Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Krzywe stożkowe

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

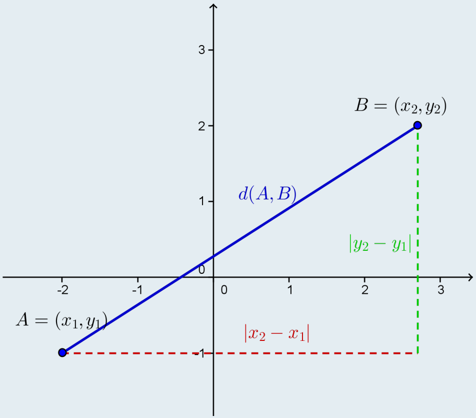
Powstanie geometrii analitycznej jako działu matematyki oparte jest na pomyśle przypisania każdemu punktowi płaszczyzny pary liczb zwanej współrzędnymi tego punktu. Takie przyporządkowanie umożliwia powiązanie tworów geometrycznych takich jak proste, okręgi czy też inne krzywe, z odpowiadającymi im zależnościami między współrzędnymi punktów tych tworów. Mimo, iż pomysł wprowadzenia układu współrzędnych przypisuje się Kartezjuszowi, to prekursorem metody współrzędnych w geometrii był Fermat, który pierwszy opisał równaniami algebraicznymi proste i krzywe powstałe z przecięcia płaszczyznami powierzchni stożka. Między innymi, opisem właśnie tych krzywych zajmiemy się w tym kursie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przyjmiemy, że użytkownik tego kursu zaznajomiony jest z podstawowymi pojęciami geometrii płaskiej i pierwszą częścią tego kursu dotyczącą podstaw geometrii analitycznej i równań prostej na płaszczyźnie. Prezentacja ta jest kontynuacją tamtej. Wyjdziemy od przypomnienia, w jaki sposób mierzy się odległość w układzie współrzędnych. Uzasadnienie tego twierdzenia zawarte jest w zaprezentowanym poniżej rysunku.

Twierdzenie 1. *Odległość* $d(A,B)$ *punktów* $A = (x_1, y_1)$ *oraz* $B = (x_2, y_2)$ *jest równa*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

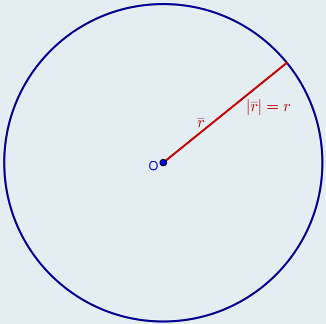


Wyjdziemy od analitycznego opisu okręgu i koła na płaszczyźnie. W tym celu przypomnimy ich geometryczne definicje.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 1. Okręgiem o środku S i promieniu $\overline{r}$ długości $r > 0$ nazywamy zbiór $O(S;r)$ wszystkich punktów X na płaszczyźnie, których odległość od punktu S jest równa r, tzn.

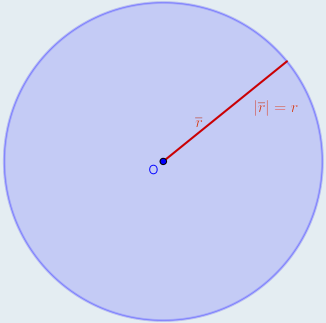
$$O(S;r) = \{X : |SX| = r\}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 2. Kołem o środku S i promieniu $\overline{r}$ długości $r > 0$ nazywamy zbiór $K(S;r)$ wszystkich punktów X na płaszczyźnie, których odległość od punktu S jest nie większa od r, tzn.

$$K(S;r) = \{X : |SX| \leqslant r\}.$$



Na podstawie tych definicji spróbujemy podać analityczny opis okręgu i koła w układzie współrzędnych.

Problem 1. Zapisać równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, 1)$ i promieniu długości $r = 2$.

Skorzystajmy z definicji okręgu i ze sposobu mierzenia odległości na płaszczyźnie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Niech punkt X należący do okręgu ma współrzędne (x, y). Wówczas, z definicji okręgu, odległość X od środka $S = (-2, 1)$ równa jest długości promienia $r = 2$. Stąd

$$\sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2} = 2,$$

i po podniesieniu stronami do kwadratu otrzymamy

$$(x+2)^2+(y-1)^2 = 4.$$

Możemy jeszcze wykonać potęgowania (choć nie jest to najkorzystniejsze) i otrzymamy

$$x^2+4x+y^2-2y+1 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Okrąg o środku w punkcie $S = (-2, 1)$ i promieniu długości $r = 2$ ma równanie

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Wzorując się na tym rozwiązaniu można uzasadnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Okrąg o środku w punkcie* $S = (a, b)$ *i promieniu długości* r *ma równanie*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 1. Równanie okręgu zapisane w postaci

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

nazywamy **równaniem kanonicznym okręgu**. Z tej postaci łatwo można odczytać współrzędne środka $S=(a,b)$ okręgu oraz długość promienia r.

Okrąg można w sposób równoważny opisać **równaniem ogólnym**

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

przy czym musi zachodzić $A^2+B^2-4C>0$. W tym przypadku współrzędne środka $S=(a,b)$ okręgu oraz długość r jego promienia wyrażają się następującymi zależnościami:

$$a=-\tfrac{A}{2},\quad b=-\tfrac{B}{2},\quad r=\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Proponujemy wykonać teraz następujące ćwiczenia.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1.

1. Napisać równanie okręgu

   a) o środku $S_1 = (0, 0)$ i promieniu długości $r_1 = 1$,

   b) o środku $S_2 = (2, -3)$ i promieniu długości $r_2 = \frac{4}{3}$,

   c) o środku $S_3 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\right)$ i promieniu długości $r_3 = \frac{2}{5}$.

2. Sprawdzić, czy podane równania opisują okrąg. Jeśli tak, to wyznaczyć jego środek i długość promienia:

   a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$,

   b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$,

   c) $x^2 + y^2 + x - 3y - 2 = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Podobnie jak poprzednio, podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

1.

a) $x^2 + y^2 = 1$,

b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = \frac{16}{9}$,

c) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$,

2.

a) $S_1 = (2,-1)$, $r_1 = \sqrt{5}$,

b) równanie nie przedstawia okręgu,

c) $S_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $r_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zastanówmy się dalej, jak opisać w układzie współrzędnych na płaszczyźnie koło o zadanym środku i promieniu.

Problem 2. Opisać analitycznie koło o środku $S = (2, 1)$ i promieniu długości $r = 3$.

Podobnie jak to było z równaniem okręgu, skorzystamy z definicji koła i sposobu mierzenia odległości na płaszczyźnie.

Rozwiązanie. Niech punkt X należący do koła ma współrzędne (x, y). Z definicji koła, odległość X od środka $S = (2, 1)$ nie przekracza długości promienia $r = 3$. Zatem

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \leqslant 2.$$

Podnosząc stronami do kwadratu otrzymamy

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 9.$$

Odp. Koło o środku w punkcie $S = (2, 1)$ i promieniu długości $r = 3$ można opisać nierównością

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leqslant 9.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wzorując się na tym rozwiązaniu można uzasadnić następujące twierdzenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 3. *Koło o środku w punkcie $S = (a, b)$ i promieniu długości r ma analityczny opis w postaci nierówności:*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant r^2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 2. Podobnie, jak w przypadku okręgu, również koło można w sposób równoważny opisać nierównością

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C \leqslant 0,$$

przy dodatkowym założeniu $A^2 + B^2 - 4C > 0$. Wtedy współrzędne środka $S = (a, b)$ koła oraz długość r jego promienia wyrażają się zależnościami (jak w przypadku okręgu):

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Proponujemy wykonać teraz następujące ćwiczenia.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2. Napisać nierówność opisującą koło

a) o środku $S_1 = (2, -2)$ i promieniu długości $r_1 = \frac{3}{4}$,

b) o środku $S_2 = (0, -1)$ i promieniu długości $r_2 = \sqrt{3}$,

c) o środku $S_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{4})$ i promieniu długości $r_3 = 2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odpowiedzi do tego ćwiczenia są następujące:

Odp.

a) $(x-2)^2+(y+2)^2 \leqslant \frac{9}{16}$,

b) $x^2+(y+1)^2 \leqslant 3$,

c) $(x+\frac{1}{3}))^2+(y-\frac{7}{4})^2 \leqslant 4$.

Rozwiążemy teraz następujące zadania.

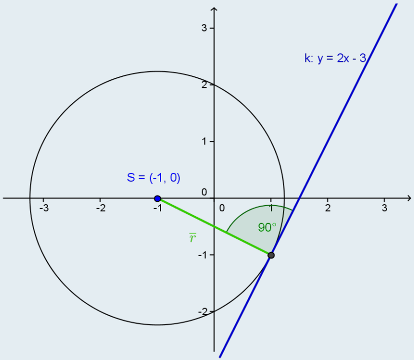
Przykład 1. Napisać równanie okręgu o środku $S=(-1,0)$, stycznego do prostej $k: y=2x-3$.

Na początku wypiszemy dane, szukane oraz wykonamy stosowny rysunek.

Rozwiązanie.

D: $S = (-1, 0)$
prosta $k : y = 2x - 3$

Sz: równanie okręgu
o środku $S = (-1, 0)$
stycznego do prostej k.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Musimy opracować plan rozwiązania zadania określając co, i w jakiej kolejności należy obliczyć. W celu napisania równania okręgu musimy znać współrzędne jego środka i długość promienia. Środek poszukiwanego okręgu jest dany, więc musimy jedynie wyznaczyć długość promienia tego okręgu. Jak widać z rysunku, długość promienia równa jest odległości środka okręgu od zadanej prostej k.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć odległość środka S okręgu od prostej k,
2. napisać równanie okręgu $O(S;r)$ o środku S i promieniu długości r.

Przypomnimy twierdzenie opisujące odległość punktu od zadanej prostej.

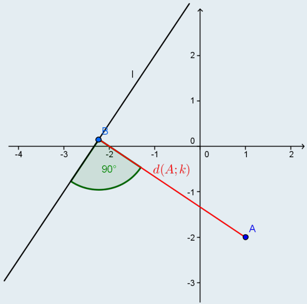
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 4. *Odległość punktu* (x_0, y_0) *od prostej*

$$l: \ Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$, *wyraża się wzorem*

$$d((x_0, y_0); l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Możemy teraz przystąpić do rozwiązania zadania.

Krok 1. Wyznaczymy długość r promienia poszukiwanego okręgu. W celu skorzystania z Twierdzenia 4, napiszemy równanie ogólne prostej k. Mamy więc

$$k: \ 2x - y - 3 = 0.$$

Wtedy

$$d((-1,0);k) = \frac{|2 \cdot (-1) - 0 - 3|}{2^2 + (-1)^2} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Krok 2. Napiszemy teraz równanie okręgu o środku $S = (-1, 0)$ i promieniu długości $r = \sqrt{5}$. Otrzymamy więc

$$(x - (-1))^2 + (y - 0)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2,$$

czyli

$$(x + 1)^2 + y^2 = 5.$$

Odp. Okrąg o środku w punkcie A i styczny do prostej k ma równanie

$$(x+1)^2 + y^2 = 5.$$

Zastanowimy się teraz, w jaki sposób można wyznaczyć równanie prostej stycznej do okręgu w zadanym punkcie styczności. Rozwiążmy więc następujący problem:

Problem 3. Napisać równanie prostej stycznej do okręgu

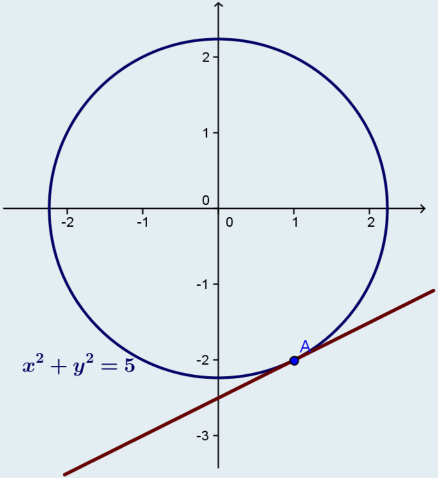
$$x^2 + y^2 = 5$$

w punkcie $A = (1, -2)$.

Rozwiązanie.

D: $A=(1,-2)$ Sz: równanie prostej stycznej

$O: x^2+y^2=5$ do okręgu O w punkcie A.



Zastanówmy się, jak wyznaczyć równanie poszukiwanej prostej.

Zadanie to można rozwiązać na różne sposoby. Podamy tu dwa z nich. Wyjdziemy od trywialnej obserwacji, że prosta styczna do okręgu ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem. Oznacza to, że stosowny układ równań powinien mieć dokładnie jedno rozwiązanie, którym oczywiście będą współrzędne punktu styczności. Mamy zatem

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (1, -2)$ Sz: równanie prostej stycznej
$O : x^2 + y^2 = 5$ do okręgu O w punkcie A.

Ponieważ punkt A nie leży na osi OX, więc poszukiwaną prostą możemy zapisać równaniem kierunkowym

$$k: \ y = ax + b,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są poszukiwane. Oczywiście prosta k przechodzi przez punkt A, więc podstawiając jego współrzędne do równania prostej k otrzymamy

$$-2 = a + b.$$

Wyznaczając z tej równości niewiadomą b otrzymamy $b = -a - 2$, więc poszukiwana prosta ma równanie

$$k: \ y = ax - a - 2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Prosta k ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem, stąd też układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = ax - a - 2 \end{cases}$$

musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie (a jest w tym układzie równań parametrem). Podstawiając niewiadomą y wyznaczoną w drugim równaniu do równania pierwszego otrzymamy

$$x^2 + (ax - a - 2)^2 = 5.$$

Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia takiego parametru a, dla którego powyższe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie (wtedy również układ równań będzie miał jedno rozwiązanie).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Po uporządkowaniu otrzymanego równanie kwadratowego otrzymamy

$$(1+a^2)x^2 - 2a(a+2)x + (a+2)^2 - 5 = 0. \tag{1}$$

Obliczając wyróżnik tego równania otrzymamy

$$\Delta = 4a^2(a+2)^2 - 4(1+a^2)\left[(a+2)^2 - 5\right] = 4(1-2a)^2.$$

Stąd równanie (1) (a więc i rozpatrywany układ równań) będzie miało dokładnie jedno rozwiązanie dla $a = \frac{1}{2}$. Poszukiwaną prostą można więc opisać równaniem

$$k: \; y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

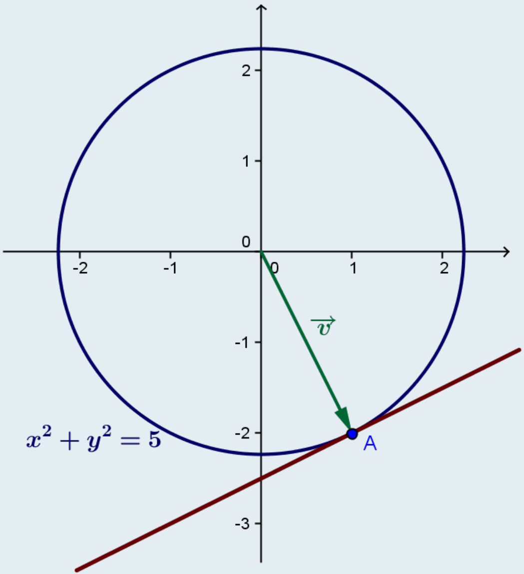
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Prosta styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 5$ w punkcie $(1, -2)$ ma równanie

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

Zastanówmy się teraz, czy tego zadania nie można rozwiązać prościej.

Jeśli nie masz pomysłu, obejrzyj rysunek.


