# *E-learning – matematyka – poziom rozszerzony*

# *Temat:* Trygonometria

*Materiały merytoryczne do kursu*

# 1 Wstęp

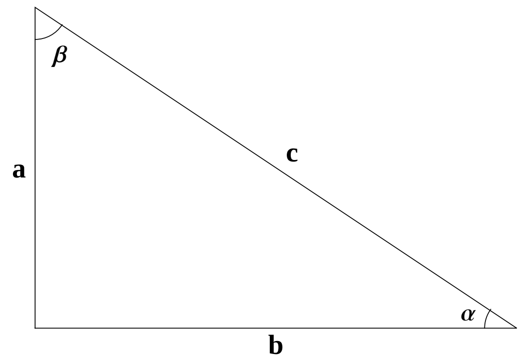
Druga część opracowania tematu “Funkcje trygonometryczne” skierowana jest do uczniów, którzy wybrali rozszerzoną maturę z matematyki, lub po prostu są zainteresowani tym tematem i chcą samodzielnie go zgłębiać. Dla jednych i dla drugich z przyjemnością służymy pomocą.

Na początku zamieścimy podstawowe wzory i definicję, z których będziemy korzystali w czasie rozwiązywania przykładów, zamieszczonych w opracowaniu. Następnie przejdziemy do szczegółowego omówienia technik rozwiązywania zadań z dziedziny trygonometrii. Proszę się przygotować na bardziej skomplikowane przykłady, niż te, z którymi mieliśmy do czynienia w pierwszej części opracowania. Mamy nadzieję, że wspólnie podołamy temu zadaniu, a w przyszłości słowo “trygonometria” nie będzie wywoływać negatywnych emocji.

# 2 Podstawowe wzory, definicje i twierdzenia

## 2.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

$\alpha$, $\beta$ – kąty ostre w trójkącie prostokątnym;
$c$ – przeciwprostokątna;
$a$ – przyprostokątna przeciwległa kątowi $\alpha$, (przyległa $\beta$);
$b$ – przyprostokątna przeciwległa kątowi $\beta$, (przyległa $\alpha$).

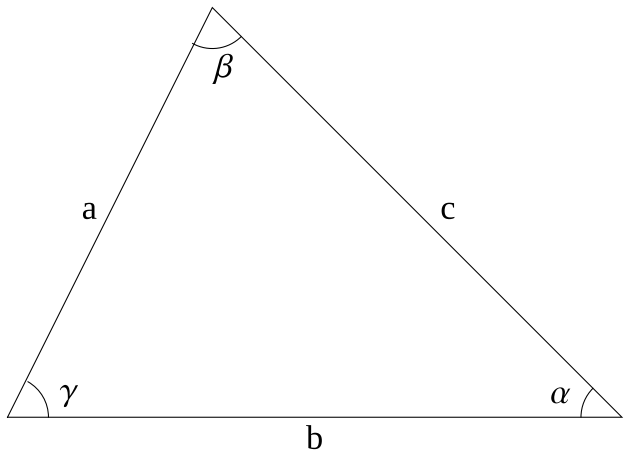



Rysunek 1: Wprowadzenie funkcji $\cos x$, $\sin x$ w trójkącie prostokątnym

$$\sin\ \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\ \alpha = \frac{b}{c},$$
$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}, \quad \mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha}.$$

### 2.2 Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie kwadrat długości trzeciego boku równy jest sumie kwadratów dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi:




Rysunek 2: Rysunek do twierdzenia cosinusów

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cdot \cos\gamma,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cdot \cos\beta,$$

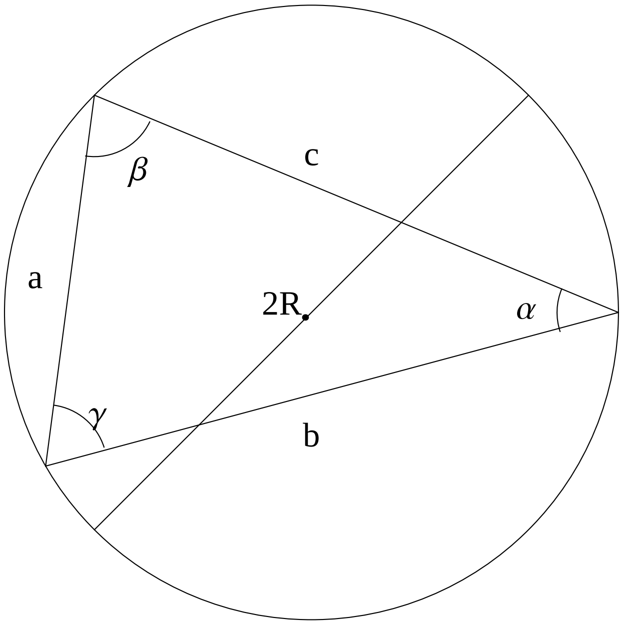
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cdot \cos\alpha.$$

### 2.3 Twierdzenie sinusów

W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

Zależność tę można zapisać następująco:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$




Rysunek 3: Rysunek do twierdzenia sinusów

### 2.4 Wzory na pole trójkąta

Przyjmując dla trójkąta ABC następujące oznaczenia:
$a,\ b,\ c$ — długości boków;
$h_a,\ h_b,\ h_c$ — wysokości opuszczone na boki odpowiednio $a,\ b,\ c$;
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — kąty leżące naprzeciw boków odpowiednio $a,\ b,\ c$;
$S$ — pole powierzchni;
$R$ — promień okręgu opisanego;
$r$ — promień okręgu wpisanego;
$p$ — połowa obwodu; $p = \frac{a+b+c}{2}$,
możemy korzystac z następujących wzorów na pole powierzchni trójkąta:

1. $S = \frac{1}{2}\, a\, h$;
2. $S = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$;
3. $S = p\, r$;
4. $S = \frac{a\,b\,c}{4\,R}$;
5. $S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$.

### 2.5 Zadania geometryczne

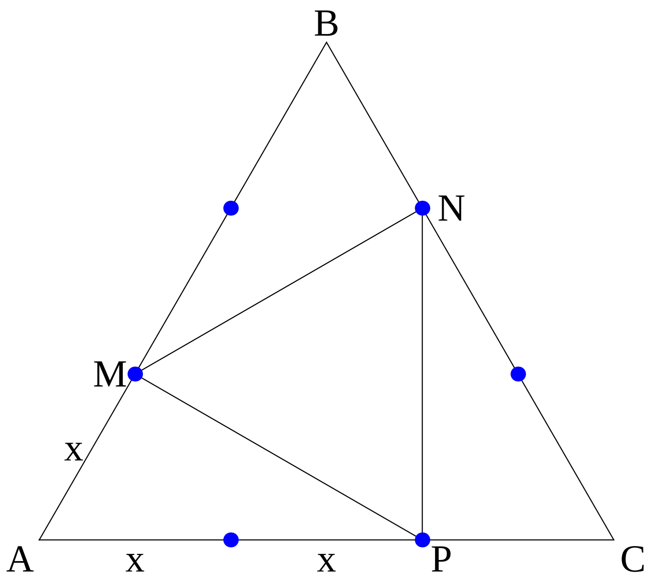
Teraz przejdźmy do zadań geometrycznych, przy rozwiązywaniu których będziemy korzystali z przedstawionych powyżej twierdzeń sinusów i kosinusów. W zadaniach tego typu bardzo ważnym jest przygotowanie odpowiedniego rysunku, znajomość podstawowych własności funkcji trygonometrycznych, związków pomiędzy nimi, etc.

## Przykład 2.1.

Strony trójkąta równobocznego $ABC$ podzielono na 3 równe części. Punkty podziału połączono w sposób, przedstawiony na rysunku 4. Wiadomo, że promień okręgu, wpisanego w trójkąt $MNP$, $r = 6$. Wyznaczyć strony $AB$ i $MN$ trójkątów.

