójkąta jest współliniowa?

◯ TAK ◯ NIE

TAK, to jest twierdzenie Eulera

9. Czy w każdym trójkącie punkty charakterystyczne należą do jego wnętrza?

◯ TAK ◯ NIE

Prawidłowa odpowiedź to NIE

10. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa?

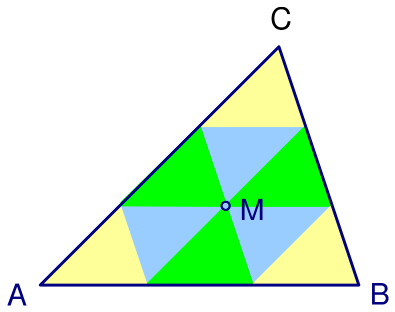
◯ TAK ◯ NIE

Prawidłowa odpowiedź to TAK

Uzupełnienia i wskazówki

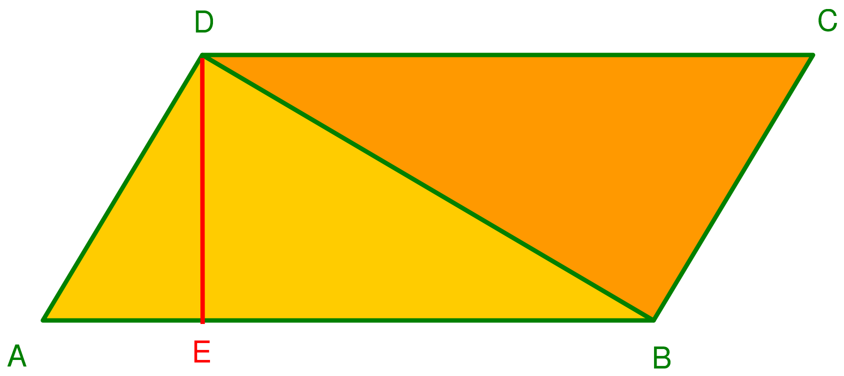
Tales z Miletu (640;546 p.n.e.) - filozof, matematyk i astronom grecki
Pitagoras z Samos (572;497 p.n.e.) - matematyk i filozof grecki
Heron z Aleksandrii (I w. p.n.e.) - matematyk i wynalazca grecki
Menelaos z Aleksandrii (I w.) - matematyk i astronom grecki
Giovanni Tomasso Ceva (1648:1734) - włoski inżynier i geometra
Matthew Stewart (1717;1785) - matematyk szkocki
Lazare Nicolas Carnot (1753;1823) - francuski matematyk i mąż stanu

I. Przez środek ciężkości M trójkąta ABC poprowadź proste równoległe do jego boków.



Co możesz powiedzieć o polach otrzymanych figur?

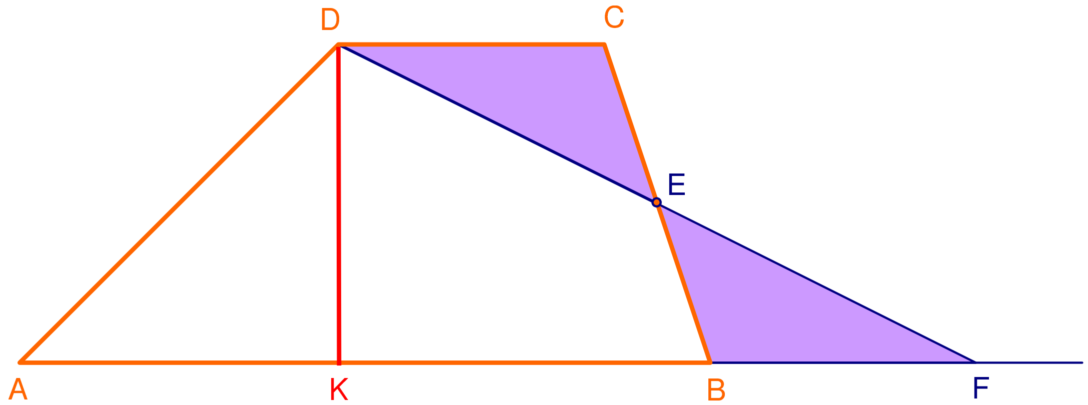
II. Pole równoległoboku



Trójkąty ABD i BCD nie zachodzą na siebie i są przystające. Zatem

$$P(ABCD) = P(\triangle ABD \cup \triangle BCD) = P(\triangle ABD) + P(\triangle BCD) = 2P(\triangle ABD) = 2\frac{1}{2}|AB||DE| = |AB||$$