2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
$\vec{v}$
$x^2 + y^2 = 5$
A

Zauważamy zatem, że poszukiwana prosta przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{OA}$. Ponieważ ta metoda jest prostsza, a zarazem ogólniejsza, rozważymy następujący problem:

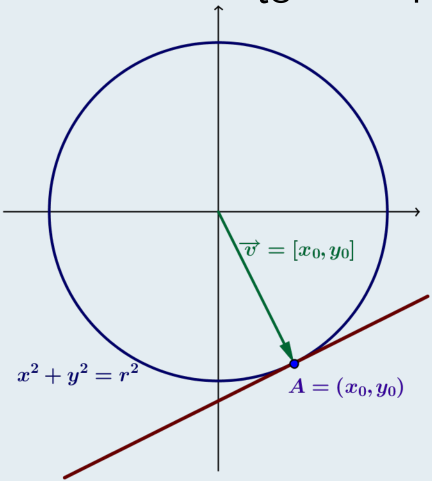
Problem 4. Napisać równanie prostej stycznej do okręgu o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu długości r w dowolnie ustalonym punkcie (x_0, y_0) tego okręgu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (x_0, y_0)$
$O : x^2 + y^2 = r^2$

Sz: równanie prostej stycznej do okręgu O w punkcie A.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Poszukiwana prosta jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{v} = [x_0, y_0]$ i przechodzi przez punkt $A = (x_0, y_0)$, więc ma ona równanie

$$k: \ x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0.$$

Jednocześnie punkt $A(x_0, y_0)$ należy do okręgu, więc

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Ostatecznie otrzymamy równanie prostej

$$k: \ x_0 x + y_0 y = r^2.$$

Uzasadniliśmy tym samym, że:

Odp. Prosta styczna do okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ w punkcie (x_0, y_0) należącym do tego okręgu ma równanie

$$x_0x + y_0y = r^2.$$

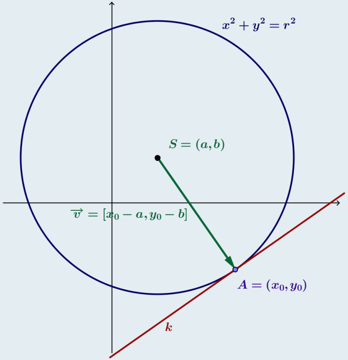
Postępując podobnie można udowodnić, następujące twierdzenie:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 5. *Styczną do okręgu* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ *w punkcie* (x_0,y_0) *należącym do tego okręgu można opisać jednym z następujących, i sobie równoważnych, równań*

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0,$$

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód. Zauważmy, że pierwsze z równań opisuje prostą przechodzącą przez punkt $A = (x_0, y_0)$ i prostopadłą do wektora $\overrightarrow{v} = [x_0 - a, y_0 - b]$, co oczywiście opisuje prostą styczną do okręgu O w punkcie A. Zauważmy jeszcze, że równanie to można zapisać następująco:

$$(x_0 - a)(x - a + a - x_0) + (y_0 - b)(y - b + b - y_0) = 0,$$

skąd otrzymamy

$$\begin{aligned}(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = \\ = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2.\end{aligned}$$

□

Proponujemy wykonać teraz następujące ćwiczenie:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3. Napisać równania prostych stycznych do zadanych okręgów w podanych punktach styczności:

a) $O_1: \ x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$, $A_1 = (0, 0)$,

b) $O_2: \ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$, $A_2 = (3, -1)$,

c) $O_3: \ x^2 + y^2 + 4x + 2y = 8$, $A_3 = (1, 1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Podamy jedynie poprawne odpowiedzi do tego ćwiczenia:

Odp. Proste styczne do podanych okręgów w zadanych punktach styczności mają równania:

a) $k_1: \ y = \frac{3}{2}x$,

b) $k_2: \ x = 3$,

c) $k_3: \ 3x + 2y - 5 = 0$.

Rozwiążemy teraz następujące zadanie:

Zadanie 1. Napisać równania stycznych do okręgu

$$O : x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$$

przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Wyjdziemy od wypisania danych, szukanych i wykonania odpowiedniego rysunku:

Rozwiązanie.

D: $A = (0,0)$
$O : x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

Sz: równania stycznych do okręgu O przechodzących przez punkt A.

Zauważmy, że równanie okręgu O można przekształcić do postaci

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 11 = 0,$$

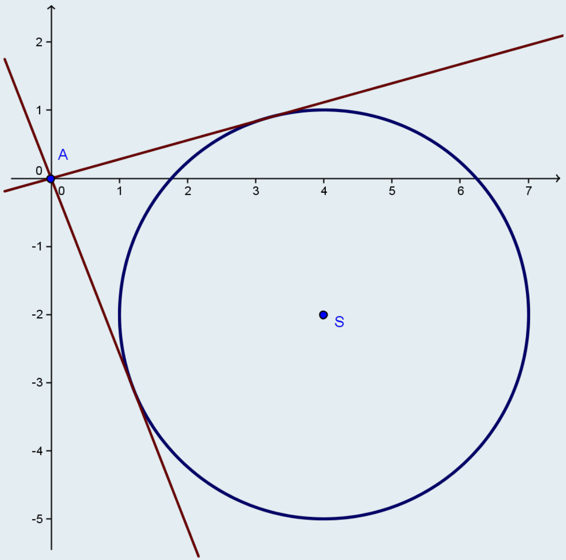
co można zapisać w postaci

$$(x-4)^2 - 16 + (y+2)^2 - 4 + 11 = 0,$$

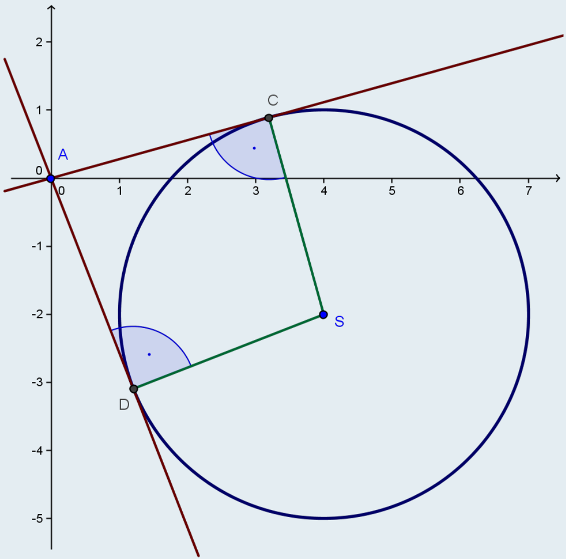
Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 3^2.$$

Zatem $S = (4, -2)$ oraz $r = 3$. Możemy więc wykonać rysunek:


A
S
0
1
2
3
4
5
6
7
-1
-2
-3
-4
-5

Zastanówmy się teraz, jak wyznaczyć równania prostych stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt A. Oczywiście będziemy potrafili napisać równania poszukiwanych prostych, jeśli wyznaczymy współrzędne punktów styczności. Zastanówmy się zatem, jak wyznaczyć te punkty. Dorysujmy zatem stosowne obiekty na wykonanym już rysunku. Otrzymamy wtedy:

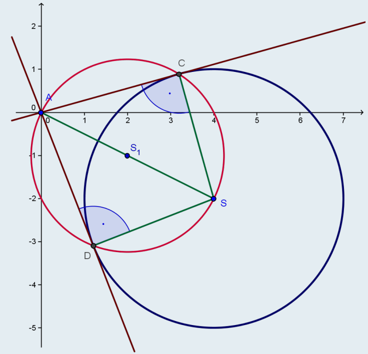

2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
1
2
3
4
5
6
7
A
C
D
S

Czy wiesz już, jak wyznaczyć punkty styczności C oraz D?

Przedstawimy tutaj trzy metody rozwiązania tego zadania.

Plan rozwiązania zadania – sposób pierwszy:

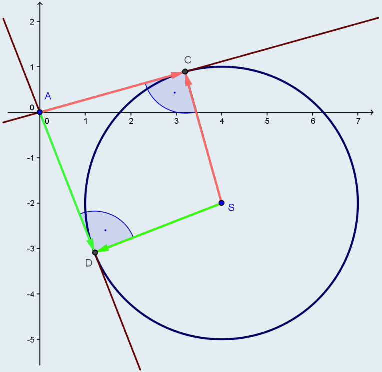
Dorysujmy odcinek AS. Otrzymamy dwa trójkąty prostokątne: $\triangle ASC$ oraz $\triangle ADS$. Wierzchołki C oraz D leżą więc na okręgu o środku będącym środkiem przeciwprostokątnej AS i promieniu długości równej połowie długości tej przeciwprostokątnej. Wyznaczymy więc:



1. długość d odcinka AS oraz współrzędne jego środka S_1;
2. równanie okręgu O_1 o środku S_1 i promieniu $r_1 = \frac{1}{2}d$;
3. punkty wspólne okręgów O oraz O_1.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan rozwiązania zadania – sposób drugi:

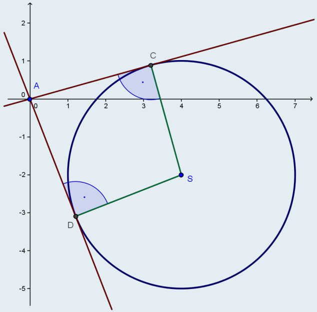


Zauważamy, że wektory $\overrightarrow{AC}$ oraz $\overrightarrow{SC}$, jak też $\overrightarrow{AD}$ oraz $\overrightarrow{SD}$ są prostopadłe. Wyznaczymy więc takich punktów $X = (x_0, y_0)$, że:

1. X leży na okręgu O,
2. wektory $\overrightarrow{AX}$ oraz $\overrightarrow{SX}$ są prostopadłe.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Plan rozwiązania zadania – sposób trzeci:



Na okręgu O poszukujemy takich punktów C oraz D, że proste styczne do okręgu O poprowadzone w tych punktach przechodzą przez początek układu współrzędnych. Poszukujemy zatem takich punktów $X = (x_0, y_0)$, że:

1. X leży na okręgu O,
2. prosta styczna do okręgu w punkcie X przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Zaprezentujemy teraz realizacje tych metod rozwiązania naszego zadania:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (0,0)$
$O: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$

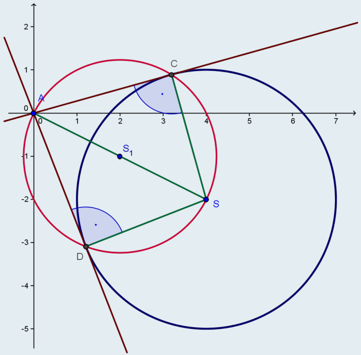
Sz: równania stycznych do okręgu O przechodzących przez punkt A.

Krok 1. Środek S_1 odcinka AS ma współrzędne

$$S_1 = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = (2,-1),$$

zaś odcinek AS ma długość

$$|AS| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 2. Równanie okręgu O_1 o środku $S_1 = (2, -1)$ i promieniu długości $r_1 = \sqrt{5}$ ma postać

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5.$$

Krok 3. Zatem punkty C oraz D, jako punkty wspólne okręgów O oraz O_1, spełniają układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0, \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{cases}$$

Wykonując potęgowanie otrzymamy

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0. \end{cases}$$

Wyznaczymy rozwiązania tego układu (punkty przecięcia się obu okręgów).

Odejmując od drugiego równania pierwsze równanie, otrzymany układ równań zredukujemy do następującego:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 11 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0. \end{cases}$$

Obliczając z pierwszego równania zmienną y otrzymamy

$$y = 2x - \tfrac{11}{2},$$

co po podstawieniu do drugiego z równań układu prowadzi do równania kwadratowego

$$5x^2 + 22x + \tfrac{77}{4} = 0.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymamy

$$x_1 = \tfrac{22-3\sqrt{11}}{10},\ \ x_2 = \tfrac{22+3\sqrt{11}}{10}.$$

Ostatecznie więc rozwiązanie układ równań jest postaci

$$C:\begin{cases} x=\frac{22+3\sqrt{11}}{10} \\ y=\frac{-11+6\sqrt{11}}{10}, \end{cases} \qquad D:\begin{cases} x=\frac{22-3\sqrt{11}}{10} \\ y=\frac{-11-6\sqrt{11}}{10}. \end{cases}$$

Pisząc równania prostych przechodzących przez punkty A i C oraz A i D otrzymamy

$$y=\frac{3\sqrt{11}-8}{7}x \quad \text{oraz} \quad y=-\frac{8+3\sqrt{11}}{7}x.$$

Prześledźmy teraz rozwiązanie naszego zadania drugą metodą.

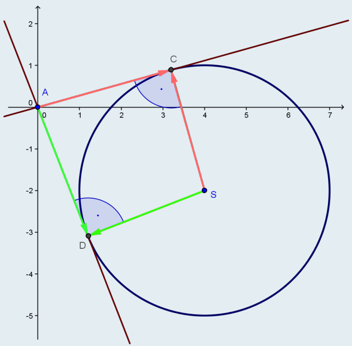
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

Niech punkt styczności ma współrzędne $X = (x_0, y_0)$.

Krok 1. Mamy $X \in O$, więc

$$x_2^2 + y_0^2 - 8x_0 + 4y_0 + 11 = 0.$$



Krok 2. Wektory $\overrightarrow{AX} = [x_0, y_0]$ oraz $\overrightarrow{SX} = [x_0 - 4, y_0 + 2]$ są prostopadłe, więc

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AX} \circ \overrightarrow{SX} \\ &= [x_0, y_0] \circ [x_0 - 4, y_0 + 2] \\ &= x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 + 2y_0. \end{aligned}$$

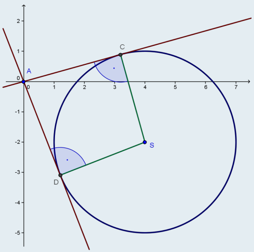
Prowadzi to do otrzymanego poprzednio układu równań

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 + 4y_0 + 11 = 0, \\ x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 2y_0 = 0. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przeanalizujemy na koniec rozwiązanie naszego zadania ostatnim sposobem.

Rozwiązanie. Niech $X = (x_0, y_0)$.



Krok 1. Mamy $X \in O$, więc

$$x_2^2 + y_0^2 - 8x_0 + 4y_0 + 11 = 0.$$

Krok 2. Równanie prostej stycznej do okręgu O (opisanego równaniem $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 3^2$) w punkcie X ma postać (por. Twierdzenie 5)

$$(x_0 - 4)(x - 4) + (y_0 + 2)(y + 2) = 3^2.$$

Prosta ta przechodzi przez początek układu współrzędnych, więc

$$-4(x_0 - 4) + 2(y_0 + 2) = 3^2.$$

Prowadzi to do rozpatrywanego już układu równań

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 + 4y_0 + 11 &= 0, \\ 4x_0 - 2y_0 - 11 &= 0. \end{cases}$$

Możemy więc podać odpowiedź:

Odp. Proste styczne do okręgu

$$x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0,$$

i przechodzące przez początek układu współrzędnych mają równania

$$y = \frac{3\sqrt{11}-8}{7}x$$

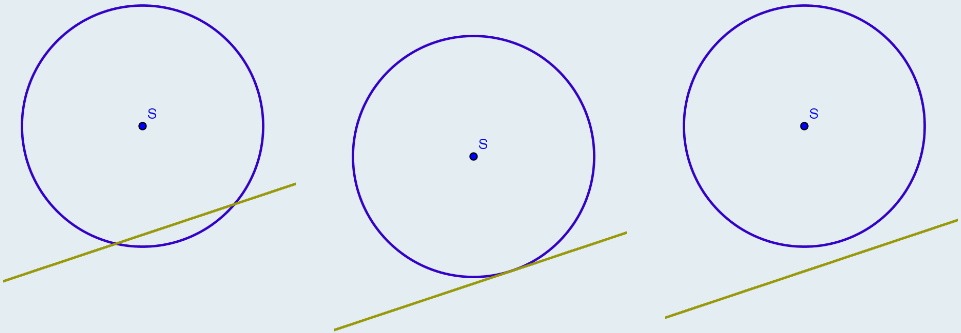
$$y = -\frac{8+3\sqrt{11}}{7}x.$$

Zajmiemy się teraz zbadaniem wzajemnego położenia prostych i okręgów na płaszczyźnie. Zastanówmy się więc, jak względem siebie mogą być na płaszczyźnie położone prosta i okrąg. Spróbuj wykonać odpowiednie rysunki.

Ćwiczenie 4. Wykonując odpowiednie rysunki wskaż wszystkie możliwe położenia okręgu względem prostej na płaszczyźnie .

Wszystkie możliwości zaprezentowane są na kolejnym slajdzie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

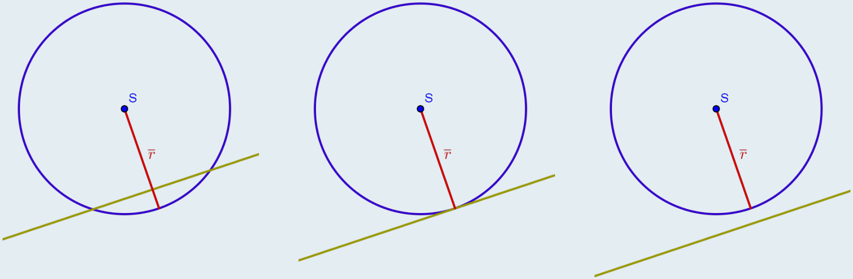


Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 5. W jaki sposób można badać wzajemne położenie prostej i okręgu?

Jeśli nie potrafisz odpowiedzieć na to pytanie, zastanów się nad odległością środka S okręgu od prostej. Z jaką wielkością należy tę odległość porównać?

Problem 6. Jaka jest zależność pomiędzy odległością środka od prostej a długością promienia okręgu na rysunkach:



poczynione obserwacje można zsumować w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 6. *Niech będzie dany okrąg* $O(S;r)$ *o środku* S *i promieniu długości* r *oraz niech* k *będzie prostą.*

(i) *Jeśli* $d(S;k) > r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *nie mają punktów wspólnych (są rozłączne).*

(ii) *Jeśli* $d(S;k) = r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *mają dokładnie jeden punkt wspólny (są styczne).*

(iii) *Jeśli* $d(S;k) < r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *mają dokładnie dwa punkty wspólne (przecinają się).*

Przykład 2. Zbadać wzajemne położenie okręgu

$$O : x_2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$$

i prostej

$$k : y = \frac{1}{4}x + 1.$$

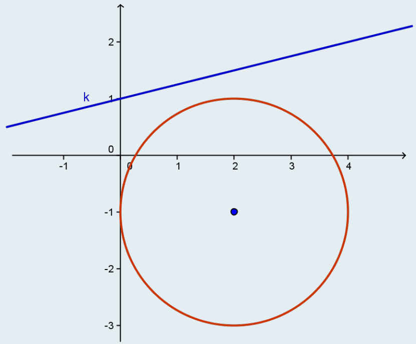
Wypiszemy dane, szukane i wykonamy stosowny rysunek. W celu wyrysowania okręgu, z jego równania odczytać należy współrzędne środka i długość promienia. Wykonany rysunek będzie sugerował odpowiedź, którą należy poprawnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

D: okrąg O o równaniu
$x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$
prosta $k : y = \frac{1}{4}x + 1$

Sz: wzajemne położenie okręgu O i prostej k.