## Rozwiązanie

Udowodnijmy, że trójkąt $MNP$ jest trójkątem równobocznym. Z rysunku możemy odczytać, że trójkąty $AMP$, $PCN$, $NBM$ są równe: mają one po 2 jednakowe strony i kąt między nimi, stąd wynika, że wszystkie strony trójkąta $MNP$ są równe, czyli trójkąt jest równoboczny.




Rysunek 4: Rysunek pomocniczy do przykładu 2.1.

Znajdźmy związek pomiędzy promieniem okręgu, wpisanego w trójkąt $MNP$, a jego stroną. Rozpatrzmy środek okręgu, połączmy go z wierzchołkiem $M$ i opuśćmy wysokość na stronę $MP$. Z otrzymanego trójkąta wyznaczmy:

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{r}{\frac{MP}{2}} \,,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2r}{MP},$$

$$MP = \frac{2r \cdot 3}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}.$$

Niech $AM = x$, z treści zadania wynika, że $AP = 2x$. Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta $AMP$ wyznaczamy $x$:

$$AM^2 + AP^2 - 2\,AM \cdot AP \cdot \cos 60^0 = MP^2,$$

$$x^2 + 4\,x^2 - 2\,x \cdot 2\,x \cdot \cos 60^0 = MP^2,$$

$$3\,x^2 = MP^2,$$

$$x = \frac{MP}{\sqrt{3}} = 2\,r.$$

Wyznaczmy strony trójkątów:

$$AB = 3\,x = 6\,r = 36,$$

$$MN = P = 2r\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

**Odpowiedź:** $12\sqrt{3}$, 36.

## Przykład 2.2.

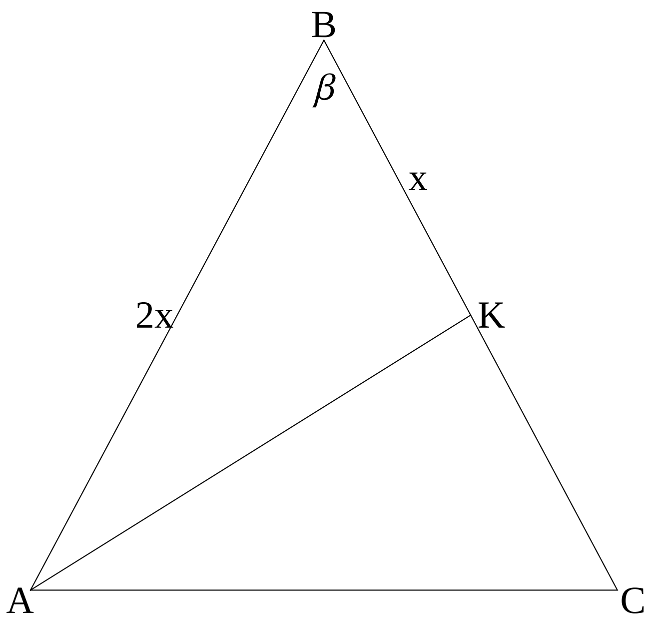
W równoramiennym trójkącie $ABC$ dana jest długość podstawy $AC = 4\sqrt{2}$. Z wierzchołka $A$ na stronę $BC$ poprowadzono środkową $AK = 5$. Wyznaczyć długość boku danego trójkata.

## Rozwiązanie.

Przyjmijmy, że $BK = x$, wtedy $AB = 2\,x$. Dla trójkątów $ABK$ i $ABC$ zapiszmy twierdzenie cosinusów:

$$25 = 4\,x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos\beta,$$

$$32 = 4\,x^2 + 4\,x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 2x \cdot \cos\beta,$$




Rysunek 5: Rysunek do zadania 2.2.

Po uproszczeniu wyrażeń wyznaczamy $x$:

$$5\,x^2 - 4\,x^2\cos\beta = 25,$$

$$8\,x^2 - 8\,x^2\cos\beta = 32.$$

Po dalszym uproszczeniu:

$$-2\,x^2 = -18,\ x^2 = 9.$$

Stąd $x = 3$, $AB = 2 \cdot 3 = 6$.

**Odpowiedź:** $AB = 6$.

## Przykład 2.3.

Wartości sinusów dwóch ostrych kątów w trójkącie wynoszą $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ i $\sin\beta = \frac{5}{13}$, a promień okręgu, opisanego na nim $R = 32,5$. Obliczyć pole powierzchni trójkąta $S$.

**Rozwiązanie.**

Korzystając z twierdzenia sinusów:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

wyznaczamy długości boków trójkąta:

$$a = 39,\ b = 25.$$

Pole powierzchni trójkąta obliczymy ze wzoru:

$$S = \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin\gamma.$$

Wyznaczmy $\sin\gamma$ :

$$\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{56}{65}.$$

Stąd pole powierzchni wynosi:

$$S = \frac{1}{2}\cdot 39\cdot 25\cdot\frac{56}{65} = 420.$$

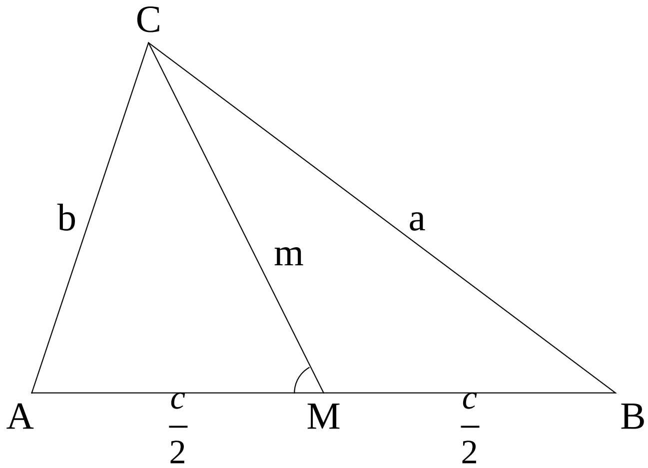
**Odpowiedź.** $S = 420.$

## Przykład 2.4.

Wyznaczyć długość mediany (środkowej) trójkąta $ABC$, poprowadzonej z wierzchołka $C$, jeżeli długości boków, leżących na przeciwko wierzchołków $A$, $B$, i $C$, wynoszą odpowiednio $a$, $b$, $c$.

## Rozwiązanie.

Niech $CM$ - mediana trójkąta $ABC$ (rys.6).




Rysunek 6: Rysunek do przykładu 2.4

Zaznaczmy $m = |CM|$, $\varphi = \angle CMA$, stąd $\angle CMB = 180^0 - \varphi$.

Z trójkątów $ACM$ i $CMB$
zgodnie z twierdzeniem cosinusów, mamy:

$$b^2 = m^2 + \frac{c^2}{4} - 2\,m\,\frac{c}{2}\,\cos\varphi,$$

$$a^2 = m^2 + \frac{c^2}{4} - 2\,m\,\frac{c}{2}\,\cos\left(180^0 - \varphi\right).$$

Dodając stronami i uwzględniając, że

$$\cos\left(180^0 - \varphi\right) = -\cos\varphi,$$

otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = 2\,m^2 + \frac{c^2}{2},$$

stąd

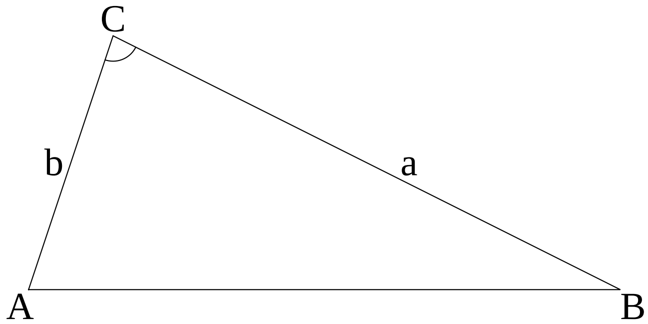
$$m^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Ostatecznie

**Odpowiedź.** $m = |CM| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4}}.$

## Przykład 2.5.

Pole powierzchni trójkąta $ABC$ wynosi $16\,cm^2$. Wyznaczyć długość boku $AB$ trójkąta, jeżeli $|AC| = 5\,cm$, $|BC| = 8\,cm$, a $\angle C$ jest kątem rozwartym (rys.7).




