E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Wielomiany

Materiały merytoryczne do kursu

Slajd

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki. (Immanuel Kant).

W ramach tego kursu poznamy wielomiany jednej zmiennej i ich własności: stopień wielomianu, pierwiastek wielomianu oraz między innymi takie pojęcia jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wielomianów, w tym schemat Hornera i twierdzenie Bezouta. Poznamy jak wykonać rozkład wielomianów na czynniki. Omówimy także rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych, w tym z wartością bezwzględną.

Zagadka

Zadanie Diofantosa.

Znaleźć trzy takie liczby, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem innej liczby. Zadanie to podał i rozwiązał Diofantos, ostatni wielki matematyk grecki, żyjący w III w n.e. w Aleksandrii.

Odpowiedź:
Liczby te to $80, 320, 41$.

Istotnie:
$80 + 320 + 41 = 441 = 21^2$.
Suma każdej pary tych liczb jest również kwadratem:
$320 + 80 = 400 = 20^2$,
$320 + 41 = 361 = 19^2$,
$80 + 41 = 121 = 11^2$.

1 Pojęcie wielomianu

Już znamy pojęcie jednomianu. Teraz kilka jednomianów możemy do siebie dodać np. do jednomianu x możemy dodać 2a otrzymując x + 2a. Innym przykładem sumy jednomianów może być: $3x^2 + 5x - 7$, a taką sumę nazywamy wielomianem jednej zmiennej.

Przykładami wielomianów są:
$W(x) = 8x^{12} - 3x^6 + 5x^4 + 9x - 4$,
$P(x) = x - 3$.

**************plik Sumy algebraiczne*******************

Hasło: Sumy algebraiczne

Spójrzmy teraz na poniższą, pełną definicję wielomianu jednej zmiennej.

DEFINICJA.
Wielomianem zmiennej x nazywamy wyrażenie postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ są liczbami rzeczywistymi i $n \in \mathbb{N}_0$.

W wielomianie
$W(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 2$
współczynnikami będą $a_3 = 6, a_2 = 4, a_1 = 3$ i $a_0 = 2$.
A ile wynosi współczynnik przy 23 potędze w wielomianie $2x^3 + x$? Odpowiedź wydaje się prosta, $a_{23} = 0$, ponieważ $2x^3 + x = 0x^{23} + 2x^3 + x$.

Wprowadzimy pojęcie stopnia wielomianu.
Stopień wielomianu to największe $n \in \mathbb{N}_0$ takie, że $a_n \neq 0$.
Przykłady:
$P(x) = 3x^6 + x^2 + 1$ jest wielomianem 6-tego stopnia,
ale wielomian $Q(x) = 0x^{100} + 23x + 1$ jest wielomianem pierwszego stopnia, ponieważ $a_1 = 23$ i $a_{100} = 0$.
Zauważmy, że funkcja stała $f(x) = a$ jest wielomianem zerowego stopnia, gdy $a \neq 0$.
Natomiast gdy $a = 0$ otrzymujemy wielomian zerowy (nie określamy stopnia wielomianu zerowego).
Funkcja liniowa jest wielomianem pierwszego stopnia, a funkcja kwadratowa jest wielomianem drugiego stopnia.

2 Uporządkowanie wielomianu

Porządkowanie wielomianów polega na ułożeniu kolejnych wyrazów wielomianu według rosnących wykładników potęg zmiennej (rosnąco) lub według malejących wykładników potęg zmiennej (malejąco).
Wielomianami uporządkowanymi malejąco będą:
$W_1(x) = 10x^3 + 5x^2 + 7x + 10$,
$W_2(x) = x^{50} + 2x^{21} + 4x$,
$W_3(x) = x + 1$.
Natomiast wielomianami uporządkowanymi rosnąco będą:
$P_1(x) = 10 + 7x + 5x^2 + 10x^3$,
$P_2(x) = 4x + 2x^{21} + x^{50}$,
$P_3(x) = 1 + x$.

3 Równość wielomianów

Dwa wielomiany P i Q zmiennej x będą sobie równe, jeśli dla wszystkich x zachodzi $P(x) = Q(x)$, co charakteryzuje poniższe twierdzenie:

TWIERDZENIE
Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia oraz współczynniki przy odpowiednich potęgach są sobie równe.