Poniższy rysunek wykonany został w programie *Geogebra*:



W celu zbadania wzajemnego położenia prostej i okręgu należy:

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć środek S okręgu,
2. obliczyć odległość środka S okręgu od prostej k,
3. porównać obliczoną odległość środka S okręgu z długością jego promienia r.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 1. Z równania okręgu odczytamy jego środek oraz promień sprowadzając je do postaci kanonicznej. Mamy

$$\begin{aligned} 0 = x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 = \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4, \end{aligned}$$

więc

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Zatem $S = (2, -1)$ oraz $r = 2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 2. Obliczamy odległość punktu $S = (2, -1)$ od prostej k. W tym celu przekształcamy równanie kierunkowe tej prostej do następującego równania ogólnego:

$$k: \; x - 4y + 4 = 0.$$

Wtedy

$$d(S;k) = \frac{|2 - 4 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}.$$

Krok 3. Na koniec mamy

$$d(S;k) = \frac{10}{17}\sqrt{17} > 2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Okrąg $O : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ i prosta $k : y = \frac{1}{4}x + 1$ nie mają punktów wspólnych.

W celu utrwalenia tych umiejętności proponujemy wykonanie następującego ćwiczenia.

Ćwiczenie 5. Zbadać wzajemne położenia podanych par prostych i okręgów:

a) $k_1 : y = -5x - 2, \quad O_1 : x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0,$
b) $k_2 : y = \frac{2}{3}x + 4, \quad O_2 : x^2 + y^2 - 3x - 2y - 5 = 0,$
c) $k_3 : x = -2, \quad O_3 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0,$
d) $k_4 : y = -2, \quad O_4 : x^2 + y^2 + 7x - 4y = 0,$
e) $k_5 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}, \quad O_5 : x^2 + y^2 + 5x + 3y - 3 = 0.$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

a) prosta k_1 i okrąg O_1 mają dwa punkty wspólne,

b) prosta k_2 i okrąg O_2 są rozłączne,

c) prosta k_3 jest styczna do okręgu O_3,

d) prosta k_4 i okrąg O_4 mają dwa punkty wspólne,

e) prosta k_5 i okrąg O_5 są rozłączne.

Zastanowimy się dalej, jak badać można wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie. W tym celu spróbujmy przedstawić na rysunkach wszystkie możliwe położenia dwóch okręgów.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

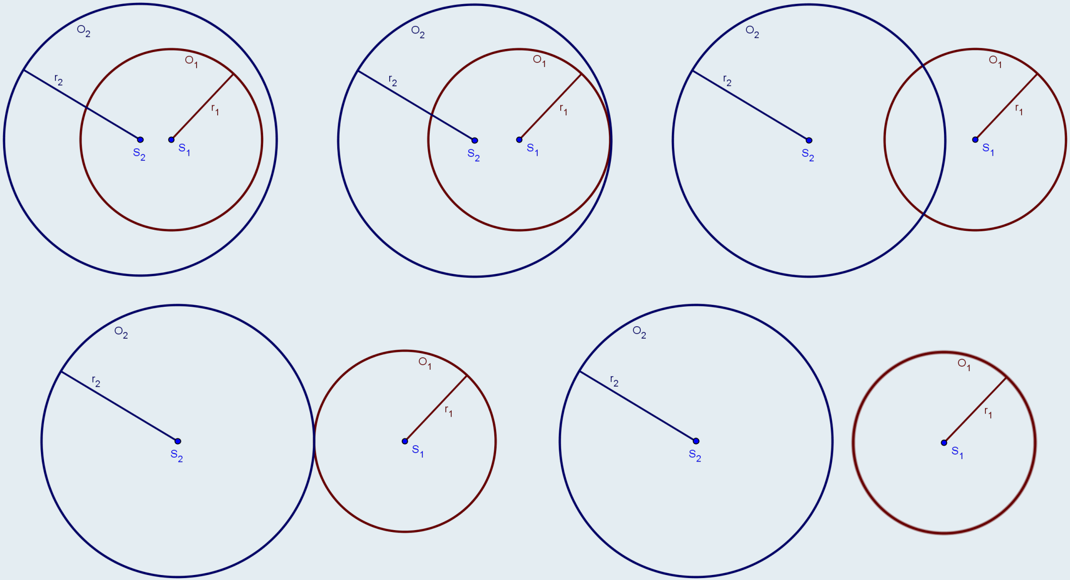
Ćwiczenie 6. Przedstawić na rysunkach wszystkie możliwe położenia dwóch okręgów.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

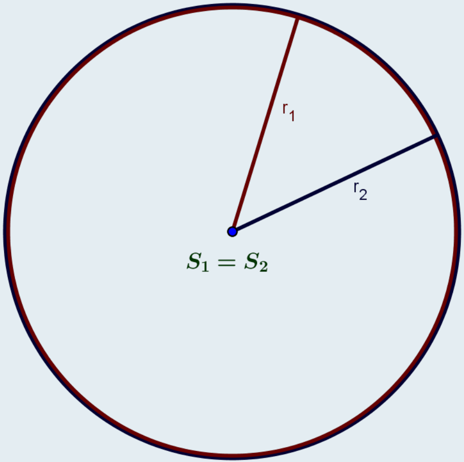
Pewne (ale nie wszystkie możliwe) wzajemne położenia dwóch okręgów przedstawione są na kolejnym slajdzie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie


O2
O1
r2
r1
S2
S1
O2
O1
r2
r1
S2
S1
O2
O1
r2
r1
S2
S1
O2
O1
r2
r1
S2
S1
O2
O1
r2
r1
S2
S1

Zastanów się teraz, jakie z możliwych położeń dwóch okręgów nie zostało przedstawione w tych rysunkach?

Oczywiście może się zdarzyć, że oba okręgi będą miały promienie równej długości i wtedy możliwa jest również następująca sytuacja:


r1
r2
$S_1 = S_2$

Analizując wszystkie przedstawione rysunki spróbuj odpowiedzieć na następujące pytanie:

Problem 7. W jaki sposób zbadać można wzajemne położenie dwóch okręgów na płaszczyźnie.

Oczywista odpowiedź zawarta jest w następującym twierdzeniu:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 7. *Niech $O_1(S_1, r_1)$, $O_2(S_2, r_2)$ będą okręgami.*

(i) *Jeśli $S_1 = S_2$ oraz $r_1 = r_2$, to okręgi są identyczne.*

(ii) *Jeśli $S_1 = S_2$ oraz $r_1 \neq r_2$, to okręgi są współśrodkowe.*

(iii) *Jeśli $0 < |S_1S_2| < |r_1 - r_2|$, to jeden z okręgów leży we wnętrzu koła ograniczonego przez drugi z okręgów.*

(iv) *Jeśli $|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$, to okręgi są styczne wewnętrznie.*

(v) *Jeśli $|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2|$, to okręgi przecinają się.*

(vi) *Jeśli $|S_1S_2| = r_1 + r_2$, to okręgi są styczne zewnętrznie.*

(vii) *Jeśli $|S_1S_2| > r_1 + r_2$, to każdy z okręgów leży na zewnątrz koła ograniczonego drugim z okręgów.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zastosujmy przedstawione twierdzenie w praktyce:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3. Zbadać wzajemne położenie okręgów

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ oraz $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0.$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

D: okrąg O_1 o równaniu

$x^2+y^2-4x-2y-1=0$

okrąg O_2 o równaniu

$x^2+y^2+8x-6y+16=0.$

Sz: wzajemne położenie okręgów O_1 i O_2.

Przekształcając równania okręgów do postaci kanonicznej mamy

$$O_1:\ (x-2)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2,$$
$$O_2:\ (x+4)^2+(y-3)^2=3^2.$$

Stąd $S_1=(2,1)$, $r_1=\sqrt{6}$, $S_2=(-4,3)$, $r_2=3$. Jednocześnie

$$|S_1S_2|=\sqrt{(2-(-4))^2+(1-3)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Ponieważ $r_1+r_2=3+\sqrt{6}<2\sqrt{10}=|S_1S_2|$, więc każdy z okręgów leży na zewnątrz koła ograniczonego przez drugi z okręgów.

Odp. Okręgi O_1 oraz O_2 są wzajemnie zewnętrzne, tzn. każdy z nich leży na zewnątrz koła ograniczonego przez drugi z okręgów.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dla wprawy proponujemy wykonać następujące ćwiczenie:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 7. Zbadać wzajemne położenia podanych par okręgów:

a) $O_1: \; x^2+y^2-4x-4y-17=0,$
$O_1': \; x^2+y^2-2x+2y-1=0,$

b) $O_2: \; x^2+y^2+5x-4y+\frac{5}{4}=0,$
$O_2': \; x^2+y^2+5x+\frac{21}{4}=0,$

c) $O_3: \; x^2+y^2-3x+4y-\frac{11}{4}=0,$
$O_3': \; x^2+y^2-9x-4y+\frac{81}{4}=0,$

d) $O_4: \; x^2+y^2-2x+5y-3=0,$
$O_4': \; x^2+y^2+x-3y=0.$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) okręgi są wewnętrzne, tzn. O_1' leży wewnątrz koła ograniczonego przez O_1,

b) okręgi są styczne wewnętrznie,

c) okręgi są styczne zewnętrznie,

d) okręgi przecinają się (mają dokładnie dwa punkty wspólne).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

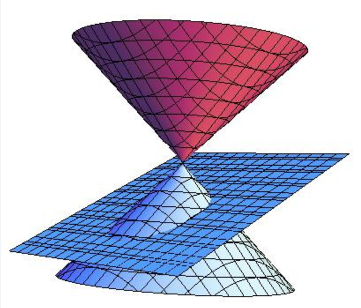
Zajmiemy się dalej szeroką i ciekawą klasą krzywych płaskich. Krzywe te pojawiają się nie tylko w geometrii. Miały one w przeszłości, i mają nadal, szerokie zastosowanie w fizyce, astronomii, architekturze. Zbadanie własności tych krzywych pozwoliło m.in. Keplerowi opisać orbity planet. Możliwa też była budowa teleskopów pozwalających "podglądać" kresy znanego nam wszechświata. Choć nie zawsze w przeszłości aktualny stan rozwoju technicznego był wystarczający do budowy odpowiednio doskonałych urządzeń (teleskopów), to jednak wiedza teoretyczna o tych krzywych pozwalała minimalizację pojawiających się niedoskonałości.

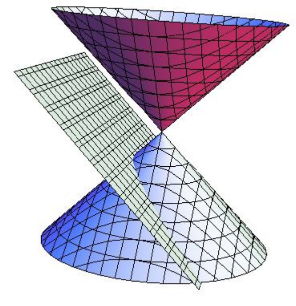
Krzywe stożkowe

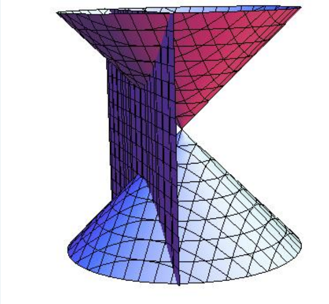
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Historia krzywych stożkowych sięga starożytnej Grecji, gdzie były one badane, m.in. przez Apoloniusza z Pergii, jako krzywe będące przekrojem powierzchni bocznej stożka odpowiednio nachylonymi płaszczyznami. Rozważenie tych krzywych, a w szczególności zbadanie paraboli, pozwoliło Menaechmosowi na rozwiązanie zadania z Delos, bardziej znanego w historii matematyki jako problem podwojenia sześcianu.

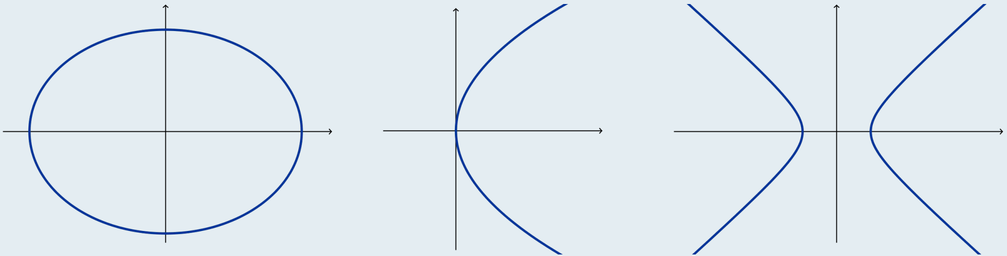
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie





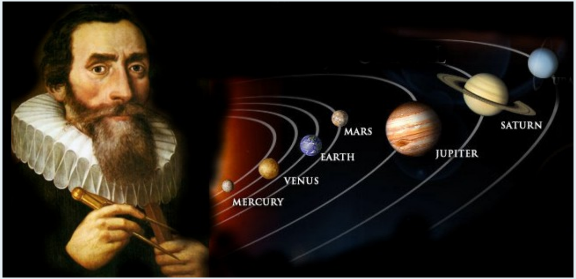


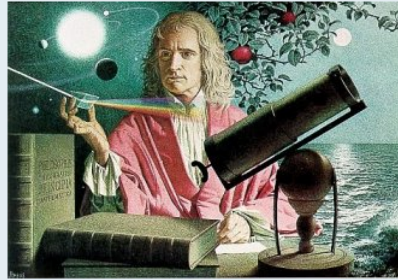
Krzywe stożkowe rozpatrywać można na płaszczyźnie, niezależnie od ich powstania w wyniku przecięcia powierzchni stożka płaszczyznami. Wykorzystując odkrycia Pappusa z Aleksandrii stożkowe opisać można jako "miejsce geometryczne" punktów na płaszczyźnie. Odkrycia starożytnych Greków na długi czas wieków średnich zostały zapomniane. Dorobek ten został odkryty na nowo i doceniony przez matematyków arabskich, którzy tłumacząc dzieła Greków wzbogacili je o nowe wyniki dotyczące konstrukcji stożkowych.



Powstała w Grecji i rozwijana przez Arabów teoria krzywych stożkowych swoje praktyczne zastosowanie w astronomii, gdy kontynuujący badania Mikołaja Kopernika Johannes Kepler, że planety krążą wokół Słońca po orbitach eliptycznych, zaś samo Słońce jest jednym z ognisk tych orbit. Poczyniona przez Keplera obserwacja została później teoretycznie wyprowadzona z praw grawitacji przez Izaaka Newtona. Intensywne badania nad tymi krzywymi doprowadziły do powstania m.in. geometrii analitycznej, co zawdzięczamy głównie pracom Fermata i Kartezjusza. Również dziś stożkowe są wykorzystywane do rozwiązywania problemów dotyczących lotów kosmicznych czy też konstrukcji architektonicznych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



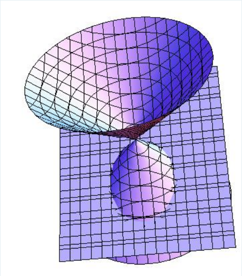


Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

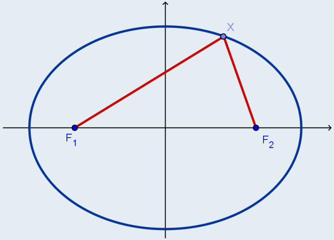
Wyjdziemy od geometrycznych definicji elipsy. Z jednej strony zdefiniujemy elipsę jako krzywą powstałą z przecięcia powierzchni bocznej stożka odpowiednią płaszczyzną, z drugiej strony podamy definicję odwołującą się do czysto metrycznych własności tej krzywej. Wykorzystując drugą z tych definicji wyprowadzimy postać kanoniczną jej równania w układzie współrzędnych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 3. Elipsą nazywamy krzywą otrzymaną w przecięciu stożka taką płaszczyzną, że kąt pomiędzy płaszczyzną przecinającą a osią stożka jest większy od kąta między tworzącą a osią stożka.



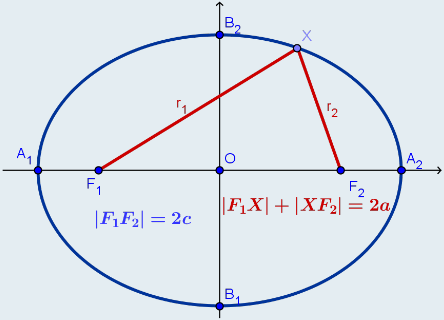
Definicja 4. Elipsą nazywamy krzywą będącą zbiorem wszystkich takich punktów X płaszczyzny, których suma odległości od dwu ustalonych punktów F_1 oraz F_2 zwanych **ogniskami elipsy**, jest stała. Odcinki F_1X oraz F_2X nazywamy **promieniami wodzącymi punktu X**.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 3. Jeśli przyjmiemy $|F_1F_2| = 2c > 0$ i ustalimy $a > c$, to elipsa jest zbiorem wszystkich punktów X płaszczyzny, dla których

$$|F_1X| + |XF_2| = r_1 + r_2 = 2a.$$



Odcinek A_1A_2 o długości $|A_1A_2| = 2a$ nazywamy **osią wielką** elipsy, zaś odcinek B_1B_2 – jej **osią małą**.