III. Pole trapezu



Czworokąt $ABED$ i trójkąt ECD nie zachodzą na siebie. Trójkąty ECD i BFE są przystające. Zatem

$$P(ABCD) = P(ABED \cup \triangle ECD) =$$

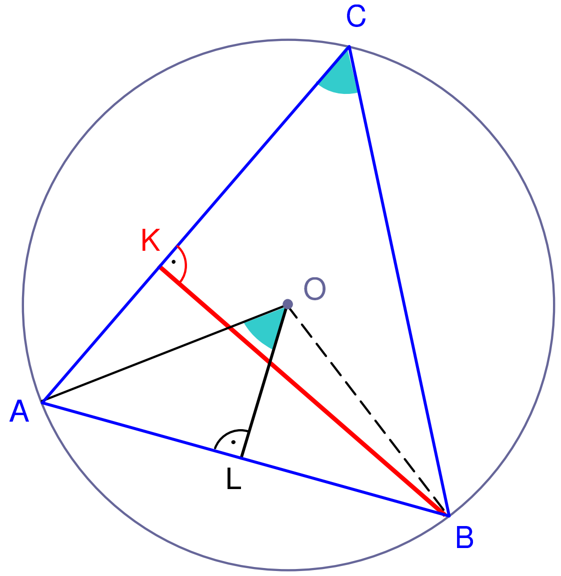
$$= P(ABED) + P(\triangle ECD) =$$

$$= P(ABED) + P(\triangle BFE) = P(ABED \cup \triangle BFE) =$$

$$= P(\triangle AFD) = \frac{1}{2}|AF||DK| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|AB| + |BF|\right)|DK| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |DC|\right)|DK|.$$

IV. Rozważmy trójkąt ostrokątny ABC i okrąg o środku O na nim opisany. Opuśćmy z wierzchołka B wysokość i jej spodek oznaczmy literą K. W trójkącie ABO opuśćmy wysokość z wierzchołka O i jej spodek oznaczmy literą L.



Trójkąty prostokątne BCK i ALO mają jednakowe kąty:

$$\measuredangle OAL = \measuredangle KBC,$$

$$\measuredangle ALO = \measuredangle CKB,$$

$$\measuredangle CLB = \measuredangle OLA.$$

Odpowiednie boki tych trójkątów są proporcjonalne. Stąd

$$\frac{|BC|}{|BK|} = \frac{|AO|}{|AL|}.$$

Przy oznaczeniach przyjętych dla trójkąta ABC mamy

$$\frac{a}{h_b} = \frac{2R}{c}.$$

Analogiczne rozumowania można przeprowadzić dla trójkąta prostokątnego i trójkąta rozwartokątnego.

V. Trójkąt i prosta na płaszczyźnie

Żadna prosta nie przecina trzech boków trójkąta. Jeżeli prosta przecina jeden bok trójkąta, to przecina i drugi. Jeżeli prosta przecina dwa boki trójkąta , to przecina przedłużenie trzeciego lub jest do trzeciego boku równoległa. Jeżeli prosta przecina przedłużenia dwóch boków trójkąta, to przecina przedłużenie trzeciego lub jest do trzeciego boku równoległa.

VI. Tezę twierdzenia Cevy można zapisać w postaci

$$(AB;F)(BC;D)(CA;E) = 1.$$

Literatura

[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] R. Doman, Wykłady z geometrii elementarnej, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Kordos, Wykłady z historii matematyki, SCRIPT, Warszawa 2005.

[5] M. Małek, Geometria. Zbiór zadań cz. 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1993.

[6] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[7] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.