Rysunek 7: Rysunek do przykładu 2.5

**Rozwiązanie.**

Skorzystajmy ze wzoru na pole trójkąta:

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b\,\sin(\angle\,C).$$

Dla danego trójkąta $ABC$ z tego wzoru wyznaczamy:

$$\sin(\angle\,C) = \frac{2 \cdot S}{a \cdot b} = \frac{4}{5}.$$

Ponieważ kąt $C$ jest kątem rozwartym, jego cosinus jest ujemny:

$$\cos(\angle\,C) = -\sqrt{1 - \sin^2(\angle\,C)} = -\frac{3}{5}.$$

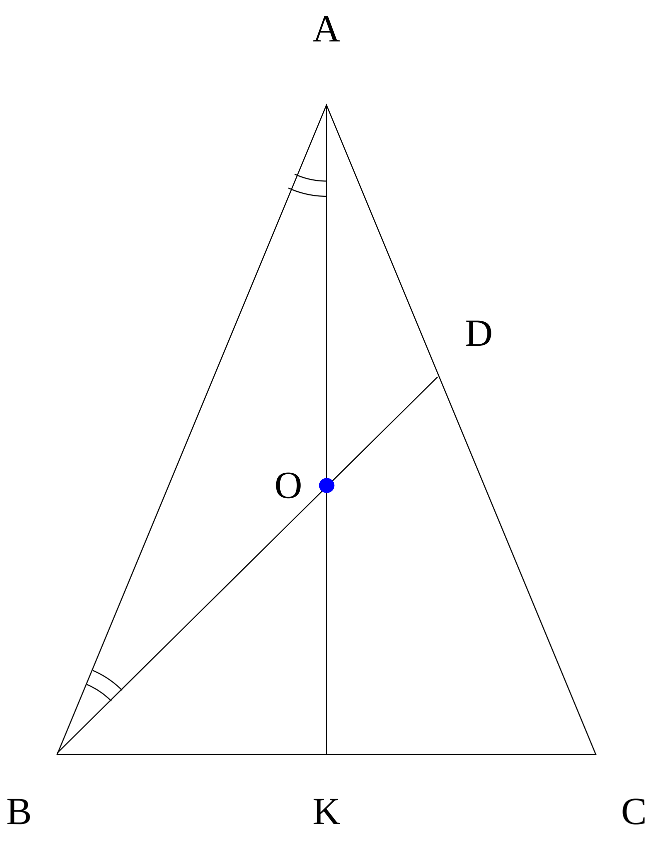
Teraz z twierdzenia cosinusów wyznaczamy:

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\left(\angle\,C\right) = 137.$$

**Odpowiedź.** $|AB| = \sqrt{137}.$

## Przykład 2.6.

W równoramiennym trójkącie $ABC$ długości boków $AB$ i $AC$ są równe $b$, kąt przy wierzchołku $A$ równy jest $2\,\alpha$. Prosta, przechodząca przez wierzchołek $B$ trójkąta i punkt $O$ - środek okręgu, opisanego na trójkącie $ABC$, przecina bok $AC$ trójkata w punkcie $D$ (rys.8). Wyznaczyć długość odcinka $BD$.




Rysunek 8: Rysunek do przykładu 2.6

**Rozwiązanie.**

Wiadomo, że środek okręgu, opisanego na trójkącie $ABC$, leży na dwusiecznej $AK$ (ponieważ $AK \perp BC$ i $|BK| = |KC|$), wtedy $\angle ABD = \angle OAB = \alpha$. Stąd w trójkącie $BAD$ znane są wartości dwóch kątów; ponieważ suma katów w trójkącie wynosi $180^0$, wyznaczymy wartość i trzeciego kata: $\angle BDA = 180^0 - 3\,\alpha$. Zastosujmy do trójkąta $BAD$ twierdzenie sinusów:

$$\frac{|BD|}{\sin\,2\alpha} = \frac{|AB|}{\sin\,(180^0 - 3\,\alpha)}.$$

Uwzględniając, że

$$\sin\,(180^0 - 3\,\alpha) = \sin\,3\,\alpha,$$

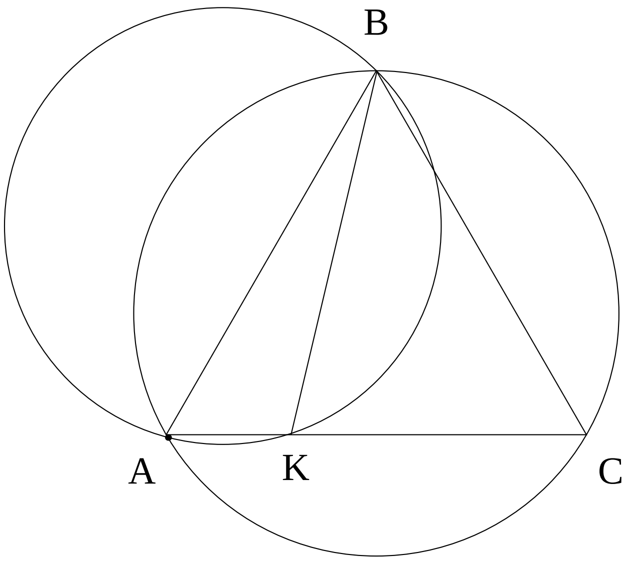
ostatecznie wyznaczamy

$$|BD| = \frac{\sin\,2\,\alpha}{\sin\,3\,\alpha} \cdot b.$$

**Odpowiedź.** $|BD| = \frac{\sin\,2\,\alpha}{\sin\,3\,\alpha} \cdot b.$

## Przykład 2.7.

Punkt $K$ znajduje się na boku $AC$ równobocznego trójkąta $ABC$ (rys.9). Wyznaczyć stosunek promieni okręgów $R_1 : R_2$, opisanych na trójkątach $ABK$ i $ABC$ odpowiednio, jeżeli stosunek $|AK| : |AC| = n$.




Rysunek 9: Rysunek do przykładu 2.7

## Rozwiązanie.

Niech długość boku równobocznego trójkąta $ABC$ wynosi $a$, wtedy $|AK| = n \cdot a$. Długość boku $|BK|$ trójkąta $ABK$ wyznaczymy stosując twierdzenie cosinusów:

$$|BK| = \sqrt{|AB|^2 + |AK|^2 - 2\,|AB|\,|AK| \cos 60^0} =$$
$$= \sqrt{1 + n^2 - n} \cdot a.$$

Wyznaczmy pola powierzchni trójkątów $ABK$ i $ABC$, korzystając najpierw ze wzoru, w którym występuje promień okręgu opisanego, a następnie ze wzoru z wykorzystaniem połowy iloczynu wysokości i długości boku trójkąta. Otrzymujemy następujące wzory i związki:

$$S_{ABK} = \frac{n\sqrt{1 + n^2 - n} \cdot a^3}{4\,R_1};$$

$$S_{ABC} = \frac{a^3}{4\,R_2}.$$

Ponieważ trójkąty $ABK$ i $ABC$ wysokość mają wspólną, stosunek ich pól powierzchni jest taki sam, jak stosunek podstaw:

$$S_{ABK} = n\, S_{ABC}.$$

Po podstawieniu do ostatniego wzoru wcześniej otrzymanych, wyznaczamy:

$$\frac{n\sqrt{1+n^2-n}\cdot a^3}{4\,R_1} = n\,\frac{a^3}{4\,R_2},$$

następnie:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}.$$

**Odpowiedź.** $\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{1+n^2-n}$.

# 3 Tożsamości trygonometryczne

## 3.1 Jedynka trygonometryczna

Jest to jeden z najbardziej znanych wzorów trygonometrycznych, jest prawdziwy dla dowolnej liczby rzeczywistej. Ten wzór często jest wykorzystywany przy rozwiązywaniu równań, nierówności oraz w celu uproszczenia matematycznych wyrażeń, zawierających funkcje trygonometryczne:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

## 3.2 Okresowość funkcji

Funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi:

$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$,

$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$,

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$,

$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi)$,

gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

### 3.3 Funkcje wielokrotności kątów

Najczęściej w zadaniach wykorzystywane są wzory kąta podwójnego, te wzory należy znać na pamięć, resztę wzorów wystarczy kojarzyć, a w razie potrzeby sięgnąć do tablic matematycznych.

$\sin(2\,x) = 2\sin x\ \cos x$
$\cos(2\,x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$\mathrm{tg}(2\,x) = 2\ \mathrm{tg}\,x\,/(1 - \mathrm{tg}^2\,x)$
$\mathrm{ctg}(2\,x) = (\mathrm{ctg}\,x - \mathrm{tg}\,x)/2 = (\mathrm{ctg}^2\,x - 1)/(2\,\mathrm{ctg}\,x)$

$\sin(3\,x) = 3\ \sin x - 4\sin^3 x$
$\cos(3\,x) = 4\ \cos^3 x - 3\cos x$
$\mathrm{tg}(3\,x) = (3\ \mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3\,x)/(1 - 3\ \mathrm{tg}^2\,x)$
$\mathrm{ctg}(3\,x) = (\mathrm{ctg}^3\,x - 3\ \mathrm{ctg}\,x)/\ (3\ \mathrm{ctg}^2\,x - 1)$

$\sin(4\,x) = 8\ \cos^3 x\ \sin x - 4\ \cos x\ \sin x$
$\cos(4\,x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x\ +\ 1$
$\mathrm{tg}(4\,x) = (4\ \mathrm{tg}\,x - 4\ \mathrm{tg}^3\,x)/(1 - 6\ \mathrm{tg}^2\,x + \mathrm{tg}^4\,x)$
$\mathrm{ctg}(4\,x) = (\mathrm{ctg}^4\,x - 6\ \mathrm{ctg}^2\,x\ +\ 1)/(4\ \mathrm{ctg}^3\,x\ -\ 4\ \mathrm{ctg}\,x)$

### 3.4 Wzory redukcyjne

Zestawienie wzorów redukcyjnych przedstawmy w postaci tabel.

| $\sin x$ | $\cos x$ |
|---|---|
| $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ | $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ |
| $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ | $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ |
| $\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$ | $\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$ |
| $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ |
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ | $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ |
| $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ | $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ |
| $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$ | $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$ |
| $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$ | $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$ |
| $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$ | $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$ |

| $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{ctg} x$ |
|---|---|
| $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ |

## 3.5 Funkcje sumy i różnicy kątów

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y,$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$

$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$

## 3.6 Suma i różnica funkcji

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \tfrac{x \pm y}{2} \cdot \cos \tfrac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{x+y}{2} \cdot \cos \tfrac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \tfrac{x+y}{2} \cdot \sin \tfrac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \tfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \tfrac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \tfrac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} y = \tfrac{\cos(x+y)}{\sin x \cos y}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \tfrac{x}{2}$$

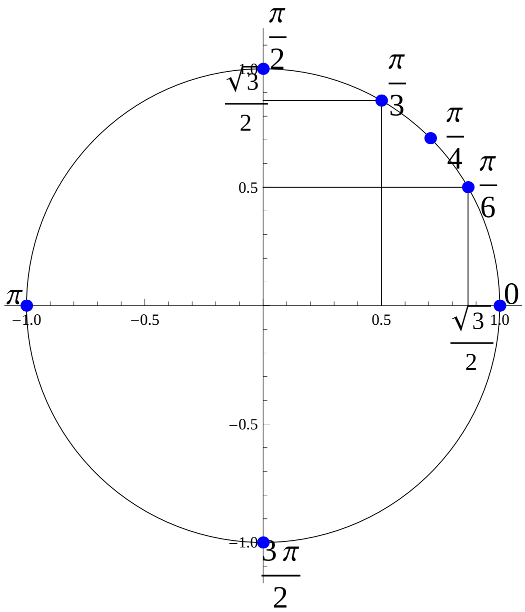
$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \tfrac{x}{2}$$

$$1 - \sin x = 2 \sin^2 \left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) = 2 \cos^2 \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)$$

$$1 + \sin x = 2 \cos^2 \left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) = 2 \sin^2 \left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right)$$

## 3.7 Wartosci funcji trygonometrycznych wybranych argumentów

Korzystając z okręgu o promieniu $r = 1$, odczytamy wartości funkcji $\sin\alpha, \cos\alpha$ wybranych kątów. Odczytane i obliczone wartości zestawimy w tabeli.




Rysunek 10: Okrąg trygonometryczny z zaznaczonymi wartościami $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ dla wybranych kątów.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $180^0$ | $360^0$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $1$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $-$ | $0$ | $0$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-$ | $-$ |

### 3.8 Tożsamościowe przekształcenie wyrażeń trygonometrycznych

Przejdźmy do zadań, w których powyżej zamieszczone wzory będą podstawowym narzędziem do rozwiązania. Są to zadania typu "Oblicz wartość wyrażenia" bądź "Uprościć wyrażenie". Te ćwiczenia przydadzą się również przy rozwiązywaniu równań - bardzo często takiego typu działania poprzedzają wyznaczenie pierwiastków równania.

## Przykład 3.1.

Obliczyć wartość wyrażenia:

$$6\ \mathrm{tg}\,\frac{227\pi}{6} + 4\ \sin\frac{994\pi}{3} - 2\ \cos\frac{679\pi}{6}.$$

## Rozwiązanie.

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest funkcją nieparzystą, a jej okres wynosi $\pi$. Stąd po podzieleniu 227 na 6 z resztą, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \frac{227\pi}{6} = \operatorname{tg} \left(37\pi + \frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \operatorname{tg} \left(38\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Analogicznie, stosując właściwości funkcji $y = \cos x$ i $y = \sin x$ i procedurę dzielenia liczb naturalnych z resztą, otrzymujemy:

$$\sin\frac{994\pi}{3} = \sin\left(331\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \sin\left(332\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{679\pi}{6} = \cos\left(113\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \cos\left(114\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ostatecznie:

$$-\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -3\sqrt{3}.$$

**Odpowiedź:** $6\ \mathrm{tg}\,\frac{227}{6}\pi + 4\ \sin\frac{994}{3}\pi - 2\ \cos\frac{679}{6}\pi = -3\sqrt{3}.$

## Przykład 3.2.

Uprościć wyrażenie:

$$\sqrt{\frac{1+\sin 260^0}{1+\sin 100^0}}.$$

**Rozwiązanie.**

Jeżeli widzimy w treści zadania wyrażenie typu 1 plus sinus lub cosinus - najczęściej jest to sugestia do zastosowania wzorów:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Następnie stosując wzory redukcyjne dążymy do tego, aby argumenty funkcji trygonometrycznych trafiły do I ćwiartki, a z sinusów otrzymać cosinusy:

$$\sin 260^0 = \sin\left(270^0 - 10^0\right) = -\cos 10^0,$$

$$\sin 100^0 = \sin\left(90^0 + 10^0\right) = \cos 10^0.$$

Po podstawieniu otrzymanych wyrażeń do pierwotnego, otrzymamy:

$$\sqrt{\frac{1+\sin 260^0}{1+\sin 100^0}} = \frac{\sin 5^0}{\cos 5^0} = \operatorname{tg} 5^0.$$

**Odpowiedź:** $\sqrt{\frac{1+\sin 260^0}{1+\sin 100^0}} = \operatorname{tg} 5^0.$

## Przykład 3.3.

Uprościć wyrażenie: $\sqrt{(1 + \operatorname{tg} 25^0 \cdot \operatorname{tg} 50^0)^2 - 1}$.

**Rozwiązanie.**

Występujące w zadaniach iloczyny bądź sumy funkcji tangens i cotangens należy zamieniać na ilorazy sinusów i cosinusów. W naszym przykładzie:

$$\sqrt{(1+\operatorname{tg}25^0\cdot\operatorname{tg}50^0)^2-1}=\sqrt{\left(1+\frac{\sin 25^0}{\cos 25^0}\cdot\frac{\sin 50^0}{\cos 50^0}\right)^2-1}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\cos(25^0-50^0)}{\cos 25^0\cdot\cos 50^0}\right)^2-1}=$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 50^0}-1}=\operatorname{tg}50^0.$$

**Odpowiedź:** $\sqrt{(1+\operatorname{tg}25^0\cdot\operatorname{tg}50^0)^2-1}=\operatorname{tg}50^0.$

## Przykład 3.4.

Obliczyć wartość wyrażenia $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x$, jeżeli $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$.

**Rozwiązanie.**

Zastosujmy wzór skróconego mnożenia na sumę sześcianów:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b)^2-3\,ab).$$

W naszym przykładzie:

$$a=\operatorname{tg}x,\ b=\operatorname{ctg}x,\ ab=1,\ (\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1).$$

Stąd:

$$\operatorname{tg}^3x+\operatorname{ctg}^3x=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)((\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-3)=$$
$$=3\cdot(3^2-3)=18.$$

**Odpowiedź:** Jeżeli $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=3$, to $\operatorname{tg}^3x+\operatorname{ctg}^3x=18$.

## Przykład 3.5.

Udowodnić tożsamość:

$$\sin 7x \cdot \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x = 1, \quad \cos 3,5x \neq 0.$$

**Rozwiązanie.**

$$\mathbf{L} = \sin 7x \cdot \operatorname{tg} 3,5x + \cos 7x =$$

$$2\sin 3,5x \cdot \cos 3,5x \cdot \frac{\sin 3,5x}{\cos 3,5x} + \cos^2 3,5x - \sin^2 3,5x =$$

$$2\sin^2 3,5x + \cos^2 3,5x - \sin^2 3,5x =$$

$$= \sin^2 3,5x + \cos^2 3,5x = 1 = \mathbf{P}.$$

## Przykład 3.6.

Udowodnić tożsamość:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

**Rozwiązanie.**

$$\mathbf{L} = \sin^6 x + \cos^6 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\,\sin^4 x \cdot \cos^2 x - 3\,\sin^2 x \cdot \cos^4 x =$$

$$= 1 - 3\,\sin^2 x \cdot \cos^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}(2\,\sin x \cdot \cos x)^2 =$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\,\sin 2x = \mathbf{P}.$$

## Przykład 3.7.

Udowodnić tożsamość:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg} x, \; (\cos 2x \neq -1).$$

**Rozwiązanie.**

$$\mathbf{L} = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\,\sin x \cdot \cos x}{1+\cos 2x} =$$

$$= \frac{2\,\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{2\,\sin x \cdot \cos x}{2\,\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = \mathbf{P}.$$

Warto uświadomić sobie, że tożsamości trygonometryczne są podobnymi wzorami, co wzory trygonometryczne, z tym że mają mniejsze zastosowanie. W czasie rozwiązywania zadań takiego typu najczęściej sięgamy do tych podstawowych wzorów.

## Przykład 3.8.

Przedstawić w postaci iloczynowej: $\sin x + \cos x$.

**Rozwiązanie.**

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2\,\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Warto zapamiętać, że sprowadzanie wyrażeń trygonometrycznych do postaci iloczynowej często jest jednym z etapów rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych.

## Przykład 3.9.

Udowodnić tożsamość:

$$(1+\cos^{-1}2x+\operatorname{tg}2x)(1-\cos^{-1}2x+\operatorname{tg}2x)=2\ \operatorname{tg}2x.$$

**Rozwiązanie.**

$$\mathbf{L} = (1+\cos^{-1}2x+\operatorname{tg}2x)(1-\cos^{-1}2x+\operatorname{tg}2x) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\cos 2x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)\left(1-\frac{1}{\cos 2x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right) =$$

$$= \frac{\cos 2x+1+\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos 2x-1+\sin 2x}{\cos 2x} =$$

$$= \frac{(\cos 2x+\sin 2x)^2-1}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{\cos^2 2x+2\,\sin 2x\cos 2x+\sin^2 2x-1}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{1+2\,\sin 2x\cos 2x-1}{\cos^2 2x} = \frac{2\,\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x} =$$

$$= \frac{2\,\sin 2x}{\cos 2x} = 2\,\operatorname{tg}2x = \mathbf{P}.$$

## Przykład 3.10.

Udowodnić tożsamość:

$$\left(\cos^{-1} 2x + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = 1.$$

**Rozwiązanie.**

$$\mathbf{L} = \left(\cos^{-1} 2x + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} + 2x\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi + \pi}{2} + 2x\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi + \pi}{4} - x\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\cos 2x} + \operatorname{ctg}\left(2\pi + \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\pi + \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$$

$$= \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$$

$$= \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right) \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

$$= \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} 2x\right) \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x} =$$

$$= \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x - 2\ \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{1 - 2\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^2}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} =$$

$$= 1 = \mathbf{P}.$$

## Przykład 3.11.

Wyznaczyć wartość $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$, jeżeli $\sin\alpha = -0,8$ i $\alpha \in (270^0; 360^0)$.

**Rozwiązanie.**

Znając wartość sinusa kąta i korzystając z jedynki trygonometrycznej, wyznaczamy wartość cosinusa tegoż kąta (przed pierwiastkiem wpisujemy znak +, ponieważ kąt leży w $IV$ ćwiartce):

$$\cos\,\alpha = +\sqrt{1-(-0,8)^2} = +0,6.$$

Stąd:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{-0,8}{+0,6} = -\frac{4}{3};$$

$$\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{3\,\pi}{4}\right) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\frac{3\,\pi}{4}}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\frac{3\,\pi}{4}} = \frac{-\frac{4}{3}+1}{1+\frac{4}{3}} = -\frac{1}{7}.$$

**Odpowiedź:** $\mathrm{tg}\left(\alpha - \frac{3\,\pi}{4}\right) = -\frac{1}{7}$.

## Przykład 3.12.

Obliczyć wartość $\sin\frac{\alpha}{2}$, jeżeli wiadomo że $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, a $\alpha \in (90^0; 360^0)$.

**Rozwiązanie.**

Zgodnie z treścią zadania $\operatorname{tg}\alpha > 0$, a $\alpha \in (90^0; 360^0)$. Stąd wynika, że kąt $\alpha$ znajduje sie w III ćwiartce, czyli $\alpha \in (180^0; 270^0)$. Teraz wyznaczmy wartość $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{2}{3};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Minusy przed pierwiastkami wpisaliśmy z tego względu, że kąt $\alpha$ leży w III ćwiartce, a kąt $\frac{\alpha}{2}$ - w II.

**Odpowiedź:** $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$.

## Przykład 3.13.

Obliczyć wartość wyrażenia:

$$\frac{\sin^2\alpha - 4\,\cos^2\alpha}{2\,\sin^2\alpha + 3\,\cos^2\alpha},$$

jeżeli $\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$.

**Rozwiązanie.**

Przeanalizujmy zadanie: w liczniku i mianowniku występują funkcje sinus i cosinus w 2 potędze. W takich przypadkach licznik i mianownik dzielimy przez $\cos^2\alpha$, w wyniku otrzymamy:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 4}{2\operatorname{tg}^2\alpha + 3} = \frac{\frac{9}{16} - 4}{\frac{18}{16} + 3} = \frac{9 - 64}{18 + 48} = -\frac{5}{6}.$$

**Odpowiedź:** $-\frac{5}{6}$.

## Przykład 3.14.

Obliczyć:

a) $\sin(-720\,^0)$; b) $\cos(-405\,^0)$; c) $\cos(-780\,^0)$; d) $\operatorname{ctg}(-1110\,^0)$.

**Rozwiązanie.**

W tym zadaniu trzeba jednocześnie uwzględnić okresowość i parzystość/nieparzystość funkcji trygonometrycznych. Dla przykładu a) wygląda to następująco:

$$\sin(-720^{0}) = -\sin 720^{0} = -\sin(2\cdot 360^{0}+0^{0}) = -\sin 0^{0} = 0.$$

**Odpowiedź:** $\sin(-720^{0}) = 0.$

Z resztą zadań na pewno poradzicie sobie samodzielnie.

## Przykład 3.15.

Uprościć wyrażenia:

a) $\cos^4\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\sin^2\alpha$;

b) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$;

c) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

## Rozwiązanie.

Rozwiążmy przykład a). Dokonajmy prostych przekształceń:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Podstawiając do przekształcanego wyrażenia, otrzymujemy:

$$\cos^4 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

**Odpowiedź:** a) $1$; b) $\operatorname{tg}^6 \alpha$; c) $-(\cos \alpha + \sin \alpha)$.

## Przykład 3.16.

Obliczyć:

a) $\cos\,79^0 \cdot \cos\,34^0 + \sin\,79^0 \cdot \sin\,34^0$;

b) $\frac{2\sin\,170^0 + \cos\,40^0}{\cos\,130^0}$;

c) $4\sin\,25^0 \cdot \sin\,35^0 \cdot \sin\,85^0$;

d) $\mathrm{ctg}\,70^0 \cdot \mathrm{ctg}\,50^0 \cdot \mathrm{ctg}\,10^0$.

**Rozwiązanie.**

a) Dane wyrażenie jest prawą stroną wzoru na różnicę kosinusów dwóch kątów:

$$\cos 79^0 \cdot \cos 34^0 + \sin 79^0 \cdot \sin 34^0 =$$
$$= \cos(79^0 - 34^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Po wielokrotnym zastosowaniu wzorów na przedstawienie iloczynu funkcji trygonometrycznych w postaci sumy oraz wzorów redukcyjnych, otrzymujemy:

$$4\sin 25^0 \cdot \sin 35^0 \cdot \sin 85^0 =$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(\cos 10^0 - \cos 60^0) \cdot \sin 85^0 =$$
$$= 2\cos 10^0 \cdot \sin 85^0 - \sin 85^0 =$$
$$= \sin(85^0 - 10^0) + \sin(85^0 + 10^0) - \sin 85^0 =$$
$$= \sin 75^0 + \sin 95^0 - \sin 85^0 =$$
$$= \sin 75^0 = \cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) =$$
$$= \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**Odpowiedź:** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{3}$.

## Przykład 3.17.

Udowodnić tożsamość:

a) $\frac{1+\,\mathrm{tg}\ \alpha}{1-\,\mathrm{tg}\ \alpha} = \mathrm{tg}\ \left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$

b) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\ \alpha\ \cos\ \beta} = \mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}\ \beta;$

c) $\sin\ \alpha + \sin\ \beta + \sin\ \gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$
$\alpha+\beta+\gamma=\pi; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma>0.$

## Rozwiązanie.

Mamy nadzieję, że nie przestraszyliście się czasownika "udowodnić" w treści zadania. Ogólna uwaga, dotycząca rozwiązywania takiego typu zadań, jest następująca: przed rozpoczęciem zadania przeanalizujcie, przekształcenie której ze stron tożsamości do postaci drugiej jest łatwiejsze! Czasami korzystniejsze jest przekształcenie prawej strony i sprowadzenie jej do wyrażenia, znajdującego się po lewej stronie.

Wspólnie rozwiążemy tylko trudniejsze zadanie c).

c) Zacznijmy od przekształcenia sumy dwóch pierwszych sinusów po lewej stronie:

$$\sin\,\alpha + \sin\,\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

(po zastosowaniu wzorów redukcyjnych mamy)

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Do przekształcenia $\sin\,\gamma$ zastosujemy wzory na sinus podwójnego argumentu:

$$\sin\,\gamma = 2\sin\,\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\,\alpha + \sin\,\beta + \sin\,\gamma = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\,\frac{\gamma}{2}\right).$$

Rozpatrzmy osobno wyrażenie w nawiasach i przekształćmy go do postaci iloczynowej. Zacznijmy od zastosowania wzorów redukcyjnych, przekształcając sinus w kosinus:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\,\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta+\pi+\gamma}{4}\,\cos\,\frac{\alpha-\beta-\pi+\gamma}{4} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie w miejsce nawiasu, otrzymamy pożądany wynik.

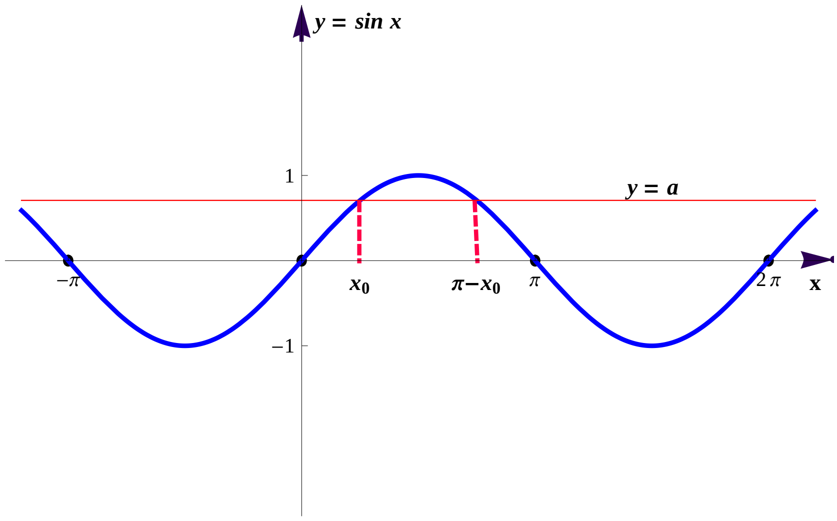
# 4 Równania trygonometryczne

W drugiej części prezentacji temu trudnemu tematowi poświęcimy więcej uwagi. Na przykładach przedstawimy przekształcenia, najczęściej stosowane podczas rozwiązywania równań trygonometrycznych różnych typów, których celem jest sprowadzenie danych równań do równań w takiej postaci, rozwiązania których są nam dobrze znane. Aby ułatwić pracę, zamieścimy znane już czytelnikowi z I części prezentacji rozwiązania najprostszych równań z odpowiednimi rysunkami.

## 4.1 Ogólne rozwiązania najprostszych równań trygonometrycznych

### 4.1.1 Ogólne rozwiązanie równania $\sin x = a$

$$\sin x = a, \quad |a| \leqslant 1.$$




Rysunek 11: Wizualizacja pierwiastków równania $\sin x = a$.

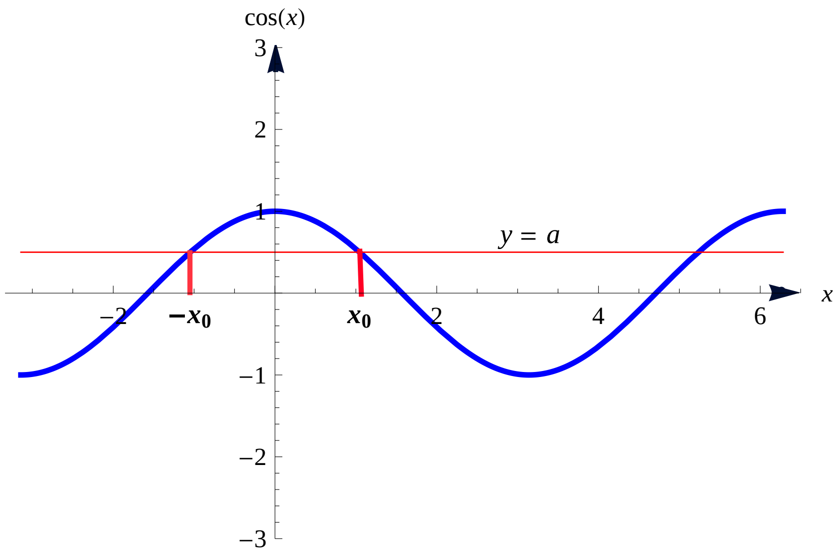
$$x_1 = x_0 + 2\pi n,$$
$$x_2 = \pi - x_0 + 2\pi n,$$

lub łącząc obydwa wzory w jeden:

$$x = (-1)^n x_0 + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2...$$

### 4.1.2 Ogólne rozwiązanie równania $\cos x = a$

$$\cos\, x = a, \quad |a| \leqslant 1.$$

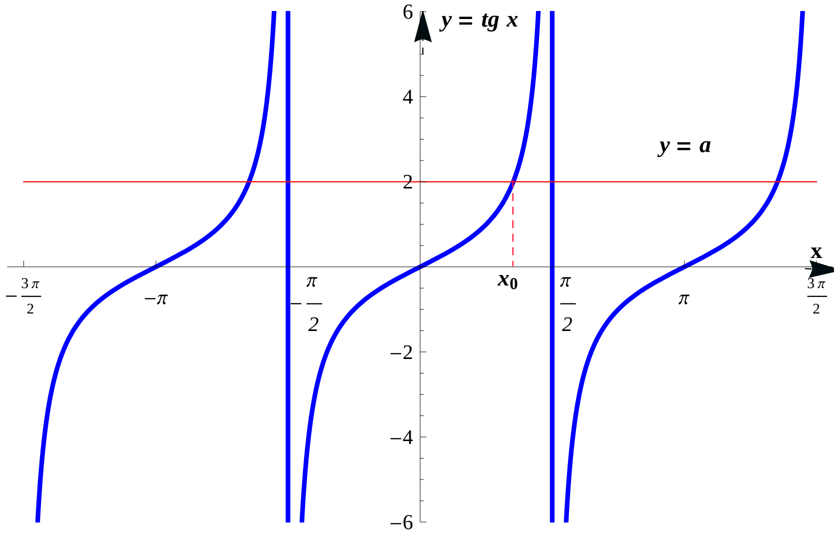



Rysunek 12: Wizualizacja pierwiastków równania $\cos x = a$.

$$x = \pm x_0 + 2\pi n,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$$

### 4.1.3 Ogólne rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = a$

$$\operatorname{tg} x = a.$$

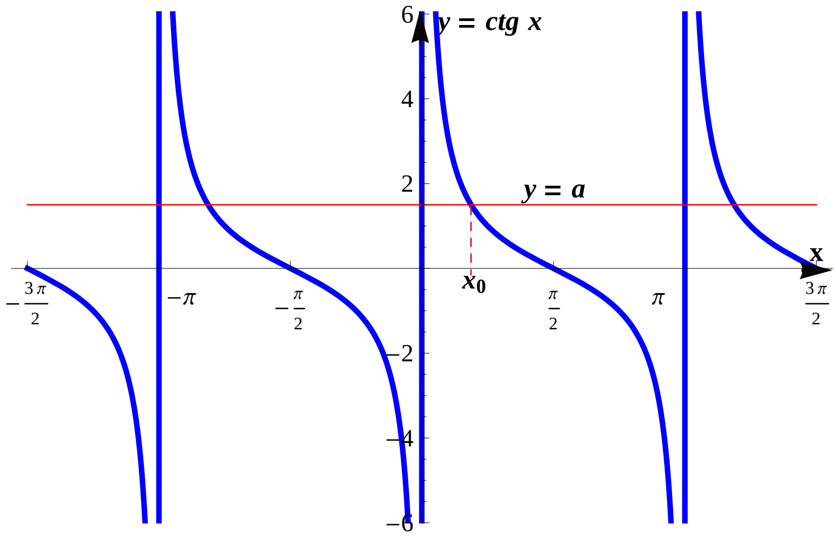



Rysunek 13: Wizualizacja rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$.

$$x = x_0 + \pi n,\ \text{gdzie}\ -\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2},\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2...$$

### 4.1.4 Ogólne rozwiązanie równania $\operatorname{ctg} x = a$

$$\operatorname{ctg} x = a.$$




Rysunek 14: Wizualizacja rozwiązania równania $\operatorname{ctg} x = a$.

$$x = x_0 + \pi n, \text{ gdzie } 0 < x_0 < \pi, \ n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2...$$

## 4.2 Zadania do tematu

Po krótkim powtórzeniu rozwiązań podstawowych równań trygonometrycznych i przedstawieniu sposobów na uproszczenie wyrażeń, zawierających funkcje trygonometryczne, rozwiązywanie równań nie powinno sprawiać większych problemów.

## Przykład 4.1.

Wyznaczyć sumę pierwiastków równania (w stopniach)

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right),$$

należących do przedziału $[-90^0, 250^0]$.

**Rozwiązanie.**

Są różne sposoby na rozwiązanie tego dosyć prostego zadania, jeden z nich polega na przeniesieniu wyrażenia z prawej strony na lewą, następnie po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów, należy zastosować wzory na sumę/różnicę kosinusów (warto samodzielnie tym sposobem rozwiązać równanie). My natomiast podczas rozwiązania wypróbujemy inną metodę.

Metoda polega na obniżeniu stopnia równania przez wprowadzenie funkcji trygonometrycznych podwójnego argumentu. W tym celu skorzystamy ze wzoru:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}\,.$$

Po obustronnym wymnożeniu równania przez 2 i zredukowaniu 1 (przeprowadźcie samodzielnie wszystkie przekształcenia), otrzymamy takie równanie:

$$\cos\,(2x - \frac{\pi}{2}) = \cos\,(2x - 3\pi).$$

Ze wzorów redukcyjnych wynika, że

$$\sin\, 2x = -\,\cos\, 2x.$$

Jest też oczywiste, że $\cos\, 2x \neq 0$ (proszę zastanowić się, dlaczego?!). Ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$\mathrm{tg}\; 2x = -\,1,$$

$$x = \pi\,\frac{-1 + 4\,k}{8} = -22,5^0 + 90^0\,k,\; k \in Z.$$

Aby nie szukać odpowiadających treści zadania pierwiastków poprzez nadawanie $k$ różnych wartości, dokonamy tego rozwiązując podwójną nierówność względem $k$:

$$-\,90^0 < -\,22,5^0 + 90^0\, k < 250^0.$$

Stąd

$$-\,0,75^0 < k < 3,02.$$

Czyli $k$ przyjmuje wartości 0, 1, 2, 3, a suma pierwiastków, spełniających dany warunek, wynosi:

$$4 \cdot 22,5^0 + 90^0\,(0+1+2+3) = -\,90^0 + 540^0 = 450^0.$$

**Odpowiedź:** Suma pierwiastków, należących do przedziału $[-\,90^0, 250^0]$, wynosi $450^0$.

## Przykład 4.2.

Wyznaczyć sumę pierwiastków równania (w stopniach)

$$\cos 2\,x \cdot \cos 3\,x = \sin 3\,x \cdot \sin 4\,x,$$

należących do przedziału $[-\,45^0, 90^0]$.

**Rozwiązanie.**

Przekształćmy iloczyn w sumę:

$$\frac{1}{2}\left(\cos\, x + \cos\, 5\,x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-x\right) - \cos\, 7\,x\right).$$

Po elementarnych przekształceniach, otrzymamy:

$$\cos\, 5\,x + \cos\, 7\,x = 0.$$

Zamieniamy sumę cosinusów na iloczyn:

$$2\,\cos\, 6\,x \cdot \cos\left(-x\right) = 0,$$

korzystając z parzystości cosinusa:

$$2\,\cos\, 6\,x \cdot \cos\, x = 0.$$

Pierwiastkami równania $\cos x = 0$ są

$$x = 90^0 + 180^0 \cdot n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

do przedziału $[-\,45^0, 90^0]$ należy tylko pierwiastek $90^0$. Pierwiastkami równania $\cos 6\,x = 0$ są

$$x = 15^0 + 30^0 \cdot n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

do przedziału $[-\,45^0, 90^0]$ należy 5 pierwiastków:

$$\left\{-\,45^0,\ -\,15^0,\ 15^0,\ 45^0,\ 75^0\right\},$$

przy czym każdy z nich występuje jednokrotnie. Suma wszystkich pierwiastków wynosi $165^0$.

**Odpowiedź:** Suma wszystkich pierwiastków, należących do przedziału $[-\,45^0, 90^0]$, wynosi $165^0$.

## Przykład 4.3.

Wyznaczyć ilość pierwiastków równania

$$\cos\,4\,x - 3\sin\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,x\right) + 2\,\sin^2\,3\,x + 2\,\cos^2\,3\,x = 0,$$

należących do przedziału $[-\,90^0, 180^0]$.

**Rozwiązanie.**

To zadanie bez problemu rozwiążecie samodzielnie!

**Odpowiedź:** W przedziale $[-90^0, 180^0]$ znajduje się 5 pierwiastków równania.

## Przykład 4.4.

Wyznaczyć ilość pierwiastków równania

$$6\,\sin^2 x + \sin 2\,x - \cos^2 x - 2\,\cos 2\,x = 0,$$

należących do przedziału $[0^0, 450^0]$.

**Rozwiązanie.**

Korzystając ze wzorów na $\sin 2x$ i $\cos 2x$, otrzymamy:

$6\sin^2 x + 2\sin x\ \cos x - \cos^2 x - 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 0.$

Następnie po podzieleniu równania obustronnie przez $\cos^2 x$ (z treści równania wynika, że $\cos x \neq 0$), otrzymamy:

$$8\,\mathrm{tg}^2\, x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0.$$

Dalszą część rozwiązania proponujemy wykonać samodzielnie. Aby ułatwić znalezienie poprawnej odpowiedzi, radzimy wykorzystać sposób graficzny. Podamy odpowiedź do sprawdzenia.

**Odpowiedź:** W przedziale $[0^0, 450^0]$ znajduje się 5 pierwiastków równania.

## Przykład 4.5.

Wyznaczyć ilość pierwiastków równania

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1,$$

należących do przedziału $[0; 2\pi]$.

## Rozwiązanie.

Rozwiązanie tego równania rozpoczynamy od wyznaczenia jego dziedziny:

$$\cos 3x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2...$$

W przedziale $[0, 2\pi]$ znajduje się 6 wyłączonych z dziedziny wartości:

$$\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right\}.$$

Następnie mnożąc równanie obustronnie przez $\cos 3x$, otrzymamy:

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x,$$

$$\sin 2x = \cos 3x - \cos x,$$

$$\sin 2x = -2 \sin 2x \sin x.$$

Zbadajmy możliwe rozwiązania.

1. $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi k}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2...$

   W przedziale $[0; 2\pi]$ znajduje się 5 z wyznaczonych pierwiastków: $\left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\}$, po uwzględnieniu dziedziny równania pozostają trzy: $\{0;\ \pi;\ 2\pi\}$.

2. $\sin x = -0,5,\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2...$

   W przedziale $[0; 2\pi]$ znajdują się 2 pierwiastki: $\left\{\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right\}$, obydwa należy odrzucić ze względu na dziedzinę.

**Odpowiedź:** W przedziale $[0; 2\pi]$ znajdują się 3 pierwiastki równania.

## Przykład 4.6.

Wyznaczyć całkowite wartości parametru $a \in [-3; 7]$, dla których równanie:

$$a \cdot (3\sin 2x - 4\cos 2x)^2 = 100$$

nie ma pierwiastków. W przedziale $[0, 2\pi]$ znajduje się 5 z wyznaczonych pierwiastków: $\left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\}$ równania

$$\cos\,4\,x - 3\sin\left(\frac{3\,\pi}{2} + 2\,x\right) + 2\ \sin^2\ 3\,x + 2\ \cos^2\ 3\,x = 0,$$

należących do przedziału $[-\,90^0, 180^0]$.

**Rozwiązanie.**

To zadanie bez problemu rozwiążecie samodzielnie!

**Odpowiedź:** W przedziale $[-90^0, 180^0]$ znajduje się 5 pierwiastków równania.

## Przykład 4.7.

Wyznaczyć sumę pierwiastków równania

$$\cos^2\left(2\,x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{5\,x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

należących do przedziału $\left[0^0; 180^0\right]$.

**Rozwiązanie.**

Obniżmy stopień równania, korzystając ze wzorów podwójnego argumentu; po prostych przekształceniach, otrzymamy:

$$\sin\, 5\,x = \sin\, 4\,x.$$

Zastosujmy nietypową metodę:

$$5\,x = (-1)^n \cdot 4\,x + 180^0 \cdot n, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$$

1. Jeżeli $n = 2\,k$ - jest liczbą parzystą, to $x = 360^0 \cdot k$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

   W danym przedziale znajduje się tylko jeden pierwiastek - $x = 0^0$.

2. Jeżeli $n = 2\,k + 1$ - jest liczbą nieparzystą, to $9\,x = 180^0 + 360^0 \cdot k; \quad x = 20^0 + 40^0 \cdot k$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

   W danym przedziale znajduje się pięć pierwiastków: $20^0,\ 60^0,\ 100^0,\ 140^0,\ 180^0$.

**Odpowiedź:** Suma pierwiastków równania wynosi $500^0$.

## Przykład 4.8.

Wyznaczyć sumę pierwiastków równania

$$\frac{\cos\,7\,x}{\sin\,2\,x} = 1,$$

należących do przedziału $\left[70^0; 150^0\right]$.

**Rozwiązanie.**

Dane równanie jest równoważne z następującym:

$$\cos 7\,x - \sin 2\,x = 0,$$

pod warunkiem że $\sin 2\,x \neq 0$. Korzystając ze wzorów redukcyjnych, zamienimy w równaniu sinus na cosinus, otrzymamy w wyniku:

$$\cos 7\,x = \cos\,(90^0 - 2\,x).$$

Następnie skorzystajmy z metody, przedstawionej w poprzednim przykładzie:

$$7\,x = \pm(90^0 - 2\,x) + 360^0 \cdot n, \quad n = 0,\ \pm1,\ \pm2...$$

Rozpatrzmy 2 możliwe przypadki:

1. $7\,x = 90^0 - 2\,x + 360^0 \cdot n, \quad x = 10^0 + 40^0 \cdot n,$
   $n = 0,\ \pm1,\ \pm2...$
   W przedziale $[70^0; 150^0]$ znajdują się 2 pierwiastki: $90^0$ i $130^0$, ale pierwsze z nich nie spełnia warunku $\sin 2\,x \neq 0$.

2. $7\,x = -(90^0 - 2\,x) + 360^0 \cdot n, \quad x = -18^0 + 72^0 \cdot n,$
   $n = 0,\ \pm1,\ \pm2...$

   W przedziale $[70^0; 150^0]$ znajduje się tylko 1 pierwiastek: $x = 126^0$.

**Odpowiedź:** Suma pierwiastków równania wynosi $256^0$.

## 5 Zakończenie

Mamy nadzieję, że przedstawiona lektura przyda się czytelnikowi nie tylko w czasie przygotowania do matury. Jeżeli wybierzecie studia techniczne, to z całą odpowiedzialnością możemy stwierdzić, że otrzymane nawyki będą bardzo przydatne!

# Literatura


[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] M. Antek, P. Grabowski, Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym, Nowa Era , Warszawa 2006.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Sadowski, Algebra w zadaniach, HARMONIA, Gdańsk 2000.

[5] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.