Mając definicję elipsy spróbujemy opisać ją równaniem w układzie współrzędnych. Wyjdziemy od następującego przypadku szczególnego.

Przykład 4. Napisać równanie elipsy o ogniskach $F_1 = (-1, 0)$ i $F_2 = (1, 0)$ oraz osi wielkiej długości $2a = 4$.

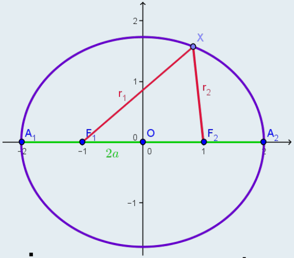
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $F_1 = (-1, 0)$ Sz: równanie elipsy.

$F_2 = (1, 0)$

$2a = r_1 + r_2 = 4$



Niech $X = (x, y)$ będzie punktem poszukiwanej elipsy. Z definicji elipsy wynika zatem, że

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4.$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu i przeniesieniu na prawą stronę wyrażeń nie zawierających pierwiastków otrzymamy

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 7 - x^2 - y^2.$$

Podnosząc powtórnie stronami do kwadratu i redukując dostaniemy

$$3x^2 + 4y^2 = 12.$$

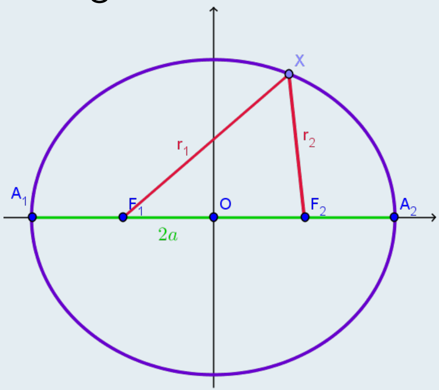
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Poszukiwana elipsa ma równanie

$$3x^2 + 4y^2 = 12.$$

Powtarzając rozumowanie z Przykładu 4, wyprowadzimy równanie kanoniczne elipsy.

Uwaga 4. Mając ogniska F_1 oraz F_2 elipsy E układ współrzędnych umieszczamy tak, by oś OX przechodziła przez te ogniska i jednocześnie początek układu współrzędnych był środkiem odcinka łączącego ogniska. Wtedy można przyjąć $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$ dla pewnego $c \geqslant 0$.



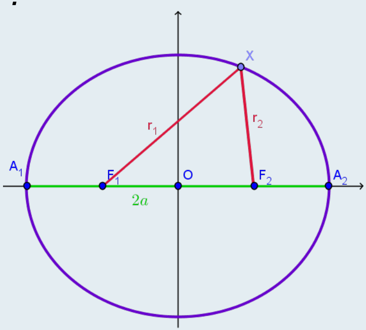
Udowodnimy następujące:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 8. *Ustalmy liczby rzeczywiste $a > c \geqslant 0$. Elipsa o ogniskach $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$ i osi wielkiej długości $|A_1A_2| = 2a$, ma równanie*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

gdzie $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 5. Równanie (2) nazywamy **równaniem kanonicznym elipsy** bądź też **równaniem osiowym elipsy**. Zauważmy ponadto, że w szczególnym przypadku, gdy $c = 0$ (wtedy $b = a$) elipsa jest okręgiem o promieniu długości a.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód Twierdzenia 8. Jeśli $X = (x, y)$ będzie punktem elipsy, to

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu, przeniesieniu na prawą stronę wyrażeń nie zawierających pierwiastków i podzieleniu stronami przez 2 otrzymamy

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2.$$

Podnosząc powtórnie stronami do kwadratu i redukując dostaniemy

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Przyjmując $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ i dzieląc stronami przez a^2b^2 otrzymamy (2). $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 5. Jeśli $a \geqslant b > 0$ są liczbami rzeczywistymi,

$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jest równaniem elipsy E oraz $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, to liczbę

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

nazywamy **mimośrodem** elipsy E.

Uwaga 6. Mimośród elipsy charakteryzuje jej spłaszczenie. Oczywiście $0 \leqslant e < 1$. Wartość mimośrodu bliska liczbie 0 informuje o kształcie "prawie" kolistym. Im wartość mimośrodu jest bliższa 1, tym elipsa jest bardziej "spłaszczona". Można to zaobserwować w następującej prezentacji

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zdefiniujemy jeszcze pewne proste charakterystyczne dla elipsy zwane kierownicami. Jak się to później okaże, możliwa będzie jeszcze jedna definicja elipsy związana z odległością jej punktów od ogniska i od kierownicy.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

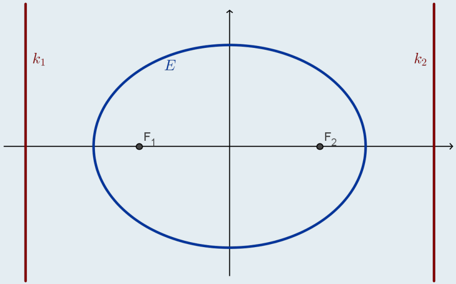
Definicja 6. Jeśli $a > b > 0$ są liczbami rzeczywistymi oraz

$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jest równaniem elipsy E, to proste

$$x = -\frac{a^2}{c} \left(= -\frac{a}{e} \right) \quad \text{oraz} \quad x = \frac{a^2}{c} \left(= \frac{a}{e} \right)$$

nazywamy **kierownicami** elipsy E.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

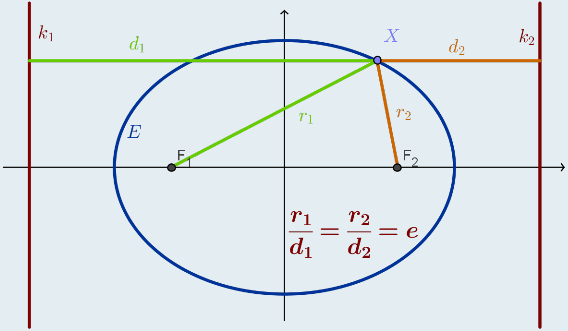
Wykażemy teraz ważne twierdzenie dotyczące kierownic elipsy. Okazuje się, że warunek sformułowany w tym twierdzeniu charakteryzuje elipsę, o czym przekonamy się później, gdy odpowiednio ogólne stwierdzenie sformułujemy dla wszystkich nietrywialnych krzywych stożkowych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 9. *Niech $a > b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Stosunek odległości dowolnego punktu X elipsy*

$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

od jej ogniska do odległości tego punktu od odpowiedniej kierownicy jest stały i równy mimośrodowi e.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

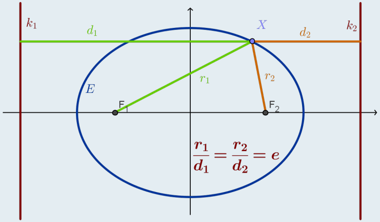
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Ustalmy punkt $X = (x_0, y_0)$ leżący na elipsie E i niech $X' = (-\frac{a}{e}, y_0)$ będzie rzutem prostopadłym punktu X na kierownicę, powiedzmy $k_1 : x = -\frac{a}{e}$. Wówczas



$$d_1 = |XX'| = \left|\frac{a}{e} + x_0\right| = \frac{|a + ex_0|}{e}.$$

Z drugiej strony zachodzi $(x_0+c)^2+y_0^2 = (a+ex_0)^2$ (pozostawiamy do samodzielnego przeliczenia!), więc

$$r_1 = |F_1X| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(a + ex_0)^2} = |a + ex_0|.$$

Zatem $\frac{r_1}{d_1} = e$. Równość $\frac{r_2}{d_2} = e$ dowodzi się w ten sam sposób. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Proponujemy teraz wykonać następujące ćwiczenie mające na celu utrwalenie poznanych wiadomości.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 8. Z podanych równań elips odczytać współrzędne ich ognisk oraz równania kierownic:

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$,

b) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8} = 1$,

c) $4x^2 + 9y^2 = 36$,

d) $5x^2 + 17y^2 = 85$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podamy jedynie odpowiedzi i wskazówki:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$, $k_1 : x = -\frac{25}{3}$, $k_2 : x = \frac{25}{3}$ (*Wskazówka:* elipsa ma równanie $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, $c = 3$);

b) $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$, $k_1 : x = -6$, $k_2 : x = 6$; (*Wskazówka:* elipsa ma równanie $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$, $c = 2$);

c) $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$, $k_1 : x = -\frac{9}{5}\sqrt{5}$, $k_2 : x = \frac{9}{5}\sqrt{5}$ (*Wskazówka:* elipsa ma równanie $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$, $c = \sqrt{5}$);

d) $F_1 = (-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2 = (2\sqrt{3}, 0)$, $k_1 : x = -\frac{17}{6}\sqrt{3}$, $k_2 : x = \frac{17}{6}\sqrt{3}$ (*Wskazówka:* elipsa ma równanie $\frac{x^2}{(\sqrt{17})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, $c = 2\sqrt{3}$).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Tak proste równanie elipsy otrzymamy jedynie wtedy, gdy ogniska położone są na osi OX symetrycznie względem początku układu współrzędnych. Spróbuj zatem samodzielnie opisać równaniem elipsę:

Zadanie 2. Napisać równanie elipsy o ogniskach $F_1 = (-1, 1)$, $F_2 = (2, -1)$ oraz osi wielkiej długości $2a = 5$.

Odpowiedź jest następująca:

Odp. Poszukiwana elipsa ma równanie

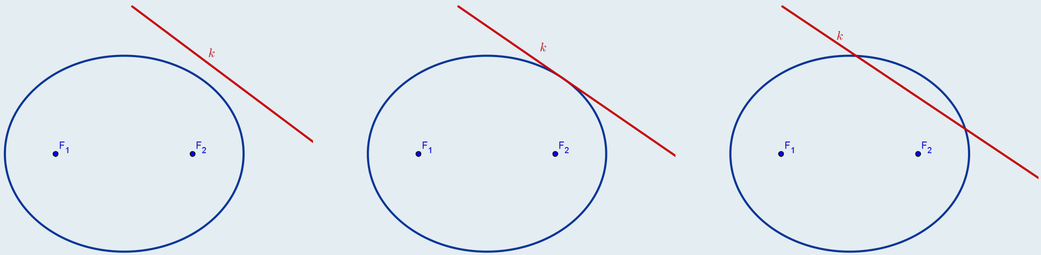
$$16x^2 + 12xy + 21y^2 - 16x - 6y - 71 = 0.$$

Na końcu tego kursu zajmiemy się równaniami tego typu. Opisują one ogólnie krzywe stopnia drugiego, które w pewnych przypadkach muszą być stożkowymi.

Zbadamy teraz inne własności elipsy. Wyjdziemy od analizy wzajemnego położenia prostej i elipsy.

Ćwiczenie 9. Jak względem siebie mogą być położone prosta i elipsa. Potencjalne możliwości zobrazuj rysunkami.

Oczywiście, możliwości wzajemnego położenia prostej i elipsy są następujące:


k
F1
F2
k
F1
F2
k
F1
F2

Zastanówmy się więc, jak można badać wzajemne położenie prostej i elipsy. Spróbuj sobie przypomnieć, jak było analizowane wzajemne położenie prostej i okręgu. Czy wszystkie z przedstawionych wtedy metod mogą być tu zastosowane?

Okazuje się, że jedyną możliwą do zastosowania metodą jest badanie istnienia i ilości rozwiązań odpowiedniego układu równań.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 10. *Ustalmy liczby rzeczywiste* $a > b > 0$ *i takie liczby rzeczywiste* A, B *oraz* C, *że* $A^2 + B^2 > 0$. *Wzajemne położenie prostej*

$$k: \; Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

oraz elipsy

$$E: \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

zależy od wartości wyrażenia $W_1 = A^2a^2 + B^2b^2 - C^2$, *przy czym*

a) *prosta i elipsa są rozłączne, jeśli* $W_1 < 0$,

b) *prosta i elipsa mają jeden punkt wspólny, gdy* $W_1 = 0$,

c) *prosta i elipsa przecinają się w dwóch punktach, gdy* $W_1 > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przedstawimy teraz dowód tego twierdzenia:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Rozwiążemy układ równań (3)-(4). Załóżmy na początek, że $B \neq 0$. Pomnożymy obie strony równania (4) przez B^2 i podstawimy wyznaczoną z równania (3) wartość $By = -Ax - C$. Zatem

$$\frac{B^2x^2}{a^2} + \frac{(-Ax - C)^2}{b^2} = 1,$$

skąd po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymamy

$$(A^2a^2 + B^2b^2)x^2 + 2ACa^2x + (C^2 - B^2b^2)a^2 = 0. \tag{5}$$

Rozwiązania tego równania są odciętymi punktów przecięcia się prostej k z elipsą E. Zatem zbiory rozwiązań układu (3)-(4) oraz równania (5) są równoliczne.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Równanie (5) jest równaniem kwadratowym (przy założeniach twierdzenia mamy $A^2a^2 + B^2b^2 > 0$), więc istnienie i liczba jego rozwiązań zależy od wartości wyróżnika

$$\begin{aligned}\Delta &= (2ACa^2)^2 - 4(A^2a^2 + B^2b^2)(C^2 - B^2b^2)a^2 \\ &= 4a^2b^2B^2(A^2a^2 + B^2b^2 - C^2).\end{aligned}$$

Zatem równanie (5), a więc również układ równań (3)-(4)

a) nie będą miały rozwiązań dla wartości wyróżnika $\Delta < 0$,

b) będą miały dokładnie jedno rozwiązanie dla wyróżnika $\Delta = 0$,

c) będą miały dokładnie dwa rozwiązania dla wyróżnika $\Delta > 0$.

Ponieważ $a^2b^2B^2 > 0$, więc otrzymamy w tym przypadku tezę.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Załóżmy teraz, że $B = 0$. Wtedy $A \neq 0$, więc na mocy (3) mamy

$$x = -\frac{C}{A},$$

co po podstawieniu do równania elipsy E i przekształceniach daje

$$A^2a^2y^2 = b^2(A^2a^2 - C^2). \tag{6}$$

Istnienie i liczba rozwiązań równania (6), a więc i układu (3)-(4), zależy od wartości wyrażenia

$$W_1 = A^2a^2 - C^2 = A^2a^2 + 0^2b^2 - C^2, \quad (B = 0),$$

co również w tym przypadku implikuje tezę i kończy dowód twierdzenia.

$\square$

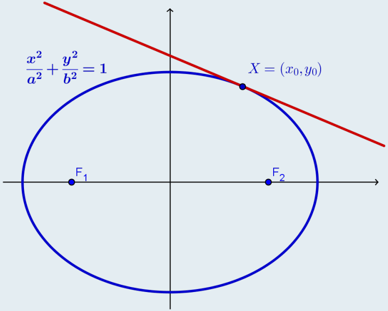
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jako wniosek z Twierdzenia 10 otrzymamy:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 11. *Ustalmy liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Jeśli punkt $X = (x_0, y_0)$ leży na elipsie*



$$E: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

to prosta

$$k: \ \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{7}$$

jest styczna do elipsy E w punkcie X.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Niech $X = (x_0, y_0)$ należy do elipsy E (zatem X spełnia równanie opisujące tą elipsę). Wykażemy, że

1. $X \in k$,
2. prosta k ma dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą E.

Krok 1. Podstawiając współrzędne punktu X do równania prostej k otrzymamy równość równoważną warunkowi $X \in E$ (jeśli punkt X spełnia równanie prostej k, to X spełnia równanie elipsy E).

Krok 2. Wykorzystamy Twierdzenie 10. Zauważmy, że

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 b^2 - 1 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

więc prosta k ma dokładnie jeden punkt wspólny z elipsą E. Zatem prosta k jest styczna do elipsy E w punkcie X. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Poznane wiadomości wykorzystamy w rozwiązaniu przykładowego zadania, analogicznego do tego rozwiązanego dla okręgów.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5. Napisać równanie stycznych do elipsy

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

przechodzących przez punkt $A = (6, 4)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

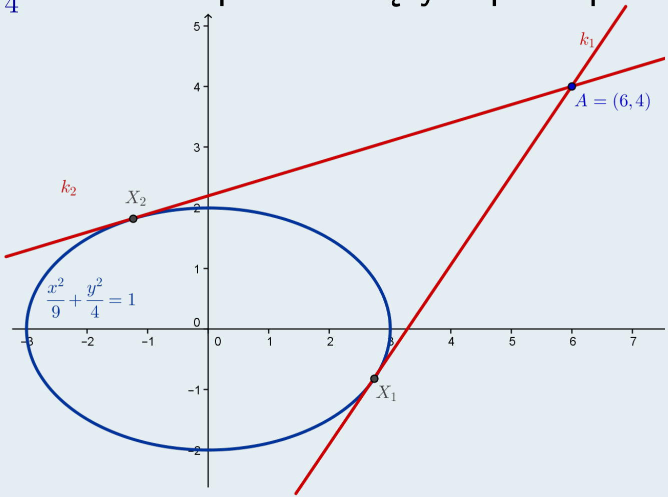
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (6,4)$

$E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Sz: równania stycznych do elipsy E przechodzących przez punkt A.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbujmy stworzyć plan rozwiązania tego zadania. Rozwiązaliśmy już podobny problem dla okręgu. Spróbujmy więc zaplanować rozwiązanie naśladując jedną z możliwości rozwiązania podobnego problemu dla okręgu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Oczywiście, najprostszą możliwością jest:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

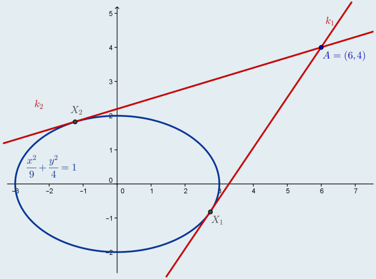
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Znalezienie na elipsie E takich punktów $X = (x_0, y_0)$, że styczna do elipsy wystawiona w tych punktach przechodzi przez punkt A. Tym samym mamy

Plan rozwiązania zadania

Znaleźć takie punkty $X = (x_0, y_0)$, że:

1. $X \in E$,
2. $A \in k$, gdzie k jest prostą styczną do E wystawioną w punkcie X.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zrealizujemy teraz nasz plan.