Na przykład wielomiany
$A(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x$ oraz $B(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x$
są równe,
ale $C(x) = 9x^5 + 4x^2 + x$ oraz $D(x) = 10x^5 + 4x^2 + x$
nie są równe.

4 Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

Wielomiany możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. W kolejnych rozdziałach dowiemy się, jak to robić. Aby dodać wielomian musimy dodać wyrazy podobne oraz uporządkować je.
Zatem dodamy:
$A(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20$ i $B(x) = 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11$.
$A(x) + B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 + 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11 =$
$17x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x + 31$.
Dodawanie wielomianów jest przemienne oraz łączne, co wynika z przemienności i łączności dodawania w zbiorze liczb rzeczywistych:
A(x) + B(x) = B(x) + A(x) - przemienność,
(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x)) - łączność.

Odejmowanie wielomianów
Od współczynników pierwszego wielomianu musimy odjąć współczynniki drugiego:
$A(x) - B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 - (13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11) =$
$-9x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 8x + 9$.

5 Mnożenie wielomianów

Mnożenie wielomianów polega na wymnożeniu przez siebie wyrazów obu wielomianów. Pomnożymy
$A(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x$ oraz $B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$.
Wtedy
$A(x)B(x) = (6x^3 + 3x^2 + 2x)(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10)$.

Mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego:
$A(x)B(x) = 6x^3(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10)+$
$3x^2(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10)+$
$2x(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) =$
$60x^7 + 42x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 60x^3 + 30x^6 + 21x^5 + 6x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 20x^5 +$
$14x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 20x$.

Redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy otrzymany wielomian:

$$A(x)B(x) = 60x^7 + 72x^6 + 53x^5 + 80x^4 + 93x^3 + 50x^2 + 20x.$$

6 Dzielenie wielomianów

Kolejnym działaniem na wielomianach jest dzielenie. Jedną z metod dzielenia jest metoda podobna do pisemnego dzielenia liczb. W przykładzie skupimy się na dzieleniu wielomianu przez dwumian. Wykonamy dzielenie wielomianu $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ przez $(x - 3)$.

*************plikdzielenie*************

Ogólny schemat, jak wykonać dzielenie:

1. Nad kreską: dzielimy pierwszy jednomian z dzielnej przez pierwszy z dzielnika i wpisujemy w wynik, następnie wynik mnożymy po kolei przez jednomiany z dzielnika i zapisujemy ze zmienionym znakiem poniżej (nad kreską).

2. Dodajemy do siebie oba wielomiany nad kreską, zapisując wynik pod kreską; pod kreską uzyskujemy nową dzielną.

3. Nad kolejnymi kreskami: bierzemy pierwszy jednomian z nowej dzielnej (spod kreski) i znowu dzielimy przez pierwszy z dzielnika, dopisując do wyniku, po czym mnożymy wynik przez... tak jak w punkcie 1. i 2. dopóki w dzielnej jest niewiadoma x lub niższa potęga niż w dzielniku.

- W razie gdyby na końcu została jakaś reszta, zapisujemy w wyniku: (iloraz)(dzielnik)+(reszta)
- Ważne: uważamy na znak jednomianu!

• Zamiast dzielenia możemy zastosować o wiele prostszy schemat Hornera.

Schemat Hornera powiązany z nazwiskiem Hornera - brytyjskiego matematyka żyjącego na przełowmie XVIII i XIX wieku.
Schemat Hornera to sposób obliczania wartości wielomianu dla danej wartości argumentu wykorzystujący minimalną liczbę mnożeń. Wielomian może być przedstawiony w postaci:
$W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + ... + x(a_{n-1} + xa_n)...)))$.

Schemat Hornera pozwala na wyznaczenie ilorazu $Q(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ przez dwumian $x - c$.

Przykład.
Podzielmy wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ przez dwumian $x - 5$.

Wykonując dzielenie za pomocą schematu Hornera tworzymy tabelkę, gdzie w górnym wierszu schematu wypisujemy współczynniki dzielnej, tzn. wielomianu $x^3 + x^2 - 10x + 8$.

	1	1	-10	8
5	1	6	20	108

W dolnym wierszu w pierwszej kolumnie zapisujemy liczbę odjętą od x w dzielniku. Pozostałe wartości to współczynniki ilorazu $x^2 + 6x + 20$ oraz reszta (+108).

Wiersz dolny otrzymujemy z górnego w następujący sposób: - pierwszy współczynnik wiersza dolnego równy jest pierwszemu współczynnikowi wiersza górnego tzn. liczbie 1,

- drugi współczynnik wiersza dolnego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. 1 przez 5 i dodając do drugiego współczynnika wiersza górnego, tzn. do +1: $1 \cdot (+5) + (+1) = +6$,

- trzeci współczynnik wiersza dolnego otrzymujemy, mnożąc poprzedni współczynnik tego wiersza, tzn. +6 przez +5 i dodając do trzeciego współczynnika wiersza górnego, tzn. -10: $(+6) \cdot (+5) + (-10) = +20$,

- podobnie mamy $(+20) \cdot (+5) + (+8) = +108$,

Ostatecznie możemy zapisać: $(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x - 5) = x^2 + 6x + 20$ reszta $+108$.

Z dzieleniem wielomianu przez dwumian związane są pojęcia reszty i wartości wielomianu, gdzie przez $W(a)$ oznaczymy wartość wielomianu dla argumentu a.

Twierdzenie o reszcie.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

Z powyższego twierdzenia mamy także związek dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x-a$ i pierwiastka wielomianu a, czyli rozważamy przypadek, gdy $W(a) = 0$:

Twierdzenie Bezouta.

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

**************plik Reszta z dzielenia********************

Hasło: Reszta z dzielenia

Więcej o pierwiastkach:

Twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.
Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek całkowity p, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.
Jeżeli wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{C},\ q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu.

Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki.

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynikach rzeczywistych.

Jeżeli liczby $x_1, x_2, ..., x_n$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)$ stopnia n, to prawdziwa jest równość $W(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_n)$.

Przykłady:
Rozkład wielomianu stopnia trzeciego na czynniki.

- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias:

$T(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x+1)(x-4)$.

- Grupowanie wyrazów:

$W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x^3 - 5x^2) + (2x - 10) = x^2(x-5) + 2(x-5) = (x-5)(x^2+2)$.

- Zastosowanie twierdzenia Bézouta

$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.
Pierwiastkiem tego wielomianu jest x = -4, ponieważ: $W(-4) = 0$.

Wielomian $W(x)$, na podstawie twierdzenia Bezouta, jest podzielny przez dwumian $Q(x) = x + 4$.
Wykonujemy dzielenie $W(x) : Q(x)$.

Otrzymujemy
$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x+4)(x^2 - 5x + 6)$ Niech: $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
Dokonujemy rozkładu $P(x)$.
$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Ostatecznie
$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x+4)(x-2)(x-3)$.

Zdadanie.

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x+2)$ daje resztę 8, a przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę -4.
Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian
$P(x) = x^2 + 3x + 2$.
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian np. $P(x)$ (stopnia co najmniej 1) jest wielomianem o stopniu co najwyżej o 1 mniejszym niż dzielnik.
Zatem reszta z dzielenia przez trójmian kwadratowy może być liniowa, a jak dzielimy przez wielomian stopnia 3, to reszta może być kwadratowa itd.
Według tej zasady przy dzieleniu przez $P(x) = x^2 + 3x + 2$ możemy otrzymać resztę liniową, czyli $R(x) = ax + b$. Zatem $W(-2) = R(-2) = 8$, $W(-1) = R(-1) = -4$,

$-2a + b = 8,\ -a + b = -4,$

czyli

$a = -12,\ b = -16$

Odpowiedź: Szukaną resztą jest $R(x) = -12x - 16$.

Zadanie.

Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-1)$, $(x+2)$, $(x-3)$ daje reszty odpowiednio równe 5, 2, 27. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian $P(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$.
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$ jest stopnia drugiego, czyli $W(x)=P(x)Q(x)+R(x)$, gdzie

$$R(x)=ax^2+bx+c$$

dla pewnych rzeczywistych a,b,c. Z podanych informacji wiemy, że $W(1)=5,\ W(-2)=2,\ W(3)=27$. Podstawiając te wartości w powyższej równości mamy

$$\begin{cases} 5=a+b+c \\ 2=4x-2b+c \\ 27=9a+3b+c \end{cases}.$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze, a od ostatniego drugie, dostajemy

$$\begin{cases} -3=3a-3b \\ 25=5a+5b \end{cases}.$$

Natomiast dzieląc pierwsze równanie przez 3, a drugie przez 5 mamy

$$\begin{cases} -1=a-b \\ 5=a+b \end{cases}.$$

Dodając te równania stronami mamy $a=2$, $b=3$ i $c=0$, stąd:
odpowiedź: $R(x)=2x^2+3x$.

7 Równania wielomianowe

Na początek definicja.

DEFINICJA.

Równanie wielomianowe to równanie otrzymane poprzez przyrównanie danego wielomianu do zera.

Zobaczmy na przykłady:
- $4x + 1 = 0$,
- $3x^2 + 2x - 5 = 0$,
- $x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0$.

Rozwiązywanie równania wielomianowego polega na znalezieniu wszystkich x, dla których wielomian jest równy zero. W zadaniach trzeba będzie z reguły skorzystać:
- ze wzorów skróconego mnożenia,
- z dzielenia wielomianów i twierdzenia Bézout'a,
- z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych,
- metody podstawiania

(tzn. sprawdzamy, czy dla danego x zachodzi $W(x) = 0$),
...

Przykład.
Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia rozwiążemy równanie:
$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$.

Wyciągamy x przed nawias i otrzymujemy
$x(x^2 - 6x + 9) = 0$.

Korzystając ze wzoru $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ mamy: $x^2-6x+9 = (x-3)^2$, czyli badane równanie ma postać:

$x(x - 3)^2 = 0$.

Powyższe równanie jest prawdziwe gdy:
$x = 0$ lub $x - 3 = 0$, czyli gdy:
$x = 0$ lub $x = 3$.
Zatem rozwiązaniem równania $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ jest zbiór $\{0, 3\}$.

8 Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową nazywamy nierówność postaci:
$W(x) < G(x), W(x) > G(x), W(x) \leqslant G(x)$ lub $W(x) \geqslant G(x)$,
gdzie $W(x)$ i $G(x)$ są wielomianami tej samej zmiennej.
Przykłady
• $x^2 + 2 > 0$, której rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.
• $x^2 < 4$, której rozwiązaniem jest zbiór $(-2, 2)$.
• $x^2 < 0$, której rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Sposób rozwiązywania:
Aby rozwiązać nierówność wielomianową, należy wykonać następujące kroki:
• Przenosimy wszystkie liczby i niewiadome na lewą stronę, tak aby, prawa strona była równa zeru.
• Za pomocą znanych już nam sposobów (grupowanie, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, obliczenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej) rozkładamy wielomian po lewej stronie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.
• Następnie, dla każdego z wielomianów po rozkładzie znajdujemy przedział, w którym jest dodatni, miejsce zerowe i przedział, w którym jest ujemny.
• Budujemy tabelkę znaków wielomianu w poszczególnych przedziałach.
• Zapisujemy przedziały, w których wielomian jest dodatni, ujemny bądź równy zeru.
• Formułujemy odpowiedź.

Przykład.

Rozwiążemy nierówność: $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 > -\sqrt{20}x - 1$.

• Możemy ją przekształcić do postaci: $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 + \sqrt{20}x + 1 > 0$ i metodą grupowania rozłożyć lewą stronę w następujący sposób:

$$x^4 + \sqrt{20}x^3 + x^2 + x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{20}x + 1).$$

Pierwsze wyrażenie $(x^2 + 1)$ nie ma miejsc zerowych, a więc nie da się go rozłożyć na wyrażenia stopnia pierwszego (gdyż $\triangle < 0$).

• $\triangle$ drugiego wyrażenia wynosi 16, a jego miejscami zerowymi są liczby $\frac{\sqrt{20}-4}{2}$ i $\frac{\sqrt{20}+4}{2}$. Zatem możemy je zapisać w postaci:

• $x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2})$

A cała nierówność ma postać:

$(x^2 + 1)(x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}) > 0$.

Możemy więc zbudować tabelę znaków wielomianu i jego czynników:

	x^2+1	$x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	$x - \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	lewa strona nierówności
$x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2})$	+	-	-	+
$x = \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	+	0	-	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}-4}{2}, \frac{\sqrt{20}+4}{2})$	+	+	-	-
$x = \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	+	+	0	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$	+	+	+	+

Widzimy, że nierówność zachodzi (lewa strona jest dodatnia) gdy $x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2}) \cup (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$.

*************plik Równanie trzeciego stopnia**************

Hasło: Równanie trzeciego stopnia

9 Równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną

Rozważymy to zagadnienie na przykładach. Najpierw przypomnimy definicję wartści bezwzględnej, czyli

$$|x| = \begin{cases} x, & gdy\ x \geqslant 0 \\ -x, & gdy\ x < 0 \end{cases}.$$

- Rozwiążemy równanie: $x^3 - 81|x| = 0$.

Wyznaczamy przedziały, kiedy to co jest obłożone wartością bezwzględną jest mniejsze od zera (tutaj dla $x < 0$) i większe lub równe zero (tutaj dla $x \geqslant 0$).

Rozwiązujemy I przypadek dla $x < 0$:

$x^3 - 81(-x) = 0$,
$x^3 + 81x = 0$,
$x(x^2 + 81) = 0$.

Otrzymujemy, że $x = 0$.
Widzimy, że otrzymane rozwiązanie nie spełnia założenia, czyli $x < 0$. Zatem rozwiązaniem przypadku I jest zbiór pusty.

Rozwiązujemy II przypadek dla $x \geqslant 0$:

$x^3 - 81x = 0$,
$x(x^2 - 81) = 0$,
$x(x - 9)(x + 9) = 0$.

Otrzymujemy, że $x = -9$ lub $x = 0$ lub $x = 9$.
Sprawdzamy, które z otrzymanych wartości spełniają założenie, czyli $x \geqslant 0$. Rozwiązanie dla przypadku II jest $\{0, 9\}$.

3. Otrzymane wyniki z I i II przypadku dają ostatecznie rozwiązanie badanego równania jako zbiór: $\{0, 9\}$.

• Rozwiążemy nierówność: $|x|^3 - 64|x| > 0$.

Wyznaczamy przedziały, kiedy to co jest obłożone wartością bezwzględną jest mniejsze od zera (tutaj dla $x < 0$) i większe lub równe zero (tutaj dla $x \geqslant 0$).

Rozwiązujemy I przypadek dla $x < 0$.

$(-x)^3 - 64(-x) > 0,$
$-(x^3 - 64x) > 0,$
$-(x(x^2 - 64) > 0,$
$-x(x^2 - 64) > 0,$
$-x(x - 8)(x + 8) > 0.$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $(-\infty, -8) \cup (0, 8)$. Ale założenie $x < 0$ spełnia przedział: $(-\infty, -8)$.
Rozwiązujemy II przypadek dla $x \geqslant 0$.

$x^3 - 64x > 0,$
$x(x^2 - 64) > 0,$
$x(x - 8)(x + 8) > 0.$

Zbiorem rozwiązań jest $(-8, 0) \cup (8, +\infty)$. Ale założenie $x \geqslant 0$ spełnia przedział: $(8, +\infty)$.

3. Zbiory rozwiązań z I i II dają ostateczny wynik: $(-\infty, -8) \cup (8, +\infty)$.

Zadania

zad. 1. Rozłóż na czynniki:

$$Q(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 4.$$

Rozwiązanie:

$(x-4)(2x^2+1)$.

zad. 2. Uporządkuj malejąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$,
- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$.

Rozwiązanie:

- $W(x) = 13x^{13} + 7x^9 + 10x^4 + x + 10$,
- $W(x) = 11x^{20} + 21x^{11} + 4x^6 + 4x^5$.

zad. 3. Uporządkuj rosnąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$,
- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$.

Rozwiązanie:

- $W(x) = 10 + 10x^4 + 7x^9 + x + 13x^{13}$,
- $W(x) = 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11} + 11x^{20}$.

zad. 4. Czy poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = 41x^5 + 7x^2 + x$ oraz $B(x) = 7x^2 + 41x^5 + x$,
- $C(x) = x^7 + 4x^3 + x^9 + x$ oraz $D(x) = 2x^7 + 4x^3 + x^9 + x$,
- $C(x) = 11x^2 + x + 10$ oraz $D(x) = 11x^3 + x^2 + 10$.

Rozwiązanie:

- tak,
- nie,
- nie.

zad. 5. Dla jakich wartości parametru a i b poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = ax^6 + 10x^4 + x + 1$ oraz $B(x) = 7x^6 + bx^4 + x + 1$,
- $C(x) = (a+1)x^7 + (b-3)x^5 + 5$ oraz $D(x) = 11x^7 + (b-3)x^5 + 5$.

Rozwiązanie:

- $a = 7, \quad b = 10$
- $a = 10, \quad b \in \mathbb{R}.$

zad. 6. Dane są wielomiany:

$W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$, $Q(x) = 8x - 5$ i $R(x) = x^2 + x + 2$.

Oblicz

$$3W(x) - 2Q(x)R(x).$$

Rozwiązanie:

$-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29.$

zad. 7. Należy rozwiązać równanie

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0.$$

Rozwiązanie:

$x = 0, \;\; x = 1, \;\; x = 3.$

zad. 8. Rozwiąż nierówność:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0.$$

Rozwiązanie:

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 1).$$

zad. 9. Rozwiąż równanie:

$$|x-2|+|x+3|=5.$$

Rozwiązanie:

$x \in \langle -3, 2 \rangle$.

Test

1) Dodając wielomiany:

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

oraz

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

mamy:

a) $A(x) + B(x) = 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10$,

b) $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10$,

c) $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x$.

Rozwiązanie:

b).

2) Odejmując wielomian

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

od

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

otrzymujemy:

a) $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10$,

b) $A(x) - B(x) = 10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10$,

c) $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x + 10$.

Rozwiązanie:

a).

3) $W(x) = 4x^6+9x^4+8x^3+5x^2+x+1$ i $P(x) = 3x^6+x^5+2x^4+2x^2+3x+10$. Podaj wzór wielomianu Q(x) jeśli:

$$W(x) + Q(x) = P(x).$$

a) $Q(x) = x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9$,

b) $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 10$,

c) $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9$.

Rozwiązanie:

c).

4) Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez dwumiany $(x-2),(x+4)$, daje reszty odpowiednio równe -3 oraz -51. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$, wiedząc, że liczba -1 jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$.

Poszukiwaną resztą jest:

a) $R(x) = -3x^2 + 2x + 5$,

b) $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$,

c) $R(x) = -3x^2 - 2x + 5$.

Rozwiązanie:

a).

5) Rozwiązaniem równania

$$(x^2 - 9)^3 = (2x^2 - 10)^3$$

jest:

a) $x = 1, x = -1$, b) $x = 1$, c) $x = -1$.

Rozwiązanie:

a).

6) Rozwiązaniem równania

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$$

jest:

a) $x = 0, x = 2,\ x = 3$,

b) $x = 0, x = -2,\ x = 3$,

c) $x = 0, x = 2,\ x = -3$.

Rozwiązanie:

a).

7) Rozwiązaniem nierówności:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leqslant 0$$

jest:

a) $x \in (-\infty, 3\rangle$, b) $x \in (-\infty, -3)$, c) $x \in (-\infty, -3\rangle$.

Rozwiązanie:

a).

8) Rozwiązaniem równania:

$$|x-3|+2x=12$$

jest:

a) -5, b) 5.

Rozwiązanie:

b).

9) Rozwiązaniem nierówności

$$2x + |x + 3| < 6$$

jest:

a) $x \in (-\infty, 1\rangle$, b) $x \in (-\infty, 1)$, c) $x \in (-\infty, -1\rangle$.

Rozwiązanie:

b).