Rozwiązanie.

D: $A = (5, 3)$ Sz: równania stycznych do elipsy E

$E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ przechodzących przez punkt A.

Niech $X = (x_0, y_0) \in E$. Wówczas

$$\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1.$$

Jednocześnie prosta k styczna do elipsy E wystawiona w punkcie X ma równanie

$$k : \frac{x_0 x}{9} + \frac{y_0 y}{4} = 1.$$

Podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej k otrzymamy

$$\frac{2}{3} x_0 + y_0 = 1.$$

Musimy więc rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} & = & 1 \\ \frac{2}{3}x_0 + y_0 & = & 1. \end{cases}$$

Wyznaczając z drugiego z równań układu $y_0 = 1 - \frac{2}{3}x_0$, i podstawiając do pierwszego z równań otrzymamy

$$\frac{x_0^2}{9} + \frac{(1 - \frac{2}{3}x_0)^2}{4} = 1.$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu dostaniemy równanie

$$8x^2 - 12x - 27 = 0,$$

którego rozwiązaniami są liczby

$$x_1 = \frac{3}{4}(1 - \sqrt{7}), \quad x_2 = \frac{3}{4}(1 + \sqrt{7}).$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ostatecznie otrzymamy więc rozwiązanie układu równań postaci

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{4}\left(1-\sqrt{7}\right) \\ y_0 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{7}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = \frac{3}{4}\left(1+\sqrt{7}\right) \\ y_0 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{7}\right). \end{cases}$$

Wracając do równania prostej k mamy

$$k_1: \ \frac{1}{12}\left(1-\sqrt{7}\right)x + \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{7}\right)y = 1,$$

$$k_2: \ \frac{1}{12}\left(1+\sqrt{7}\right)x + \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{7}\right)y = 1,$$

więc po redukcjach otrzymamy poszukiwane równania prostych:

$$k_1: \ 2\left(1-\sqrt{7}\right)x + 3\left(1+\sqrt{7}\right)y - 24 = 0,$$

$$k_2: \ 2\left(1+\sqrt{7}\right)x + 3\left(1-\sqrt{7}\right)y - 24 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

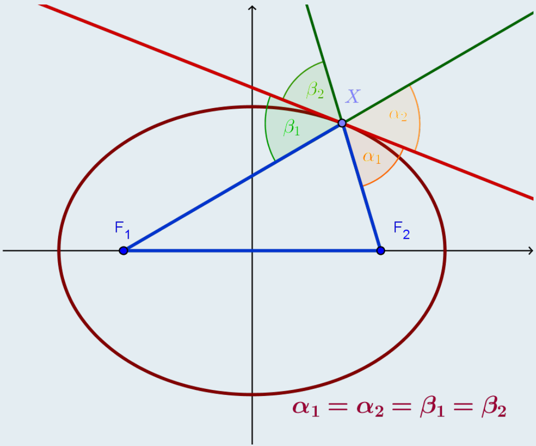
Odp. Poszukiwane proste mają równania

$$k_1: \ 2\left(1-\sqrt{7}\right)x+3\left(1+\sqrt{7}\right)y-24=0,$$

$$k_2: \ 2\left(1+\sqrt{7}\right)x+3\left(1-\sqrt{7}\right)y-24=0.$$

Sformułujemy teraz i podamy bez dowodu istotną w zastosowaniach własność stycznej do elipsy.

Twierdzenie 12. *Niech F_1 oraz F_2 będą ogniskami elipsy E (nie bedącej okręgiem!) i niech $X \in E$. Wówczas styczna do elipsy E połowi każdy z kątów zewnętrznych trójkąta $\triangle F_1 X F_2$ przy wierzchołku X.*

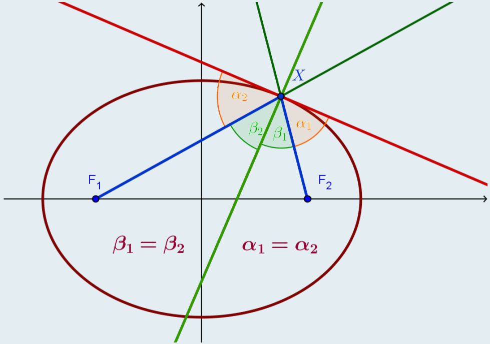


$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$$

Istotnym wnioskiem z tego twierdzenia ważnym w zastosowaniach w optyce jest:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 13. *Niech F_1 oraz F_2 będą ogniskami elipsy E (nie będącej okręgiem) i niech $X \in E$. Wtedy kąty przedstawione na rysunku mają parami równe miary.*



Wynika stąd, że promień świetlny wychodzący z jednego z ognisk elipsy po odbiciu od zwierciadła eliptycznego przechodzi przez drugie z ognisk.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Twierdzenie to wykorzystamy do rozwiązania następującego zadania z fizyki.

Przykład 6. Rozważmy zwierciadło będące prawą połową elipsy o równaniu

$$E: \ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Z prawego ogniska F_2 tej elipsy wychodzi promień świetlny nachylony do osi OX pod kątem $45°$. Wyznaczyć punkt, w którym promień ten, po odbiciu od wewnętrznej strony zwierciadła, przetnie lewą kierownicę elipsy E.

Jak przy wszystkich zadaniach, wypiszmy dane, szukane i wykonajmy rysunek.

Mamy zatem:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ Sz: punkt na lewej kierownicy elipsy E.
$\alpha = 45^\circ$

Z równania elipsy E odczytamy $a = 5$ oraz $b = 4$. Stąd $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Zatem ogniska elipsy E mają współrzędne

$$F_1 = (-3, 0), \quad F_2 = (3, 0).$$

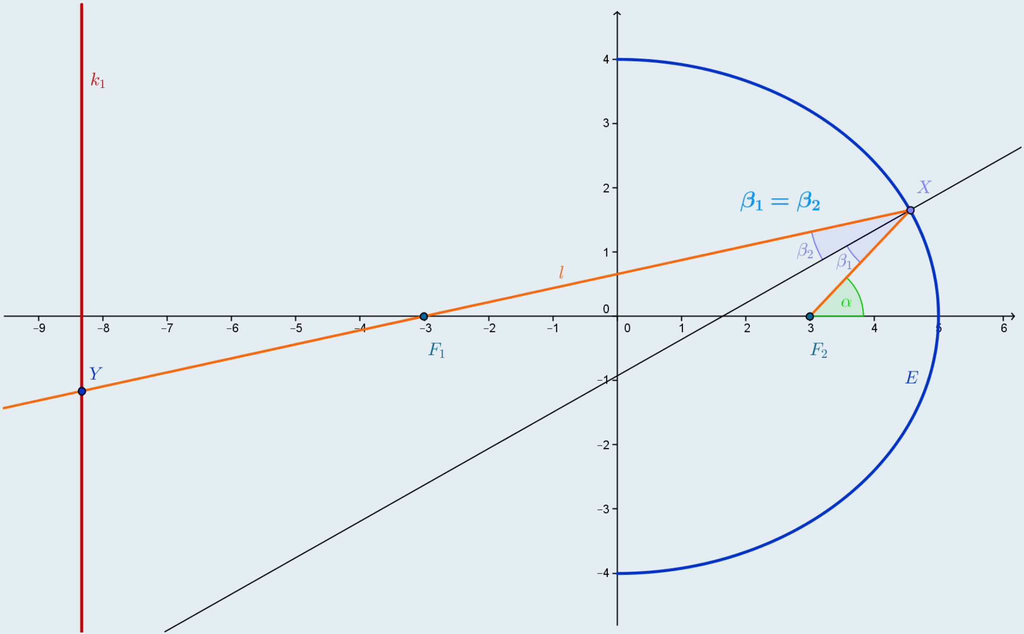
Jednocześnie lewa kierownica elipsy E ma równanie

$$k_1 : x = -\frac{25}{3}.$$

Możemy więc wykonać następujący rysunek

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

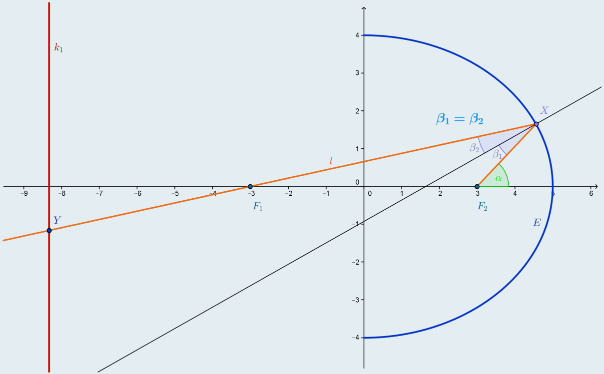
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Obserwując wykonany rysunek spróbuj opracować plan rozwiązania tego zadanie

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Plan jest następujący:

Plan rozwiązania zadania – wyznaczymy:



1. równanie prostej k przechodzącej przez F_2 i nachylonej do osi OX pod kątem $\alpha = 45°$,
2. współrzędne punktu X przecięcia się prostej k z elipsą E,
3. równanie prostej l przechodzącej przez X i F_2,
4. współrzędne punktu Y przecięcia się prostej l kierownicą k_1.

Zrealizujemy teraz przedstawiony plan.

Rozwiązanie.

D: $E : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ Sz: punkt na lewej kierownicy elipsy E.

$\alpha = 45^\circ$

Krok 1. Prosta k przechodząca przez F_2 i nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 45^\circ$ ma równanie

$$k : \ y = x - 3.$$

Krok 2. Współrzędne punktu X (przecięcia się prostej k i elipsy E) spełniają układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1, \\ y = x - 3, \end{cases}$$

przy warunku $x > 0$ (rozważamy jedynie prawą połowę elipsy E). Podstawiając do pierwszego z równań $y = x - 3$ wyznaczone z drugiego otrzymamy równanie

$$41x^2 - 150x + 225 = 0,$$

którego jedynym rozwiązanie dodatnim jest $x = \frac{5}{41}(15 + 16\sqrt{2})$. Wtedy $y = x - 3 = \frac{16}{41}(-3 + 5\sqrt{2})$. Zatem

$$X = \left(\tfrac{5}{41}(15 + 16\sqrt{2}), \tfrac{16}{41}(-3 + 5\sqrt{2})\right).$$

Krok 3. Prosta l przechodząca przez punkty F_1 oraz X ma równanie

$$l: \; y = \frac{8}{161}(-17 + 15\sqrt{2})(x+3).$$

Krok 4. Współrzędne punktu Y (przecięcia się prostej l i kierownicy k_1) spełniają układ równań

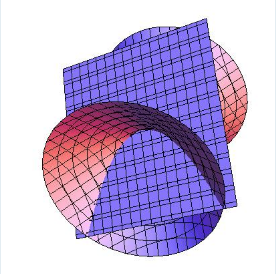
$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{161}(-17 + 15\sqrt{2})(x+3), \\ x = -\dfrac{25}{3}, \end{cases}$$

więc $Y = \left(-\frac{25}{3}, -\frac{128}{483}(-17 + 15\sqrt{2})\right)$.

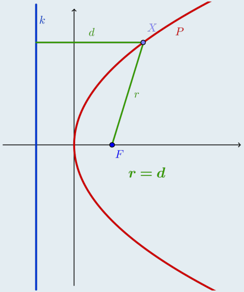
Odp. Promień świetlny przetnie lewą kierownicę elipsy E w punkcie o rzędnej $-\frac{128}{483}(-17+15\sqrt{2})$.

Przejdziemy teraz do kolejnej stożkowej: paraboli. Podamy geometryczne definicje tej krzywej. Z jednej strony parabola jest krzywą powstałą z przecięcia powierzchni bocznej stożka odpowiednią płaszczyzną, z drugiej strony przytoczymy definicję wykorzystującą metryczne własności tej krzywej na płaszczyźnie. W oparciu o drugą z tych definicji wyprowadzimy postać kanoniczną jej równania w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Definicja 7. **Parabolą** nazywamy krzywą otrzymaną w przecięciu stożka taką płaszczyzną nie zawierającą tworzącej, że kąt pomiędzy płaszczyzną przecinającą a osią stożka jest równy kątowi między tworzącą a osią stożka (tworząca jest równoległa do płaszczyzny tnącej, ale nie jest w niej zawarta).



Definicja 8. **Parabolą** nazywamy krzywą będącą zbiorem wszystkich punktów X płaszczyzny, których odległość ustalonego punktu F (**ogniska paraboli**) równa jest ich odległości oraz ustalonej prostej k (**kierownica paraboli**) nie przechodzącej przez F.



Znając definicję paraboli opiszemy opisać ją równaniem w układzie współrzędnych. Wyjdziemy od następującego przypadku szczególnego.

Przykład 7. Napisać równanie paraboli o ognisku $F = (0, 1)$ i kierownicy opisanej równaniem $y = -1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

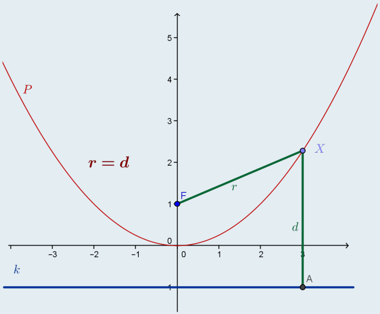
Rozwiązanie.

D: ognisko $F = (0,1)$ Sz: równanie paraboli.

kierownica $k: \ y = -1$

Niech $X = (x,y)$ będzie punktem poszukiwanej paraboli. Z jej definicji wynika więc, że

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = |y+1|.$$



Po podniesieniu stronami do kwadratu otrzymamy

$$x^2 = 4y,$$

więc

$$y = \frac{x^2}{4},$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

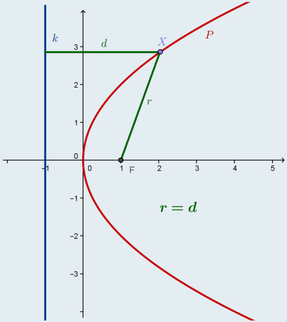
Odp. Poszukiwana parabola ma równanie

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Powtarzając rozumowanie z Przykładu 7, wyprowadzimy równanie kanoniczne paraboli.

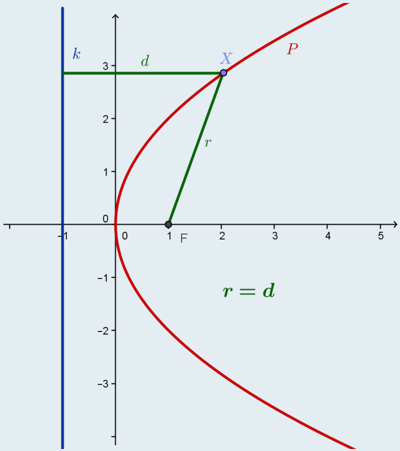
Uwaga 7. Mając ognisko F oraz kierownicę k paraboli P, układ współrzędnych umieszczamy tak, by oś OX była prostopadła do kierownicy k, przechodziła przez ognisko F i jednocześnie początek układu współrzędnych był środkiem odcinka łączącego ognisko i jego rzut prostopadły na kierownicę. Wtedy można przyjąć $F = \left(\frac{1}{2}p, 0\right)$ oraz $k: \; x = -\frac{1}{2}p$ dla pewnego $p > 0$.



Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 14. *Ustalmy liczbę rzeczywistą $p > 0$. Parabola o ognisku $F = (\frac{1}{2}p, 0)$ oraz kierownicy $k:\ x = -\frac{1}{2}p$ ma równanie*

$$y^2 = 2px. \tag{8}$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 8. Równanie (8) nazywamy **równaniem kanonicznym paraboli** lub też **równaniem wierzchołkowym paraboli**. Oś OX nazywamy **osią paraboli**.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód Twierdzenia 14. Jeśli $X = (x, y)$ jest punktem elipsy, to

$$\sqrt{\left(x - \tfrac{1}{2}p\right)^2 + y^2} = \left|x + \tfrac{1}{2}p\right|.$$

Ponosząc stronami do kwadratu mamy

$$\left(x - \tfrac{1}{2}p\right)^2 + y^2 = \left(x + \tfrac{1}{2}p\right)^2.$$

Wykonując potęgowanie i redukując otrzymamy (8). $\square$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 9. Jeśli $p > 0$ jest liczbą rzeczywistą,

$$P: \ y^2 = 2px$$

jest równaniem paraboli P, to

$$e = 1$$

jest **mimośrodem** paraboli P.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Proponujemy teraz wykonać następujące ćwiczenie mające na celu utrwalenie poznanych wiadomości.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 10. Z podanych równań paraboli odczytać współrzędne ich ogniska oraz równanie kierownicy:

a) $y^2 = 6x$,

b) $y^2 = 9x$.

Podamy jedynie odpowiedzi:

Odp.

a) $F = (\frac{3}{2}, 0))$, $k : x = -\frac{3}{2}$;

b) $F = (\frac{9}{4}, 0)$, $k : x = -\frac{9}{4}$.

Podobnie, jak to było dla elipsy, tak nieskomplikowane równanie paraboli otrzymujemy jedynie w szczególnych przypadkach położenia ogniska i kierownicy paraboli. Spróbuj więc samodzielnie opisać równaniem parabolę:

Zadanie 3. Napisać równanie paraboli o ognisku $F = (2, 1)$ i kierownicy danej równaniem $k: \; y = -2x$.

Odpowiedź jest następująca:

Odp. Poszukiwaną parabolę można opisać równaniem

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 20x - 10y + 25 = 0.$$

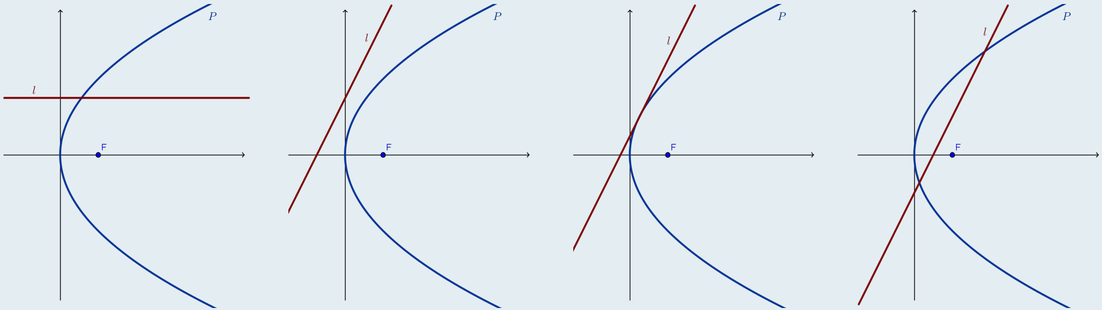
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zbadamy teraz kolejne własności paraboli. Przejdziemy do analizy wzajemnego położenia prostej i elipsy.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 11. Jak względem siebie mogą być położone prosta i parabola. Możliwe przypadki przedstaw na rysunkach.

Możliwości wzajemnego położenia prostej i paraboli są następujące:


l
P
F
l
P
F
l
P
F
l
P
F

Podobnie, jak to było dla elipsy, przeanalizujemy teraz analitycznie, w zależności od parametrów opisujących równania prostej i paraboli, wzajemne ich położenie. Również tutaj jedyną możliwą do zastosowania metodą jest badanie istnienia i ilości rozwiązań odpowiedniego układu równań.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 15. *Ustalmy $p > 0$ i takie liczby rzeczywiste A, B oraz C, że $A^2 + B^2 > 0$. Wzajemne położenie prostej*

$$l: \; Ax + By + C = 0 \tag{9}$$

oraz paraboli

$$P: \; y^2 = 2px \tag{10}$$

zależy od parametru A i wartości $W_2 = B^2p - 2AC$, przy czym:

a) dla $A = 0$ prosta l przecina parabolę P w jednym punkcie,

b) dla $A \neq 0$ prosta l (nierównoległa do osi OX):

(i) jest rozłączna z parabolą P, gdy $W_2 < 0$,

(ii) ma jeden punkt wspólny z parabolą P, gdy $W_2 = 0$,

(iii) ma dwa punkty wspólne z parabolą P, gdy $W_2 > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przedstawimy teraz dowód tego twierdzenia:

Dowód. Rozwiążemy układ równań (9)-(10). Niech $B \neq 0$. Mnożąc obie strony równania (10) przez B^2 i podstawimy wyznaczoną z równania (9) wartość $By = -Ax - C$ otrzymamy

$$(-Ax - C)^2 = 2B^2px,$$

skąd po przekształceniach i uporządkowaniu mamy

$$A^2x^2 - 2(B^2p - AC)x + C^2 = 0. \tag{11}$$

Rozwiązania tego równania są odciętymi punktów przecięcia się prostej l z parabolą P, więc liczba rozwiązań układu (9)-(10) jest równa liczbie rozwiązań równania (11).

Jeśli $A = 0$ (l jest równoległa do osi OX oraz $B \neq 0$), to (11) jest równaniem liniowym postaci

$$2B^2px = C^2$$

i ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dla $A \neq 0$ równanie (11) jest równaniem kwadratowym i istnienie oraz liczba jego rozwiązań zależy od wartości wyróżnika

$$\Delta = 4(B^2p - AC)^2 - 4A^2C^2 = 4B^2p(B^2p - 2AC).$$

Zatem równanie (11), a więc również układ równań (9)-(10):

a) nie będą miały rozwiązań dla wartości wyróżnika $\Delta < 0$,

b) będą miały dokładnie jedno rozwiązanie dla wyróżnika $\Delta = 0$,

c) będą miały dokładnie dwa rozwiązania dla wyróżnika $\Delta > 0$.

Ponieważ $B^2p > 0$, więc otrzymamy w tym przypadku tezę.

Niech dalej $B = 0$. Wtedy $A \neq 0$, więc na mocy (9) mamy

$$x = -\frac{C}{A},$$

co po podstawieniu do równania paraboli P i przekształceniach daje

$$y^2 = \frac{p}{A^2}(-2AC^2) = \frac{p}{A^2}(0^2 p - 2AC). \tag{12}$$

Istnienie i liczba rozwiązań równania (12), a więc i układu (9)-(10), zależy od wartości wyrażenia

$$W_2 = 0^2 p - 2AC, \quad (B = 0),$$

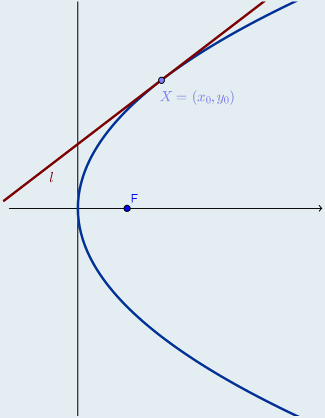
co również w tym przypadku implikuje tezę i kończy dowód twierdzenia.

$\square$

Jako wniosek z Twierdzenia 15 otrzymamy:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 16. *Ustalmy* $p > 0$. *Jeśli punkt* $X = (x_0, y_0)$ *leży na paraboli*



$$P: \; y^2 = 2px,$$

to prosta

$$l: \; y_0 y = p(x + x_0) \tag{13}$$

jest styczna do paraboli P *w punkcie* X.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Niech $X = (x_0, y_0)$ należy do paraboli P (zatem X spełnia równanie opisujące tą parabolę). Wykażemy, że

1. $X \in l$,
2. prosta l nie jest równoległa do osi OX i ma dokładnie jeden punkt wspólny z parabolą P.

Krok 1. Podstawiając współrzędne punktu X do równania prostej l otrzymamy równość równoważną warunkowi $X \in P$ (jeśli punkt X spełnia równanie prostej l, to X spełnia równanie paraboli P).
Krok 2. Wykorzystamy Twierdzenie 15. Zauważmy, że prosta l nie jest równoległa do osi OX ($p > 0$) oraz

$$W_2 = y_0^2 p - 2p \cdot p x_0 = p(y_0^2 - 2p x_0) = 0.$$

Stąd l ma jeden punkt wspólny z parabolą P, a ponieważ l nie jest równoległa do osi OX, więc jest styczna do paraboli P. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Poznane wiadomości wykorzystamy w rozwiązaniu przykładowego zadania.

Przykład 8. Napisać równanie stycznej do paraboli

$$y^2 = 5x$$

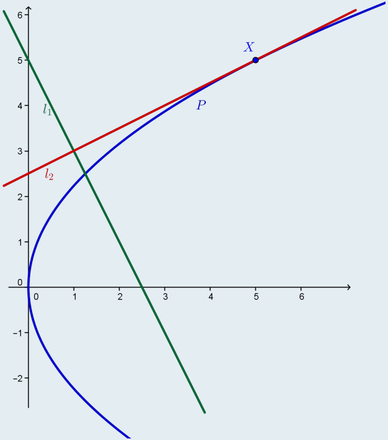
i prostopadłej do prostej $l_1 : y = -2x + 5$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: prosta $l_1 : \; y = -2x + 5$
parabola $P : y^2 = 5x$

Sz: równanie stycznej l_2 do paraboli P i prostopadłej do prostej l_1.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbujmy opracować plan rozwiązania tego zadania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

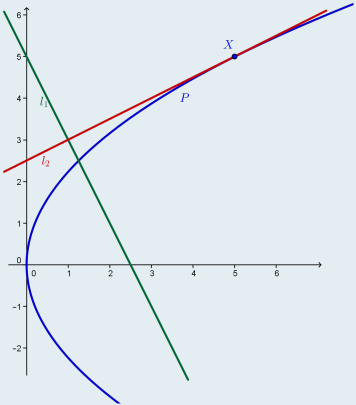
Oczywiście, najbardziej oczywistą możliwością jest ...

znalezienie na paraboli P takiego punktu $X = (x_0, y_0)$, że styczna l_2 do paraboli wystawiona w tym punkcie jest prostopadła do prostej l_2.
Zatem:

Plan rozwiązania zadania

Znaleźć taki punkt $X = (x_0, y_0)$, że:

1. $X \in P$,
2. $l_1 \perp l_2$, gdzie l_2 jest prostą styczną do P wystawioną w punkcie X.



Zrealizujemy teraz nasz plan.

Rozwiązanie.

D: prosta $l_1: \ y = -2x + 5$
parabola $P: y^2 = 5x$

Sz: równanie stycznej l_2 do paraboli P i prostopadłej do prostej l_1.

Niech $X = (x_0, y_0) \in P$. Wówczas

$$y_0^2 = 5x_0. \tag{14}$$

Prosta l_2 styczna do paraboli P w punkcie X ma równanie

$$l_2: \ y_0 y = \frac{5}{2}(x + x_0).$$

Z warunków zadania wynika, że $y_0 \neq 0$, gdyż prosta prostopadła do prostej l_1 nie może być równoległa do osi OY. Zatem

$$l_2: \ y = \frac{5}{2y_0}x + \frac{5x_0}{2y_0}.$$

Ponieważ $l_2 \perp l_1$, więc $\frac{5}{2y_0} = \frac{1}{2}$, czyli $y_0 = 5$. Wówczas z (14) otrzymamy $x_0 = 5$. Ostatecznie więc równanie poszukiwanej prostej l_2 ma postać

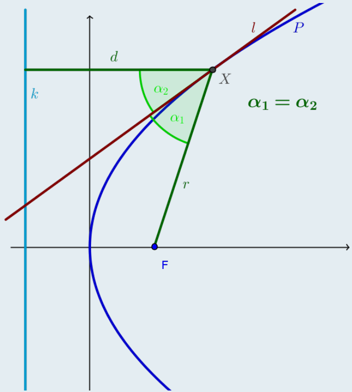
$$l_2 : \; y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Odp. Poszukiwana prosta ma równanie

$$l_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Podamy teraz bez dowodu istotną w zastosowaniach własność stycznej do paraboli.

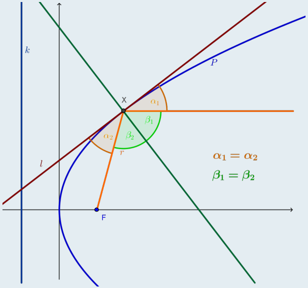
Twierdzenie 17. *Niech F będzie ogniskiem paraboli P, k – jej kierownicą i niech $X \in E$. Wówczas styczna do paraboli P połowi kąt między promieniem wodzącym punktu X oraz prostą prostopadłą do kierownicy k przechodzącą przez punkt X.*



Istotnym wnioskiem z tego twierdzenia ważnym w zastosowaniach w optyce jest:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 18. *Niech F będzie ogniskiem paraboli P, k – jej kierownicą i niech $X \in P$. Wtedy kąty przedstawione na rysunku mają parami równe miary.*



Wynika stąd, że promień świetlny wychodzący z nieskończoności (obiekt wysyłający światło z bardzo dużej odległości) w kierunku osi zwierciadła parabolicznego po odbiciu od tego zwierciadła przechodzi przez ognisko paraboli.

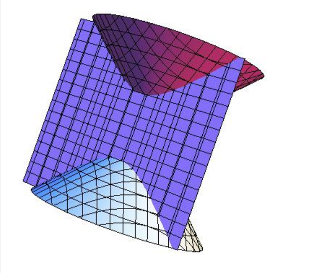
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

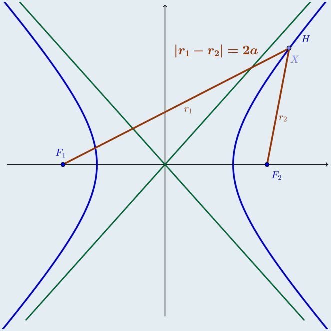
Na koniec zbadamy hiperbolę. Podamy jej geometryczne definicje. Z jednej strony jest to krzywa powstała z przecięcia powierzchni bocznej stożka odpowiednią płaszczyzną, z drugiej strony przytoczymy definicję wykorzystującą metryczne własności hiperboli na płaszczyźnie. W oparciu o drugą z tych definicji wyprowadzimy postać kanoniczną jej równania w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 9. Hiperbolą nazywamy krzywą otrzymaną w przecięciu stożka taką płaszczyzną, że kąt pomiędzy płaszczyzną przecinającą a osią stożka jest mniejszy od kąta między tworzącą a osią stożka.

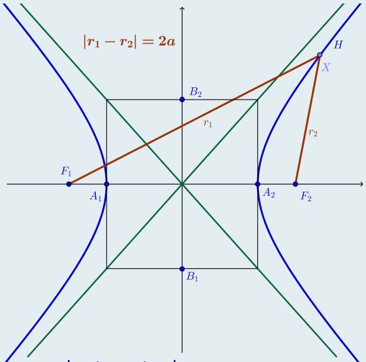


Definicja 10. Hiperbolą nazywamy krzywą będącą zbiorem wszystkich takich punktów X płaszczyzny, których wartość bezwzględna różnicy odległości od dwu ustalonych punktów F_1 oraz F_2 zwanych **ogniskami hiperboli**, jest stała. Odcinki F_1X oraz F_2X nazywamy **promieniami wodzącymi punktu X**.



Uwaga 10. Jeśli przyjmiemy $|F_1F_2| = 2c > 0$ i ustalimy $a < c$, to hiperbola jest zbiorem wszystkich punktów X płaszczyzny, dla których

$$||F_1X| - |XF_2|| = |r_1 - r_2| = 2a.$$



Odcinek A_1A_2 o długości $|A_1A_2| = 2a$ nazywamy **osią rzeczywistą** hiperboli, zaś odcinek B_1B_2 – jej **osią urojoną**.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Znając definicję hiperboli opiszemy ją równaniem w układzie współrzędnych. W trakcie nauki szkolnej pojawiło się już pojęcie hiperboli na określenie wykresu pewnej szczególnej funkcji. Wyjdziemy zatem od stosownego przykładu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 9. Napisać równanie hiperboli o ogniskach

$$F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{oraz} \quad F_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

i osi wielkiej długości $2a = 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie.

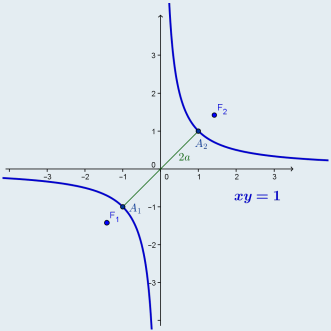
D: $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ Sz: równanie elipsy.

$F_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$2a = |r_1 - r_2| = 2\sqrt{2}$

Niech $X = (x, y)$ będzie punktem poszukiwanej hiperboli. Z jej definicji wynika, że

$$\left|\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2}\right| = 2\sqrt{2}.$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Po podniesieniu stronami do kwadratu i przeniesieniu na prawą stronę wyrażeń nie zawierających pierwiastków otrzymamy

$$\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y+\sqrt{2})^2}\sqrt{(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2} = x^2+y^2.$$

Podnosząc powtórnie stronami do kwadratu i redukując dostaniemy

$$xy = 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Poszukiwana hiperbola ma równanie

$$xy = 1.$$

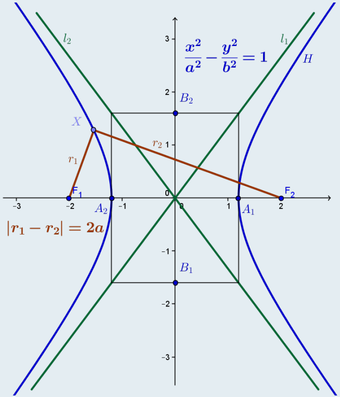
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozumując jak w rozwiązaniu Przykładu 9, wyprowadzimy równanie kanoniczne hiperboli.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 11. Mając ogniska F_1 oraz F_2 hiperboli H układ współrzędnych umieszczamy tak, by oś OX przechodziła przez te ogniska i jednocześnie początek układu współrzędnych był środkiem odcinka łączącego ogniska. Wtedy można przyjąć $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$ dla pewnego $c > 0$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

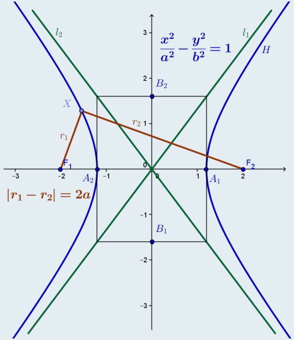
Udowodnimy następujące:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 19. *Ustalmy liczby rzeczywiste $c > a > 0$. Hiperbola o ogniskach $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$ i osi rzeczywistej długości $|A_1A_2| = 2a$, ma równanie*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{15}$$

gdzie $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 12. Równanie (15) nazywamy **równaniem kanonicznym hiperboli** bądź też **równaniem osiowym hiperboli**. W szczególnym przypadku, gdy $a = b$, hiperbolę H nazywamy **równoosiową**

Proste o równaniach

$$l_1 : y = \frac{b}{a}x,$$

$$l_2 : y = -\frac{b}{a}x$$

nazywamy **asymptotami hiperboli** H.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przeprowadzimy teraz dowód Twierdzenia 19.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód Twierdzenia 19. Jeśli $X = (x, y)$ jest punktem na hiperboli H, to

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Po podniesieniu stronami do kwadratu, przeniesieniu na prawą stronę wyrażeń nie zawierających pierwiastków i podzieleniu stronami przez 2 otrzymamy

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} = c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2.$$

Podnosząc powtórnie stronami do kwadratu i redukując dostaniemy

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Przyjmując $b = \sqrt{c^2-a^2}$ i dzieląc stronami przez a^2b^2 otrzymamy (15). $\square$

Definicja 11. Niech $a, b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi,

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

niech będzie hiperbolą oraz $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Liczbę

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

nazywamy **mimośrodem** hiperboli H.

Uwaga 13. Mimośród hiperboli spełnia nierówność $e > 1$ i charakteryzuje jej kształt, co można to zaobserwować w następującej prezentacji

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

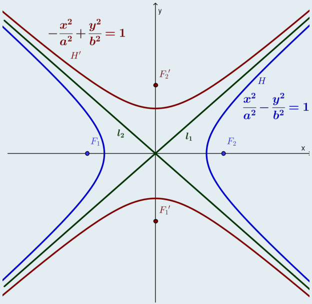
Definicja 12. Niech $a, b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi oraz

$$H: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

niech będzie hiperbolą. Hiperbolę

$$H': \ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nazywamy **hiperbolą sprzężoną** z H.



Uwaga 14. Niech $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Ogniska hiperboli H mają współrzędne

$$F_1 = (-c, 0) \quad \text{oraz} \quad F_2 = (c, 0),$$

zaś ogniska hiperboli sprzężonej H' –

$$F_1' = (0, -c) \quad \text{oraz} \quad F_2' = (0, c).$$

Hiperbole H oraz H' mają wspólne asymptoty.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zdefiniujemy następnie pewne proste charakterystyczne dla hiperboli zwane jej kierownicami. Podobnie, jak to już zapowiedziano wcześniej dla elipsy, również tutaj możliwa będzie jeszcze jedna definicja elipsy związana z odległością jej punktów od ogniska i od kierownicy.

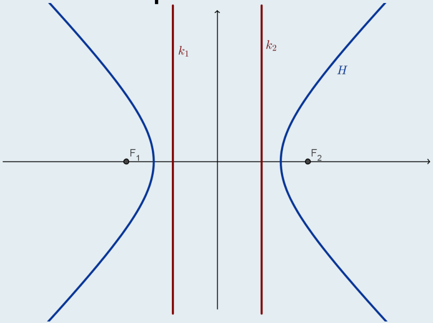
Definicja 13. Jeśli $a, b > 0$ są liczbami rzeczywistymi oraz

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

jest równaniem hiperboli H, to proste

$$x = -\frac{a^2}{c} \left(= -\frac{a}{e} \right) \quad \text{oraz} \quad x = \frac{a^2}{c} \left(= \frac{a}{e} \right)$$

nazywamy **kierownicami** hiperboli H.



Wykażemy teraz ważną własność dotyczącą kierownic hiperboli, która jak to się później okaże, charakteryzuje tą krzywą. Nim to jednak uczynimy, wprowadzimy dodatkowe, istotne tu oznaczenia

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

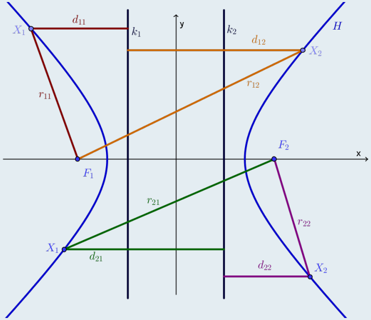
Uwaga 15. Niech $a, b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi oraz

$$H: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

niech będzie hiperbolą. Oznaczymy promienie wodzące punktu na hiperboli w zależności jego położenia: $X_1 = (x_1, y_1)$ na lewej gałęzi oraz $X_2 = (x_2, y_2)$ na prawej gałęzi.

Można też pokazać, że

$$r_{11} = -a - ex_1, \quad r_{12} = a + ex_2,$$
$$r_{21} = a - ex_1, \quad r_{22} = a - ex_2.$$



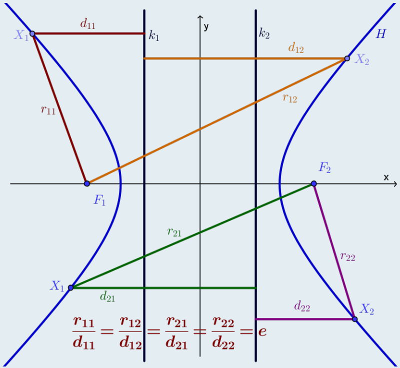
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 20. *Niech $a, b > 0$ będą liczbami rzeczywistymi. Stosunek odległości dowolnego punktu X hiperboli*

$$H: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

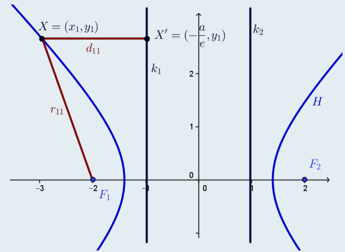
od jej ogniska do odległości tego punktu od odpowiedniej kierownicy jest stały i równy mimośrodowi e.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Ustalmy punkt $X = (x_1, y_1)$ na lewej gałęzi hiperboli H i niech $X' = (-\frac{a}{e}, y_1)$ będzie rzutem prostopadłym punktu X na kierownicę, powiedzmy $k_1 : x = -\frac{a}{e}$. Wówczas



$$d_{11} = |XX'| = \left|-\frac{a}{e} + x_0\right| = \frac{|a + ex_0|}{e}.$$

Z drugiej strony $(x_1 + c)^2 + y_1^2 = (a + ex_1)^2$ (pozostawiamy do samodzielnego przeliczenia!), więc

$$r_{11} = |F_1X| = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(a + ex_1)^2} = |a + ex_1|.$$

Zatem $\frac{r_{11}}{d_{11}} = e$. Pozostałe równości dowodzimy analogicznie. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Proponujemy teraz wykonać następujące ćwiczenie mające na celu utrwalenie poznanych wiadomości.

Ćwiczenie 12. Z podanych równań hiperboli odczytać współrzędne ich ognisk oraz równania kierownic oraz asymptot:

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$,

b) $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{8} = 1$,

c) $12x^2 - 4y^2 = 48$.

Podamy jedynie odpowiedzi i wskazówki:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$, $k_1 : x = -\frac{9}{5}$, $k_2 : x = \frac{9}{5}$, $l_1 : y = \frac{4}{3}x$, $l_2 : y = -\frac{4}{3}x$ (*Wskazówka:* hiperbola ma równanie $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$, $c = 5$);

b) $F_1 = (-2\sqrt{5}, 0)$, $F_2 = (2\sqrt{5}, 0)$, $k_1 : x = -\frac{6}{5}\sqrt{5}$, $k_2 : x = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, $l_1 : y = \sqrt{\frac{2}{3}}x$, $l_2 : y = -\sqrt{\frac{2}{3}}x$ (*Wskazówka:* hiperbola ma równanie $\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$, $c = 2\sqrt{5}$);

c) $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$, $k_1 : x = -1$, $k_2 : x = 1$, $l_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $l_2 : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (*Wskazówka:* hiperbola ma równanie $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$, $c = 4$).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zbadamy teraz kolejne własności hiperboli. Wyjdziemy od analizy wzajemnego położenia prostej i hiperboli.

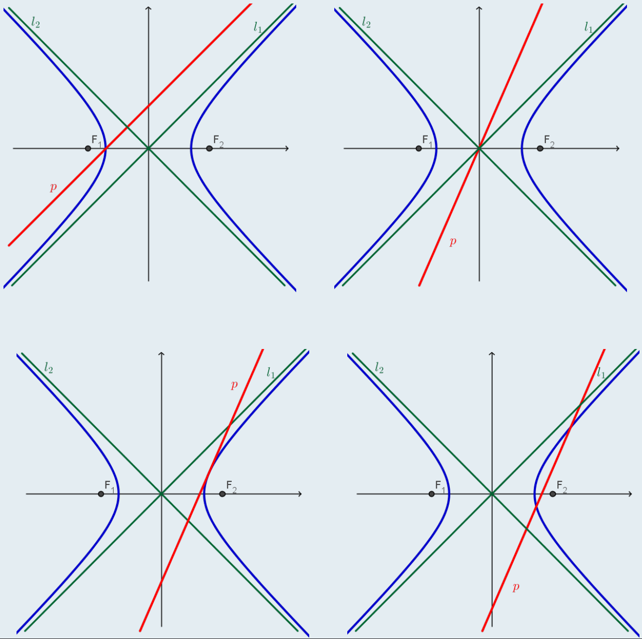
Ćwiczenie 13. Jak względem siebie mogą być położone prosta i hiperbola. Możliwe przypadki przedstaw na rysunkach.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Możliwości wzajemnego położenia hiperboli i prostej są następujące:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Jak więc można badać wzajemne położenie prostej i elipsy. Spróbuj sobie przypomnieć, jak było to analizowane dla elipsy i paraboli. Potrafisz powtórzyć tamto rozumowanie?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tak, jak poprzednio, zbadamy istnienia i ilości rozwiązań odpowiedniego układu równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 21. *Ustalmy takie liczby rzeczywiste* a, b, A, B *oraz* C, *że* $a, b > 0$ *oraz* $A^2 + B^2 > 0$. *Wzajemne położenie prostej*

$$p: \quad Ax + By + C = 0 \tag{16}$$

oraz hiperboli

$$H: \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

zależy od $V_3 = A^2a^2 - B^2b^2$ *oraz* $W_3 = V_3 - C^2$, *przy czym:*

a) *dla* $V_3 = 0$ *oraz* $C = 0$ *zachodzi* $p \cap H = \{\emptyset\}$,

b) *dla* $V_3 = 0$ *oraz* $C \neq 0$ *zbiór* $p \cap H$ *ma jeden element,*

c) *dla* $V_3 \neq 0$ *oraz* $W_3 > 0$ *zachodzi* $p \cap H = \{\emptyset\}$,

d) *dla* $V_3 \neq 0$ *oraz* $W_3 = 0$ *zbiór* $p \cap H$ *ma jeden element,*

e) *dla* $V_3 \neq 0$ *oraz* $W_3 < 0$ *zbiór* $p \cap H$ *ma dwa elementy.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zauważmy, że:

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 16. Przy założeniach Twierdzenia 21, z warunku

$$V_3 = A^2a^2 - B^2b^2 = 0$$

wynika $A, B \neq 0$. Ponadto, mamy wtedy

$$(Aa - Bb)(Aa + Bb) = 0, \tag{18}$$

więc $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$ lub $\frac{A}{B} = -\frac{b}{a}$, co oznacza, że prosta p jest przypadku $V_3 = 0$ równoległa do jednej z asymptot hiperboli H, zaś dla $C = 0$ nawet się z nią pokrywa.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód Twierdzenia 21 jest następujący:

Dowód Twierdzenia 21. Rozwiążemy układ równań (16)-(17). Załóżmy na początek, że $B \neq 0$. Pomnożymy obie strony równania (17) przez B^2 i podstawimy wyznaczoną z równania (16) wartość $By = -Ax - C$. Zatem

$$\frac{B^2x^2}{a^2} - \frac{(-Ax - C)^2}{b^2} = 1,$$

skąd po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymamy

$$(A^2a^2 - B^2b^2)x^2 + 2ACa^2x + (C^2 + B^2b^2)a^2 = 0. \qquad (19)$$

Rozwiązania tego równania są odciętymi punktów przecięcia się prostej p z hiperbolą H. Zatem zbiory rozwiązań układu (16)-(17) oraz równania (19) są równoliczne.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dla $V_3 = 0$ (wtedy $A, B \neq 0$) równanie (19) jest równaniem liniowym, które dla $C = 0$ jest równaniem sprzecznym ($B^2a^2b^2 \neq 0$), zaś dla $C \neq 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Załóżmy więc dalej, że $V_3 \neq 0$. Istnienie i liczba rozwiązań równania (19) zależy od wartości wyróżnika

$$\begin{aligned}\Delta &= (2ACa^2)^2 - 4(A^2a^2 - B^2b^2)(C^2 + B^2b^2)a^2\\ &= -4a^2b^2B^2(A^2a^2 - B^2b^2 - C^2).\end{aligned}$$

Mamy $a^2b^2B^2 > 0$, więc równanie (19), jak też układ (16)-(17):

a) nie będą miały rozwiązań dla wartości wyróżnika $\Delta < 0$,

b) będą miały dokładnie jedno rozwiązanie dla wyróżnika $\Delta = 0$,

c) będą miały dokładnie dwa rozwiązania dla wyróżnika $\Delta > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Załóżmy na koniec, że $B = 0$. Wtedy $A \neq 0$, więc z (16) mamy

$$x = -\frac{C}{A},$$

co po podstawieniu do równania hiperboli H i przekształceniach daje

$$A^2a^2y^2 = -b^2(A^2a^2 - C^2). \tag{20}$$

Istnienie i liczba rozwiązań równania (20), a więc i układu (16)-(17), zależy od wartości wyrażenia

$$W_3 = A^2a^2 - C^2 = A^2a^2 - 0^2b^2 - C^2, \quad (B = 0),$$

co również w tym przypadku implikuje tezę i kończy dowód twierdzenia.

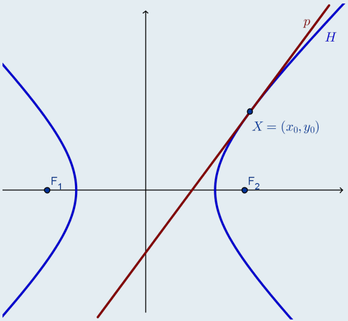
$\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Jako wniosek z Twierdzenia 21 otrzymamy:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 22. *Ustalmy liczby rzeczywiste* $a, b > 0$. *Jeśli punkt* $X = (x_0, y_0)$ *leży na hiperboli*



$$H: \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

to prosta

$$p: \ \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{21}$$

jest styczna do hiperboli H *w punkcie* X.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód. Niech $X = (x_0, y_0)$ należy do hiperboli H (zatem X spełnia równanie opisujące H). Wykażemy, że:

1. $X \in p$,
2. prosta p nie jest równoległa do żadnej z asymptot hiperboli H i ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny.

Krok 1. Podstawiając współrzędne punktu X do równania prostej p otrzymamy równość równoważną warunkowi $X \in H$.

Krok 2. Wykorzystamy Twierdzenie 21. Zauważmy, że prosta p nie jest równoległa do żadnej z asymptot, a ponadto

$$\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 b^2 - 1 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

co oznacza, że prosta p ma dokładnie jeden punkt wspólny z hiperbolą H, więc musi być do niej styczna. $\square$

Poznane wiadomości wykorzystamy w rozwiązaniu przykładowego zadania, analogicznego do tego rozwiązanego dla paraboli.

Przykład 10. Napisać równanie stycznych do hiperboli

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,$$

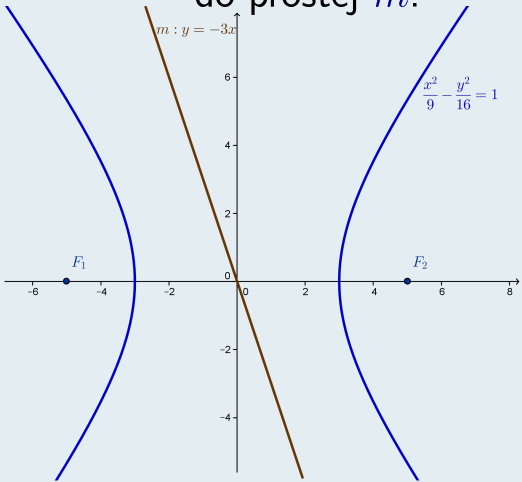
równoległych do prostej $y = -3x$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $H: \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\quad m: y = -3x$

Sz: równania stycznych m_1, m_2 do hiperboli H równoległych do prostej m.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Opracujmy plan rozwiązania tego zadania wzorując się na zadaniu rozwiązanym dla paraboli.

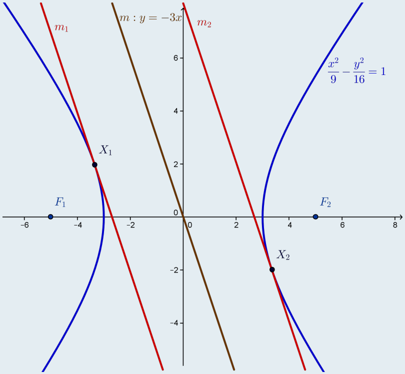
Oczywiście, najbardziej oczywistą możliwością jest:

Znalezienie na hiperboli ipsie H takich punktów $X = (x_0, y_0)$, że styczna do hiperboli poprowadzona przez te punkty jest równoległa do prostej m. Tym samym mamy

Plan rozwiązania zadania

Znaleźć takie punkty $X = (x_0, y_0)$, że:

1. $X \in H$,
2. $l_1 \parallel l_2$, gdzie l_2 jest prostą styczną do H wystawioną w punkcie X.



Zrealizujemy teraz nasz plan.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $H : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
$m : y = -3x$

Sz: równania stycznych m_1, m_2 do hiperboli H równoległych do prostej m.

Niech $X = (x_0, y_0) \in H$. Wówczas

$$\frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1. \tag{22}$$

Styczna do hiperboli H poprowadzona przez punkt X ma równanie

$$m' : \frac{x_0 x}{9} - \frac{y_0 y}{16} = 1.$$

Z warunków zadania wynika, że $y_0 \neq 0$, gdyż prosta równoległa do prostej m nie może być równoległa do osi OY. Zatem

$$m' : y = \frac{16x_0}{9y_0}x - \frac{16}{y_0}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ponieważ $m' \parallel m$, więc

$$\frac{16x_0}{9y_0} = -3,$$

czyli $y_0 = -\frac{16x_0}{27}$. Podstawiając tą wartość do (22) otrzymamy

$$\frac{x_0^2}{9} - \frac{\left(-\frac{16x_0}{27}\right)^2}{16} = 1.$$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu dostaniemy

$$65x^2 - 729 = 0,$$

którego rozwiązaniami są liczby

$$x_1 = -\frac{27}{65}\sqrt{65}, \quad x_2 = \frac{27}{65}\sqrt{65}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ostatecznie więc

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{27}{65}\sqrt{65} \\ y_0 = \frac{16}{65}\sqrt{65}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = \frac{27}{65}\sqrt{65} \\ y_0 = -\frac{16}{65}\sqrt{65}. \end{cases}$$

Wracając do równania prostej m' mamy

$$m_1 : \quad -\frac{3\sqrt{65}}{65}x - \frac{\sqrt{65}}{65}y = 1,$$

$$m_2 : \ \frac{3\sqrt{65}}{65}x + \frac{\sqrt{65}}{65}y = 1,$$

więc po redukcjach otrzymamy poszukiwane równania prostych:

$$m_1 : \ 3x + y = -\sqrt{65},$$

$$k_2 : \ 3x + y = \sqrt{65}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

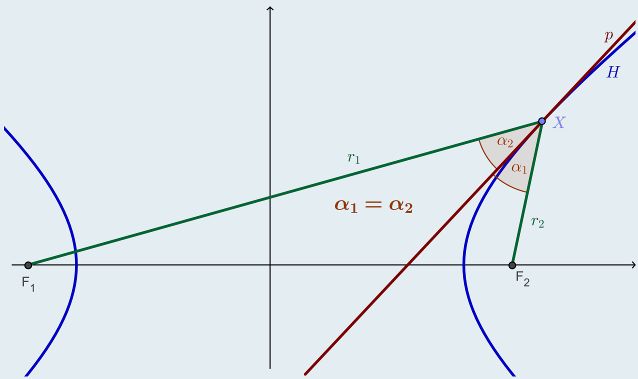
Odp. Poszukiwane proste mają równania

$$m_1: \ 3x + y = -\sqrt{65},$$

$$m_2: \ 3x + y = \sqrt{65}.$$

Sformułujemy teraz i podamy bez dowodu istotną w zastosowaniach własność stycznej do hiperboli.

Twierdzenie 23. *Styczna do hiperboli połowi kąt między promieniami wodzącymi punktu styczności. Oznacza to, że jeśli F_1 oraz F_2 są ogniskami hiperboli H oraz $X \in H$, to styczna do hiperboli w punkcie X połowi kąt wewnętrzny trójkąta $\triangle F_1 X F_2$ przy wierzchołku X.*



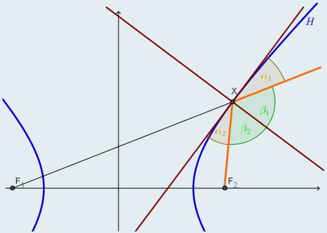
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

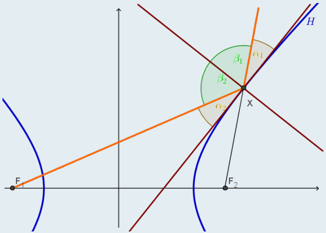
Istotnym wnioskiem z tego twierdzenia ważnym w zastosowaniach w optyce jest:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 24. *Niech F_1 oraz F_2 będą ogniskami hiperboli H i niech $X \in E$. Wtedy kąty przedstawione na rysunku mają parami równe miary.*





Wynika stąd, że promień świetlny biegnący w kierunku jednego z ognisk hiperboli po odbiciu od hiperboli biegnie tak, by przejść przez drugie z ognisk.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Powrócimy jeszcze do własności punktów stożkowych związanych z ich odległościami od kierownic i ognisk. Stosowne własności zostały sformułowane w Twierdzeniu 9 dla elipsy oraz w Twierdzeniu 20 dla hiperboli. Pokażemy, że własności sformułowane w tych twierdzeniach w pełni charakteryzują stożkowe w rozpatrywanych przypadkach. Pozwala to na unifikację definicji wszystkich trzech stożkowych przy użyciu analogicznych własności.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 25. *Miejscem geometrycznym wszystkich punktów X, dla których stosunek ich odległości od stałego punktu (ogniska) do odległości od ustalonej prostej (kierownicy) nie przechodzącej przez ten punkt jest stały i równy $e > 0$, jest krzywa stożkowa, przy czym jest to:*

1) *elipsa, gdy $e < 1$,*

2) *parabola, gdy $e = 1$,*

3) *hiperbola, gdy $e > 1$.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Charakteryzacja paraboli jest oczywista. Niech $e \neq 1$. Przyjmijmy, że układ współrzędnych umieszczono tak, by ognisko F_2 miało współrzędne $F_2 = (c, 0)$, zaś kierownica k_2 – równanie $k_2 : x = \frac{a}{e}$, gdzie $e = \frac{c}{a}$. Niech X' będzie rzutem prostokątnym punktu $X = (x, y)$ krzywej na kierownicę k_2. Wówczas

$$|F_2X| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{oraz} \quad |XX'| = \left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Zatem

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2.$$

Wykorzystując zależności $ae = c$ oraz $e = \frac{c}{a}$ otrzymamy równanie

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

które dla $a > c$ $(e = \frac{c}{a} < 1)$ opisuje elipsę, zaś dla $a < c$ $(e = \frac{c}{a} > 1)$ – hiperbolę. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przypomnij sobie, że jedynie w pewnych szczególnych przypadkach położeń ognisk, czy też ogniska i kierownicy, otrzymamy nieskomplikowane równania stożkowych. W ogólnym przypadku otrzymujemy równania nazywane równaniami linii drugiego stopnia:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 14. **Linią drugiego stopnia** nazywamy krzywą opisaną na płaszczyźnie równaniem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

gdzie liczby a, b, c, d, e, f spełniają warunek $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ (tzn. a, b, c nie są jednocześnie równe zero).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Każda krzywa stożkowa jest linią drugiego stopnia, ale okazuje się, że w pewnych przypadkach, zależnych od parametrów a, b, c, d, e, f, równanie drugiego stopnia opisuje krzywą stożkową:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 17. Kształt krzywej drugiego stopnia

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{23}$$

zależy od wyznaczników

$$w = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \quad \text{oraz} \quad W = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

nazywanych **małym** i **wielkim wyróżnikiem** równania (23). Analiza tych wyróżników i ich wpływ na kształt krzywej (23) ze względu na użycie wyznaczników zostanie tu pominięta. Zainteresowany użytkownik tego kursu może ją znaleźć w każdym podręczniku akademickim z geometrii analitycznej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pokażemy na koniec zastosowanie stożkowych w astronomii. Kepler udowodnił czysto empirycznie, na podstawie jedynie obserwacji i bez zrozumienia istotnych praw i fundamentalnej tego faktu przyczyny, że:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

planety poruszają się po torach eliptycznych

tzn. **trajektorie ruchu planet** wokół słońca są **elipsami**.

Pierwszy formalny dowód tego faktu został wyprowadzony z praw ruchu i praw grawitacji przez Izaaka Newtona, co stanowiło ukoronowanie jego całej teorii pozwalającej na opis ruchu ciał posiadających masę. Późniejsze odkrycia zarówno w dziedzinie fizyki jak i matematyki pozwoliły znacznie uprościć ten dowód, jednak za cenę wprowadzenia bardzo skomplikowanych i zaawansowanych konstrukcji z pogranicza matematyki i fizyki.

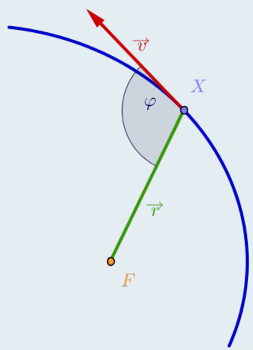
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Istnieje wiele sposobów przedstawiania krzywych za pomocą równań w różnych układach współrzędnych. Korzystną byłaby możliwość sprowadzenia opisu ruchu planety po orbicie analizy pewnej krzywej w kartezjańskim układzie współrzędnych używając jedynie współrzędnych x oraz y. Niestety, w opisie ruchu wykorzystuje się momentu pędu, a tutaj istotna odległość r od osi obrotu oraz kąt ϕ pomiędzy wektorem prędkości $\overrightarrow{v}$ i wektorem promienia wodzącego $\overrightarrow{r}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 18. Wygodnie jest opisać ruch planet w układzie współrzędnych $r-\varphi$, gdzie r jest odległością poruszającego sie punktu X od punktu F (środka masy), zaś φ jest kątem pomiędzy promieniem wodzącym punktu X oraz wektorem prędkości $\overrightarrow{v}$:



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uzasadnimy następujące:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 26. *Jeśli planeta o masie m porusza się wokół słońca o masie M pod wpływem grawitacji, to trajektoria ruchu planety w układzie $r - \varphi$ spełnia równanie*

$$\sin\varphi = \frac{\pm 1}{\sqrt{-pr^2 + qr}},$$

gdzie p oraz q są stałymi zależącymi jedynie od energii i pędu tej planety.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Z zasady zachowania **momentu pędu** wynika, że

$$L = mrv\sin\varphi = \text{ const.}$$

Ponadto, z zasady zachowania **energii**

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{ const.}$$

Wyznaczając z pierwszego równania v mamy $\frac{L}{mrsin\varphi}$, skąd po podstawieniu do drugiego z warunków otrzymamy równanie

$$E = \frac{L^2}{4mr^2\sin^2\varphi} - \frac{GMm}{r},$$

którego rozwiązania względem $\sin\varphi$ mają postać:

$$\sin\varphi = \frac{\pm L}{\sqrt{4Emr^2 + 4Gm^2Mr}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{-\frac{4(-E)m}{L^2}r^2 + \frac{4Gm^2M}{L^2}r}}.$$

□

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 19. Jeśli planeta porusza się w polu grawitacyjnym słońca z energią mniejszą niż energia potrzebna do opuszczenia układu słonecznego, to $E < 0$ (całkowita energia układu planeta-słońce jest ujemna) i wówczas przyjmiemy równanie ruchu planety w układzie $r - \varphi$ postaci

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{-pr^2 + qr}},$$

gdzie $p, q > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

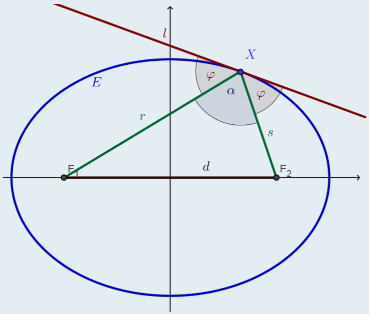
Twierdzenie 27. *Elipsę można opisać w układzie współrzędnych $r - \phi$ równaniem*

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{-pr^2 + qr}},$$

gdzie $p, q > 0$ są stałymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Zdefiniujmy α, φ, d, r oraz s jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów otrzymamy

$$d^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha.$$

Jednocześnie $\alpha = 180^\circ - 2\varphi$ oraz

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x,$$
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

więc

$$d^2 = r^2 + s^2 - 2rs(2\sin^2\varphi - 1),$$

Stąd

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(r+s)^2 - d^2}{4rs}} = \sqrt{\frac{(2a)^2 - d^2}{4r(2a-r)}} = \frac{1}{\sqrt{-pr^2 + qr}}.$$

ze stałymi $p = \frac{4}{4a^2 - d^2}$ oraz $q = \frac{8a}{4a^2 - d^2}$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uzasadnione więc zostało:

Twierdzenie 28. *Trajektorie planet poruszających się w polu grawitacyjnym słońca są elipsami.*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 20. Można pokazać, że w przypadku $E = 0$ trajektoria planety (komety) poruszającej się w polu grawitacyjnym słońca będzie parabolą, zaś dla $E > 0$ – hiperbolą.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w następującym teście.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 1. Równanie $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ opisuje okrąg

(a) o środku $(2, -1)$ i promieniu $r = 9$,

(b) o środku $(-2, 1)$ i promieniu $r = 3$,

(c) o środku $(-2, 1)$ i promieniu $r = 9$,

(d) o środku $(2, -1)$ i promieniu $r = 3$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 2. Styczna do okręgu $x^2 + y^2 = 25$ w punkcie $(-3, 4)$ ma równanie

(a) $3x - 4y = 5$,

(b) $-3x + 4y = 25$,

(c) $3x + 4y = 25$,

(d) $3x + 4y = 5$.

Pytanie 3. Okręgi o równaniach $x^2 + y^2 = 4$ oraz $x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0$

(a) są styczne wewnętrznie,

(b) są rozłączne,

(c) przecinają się w dwóch punktach

(d) są styczne zewnętrznie.

Pytanie 4. Oś wielka elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ma długość

(a) 3,

(b) 2,

(c) 6,

(d) 4.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 5. Ogniska elipsy $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ mają współrzędne

(a) $F_1 = (-5, 0)$, $F_2 = (5, 0)$,

(b) $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$,

(c) $F_1 = (-3, 0)$, $F_2 = (3, 0)$,

(d) $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 6. Kierownica paraboli $y^2 = 6x$ ma równanie

(a) $x = 3$,

(b) $x = \frac{3}{2}$,

(c) $x = -3$,

(d) $x = -\frac{3}{2}$.

Pytanie 7. Styczna do paraboli $y^2 = 2x$ w punkcie $(2, -2)$ ma równanie

(a) $x + 2y = -2$,

(b) $2x + y = -2$,

(c) $-x + 2y = 2$,

(d) $-x + 2y = -2$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 8. Kierownice hiperboli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ mają równania

(a) $x = -\frac{3}{4}$ oraz $x = \frac{3}{4}$,

(b) $x = -\frac{4}{3}$ oraz $x = \frac{4}{3}$,

(c) $x = -\frac{16}{5}$ oraz $x = \frac{16}{5}$,

(d) $x = -\frac{9}{5}$ oraz $x = \frac{9}{5}$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 9. Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x + 1$

(a) jest styczna do hiperboli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

(b) przecina hiperbolę $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ w jednym punkcie, ale nie jest do niej styczna,

(c) jest rozłączna z hiperbolą $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,

(d) przecina hiperbolę $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ w dwóch punktach.

Pytanie 10. Trajektorią komety poruszającej się w polu grawitacyjnym słońca w przypadku, gdy całkowita energia E układu kometa-słońce jest równa 0, jest

(a) prosta,

(b) parabola,

(c) elipsa,

(d) hiperbola.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Klucz odpowiedzi:

1(d), 2(b), 3(a), 4(c), 5(c), 6(d), 7(a), 8(d), 9(b), 10(b).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie