Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Spis treści

1 Podstawowe wiadomości i oznaczenia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$;
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Symbol:

$\bigwedge_{x \in X}$ - czytamy „dla każdego $x \in X$" - jest to kwantyfikator ogólny,
natomiast
$\bigvee_{x \in X}$ - czytamy „istnieje $x \in X$" - kwantyfikator egzystencjalny.

Dodatkowo przypomnijmy sobie podstawowe pojęcia kombinatoryki (w tym schematy kombinatoryczne).

Twierdzenie 1 (reguła iloczynu)**.** *Jeżeli możemy pewien wybór dokonać etapami (podejmując wielokrotnie decyzje dotyczącą wyboru poszczególnych elementów), przy czym za pierwszym razem (pierwsza decyzja) możemy wybrać elementy na* n_1 *sposobów, za drugim razem - na* n_2 *sposoby itd. a ostatnim razem - na* n_k *sposobów i jeśli te decyzje są podejmowane niezależnie, to całkowita liczba wszystkich możliwych wyborów wynosi*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Definicja 1. n-wyrazową **permutacją** zbioru X (lub mówiąc inaczej; permutacją zbioru n-elementowego X) nazywamy każdą różnowartościową funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór X (czyli funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna).

Zgodnie z powyższą definicją przez n-wyrazową permutację możemy rozumieć każdy n-wyrazowy różnowartościowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 2. *Liczba różnych permutacji zbioru n-elementowego wynosi*

$$P_n := n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Definicja 2. k-wyrazową **wariacją z powtórzeniami** ze zbioru n-elementowego X nazywamy każdą funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór X.

Zgodnie z powyższą definicją przez k-wyrazową wariację z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego możemy rozumieć każdy k-wyrazowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 3. *Liczba różnych k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$\overline{V}_n^k := n^k.$$

Definicja 3. k-wyrazową **wariacją bez powtórzeń** ze zbioru n-elementowego X, gdzie $k \leqslant n$ nazywamy każdą różnowartościową funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór X.

Zgodnie z powyższą definicją przez k-wyrazową wariację bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego ($k \leqslant n$) możemy rozumieć każdy k-wyrazowy różnowartościowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 4. *Liczba różnych k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$V_n^k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

gdzie $k \leqslant n$.

Definicja 4. k-elementową **kombinacją** zbioru n-elementowego X, gdzie $k \leqslant n$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru X.

Twierdzenie 5. *Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wynosi*

$$C_n^k := \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

2 Rachunek prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa jest teorią zajmującą się zdarzeniami występującymi podczas wykonywania doświadczeń losowych.

Doświadczenie nazywamy **losowym**, jeżeli można go wielokrotnie powtórzyć w tych samych warunkach, ale nie jesteśmy w stanie przewidzieć kiedy się ono pojawi.

Przykładami takich doświadczeń są: rzut kostką do gry, rzut monetą, ciągnięcie losu na loterii, wylosowanie 6 liczb w „toto-lotku".

W każdym doświadczeniu losowym można wyodrębnić pewne najprostsze, nierozkładalne, elementarne wyniki, które wyróżniają się tym, że każde powtórzenie tego doświadczenia kończy się jednym i tylko jednym z nich. Te wyniki zwane są **zdarzeniami elementarnymi**, które są pojęciami pierwotnymi teorii prawdopodobieństwa (czyli takimi elementami teorii, które się nie definiuje). Zdarzenia elementarne będziemy oznaczać przez $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Zbiór złożony ze wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy **zbiorem zdarzeń elementarnych**. Będziemy oznaczać go grecką literą Ω.

Przykład 1. Przypuśćmy, że rzucamy raz monetą. Doświadczenie to może zakończyć się jednym z dwóch możliwych wyników: „wypadnie orzeł” (oznaczane przez O), „wypadnie reszka” (oznaczane przez R), które będą zdarzeniami elementarnymi tego doświadczenia. Tak więc zbiór zdarzeń elementarnych (tego doświadczenia) można zapisać w postaci

$$\Omega = \{O, R\}.$$

Przykład 2. Przypuśćmy, że rzucamy trzy razy monetą. Zbiór zdarzeń elementarnych ma postać

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(O,R,R),\\ &(R,O,O),(R,O,R),(R,R,O),(R,R,R)\}\end{aligned}$$

lub krócej

$$\Omega = \{(a,b,c):\ a,b,c \in \{O,R\}\}.$$

Przykładowo zdarzenie elementarne (O,R,R) rozumiemy jako zdarzenie, w którym za pierwszym razem „wypadł orzeł”, a za drugim i trzecim razem „wypadły reszki”.

Przykład 3. Załóżmy, że rzucamy dziesięć razy kostką do gry. W jednokrotnym rzucie kostką do gry możemy otrzymać jeden z sześciu wyników: „wypadnie jedno oczko" (oznaczamy 1), „wypadnie dwa oczka" (oznaczamy 2), „wypadnie trzy oczka" (oznaczamy 3), „wypadnie cztery oczka" (oznaczamy 4), „wypadnie pięć oczek" (oznaczamy 5), „wypadnie sześć oczek" (oznaczamy 6). W związku z tym zbiór zdarzeń elementarnych możemy zapisać w postaci

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_{10}) : \ a_1, \ldots, a_{10} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

W tym przypadku nie było sensu wypisywać wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (jak to robiliśmy w Przykładach 1 i 2), bo jest ich dokładnie $6^{10} = 60466176$.

Definicja 5. Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy **zdarzeniem**.

Zwykle zdarzenia będziemy oznaczać dużymi literami $A, B, \ldots$. Wyjątek stanowią dwa zdarzenia: zdarzenie $\emptyset$ zwane **niemożliwym** (zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze) oraz zdarzenie Ω zwane **pewnym** (każdy zbiór jest swoim podzbiorem).

Definicja 6. Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, a A będzie zdarzeniem, czyli podzbiorem zbioru Ω (co zapisujemy $A \subset \Omega$). Mówimy, że zdarzenie elementarne ω (gdzie $\omega \in \Omega$) **sprzyja** zdarzeniu A, gdy $\omega \in A$.

Ponieważ zdarzenia są podzbiorami pewnego (specjalnego) zbioru Ω, więc na zdarzeniach możemy wykonywać podobne operacje co na zbiorach, choć czasami mają inne nazwy.

$A \cup B$	suma (alternatywa) zdarzeń A i B
$A \cap B$	iloczyn (koniunkcja) zdarzeń A i B
$A \setminus B$	różnica zdarzeń A i B
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, tzn. $A' = \Omega \setminus A$
$A \subset B$	zdarzenie A pociąga zdarzenie B
$A \cap B = \emptyset$	zdarzenia A i B wykluczają się

Przykład 4. Wróćmy do Przykładu 2. Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że w trzech rzutach będziemy mieć dokładnie 2 orły;

B - zdarzenie polegające na tym, że za trzecim razem „wypadnie orzeł";

C - zdarzenie polegające na tym, że za pierwszym i drugim razem "wypadną reszki", a za trzecim „wypadnie orzeł".

Tak więc

$A = \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\}$;

$B = \{(O, O, O), (O, R, O), (R, O, O), (R, R, O)\}$;

$C = \{(R, R, O)\}$.

Stąd mamy

$$
\begin{aligned}
A \cup B = &\{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),\\
&(R,O,O),(R,R,O)\};\\
A \cap B = &\{(O,R,O),(R,O,O)\};\\
A \setminus B = &\{(O,O,R)\};\\
B \setminus A = &\{(O,O,O),(R,R,O)\};\\
A' = &\{(O,O,O),(O,R,R),(R,O,R),\\
&(R,R,O),(R,R,R)\}.
\end{aligned}
$$

Ponadto zdarzenia A i C wykluczają się wzajemnie, bo $A \cap C = \emptyset$, natomiast zdarzenie C pociąga zdarzenie B, tzn. $C \subset B$.

Przykład 5. Cztery osoby A, B, C i D rzucają jednocześnie pięcioma kostkami do gry. Rozważmy zdarzenia:
A_i -osoba A wyrzuciła co najmniej i „szóstek”;
B_i -osoba B wyrzuciła co najwyżej i „piątek”;
C_i -osoba C wyrzuciła dokładnie i „czwórek”;
D_i -osoba D wyrzuciła co najmniej i „dwójek” lub co najmniej i „trójek”,
gdzie $i = 0, 1, \ldots, 5$.
Co oznaczają zdarzenia: A_2'; B_3'; C_1'; D_2'; $A_2 \cup A_3'$; $A_1 \cap A_3'$; $B_1 \setminus B_3$; $B_3' \setminus B_1$.

Rozwiązanie.
A'_2 - osoba A wyrzuciła co najwyżej jedną „szóstkę” (czyli 0 lub 1 „szóstkę”);
B'_3 - osoba B wyrzuciła co najmniej 4 „piątki” (czyli 4 lub 5 „piątek”);
C'_1 - osoba C wyrzuciła 2, 3, 4 lub 5 „czwórek” lub nie wyrzuciła żadnej „czwórki”;
D'_2 - osoba D wyrzuciła co najwyżej jedną „dwójkę” i co najwyżej jedną „trójkę” (czyli 0 lub 1 „dwójkę” i 0 lub 1 „trójkę”);

$A_2 \cup A'_3$ - osoba A wyrzuciła co najmniej 2 „szóstek" lub co najwyżej 2 „szóstki" (czyli 0, 1, 2, 3, 4 lub 5 „szóstek" - jest to zdarzenie pewne);
$A_1 \cap A'_3$ - osoba A wyrzuciła co najmniej jedna „szóstka" i co najwyżej 2 „szóstki" (czyli 1 lub 2 „szóstki");
$B_1 \backslash B_3$ - jest to zdarzenie niemożliwe, ponieważ $B_1 \subset B_3$;
$B'_3 \backslash B_1 = B'_3$ - osoba B wyrzuciła co najmniej 4 „piątki".

Zadanie 1. Przy danych z Przykładu 5 określ co oznaczają zdarzenia: $C_2 \setminus C'_3$; $D_1 \cap D'_3$; $(A_1 \setminus A'_3) \setminus A_2$; $(B_1 \cup B'_3) \cap B'_2$. Wymyśl jeszcze kilka takich zdarzeń i spróbuj określić co one oznaczają.

Przykład 6. Niech A, B i C będą trzema dowolnymi zdarzeniami. Napisać zdarzenia polegające na tym, że:

a) zachodzi tylko A;

b) zachodzi tylko A i B;

c) zachodzą wszystkie zdarzenia;

d) zachodzi przynajmniej jedno z tych zdarzeń;

e) zachodzą przynajmniej dwa zdarzenia;

f) zachodzi dokładnie jedno zdarzenie;

g) zachodzą dokładnie dwa zdarzenia;

h) nie zachodzi ani jedno zdarzenie;

i) zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia.

Rozwiązanie.
Przed przystąpieniem do podania rozwiązań warto uzmysłowić sobie, że jeżeli zdarzenie D nie zachodzi oznacza to, że zachodzi zdarzenie przeciwne, czyli D'.
Ad. a) $A \cap B' \cap C'$;
Ad. b) $A \cap B \cap C'$;
Ad. c) $A \cap B \cap C$
Ad. d) $A \cup B \cup C$;
Ad. e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;
Ad. f) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;
Ad. g) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$;
Ad. h) $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$ (jakie prawo algebry zbiorów lub zdarzeń zostało tutaj wykorzystane?);
Ad. i) oznaczmy przez D - zdarzenie „zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia". Na początek zapiszmy zdarzenie przeciwne, czyli D' - „zachodzą trzy zdarzenia": $D' = A \cap B \cap C$. Korzystając z faktu, że dla każdego zdarzenia (zbioru) D zachodzi równość $D'' = D$ otrzymujemy następujący zapis zdarzenia

$$D = D'' = (A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'.$$

3 Prawdopodobieństwo i jego własności

Matematyczny model doświadczenia losowego to trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zwana **przestrzenią probabilistyczną**, w której

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych (o którym mówiliśmy już wcześniej);

$\mathcal{F}$ - zbiór zdarzeń, dla których będzie określona funkcja prawdopodobieństwa. Ponieważ będziemy rozważać tylko skończone zbiory zdarzeń elementarnych, to zawsze będziemy przyjmować, że $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, czyli $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru Ω. W takim przypadku często pomija się zbiór $\mathcal{F}$ w zapisie przestrzeni probabilistycznej, gdyż jest on jednoznacznie wyznaczony przez Ω;

P - funkcja określona na wszystkich zdarzeniach (z $\mathcal{F}$) o wartościach w $\langle 0, 1\rangle$, którą nazywamy **prawdopodobieństwem**.

Definicja 7. Funkcję $P : 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ (czyli odwzorowanie, które każdemu zdarzeniu A przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą) nazywamy **prawdopodobieństwem**, gdy spełnione są warunki (zwane aksjomatami prawdopodobieństwa):

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \subset \Omega$;
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla każdej pary $A, B \subset \Omega$ wykluczających się wzajemnie;
3. $P(\Omega) = 1$.

Liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia** A.

Uwaga 1. Korzystając z warunku 2 powyższej definicji oraz zasady indukcji matematycznej można wykazać, że dla każdych $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ ($n \in \mathbb{N}$) parami rozłącznych

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Własność 1.

a) $P(\emptyset) = 0$;

b) dla każdych $A, B \subset \Omega$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(A) \leqslant P(B)$;

c) dla każdych $A, B \subset \Omega$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

d) dla każdego $A \subset \Omega$ *mamy* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

e) dla każdego $A \subset \Omega$ *mamy* $P(A') = 1 - P(A)$;

f) dla każdych $A, B \subset \Omega$ *mamy* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Uwaga! Z Własności 1 d) rzeczywiście wynika, że zbiór wartości funkcji P jest w $\langle 0, 1\rangle$.

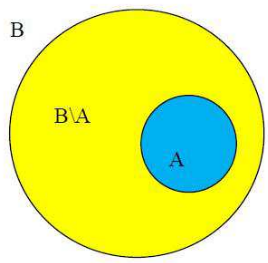
Dowód.
Ad. a) Z własności działań na zdarzeniach (zbiorach) zachodzi równość $A \cup \emptyset = A$ oraz zdarzenia A i $\emptyset$ wykluczają się ($A \cap \emptyset = \emptyset$). Korzystając z warunku 2 z Definicji 7 możemy napisać

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset),$$

co implikuje, że $P(\emptyset) = 0$.

Ad b) i c) Ponieważ $A \subset B$, to zgodnie z własnościami działań na zdarzeniach możemy napisać

$$B = (B \setminus A) \cup A.$$



Ponadto jak łatwo widać, zdarzenia $B \setminus A$ oraz A wykluczają się wzajemnie. Stosując ponownie warunek 2 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A). \tag{1}$$

Stąd możemy już napisać

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Z warunku 1 z Definicji 7 mamy

$$P(B \setminus A) \geqslant 0,$$

co w połączeniu z (1) implikuje, że

$$P(B) \geqslant P(A).$$

Ad d) Niech $A \subset \Omega$. Z warunku 1 z Definicji 7 mamy $P(A) \geqslant 0$. Korzystając z udowodnionego wyżej warunku b) oraz warunku 3 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1.$$

Ad e) Zauważmy, że $A \cup A' = \Omega$ oraz $A \cap A' = \emptyset$ (czyli zdarzenia A i A' wykluczają się). Stąd i z warunku 2 Definicji 7 mamy

$$P(\Omega) = P(A) + P(A').$$

Korzystając z warunku 3 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(A) + P(A') = 1,$$

czyli

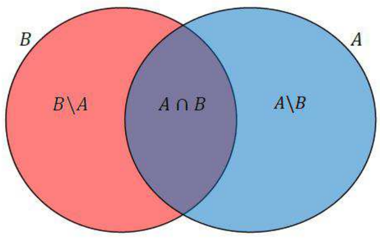
$$P(A') = 1 - P(A).$$

Ad f) Zauważmy, że

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{i} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset \tag{2}$$

oraz

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \quad \text{i} \quad A \cap B \subset B. \tag{3}$$



Rysunek 1

Z (2) oraz z uwagi na warunek 2 z Definicji 7 mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \tag{4}$$

Stosując własność c) do (3) otrzymujemy

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B). \tag{5}$$

Podstawiając (5) do (4) dostajemy ostatecznie

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$\square$

Przykład 7. Niech $P(A) = \frac{3}{25}$, $P(B') = \frac{7}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{10}$. Obliczyć: $P(A \cap B)$, $P(A \setminus B)$, $P(A' \cap B)$.

Rozwiązanie. Z Własności 1 e) mamy

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

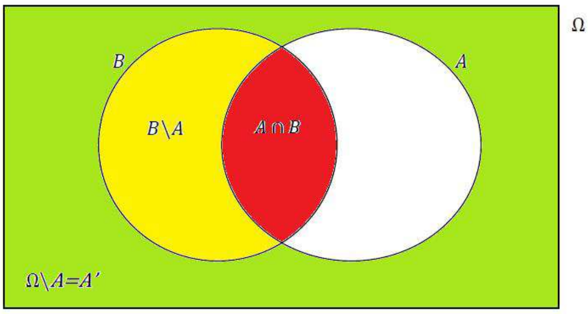
Z Własności 1 f)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{3}{25} + \frac{3}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6 + 15 - 20}{50} = \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ oraz $A \cap B \subset A$ (zob. Rysunek 1). Stąd oraz z Własności 1 c)

$$\begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{25} - \frac{1}{50} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Z uwagi na $A' \cap B = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ i $A \cap B \subset B$



oraz Własność 1 c) otrzymujemy

$$P(A' \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, że $P(A') = 0,8$, $P(B') = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,05$. Oblicz: $P(A \cup B)$, $P((A \cup B) \setminus A)$, $P(A \cap B')$.

Odp. $P(A \cup B) = 0,25$, $P((A \cup B) \setminus A) = 0,05$, $P(A \cap B') = 0,15$.

4 Prawdopodobieństwo klasyczne

Definicja 8. **Mocą zdarzenia** A nazywamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A. Moc zdarzenia A będziemy oznaczać przez $\overline{\overline{A}}$.

Twierdzenie 6 (o prawdopodobieństwie klasycznym)**.** *Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych takim, że wszystkie zdarzenia elementarne będą jednakowo prawdopodobne (tzn. prawdopodobieństwo zajścia każdego z tych zdarzeń jest takie samo). Wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem*

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}. \tag{6}$$

Wzór (6) nazywany jest **wzorem Laplace'a**.

Przykład 8. Rzucamy jednocześnie dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania różnej liczby oczek.

Rozwiązanie.
Ω - zbiór wyników doświadczenia polegającego na jednoczesnym rzucie dwiema kostkami.

Wydaje się naturalnym przyjąć za zbiór zdarzeń elementarnych wszystkie możliwe wyniki jednoczesnego rzutu dwiema nierozróżnialnymi kostkami, czyli

$$\Omega = \{\{a,b\} : \ a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}, \ a \leqslant b\}.$$

Jednakże przy takim doborze zdarzeń elementarnych niektóre z nich są bardziej prawdopodobne niż inne. Tak jest w przypadku zdarzenia elementarnego $\{1,2\}$, które jest bardziej prawdopodobne niż $\{1,1\}$. Niestety w tym przypadku założenia Twierdzenia 6 nie są spełnione i nie możemy korzystać ze wzoru (6).

Nic nie stoi na przeszkodzie, abyśmy założyli, że kostki są rozróżnialne. Wówczas zbiór zdarzeń elementarnych możemy zapisać

$$\Omega = \{(a, b) : \; a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Przy założeniu, że doświadczenie jest losowe wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_6^2 = 6^2 = 36.$$

A - zdarzenie polegające na otrzymaniu różnej liczby oczek

$$A = \{(a, b) : \ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ a \neq b\}$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest tyle co wszystkich 2-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 6-elementowego, tj.

$$\overline{\overline{A}} = V_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Korzystając ze wzoru (6) mamy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Odp. Szukane prawdopodobieństwo (otrzymania różnej liczby oczek przy jednoczesnym rzucie dwiema kostkami do gry) wynosi $\frac{5}{6}$.

Przykład 9. Rzucamy pięć razy symetryczną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania:

a) co najmniej raz szóstki;

b) dokładnie dwóch szóstek lub za każdym razem parzystej liczby oczek.

Rozwiązanie. W obu podpunktach będziemy rozważać taką samą przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Ω - zbiór wyników doświadczenia polegającego na pięciokrotnym rzucie kostką do gry

Wówczas

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \dots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_6^5 = 6^5.$$

Ad. a)

A - zdarzenie polegające na otrzymaniu co najmniej raz „szóstki"

$$A = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \bigvee_{i \in \{1,2,3,4,5\}} a_i = 6,$$
$$a_1, \ldots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Bezpośrednie wyznaczenie mocy zdarzenia A jest czasochłonne, dlatego też policzymy moc zdarzenia przeciwnego do A.

A' - zdarzenie polegające na tym, że nie otrzymamy (ani jednej) „szóstki"

$$A' = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \ldots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' jest tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 5-elementowego, tj.

$$\overline{\overline{A'}} = \overline{V}_5^5 = 5^5.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{5^5}{6^5}.$$

Z uwagi na Własność 1 e) możemy napisać

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,598.$$

Ad. b)

B - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek” lub za każdym razem parzystej liczby oczek

„Podzielmy” to zdarzenie na dwa:

C - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek”;
D - zdarzenie polegające na wyrzuceniu za każdym razem parzystej liczby oczek,

a dokładniej $B = C \cup D$.
Ponadto

$$C = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \bigvee_{i_1 \in \{1,\ldots,5\}} \bigvee_{\substack{i_2 \in \{1,\ldots,5\} \\ i_2 \neq i_1}} a_{i_1} = a_{i_2} = 6, \bigwedge_{\substack{j \in \{1,\ldots,5\} \\ j \neq i_1,\ j \neq i_2}} a_j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \}$$

(jak widać formalne zapisanie zdarzenia może być bardzo skomplikowane, ale warto próbować) oraz

$$D = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \ldots, a_5 \in \{2, 4, 6\}\}.$$

Aby policzyć ilość wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu C będziemy postępować etapami, tj.:

- wybieramy (dla dwóch „szóstek") dwa miejsca (w 5-wyrazowym ciągu) z pięciu - co można uzyskać na $C_5^2 = \binom{5}{2}$ sposobów (przy tym wyborze kolejność nie ma znaczenia);
- na pozostałych trzech miejscach musimy wybrać liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ - co można zrobić na $\overline{V}_5^3 = 5^3$ sposobów.

Stosując regułę iloczynu mamy

$$\overline{\overline{C}} = \binom{5}{2} \cdot 5^3 = 10 \cdot 5^3.$$

Natomiast łatwo widać, że

$$\overline{\overline{D}} = \overline{V}_3^5 = 3^5$$

(tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego).

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10 \cdot 5^3}{6^5} \approx 0,16$$

oraz

$$P(D) = \frac{\overline{\overline{D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3^5}{6^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031.$$

Do wyliczenia $P(B)$ użyjemy Własność 1 f). Jednakże skorzystanie z tej własności wymaga od nas znajomości $P(C \cap D)$, gdzie

$C \cap D$ - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek" i za każdym razem parzystej liczby oczek

$$C \cap D = \{ (a_1, \ldots, a_5) : \bigvee_{i_1 \in \{1,\ldots,5\}} \bigvee_{\substack{i_2 \in \{1,\ldots,5\} \\ i_2 \neq i_1}} a_{i_1} = a_{i_2} = 6, \bigwedge_{\substack{j \in \{1,\ldots,5\} \\ j \neq i_1,\ j \neq i_2}} a_j \in \{2, 4\}\}.$$

Postępując podobnie (dwuetapowo) jak w przypadku obliczania mocy zdarzenia C mamy

$$\overline{\overline{C \cap D}} = \binom{5}{2} \cdot \overline{V}_2^3 = \binom{5}{2} \cdot 2^3 = 10 \cdot 2^3.$$

Stąd

$$P(C \cap D) = \frac{\overline{\overline{C \cap D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10 \cdot 2^3}{6^5} \approx 0,01.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \\ &= \frac{10 \cdot 5^3 + 3^5 - 10 \cdot 2^3}{6^5} = \frac{157}{864} \approx 0,182. \end{aligned}$$

Przykład 10. W urnie jest dwa razy więcej kul czarnych niż białych i trzy razy więcej kul zielonych niż białych. Losujemy jednocześnie trzy kule. Wyznaczyć liczbę kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul różnych kolorów wynosi $\frac{12}{55}$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez

x - liczbę kul białych.

Z warunków zadania wynika, że $x \in \mathbb{N}$.
Ponadto mamy:

$2x$ - liczba kul czarnych;
$3x$ - liczba kul zielonych;
$6x$ - liczba wszystkich kul w urnie.

Przyjmijmy, że przez: B, C, Z i U będziemy oznaczać odpowiednio zbiory: wszystkich kul białych, wszystkich kul czarnych, wszystkich kul zielonych i zbiór wszystkich kul w urnie.

Ω - zbiór wszystkich możliwych wyników losowania trzech kul z urny

$$\Omega = \Big\{ \{a, b, c\} : \ a, b, c \in U, \ a, b, c \text{ różne między sobą} \Big\}.$$

Jak łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{6x}^{3} = \binom{6x}{3} = \frac{(6x)!}{3! \cdot (6x-3)!} = (6x-2)(6x-1)x$$

(tyle co wszystkich 3-elementowych kombinacji ze zbioru $6x$-elementowego).

A - zdarzenie polegające na wybraniu trzech kul różnych kolorów

$$A = \Big\{ \{a, b, c\} : \; a \in B, b \in C, c \in Z \Big\}$$

Korzystając z Twierdzenia 1 mamy

$$\overline{\overline{A}} = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$$

(dokonując wyboru etapami: białą kulę możemy wybrać na x sposobów, czarną kulę - na $2x$ sposobów i zieloną kulę - na $3x$ sposobów).

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając z Twierdzenia 6, otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6x^3}{(6x-2)(6x-1)x} = \frac{6x^2}{(6x-2)(6x-1)}.$$

Z treści zadania mamy dodatkowo, że $P(A) = \frac{12}{55}$, co z uwagi na powyższy warunek implikuje równość

$$\frac{6x^2}{(6x-2)(6x-1)} = \frac{12}{55}$$

lub równoważnie

$$55x^2 = 2(6x-2)(6x-1).$$

Stąd otrzymujemy dwa rozwiązania $x = 2$ lub $x = \frac{2}{17}$ tego równania kwadratowego. Oczywiście rozwiązanie $x = \frac{2}{17}$ nie spełnia warunków zadania, więc ostatecznie możemy powiedzieć, iż mamy 2 kule białe (4 kule czarne i 6 zielonych).

Przykład 11. Klasa licząca 29 uczniów udała się do kina. Ponieważ dzieci nie miały biletów ustawiły się w pojedynczej kolejce do kasy, przy czym ustawienie miało charakter losowy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A - między dwojgiem ustalonych dzieci stanęło w kolejce dziesięcioro innych.

Rozwiązanie.

Ω - zbiór ustawień uczniów w kolejce (przyjmujemy, że uczniów będziemy oznaczać liczbami od 1 do 29)

$$\Omega = \{ (a_1, \ldots, a_{29}) : \ a_1, \ldots, a_{29} \in \{1, \ldots, 29\}; \\ a_i \neq a_j, \text{ dla } i \neq j, \ \ i, j \in \{1, \ldots, 29\}\}.$$

Jak łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = P_{29} = 29!$$

(tyle co wszystkich 29-wyrazowych permutacji).

Przejdźmy teraz do zdarzenia A i przyjmijmy, że dwoje ustalonych uczniów to uczniowie 1 i 2. Na początek musimy ustawić uczniów 1 i 2; mamy następujące możliwości:

$$\underline{1}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{2}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{17\,\text{uczniów}} \quad \text{albo} \quad \underline{2}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{1}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{17\,\text{uczniów}}$$

$$\_\ \underline{1}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{2}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{16\,\text{uczniów}} \quad \text{albo} \quad \_\ \underline{2}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{1}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{16\,\text{uczniów}}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\_ \ldots \_}_{17\,\text{uczniów}}\ \underline{1}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{2} \quad \text{albo} \quad \underbrace{\_ \ldots \_}_{17\,\text{uczniów}}\ \underline{2}\ \underbrace{\_ \ldots \_}_{10\,\text{uczniów}}\ \underline{1}$$

Jak widać z przedstawionego wyżej modelu uczniów 1 i 2 możemy ustawić na $18 \cdot 2 = 36$ sposobów.

Gdy ustaliliśmy miejsca dla uczniów 1 i 2, to musimy jeszcze (na pozostałych 27 miejscach) ustawić pozostałych 27 uczniów. Takich ustawień można dokonać na $P_{27} = 27!$ sposobów.

Korzystając z reguły iloczynu mamy

$$\overline{\overline{A}} = 36 \cdot 27!.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{36 \cdot 27!}{29!} = \frac{36}{28 \cdot 29} = \frac{9}{203} \approx 0,044.$$

Teraz spróbuj samemu rozwiązać zadanie.

Zadanie 3. Przy okrągłym stole posadzono 17 osób, wśród których są Ania i Darek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania i Darek będą siedzieć obok siebie (przyjmij, że wśród 17 osób jest tylko jedna Ania i jeden Darek)?

Odp. Szukane pradopodobieństwo wynosi $\frac{1}{8}$.

Problemy.

- Jak zmieni się prawdopodobieństwo, gdy stół zamienimy na prostokątny, a wszyscy uczniowie będą siedzieć przy tej samej krawędzi stołu?
- Jaki wpływ na prawdopodobieństwo będzie miała informacja, że wśród 17 osób jest więcej niż jedna Ania lub/i więcej niż jeden Darek? Przeanalizuj kilka przypadków.

Przykład 12. W szufladzie znajduje się dziesięć (różnych między sobą) par skarpetek. Wyjęto z szuflady, w sposób losowy, sześć skarpetek. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A - wśród wybranych skarpetek nie ma ani jednej pary.

Rozwiązanie.
Ω - zbiór wszystkich możliwych wyborów sześciu skarpetek

Przyjmujemy, że pary numerujemy liczbami arabskimi $1, 2, \ldots, 10$, a skarpetki w parach, dodatkowo, literami a i b. Tak więc zbiór wszystkich skarpetek

$$S := \{1a, 1b, 2a, 2b, \ldots 10a, 10b\}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\Omega =\{ &\{a_1, \ldots a_6\} : \ a_1, \ldots, a_6 \in S; \\ &a_i \neq a_j, \text{ dla } i \neq j, \quad i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}.\end{aligned}$$

Jak łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{20}^{6} = \binom{20}{6}$$

(tyle co wszystkich 6-elementowych kombinacji ze zbioru 20-elementowego).

Przejdźmy teraz do zdarzenia A. Aby zrealizować to zdarzenie musimy wybrać sześć skarpetek, każdą z innej pary. W związku z tym, zdarzenie to można podzielić na dwa etapy:

- wybrać sześć par z dziesięciu - na $\binom{10}{6}$ sposobów;
- wybrać z każdej z sześciu par po jednej skarpetce - na 2^6 sposobów (z pierwszej pary możemy wybrać skarpetkę na 2 sposoby, z drugiej pary - na 2 sposoby itd. - korzystając z zasady iloczynu otrzymujemy właśnie $\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{6\,\text{razy}}$).

Ponownie korzystają z Twierdzenia 1 otrzymujemy

$$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{6} \cdot 2^6.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając z Twierdzenia 6, mamy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\binom{10}{6} \cdot 2^6}{\binom{20}{6}} = \frac{112}{323} \approx 0,347.$$

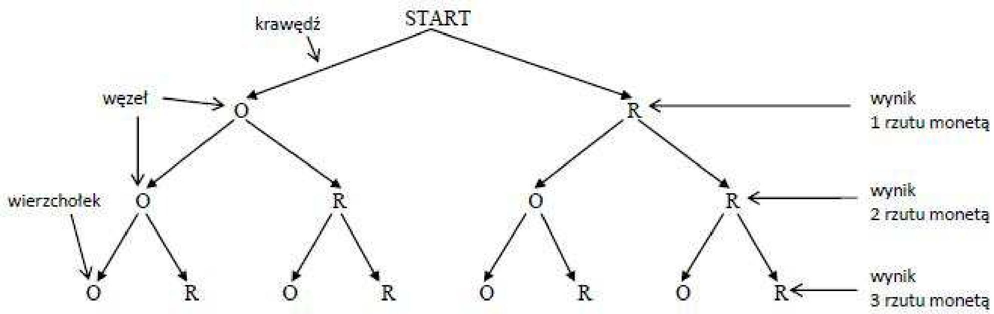
Zadanie 4. W stajni jest 10 klaczy i 10 ogierów. Przydzielono je losowo do 10 boksów (w każdym boksie mogą znajdować się dokładnie dwa konie). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w każdym boksie będzie klacz i ogier?

Odp. Szukane prawdopodobieństwo wynosi: $\frac{2^{10} \cdot 10!}{20!}$.

5 Doświadczenia wieloetapowe

Wśród doświadczeń losowych często spotykamy się z tzw. **doświadczeniami wieloetapowymi**. To znaczy, podobnie jak w przypadku kombinatorycznej reguły iloczynu (zob. Twierdzenie 1), można dane doświadczenie podzielić na kilka etapów. Doświadczenia z Przykładów 2 i 3 są właśnie doświadczeniami wieloetapowymi. Innymi przykładami takich doświadczeń są: ciągnięcie kart z talii, wielokrotne losowanie kul z urny itd. Do graficznego przedstawienia takiego typu doświadczeń używamy **„drzewka”**.

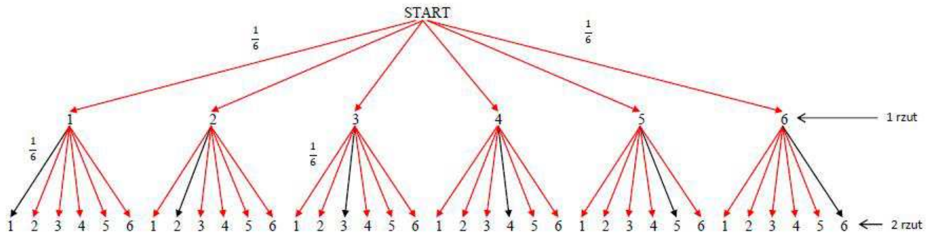
Przykład 13. Rozważmy doświadczenie z Przykładu 2 i spróbujemy na tym przykładzie pokazać jak narysować „drzewko”.



Każde drzewko zaczynamy od punktu „START”. Wyniki kolejnych etapów doświadczenia umieszczane są w **węzłach** drzewka. Strzałki łączące dwa kolejne węzły, to **krawędzie**. Ostatni końcowy węzeł, to **wierzchołek**. Każda krawędź drzewa odpowiada innemu wynikowi jednoetapowego doświadczenia. Dowolny ciąg krawędzi łączący początek drzewka („START”) z wierzchołkiem nazywamy **gałęzią** drzewka. Biorąc pod uwagę wszystkie gałęzie otrzymamy zbiór zdarzeń elementarnych.

Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw zdarzeń w doświadczeniach wieloetapowych często korzysta się z **metody drzewka**.

Przykład 14. Rozwiązać Przykład 8 z wykorzystaniem „metody drzewka".

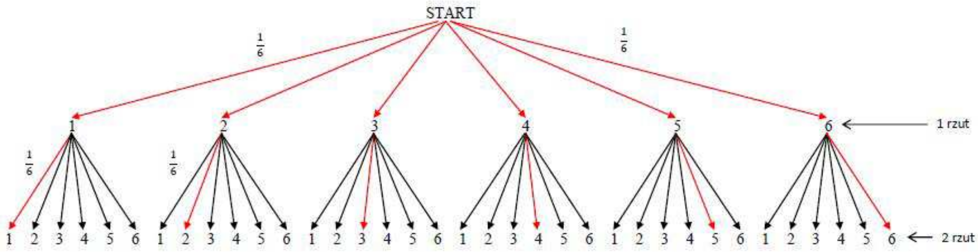


Każdej krawędzi przypisujemy prawdopodobieństwo wyniku (jednoetapowego doświadczenia). W naszym przypadku każde z tych prawdopodobieństw wynosi $\frac{1}{6}$ (jest to wynik uzyskania konkretnej liczby oczek, np. 3, w rzucie kostką). Zauważ, że suma prawdopodobieństw „na krawędziach" wychodzących z jednego węzła wynosi 1 (powinno tak być zawsze).

Pamiętając, że gałęzie odzwierciedlają nam zdarzenia elementarne, na czerwono zaznaczone zostały te gałęzie, które odpowiadają zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A (w naszym przypadku jest ich aż 30). Aby wyliczyć $P(A)$ musimy policzyć prawdopodobieństwa odpowiadające każdej gałęzi poprzez pomnożenie prawdopodobieństw z jej krawędzi (w tym przypadku na każdej krawędzi mamy to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{6}$), czyli $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, a następnie dodać prawdopodobieństwa z tych gałęzi, które odpowiadają zdarzeniom sprzyjającym A (w naszym przykładzie 30 razy dodajemy $\frac{1}{36}$). W ten sposób otrzymujemy $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (a wynik wyszedł ten sam co wcześniej).

Ten sam wynik otrzymamy, gdy wykorzystamy wzór na prawdopodobieństwo przeciwne.

A' - zdarzenie polegające na otrzymaniu tej samej liczby oczek



$$P(A') = \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{6 \text{ razy}} = \frac{1}{6}.$$

Stąd

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Przykład 15. W pewnej szkole są trzy klasy trzecie (III a, III b i III c). W klasie III a jest 15 dziewczynek i 15 chłopców, w III b - 13 dziewczynek i 12 chłopców, w III c - 12 dziewczynek i 14 chłopców. Firma „ABC" postanowiła ufundować stypendium jednemu z uczniów trzeciej klasy tej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) stypendium otrzyma dziewczynka z klasy III b;

b) stypendium otrzyma chłopiec (z dowolnej klasy);

c) stypendium otrzyma chłopiec z III a lub dziewczynka z III c,

jeżeli wybór ucznia dokonujemy w dwóch etapach: na początku losowo wybieramy klasę, a następnie ucznia z tej klasy.

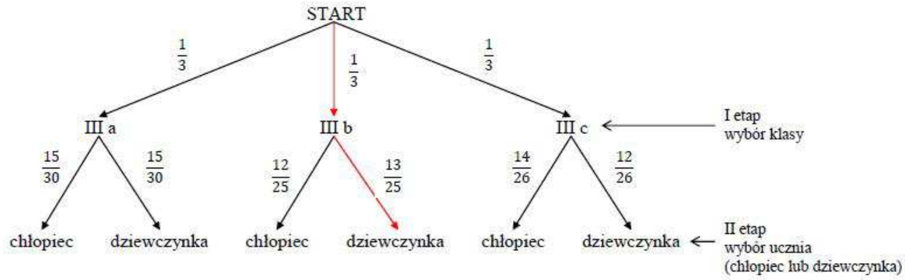
Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy „metodą drzewka".

Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma dziewczynka z klasy III b;
B - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma chłopiec;
C - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma chłopiec z III a lub dziewczynka z III c.

Z uwagi na losowość wyboru klasy, prawdopodobieństwo wybrania każdej z klas jest takie samo i wynosi $\frac{1}{3}$.

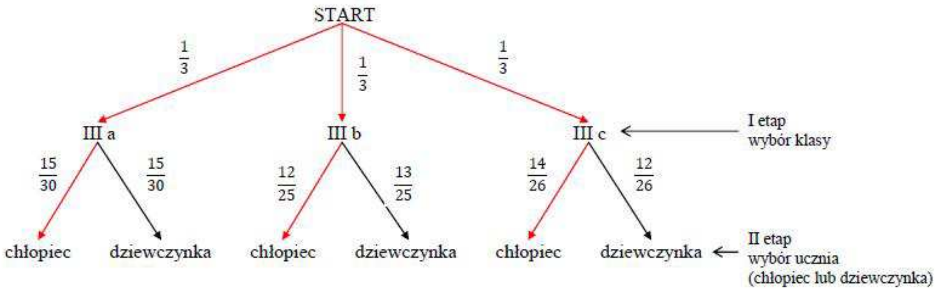
Ad. a)



Tak więc

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{25} = \frac{13}{75}.$$

Ad. b)



Tak więc

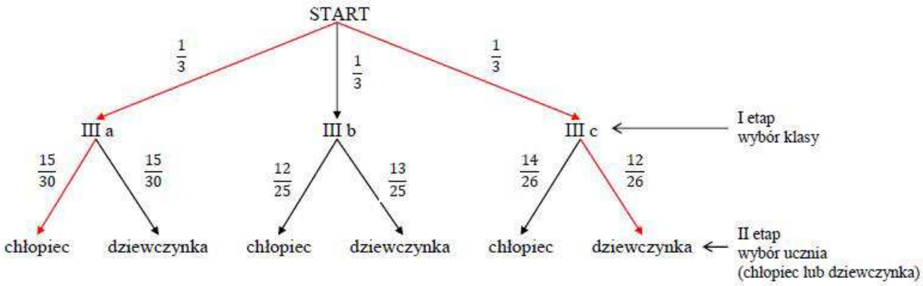
$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{26}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{12}{25} + \frac{7}{13} \right) = \frac{329}{650} \approx 0,50615.$$

Jeżeli zdecydowalibyśmy się na bezpośredni (w jednym etapie) wybór ucznia spośród wszystkich 81 uczniów klas trzecich (bez wybierania klasy), to prawdopodobieństwo zdarzenia „stypendium otrzyma chłopiec”, wynosiłoby $\frac{41}{81} \approx 0,50617$ (bo wszystkich chłopców jest 41). Jak widać w tym przypadku prawdopodobieństwo otrzymania stypendium przez chłopca jest większe (choć różnica jest niewielka) niż w przypadku dwuetapowego wyboru ucznia.

Zauważ, że podobne zjawisko występuje w przypadku podpunktów a) i c).

Ad. c)



Tak więc

$$P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{26} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{13}\right) = \frac{25}{78}.$$

Zadanie 5. Na wybiegu w ogrodzie zoologicznym znajduje się: 7 antylop, 5 żyraf, 9 flamingów i 4 łabędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a) wśród dwóch wybranych zwierząt będą oba jednego gatunku;

b) dwa losowo wybrane zwierzęta są z tej samej gromady (czyli albo z gromady ssaków albo z gromady ptaków).

Odp.

Ad. a) $\frac{73}{300}$

Ad. b) $\frac{12}{25}$.

6 Prawdopodobieństwo warunkowe

Często tak bywa w rachunku prawdopodobieństwa jak i w życiu codziennym, że chcemy wyliczyć prawdopodobieństwo (lub określić szansę) jakiegoś zdarzenia, jeżeli wiemy, że zaszło inne zdarzenie. Przykładowo (w życiu codziennym) firmy ubezpieczeniowe kalkulując składki ubezpieczenia na życie dla swojego klienta szacują (za pomocą tablic życia) jaka jest szansa, że dana osoba przeżyje np. 5 lat, jeżeli wiadomo (tu właśnie jest to zdarzenie, które zaszło), że ta osoba ma już 70 lat (czyli przeżyła już 70 lat). W każdym z takich przypadkach mamy do czynienia z wyznaczaniem prawdopodobieństwa warunkowego.

Definicja 9. Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia $A \subset \Omega$ **pod warunkiem**, zajścia zdarzenie $B \subset \Omega$, takiego że $P(B) > 0$, nazywamy liczbę

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{7}$$

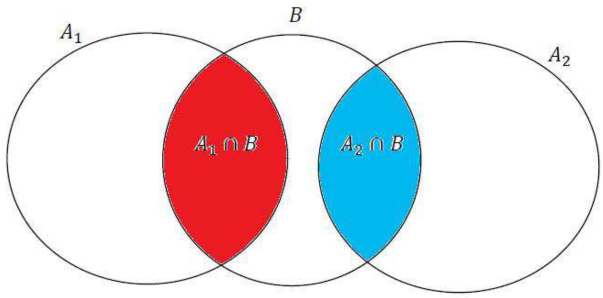
Funkcję przyporządkowującą dowolnemu zbiorowi $A \subset \Omega$ (przy ustalonym zbiorze $B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$) liczbę $P(A|B)$ będziemy nazywać **prawdopodobieństwem warunkowym**.

Twierdzenie 7. *Funkcja (prawdopodobieństwa warunkowego) określona wzorem (7) spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa (czyli warunki 1-3 z Definicji 7).*

Dowód. Ustalmy takie zdarzenie $B \subset \Omega$ aby $P(B) > 0$.

Ad. 1. Ponieważ $P(A \cap B) \geqslant 0$, ze wzoru (7), mamy $P(A|B) \geqslant 0$.

Ad. 2. Niech $A_1, A_2 \subset \Omega$ będą zdarzeniami wykluczającymi się wzajemnie, czyli $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Stąd również $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$, czyli zdarzenia $A_1 \cap B$ i $A_2 \cap B$ też wykluczają się wzajemnie.



Stąd i aksjomatu 2 prawdopodobieństwa (stosowanego do zbiorów $A_1 \cap B$ i $A_2 \cap B$) mamy

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}. \end{aligned}$$

Stosując ponownie (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A_1|B) + P(A_2|B). \end{aligned}$$

Ad. 3. Zauważmy, że

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$\square$

Przykład 16. Obliczyć $P(A)$, jeżeli wiadomo, że

$$P(B) = 3P(B'),\ P(A|B) = \frac{1}{3},\ P(A|B') = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Rozwiązanie. Z Własności 1 e) i pierwszej z powyższych równości mamy

$$P(B) = 3(1 - P(B)),$$

co implikuje, że $P(B) = \frac{3}{4}$ i $P(B') = \frac{1}{4}$. Stąd, z definicji prawdopodobieństwa warunkowego i drugiej równości w (8) otrzymujemy

$$\frac{1}{3} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4}{3} \cdot P(A \cap B).$$

Tak więc $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Postępując podobnie, ze względu na trzecia równość w (8), możemy napisać

$$\frac{1}{2} = P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = 4 \cdot P(A \cap B),$$

co prowadzi do stwierdzenia $P(A \cap B') = \frac{1}{8}$.

Z uwagi na

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B') \quad \text{i} \quad (A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$$

oraz warunek 2 w Definicji 7 mamy ostatecznie

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = \frac{3}{8}.$$

Zadanie 6. Przy danych: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B') = \frac{1}{2}$, obliczyć $P(B|A)$.

Odp. $P(B|A) = \frac{1}{3}$.

Przykład 17. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 9, jeśli wiadomo, że przynajmniej na jednej z kostek wypadła „piątka”?

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:

A - zdarzenie polegające na tym, że suma oczek będzie większa od 9;
B - zdarzenie polegające na tym, że przynajmniej na jednej z kostek wypadła „piątka”;
B' - zdarzenie polegające na tym, że na żadnej z kostek nie wypadła „piątka”;
$A \cap B$ - zdarzenie polegające na tym, że suma oczek będzie większa od 9 i przynajmniej na jednej z kostek wypadła „piątka”.

Naszym zadaniem jest wyznaczenie $P(A|B)$.

Ω - zbiór wyników rzutu dwiema kostkami

$$\Omega = \{(a,b):\ a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} A &= \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}; \\ B' &= \{(a,b):\ a,b \in \{1,2,3,4,6\}\} \\ A \cap B &= \{(5,5),(5,6),(6,5)\}. \end{aligned}$$

Łatwo widać, że

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_6^2 = 6^2, \quad \overline{\overline{B'}} = \overline{V}_5^2 = 5^2, \quad \overline{\overline{A \cap B}} = 3.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia są jednakowe prawdopodobne otrzymujemy

$$P(B') = \frac{\overline{\overline{B'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{25}{36}, \quad P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36}.$$

Tak więc

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1 - P(B')} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}.$$

Przykład 18. W partii brydża, przed licytacją, gracz E widzi, że nie ma asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jego partner ma dwa asy?

Uwaga! W brydża grają cztery osoby, które oznaczane są tak jak kierunki świata: północ - N, południe - S, wschód - E i zachód - W. Przy rozdaniu wszyscy gracze dostają po trzynaście kart z talii 52 kart.

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:

A - zdarzenie polegające na tym, że gracz E nie ma asa;
B - zdarzenie polegające na tym, że partner gracza E (czyli gracz W) ma dwa asy.

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami mamy obliczyć $P(B|A)$, bo interesuje nas prawdopodobieństwo tego, że gracz W ma dwa asy (zdarzenie B), a wiemy, że gracz E nie ma asa (zdarzenie A).

Ω - zbiór wszystkich możliwych rozdań w brydżu

Każde zdarzenie elementarne będzie miało postać

$$\big(\{e_1, \ldots, e_{13}\}, \{w_1, \ldots, w_{13}\}\big), \tag{9}$$

gdzie $e_i, w_j \in T$ $(i, j \in \{1, \ldots, 13\})$ i są różne między sobą, a T jest zbiorem wszystkich 52 kart (talia kart). Zbiór $\{e_1, \ldots, e_{13}\}$ odpowiada 13 kartą, które otrzymał gracz E, a $\{w_1, \ldots, w_{13}\}$ kartom gracza W.

Pewnie zastanawiasz się dlaczego w określeniu zbioru zdarzeń elementarnych nie mamy zbiorów, które byłyby odpowiednikami zbiorów kart otrzymanych przez graczy S i N.

Odpowiedź jest prosta, bo dla zdarzeń A i $A \cap B$ jest obojętne, jakie karty posiadają gracze S i N.

Jeżeli taka odpowiedź Cię nie zadowala, to zmień przestrzeń zdarzeń elementarnych, tak aby uwzględniała karty jakie otrzymają gracze S i N i zobacz, że otrzymasz taki sam wynik jak my za chwilę.

My skupimy się jednak na tym co mają E i W.

Rozdzielenie kart graczom E i W można dokonać etapami (porównaj to z zapisem zdarzenia elementarnego):

- dać 13 kart graczowi E (spośród 52 kart) na $C_{52}^{13} = \binom{52}{13}$ sposobów;
- dać 13 kart graczowi W (już tylko spośród 39 kart) na $C_{39}^{13} = \binom{39}{13}$ sposobów.

Korzystając z reguły iloczynu mamy

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13}.$$

Przejdźmy do zdarzenia A (samodzielnie zapisz formalnie to zdarzenie pamiętając, że $A \subset \Omega$). Aby policzyć, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A musimy postępować podobnie jak przy liczeniu wszystkich zdarzeń elementarnych, choć chciałoby się tylko „zająć" kartami, które będzie miał gracz E (bo w przypadku tego zdarzenia nie jest istotne co będzie miał gracz W). Niestety zdecydowaliśmy się na zdarzenia elementarne postaci (9), a $A \subset \Omega$, więc musimy uwzględnić, także to co dostanie gracz W.

Tak więc w kolejności:

- graczowi E dajemy 13 kart (spośród 48 kart, bo nie ma mieć asa), co możemy zrobić na $C_{48}^{13} = \binom{48}{13}$ sposobów;
- graczowi W dajemy 13 kart (już tylko spośród 39 kart), co możemy zrobić na $C_{39}^{13} = \binom{39}{13}$ sposobów.

Stąd

$$\overline{\overline{A}} = \binom{48}{13} \cdot \binom{39}{13}.$$

W przypadku zdarzenia $A \cap B$ postępujemy podobnie jak wyżej.

$A \cap B$ - zdarzenie polegające na tym, że gracz E nie ma asa oraz gracz W ma dwa asy

W tym przypadku postępujemy następująco:

- graczowi E dajemy 13 kart (spośród 48 kart, bo nie ma mieć asa), co możemy zrobić na $C_{48}^{13} = \binom{48}{13}$ sposobów;
- graczowi W dajemy 2 asy (spośród 4 asów) na $C_4^2 = \binom{4}{2}$ sposobów, a następnie pozostałe 11 kart wśród, których nie ma asa (spośród 35 kart, bo 13 kart ma gracz E i gracz W nie może dostać już asa, czyli zostało 52-13-4=35 kart do wyboru), co możemy zrobić na $C_{35}^{11} = \binom{35}{11}$ sposobów.

Stąd

$$\overline{\overline{A \cap B}} = \binom{48}{13} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{35}{11}.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne mamy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\binom{48}{13} \cdot \binom{39}{13}}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13}} = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}$$

oraz

$$P(A \cap B) = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{13} \cdot \binom{35}{11}}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13}}.$$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy ostatecznie

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{13} \cdot \binom{35}{11}}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13}}}{\frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{35}{11}}{\binom{39}{13}}.$$

Twierdzenie 8 (wzór łańcuchowy)**.** *Jeżeli zdarzenia* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *spełniają warunek*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0, \tag{10}$$

to

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Dowód. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe mamy

$$\begin{aligned}
&P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})\\
&=P(A_1)\cdot\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\cdot\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\\
&\cdot\ldots\cdot\frac{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})}{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-2})}\cdot\frac{P(A_1\cap\ldots\cap A_n)}{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})}\\
&=P(A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n),
\end{aligned}$$

gdzie mianowniki w powyższym warunku są dodatnie, na mocy założenia (10).

Oczywiście formalny dowód należałoby przeprowadzić indukcyjnie. $\square$

7 Niezależność zdarzeń

W życiu codziennym często używamy pojęcia niezależności w ogóle nie łącząc go z matematyką. Mówimy, w sensie intuicyjnym (potocznym), iż dwa zdarzenia są niezależne, jeżeli zajście jednego z nich nie ma wpływu na wynik drugiego zdarzenia i odwrotnie. Te intuicyjne myślenie ma bardzo duży związek z pojęciem niezależności zdarzeń w rachunku prawdopodobieństwa.

Definicja 10. Mówimy, że dwa zdarzenia $A, B \subset \Omega$ są **niezależne** wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{11}$$

Zdarzenia, które nie są niezależne nazywamy **zależnymi**.

Zwykle tak bywa, że „intuicyjnie” niezależne zdarzenia są naprawde niezależne. Niestety bywa też tak, że zdarzenia, które nie wydają się nam „intuicyjnie” niezależne są niezależne w sensie formalnym (matematycznym).

Przykład 19. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Które pary zdarzeń są parami zdarzeń niezależnych:

a) A - wylosowano asa, B - wylosowano kartę czerwoną;

b) A - wylosowano pika, B - wylosowano kartę czarną, młodszą od piątki?

Rozwiązanie.

Ad. a) Asów w talii jest cztery, kart koloru czerwonego (czyli $\diamondsuit$ i $\heartsuit$) jest 26. Łatwo obliczymy, że

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

Z drugiej strony

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26},$$

gdyż asów koloru czerwonego jest 2. Tak więc $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ i zdarzenia A i B są niezależne. Czy powiedziałbyś: „intuicyjnie czułem, że zdarzenia są niezależne?”

Ad. b) Spróbuj samemu sprawdzić, że te zdarzenia są zależne. Podpowiem tylko, że piki to $\spadesuit$.

Przykład 20. Wykazać, że jeżeli A i B są zdarzeniami niezależnymi, to pary zdarzeń: A i B'; A' i B oraz A' i B' są zdarzeniami niezależnymi.

Rozwiązanie. Z założenia mamy, iż zdarzenia A i B są niezależne, czyli spełniona jest równość (11). Z uwagi na $A \cap B' = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ oraz $A \cap B \subset A$ możemy napisać (dlaczego?)

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Stąd i z założenia (warunek (11)) mamy

$$\begin{aligned} P(A \cap B') &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B'), \end{aligned}$$

czyli niezależność zdarzeń A i B' została udowodniona.

Problem. Dlaczego dowód niezależności zdarzeń A i B' wystarcza, aby stwierdzić, że pozostałe dwie pary zdarzeń A' i B oraz A' i B' są niezależne?

Przykład 21. Pan Marek kupił na dwóch różnych loteriach po jednym losie. Prawdopodobieństwo wygrania na I loterii wynosi $0,05$, a prawdopodobieństwo wygrania na II loterii $0,01$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Pan Marek:

a) ma dwa losy wygrywające;

b) ma dokładnie jeden los wygrywający;

c) nie ma losów wygrywających.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że los z I loterii jest wygrywający ($P(A) = 0,05$);
B - zdarzenie polegające na tym, że los z II loterii jest wygrywający ($P(B) = 0,01$).

Oczywiście przyjmujemy, że zdarzenia A i B są niezależne, gdyż wygrana na jednej z loterii nie zależy od wygranej na drugiej loterii.

Ad. a) Zdarzenie C - polegające na tym, że Pan Marek ma dwa losy wygrywające, możemy zapisać jako $C = A \cap B$. Tak więc korzystając z niezależności zdarzeń A i B mamy

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,0005.$$

Ad. b) Zdarzenie D - polegające na tym, że Pan Marek ma dokładnie jeden los wygrywający, możemy zapisać jako $D = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$. Zauważmy ponadto, że zdarzenia $A \cap B' = A \setminus B$ i $A' \cap B = B \setminus A$ wykluczają się wzajemnie. Tak więc

$$P(D) = P\Big((A \cap B') \cup (A' \cap B)\Big) = P(A \cap B') + P(A' \cap B).$$

Korzystając z wyników Przykładu 20, zdarzenia A i B' oraz A' i B są niezależne. Stąd i powyższej równości mamy

$$P(D) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) = 0,059.$$

Ad. c) Spróbuj rozwiązać samodzielnie. Powinno Ci wyjść $0,9405$.

Definicja 11. Mówimy, że trzy zdarzenia $A, B, C \subset \Omega$ są **niezależne** wtedy, gdy zdarzenia A, B, C są parami niezależne, tzn. pary zdarzeń A i B, A i C oraz B i C są niezależne oraz

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Ogólniej

Definicja 12. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ $(n > 2)$ są **niezależne** wtedy, gdy każde $n-1$ zdarzeń spośród nich są niezależne oraz

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Przykład 22. Trzej łucznicy A, B i C strzelają (z łuku) jednocześnie do tej samej tarczy. Łucznik A trafia „w dziesiątkę" z prawdopodobieństwem $0,7$; łucznik B - $0,6$; łucznik C - $0,4$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) „dziesiątka" zostanie co najmniej raz trafiona;

b) „dziesiątka" zostanie dokładnie dwa raz trafiona.

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:

A_1 - łucznik A trafi w „dziesiątkę" ($P(A_1) = 0,7$);
B_1 - łucznik B trafi w „dziesiątkę" ($P(B_1) = 0,6$);
C_1 - łucznik C trafi w „dziesiątkę" ($P(C_1) = 0,4$);
D - „dziesiątka" zostanie co najmniej raz trafiona;
E - „dziesiątka" zostanie dokładnie dwa raz trafiona.

Ad. a) Zauważmy, że

D' - zdarzenie polegające na tym, że „dziesiątka" nie zostanie (ani razu) trafiona

oraz $D' = A_1' \cap B_1' \cap C_1'$. Stąd oraz z faktu, że łucznicy strzelają niezależnie od siebie (trafienie bądź nietrafienie w „dziesiątkę" przez jednego z łuczników nie zależy od trafienia bądź nietrafienia w „dziesiątkę" pozostałych)

$$\begin{aligned} P(D') &= P(A_1' \cap B_1' \cap C_1') = P(A_1') \cdot P(B_1') \cdot P(C_1') \\ &= 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,072. \end{aligned}$$

Tak więc

$$P(D) = 1 - P(D') = 0,928.$$

Ad. b) Zauważmy, że

$$E = (A_1 \cap B_1 \cap C_1') \cup (A_1 \cap B_1' \cap C_1) \cup (A_1' \cap B_1 \cap C_1)$$

oraz zdarzenia $A_1 \cap B_1 \cap C_1'$, $A_1 \cap B_1' \cap C_1$ i $A_1' \cap B_1 \cap C_1$ są parami rozłączne. Stąd i z Uwagi 1 otrzymujemy

$$P(E) = P(A_1 \cap B_1 \cap C_1') + P(A_1 \cap B_1' \cap C_1) + P(A_1' \cap B_1 \cap C_1).$$

Korzystając z niezależności zdarzeń (zob. też komentarz w Ad. a)) możemy napisać

$$P(E) = P(A_1) \cdot P(B_1) \cdot P(C_1') + P(A_1) \cdot P(B_1') \cdot P(C_1) + P(A_1') \cdot P(B_1) \cdot P(C_1) = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,436.$$

Zadanie 7. Załóżmy, że na meczu piłki nożnej z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ wygrywają gospodarze, $\frac{1}{6}$ goście, $\frac{1}{3}$ jest remis. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w trzynastu meczach:

a) nie będzie ani jednego remisu;

b) będzie siedem zwycięstw gospodarzy i trzy gości.

UWAGA! Podpunkt b) jest trudniejszy i nie musisz się przejmować, że nie potrafisz go rozwiązać (choć może odpowiedź podsunie Ci sposób wyznaczenia szukanego prawdopodobieństwa).

Odp.

Ad. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{13}$;

Ad. b) $\binom{13}{7} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$.

8 Prawdopodobieństwo całkowite oraz wzór Bayesa

Niech Ω będzie ustalonym zbiorem zdarzeń elementarnych.

Definicja 13. Zdarzenia $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ nazywamy **rozbiciem** przestrzeni Ω, gdy spełnione są warunki:

1) $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $i, j \in \{1, \ldots, n\}$;
2) $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$.

Twierdzenie 9 (o prawdopodobieństwie całkowitym)**.** *Jeżeli zdarzenia $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ są rozbiciem Ω oraz $P(B_i) > 0$ dla $i \in \{1, \ldots, n\}$, to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi wzór*

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n). \quad (12)$$

Przykład 23. Mamy trzy urny C, C_1 i C_2. Urna C zawiera dwie kule: czerwoną i zieloną. W urnach C_1, C_2 znajdują się odpowiednio: 4 kule białe i 6 czarnych oraz 6 białych i 2 czarne. Z urny C losujemy jedną kulę. Jeżeli jest to kula czerwona, to losujemy jedną kulę z urny C_1, a jeżeli jest to kula zielona, to losujemy jedną kulę z urny C_2. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej;
B_1 - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czerwonej z urny C (w konsekwencji będziemy losować z urny C_1);
B_2 - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli zielonej z urny C (w konsekwencji będziemy losować z urny C_2);
$A|B_1$ - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej pod warunkiem, gdy wybieramy z urny C_1;
$A|B_2$ - zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli czarnej pod warunkiem, gdy wybieramy z urny C_2.

Zauważmy, że B_1 i B_2 są rozbiciem Ω, tzn. $B_1 \cup B_2 = \Omega$ i $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Ponadto

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} > 0$$

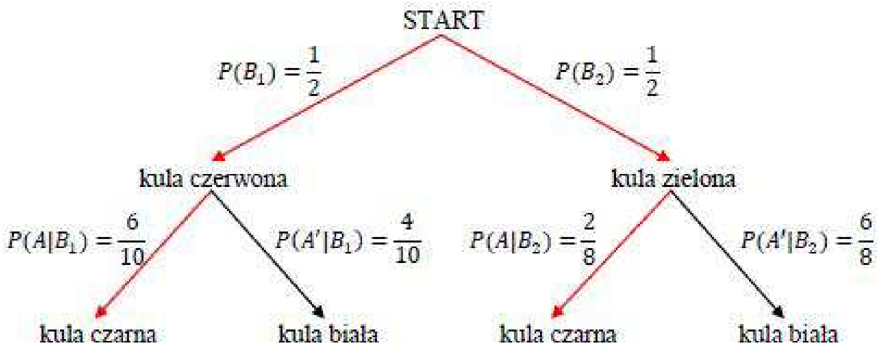
oraz

$$P(A|B_1) = \frac{6}{10} \quad \text{i} \quad P(A|B_2) = \frac{2}{8}.$$

Tak więc założenia Twierdzenia 9 są spełniona, a ze wzoru (12) mamy

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0,425. \end{aligned}$$

To samo zadanie można rozwiązać „metodą drzewka". Oto podpowiedź



Twierdzenie 10 (wzór Bayesa)**.** *Niech* $A \subset \Omega$. *Jeżeli zdarzenia* $B_1, \ldots, B_n \subset \Omega$ *są rozbiciem* Ω *oraz* $P(A), P(B_i) > 0$ *dla* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *to dla każdego* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *zachodzi wzór*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}, \tag{13}$$

gdzie $P(A)$ *określone jest wzorem (12).*

Przykład 24. W zbiorze 100 monet jedna ma po obu stronach orła, pozostałe są prawidłowe. W wyniku pięciu rzutów, losowo wybraną monetą, otrzymaliśmy pięć orłów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że była to moneta z orłami po obu stronach.

Rozwiązanie. Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że wypadnie 5 orłów;
B_1 - zdarzenie polegające na tym, że rzucaliśmy prawidłową monetą;
B_2 - zdarzenie polegające na tym, że rzucaliśmy monetą z dwoma orłami;
$A|B_1$ - zdarzenie polegające na tym, że wypadnie 5 orłów pod warunkiem, że rzucaliśmy prawidłową monetą;
$A|B_2$ - zdarzenie polegające na tym, że wypadnie 5 orłów pod warunkiem, że rzucaliśmy monetą z dwoma orłami.

Zgodnie z powyższymi oznaczeniami i treścią przykładu, szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia $B_2|A$, czyli zdarzenia polegającego na tym, że rzucaliśmy monetą z dwoma orłami, jeżeli wiemy (pod warunkiem), że otrzymaliśmy 5 orłów.

Oczywiście B_1 i B_2 są rozbiciem Ω. Ponadto

$$P(B_1) = \frac{99}{100} \quad \text{i} \quad P(B_2) = \frac{1}{100}$$

oraz

$$P(A|B_1) = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \quad \text{i} \quad P(A|B_2) = 1.$$

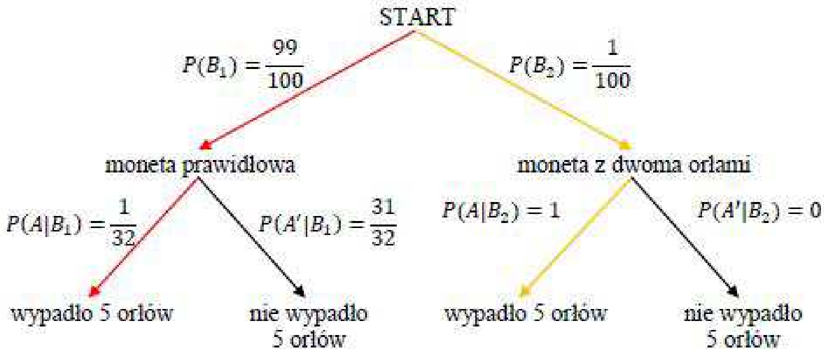
Tak więc założenia Twierdzenia 10 są spełnione, a ze wzorów (12) i (13) mamy odpowiednio

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{1}{32} \cdot \frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100} = \frac{131}{3200} \end{aligned}$$

oraz

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{131}{3200}} = \frac{32}{131}.$$

Problem. Spróbuj ustalić jak za pomocą „drzewka” wyliczyć szukane prawdopodobieństwo. Oto podpowiedź



Przykład 25. Rzucamy jeden raz kostką do gry, a następnie dwiema monetami tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia samych orłów.

Rozwiązanie. Oznaczmy (dla $i \in \{1, \ldots, 6\}$):

A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu samych orłów;
B_i - zdarzenie polegające na wyrzuceniu i oczek na kostce (w konsekwencji rzucamy i razy dwiema monetami);
$A|B_i$ - zdarzenie polegające na wyrzuceniu samych orłów pod warunkiem, że rzucamy i razy dwiema monetami.

Oczywiście $B_1, \ldots B_6$ są rozbiciem Ω (dlaczego?). Ponadto

$$P(A_1) = \ldots = P(A_6) = \frac{1}{6}$$

oraz dla każdego $i \in \{1, \ldots, 6\}$ mamy

$$P(A|B_i) = \frac{1}{4^i}$$

(bo rzucamy i razy dwiema monetami). Stąd i Twierdzenia 9 otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_6) \cdot P(B_6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^6} \right). \end{aligned}$$

Zadanie 8. Koparka może pracować w warunkach normalnych albo trudnych odpowiednio z prawdopodobieństwem: $p_1 = 0,8$ i $p_2 = 0,2$. Prawdopodobieństwo awarii koparki w czasie t wynosi 0,05 przy pracy w warunkach normalnych i 0,25 w warunkach trudnych.

a) Ile wynosi prawdopodobieństwo awarii koparki pracującej przez czas t?

b) W ciągu czasu t koparka uległa uszkodzeniu. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pracowała w warunkach normalnych.

Odp.

Ad. a) $0,09$;

Ad. b) $\frac{4}{9}$.

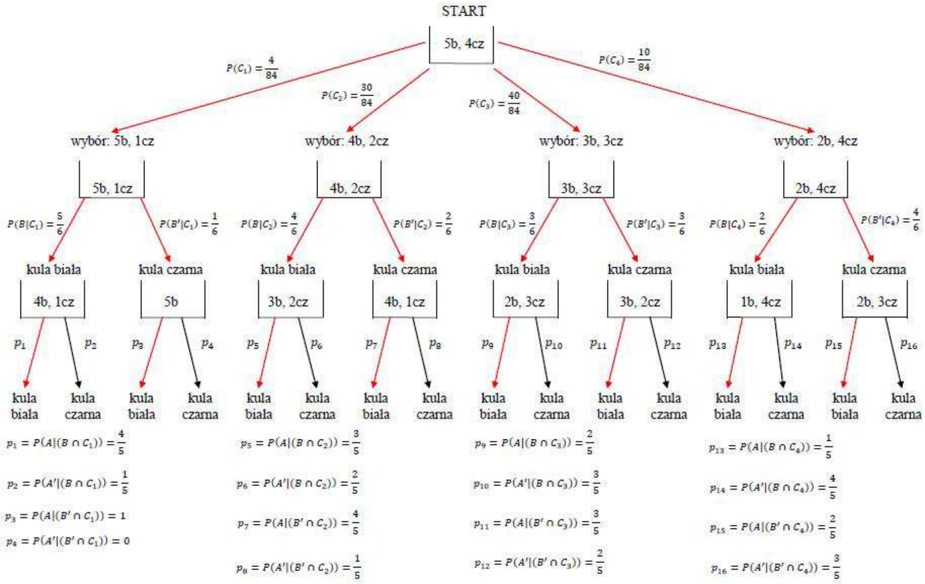
Przykład 26. W urnie jest 5 kul białych i 4 czarne. Sześć z nich przekładamy do innej pustej urny i z niej losujemy dwukrotnie po jednej kuli bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga z wylosowanych kul jest biała?

Rozwiązanie. Oznaczmy zdarzenia:

C_1 - przy losowaniu z pierwszej urny wyciągnięto 5 kul białych i 1 czarną;
C_2 - przy losowaniu z pierwszej urny wyciągnięto 4 kule białe i 2 czarne;
C_3 - przy losowaniu z pierwszej urny wyciągnięto 3 kule białe i 3 czarne;
C_4 - przy losowaniu z pierwszej urny wyciągnięto 2 kule białe i 4 czarne;
B - przy pierwszym losowaniu z drugiej urny wyciągnięto kulę białą;
A - przy drugim losowaniu z drugiej urny wyciągnięto kulę białą.

Oczywiście zdarzenia C_1, C_2, C_3, C_4 są rozbiciem zbioru zdarzeń elementarnych Ω (jakiego?).

Sposób 1. „Metoda drzewka”.



Rysunek 2

$$
\begin{aligned}
P(A) = & \frac{4}{84} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{84} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{30}{84} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \\
& + \frac{30}{84} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{40}{84} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{40}{84} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \\
& + \frac{10}{84} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{10}{84} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{9}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Formalne rozwiązanie tego zadania przedstawimy dwoma sposobami.

Sposób 2. Z Twierdzenia 9 możemy napisać

$$\begin{aligned} P(A) = {} & P(A|C_1) \cdot P(C_1) + P(A|C_2) \cdot P(C_2) \\ & + P(A|C_3) \cdot P(C_3) + P(A|C_4) \cdot P(C_4). \end{aligned} \tag{15}$$

Ponadto dla ustalonego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mamy

$$\begin{aligned} & P(B|C_i) \cdot P(A|B \cap C_i) + P(B'|C_i) \cdot P(A|B' \cap C_i) \\ & = \frac{P(B \cap C_i)}{P(C_i)} \cdot \frac{P(A \cap B \cap C_i)}{P(B \cap C_i)} \\ & + \frac{P(B' \cap C_i)}{P(C_i)} \cdot \frac{P(A \cap B' \cap C_i)}{P(B' \cap C_i)} \\ & = \frac{P(A \cap B \cap C_i) + P(A \cap B' \cap C_i)}{P(C_i)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Z uwagi na równości:

$$(A \cap B \cap C_i) \cup (A \cap B' \cap C_i) = A \cap C_i$$

i

$$(A \cap B \cap C_i) \cap (A \cap B' \cap C_i) = \emptyset$$

oraz własność 2 z Definicji 7 otrzymujemy

$$\frac{P(A \cap B \cap C_i) + P(A \cap B' \cap C_i)}{P(C_i)} = \frac{P(A \cap C_i)}{P(C_i)} = P(A|C_i). \tag{17}$$

Stąd oraz z warunków (15) i (16) dostajemy

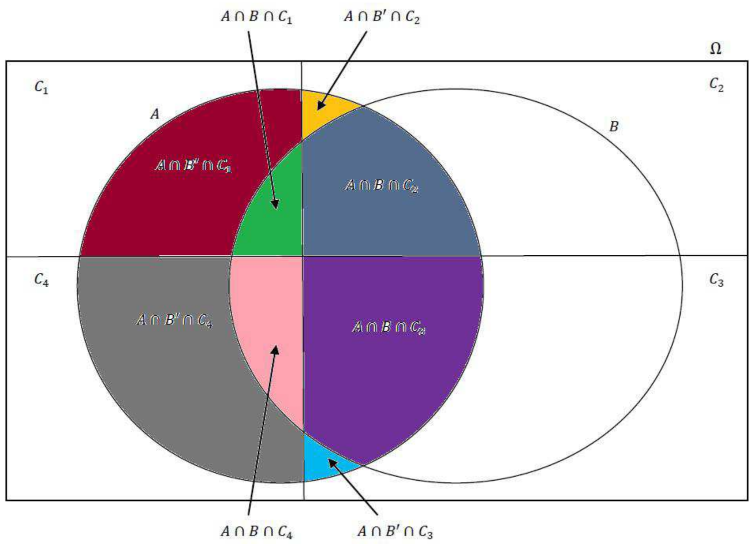
$$
\begin{aligned}
P(A) = {} & P(A|B\cap C_1)\cdot P(B|C_1)\cdot P(C_1) \\
& + P(A|B'\cap C_1)\cdot P(B'|C_1)\cdot P(C_1) \\
& + \qquad\qquad\qquad \dots \\
& + P(A|B\cap C_4)\cdot P(B|C_4)\cdot P(C_4) \\
& + P(A|B'\cap C_4)\cdot P(B'|C_4)\cdot P(C_4). \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Podstawiając, do powyższego wzoru, w miejsce prawdopodobieństw odpowiednie wartości (zob. Rysunek 2) otrzymamy dokładnie to co w (14).

Sposób 3. Zauważmy, że

$$A = (A \cap B \cap C_1) \cup (A \cap B' \cap C_1) \cup (A \cap B \cap C_2)$$
$$\cup (A \cap B' \cap C_2) \cup (A \cap B \cap C_3) \cup (A \cap B' \cap C_3)$$
$$\cup (A \cap B \cap C_4) \cup (A \cap B' \cap C_4)$$

oraz każde dwa składniki powyższej sumy są parami rozłączne.



Stąd, Uwagi 1 oraz Twierdzenia 8 otrzymujemy wzór (18).

9 Schemat Bernoulliego

Wśród doświadczeń losowych są też takie doświadczenia, które kończą się tylko dwoma wynikami (umownie zwanymi **sukcesem** i **porażką**). Taki typ doświadczenia nazywamy **próbą Bernoulliego**.

Definicja 14. **Schematem** (n prób) **Bernoulliego** nazywamy skończony ciąg (n) niezależnych powtórzeń tej samej próby Bernoulliego.

Twierdzenie 11. *Prawdopodobieństwo uzyskania dokładnie k sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób wynosi*

$$P(S_n^k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \tag{19}$$

gdzie p jest prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie, a q - porażki $(p + q = 1)$.

Przykład 27. Rzucamy pięć razy symetryczną kostką do gry:

a) oblicz prawdopodobieństwo otrzymania „piątki” dokładnie trzy razy;

b) oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej trzech „piątek”;

c) oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najwyżej trzech „piątek”.

Rozwiązanie. Zauważmy, że w każdym z podpunktów mamy do czynienia z doświadczeniami, które są schematami Bernoulliego o pięciu próbach. Każda próba to jednokrotny rzut kostką (rzuty kostką są niezależne), gdzie „sukcesem” w każdej z prób jest wyrzucenie „piątki” ($p = \frac{1}{6}$ oraz $q = 1 - p = \frac{5}{6}$).

Ad. a) W tym przypadku potrzebujemy znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia A - otrzymania trzech „piątek” w pięciu rzutach kostką (czyli uzyskania 3 sukcesów w 5 próbach Bernoulliego). Zgodnie ze wzorem (19) szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$P(A) = P(S_5^3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{250}{6^5} \approx 0,032.$$

Ad. b) W tym przypadku potrzebujemy znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia B - otrzymania co najmniej trzech „piątek" w pięciu rzutach kostką (czyli uzyskania 3, 4 lub 5 sukcesów w 5 próbach Bernoulliego). Oczywiście zdarzenia B_i - uzyskanie i sukcesów $i \in \{1, \ldots, 6\}$ w 5 próbach Bernoulliego, wykluczają się parami. Stąd oraz z faktu, że $B = B_3 \cup B_4 \cup B_5$ mamy

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S_5^{3 \leqslant k \leqslant 5}) = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) \\ &= P(B_3) + P(B_4) + P(B_5). \end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S_5^3) + P(S_5^4) + P(S_5^5) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &+ \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 \\ &= \frac{276}{6^5} \approx 0,035. \end{aligned}$$

Ad. c) W tym przypadku potrzebujemy znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia C - otrzymania co najwyżej trzech „piątek" w pięciu rzutach kostką. Postępując podobnie jak wyżej, mamy

$$P(C) = P(S_5^{0\leqslant k\leqslant 3}) = P(S_5^0) + P(S_5^1) + P(S_5^2) + P(S_5^3)$$

lub inaczej

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(C') = 1 - P(S_5^{4\leqslant k\leqslant 5}) \\ &= 1 - P(S_5^4) - P(S_5^5) = 1 - \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \\ &- \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 - \frac{26}{6^5} \approx 0,997. \end{aligned}$$

Przykład 28. Prawdopodobieństwo trafienia w „dziesiątkę” przy jednym strzale jest równe $\frac{1}{3}$. Ile strzałów należy oddać, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0,9 trafić w „dziesiątkę” co najmniej raz?

Rozwiązanie. Oczywiście $p = \frac{1}{3}$. Szukamy takiego $n \in \mathbb{N}$, aby $P(S_n^{1 \leqslant k \leqslant n}) \geqslant 0,9$. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego mamy

$$P(S_n^{1 \leqslant k \leqslant n}) = 1 - P(S_n^0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Aby móc obliczyć n wystarczy, że rozwiążemy nierówność

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0,9.$$

Stąd $n \geqslant 6$ (pamiętając, że $n \in \mathbb{N}$).

Odp. Należy oddać co najmniej 6 strzałów.

Zadanie 9. Hokeista wykonuje serię 5 rzutów karnych. Prawdopodobieństwo, że w tych 5 rzutach co najmniej raz trafi do bramki, wynosi $\frac{242}{243}$. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia przez hokeistę bramki w jednym rzucie karnym (jeśli w każdym rzucie jest ono jednakowe)?

Odp. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{3}$.

Przykład 29. Strzelec trafia w tarczę średnio siedem razy na dziesięć strzałów. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A - czwarte trafienie w tarczę nastąpi w dziewiątym strzale.

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia:

B - zdarzenie polegające na trzykrotnym trafieniu w tarcze w pierwszych ośmiu strzałach;
C - zdarzenie polegające na trafieniu w tarcze w dziewiątym strzale.

Zauważmy, że $A = B \cap C$. Ponadto zdarzenia B i C są niezależne (bo na trzykrotne trafienie w pierwszych ośmiu strzałach nie ma wpływu trafienie w dziewiątym strzale i odwrotnie). Stąd

$$P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C). \qquad (20)$$

Oczywiście $P(C) = 0,7$ (bo strzelec trafia w tarczę średnio siedem razy na dziesięć). Natomiast w przypadku zdarzenia B mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego, gdzie w 8 próbach chcemy uzyskać dokładnie 3 sukcesy (prawdopodobieństwo sukcesu w jednej próbie - trafienie w tarczę - wynosi $p = 0,7$). Stąd i (19) otrzymujemy

$$P(B) = P(S_8^3) = \binom{8}{3} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^5,$$

co dzięki (20) pozwala wyliczyć szukane prawdopodobieństwo

$$P(A) = \binom{8}{3} \cdot (0,7)^3 \cdot (0,3)^5 \cdot 0,7 \approx 0,033.$$

Zadanie 10. W 12 rzutach monetą wypadły cztery orły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w szóstym rzucie wypadł orzeł?

Odp. $\frac{1}{3}$.

Wskazówka. Skorzystać z prawdopodobieństwa warunkowego, niezależności zdarzeń i schematu Bernoulliego.

10 Statystyka

Statystyka jest nauką, której głównym celem jest określenie w jaki sposób należy zbierać dane, jak później je opracować, aby w konsekwencji uzyskać z nich wiarygodne i miarodajne wnioski. Zwykle tak bywa w statystyce, że zbieramy informacje (dane) dotyczące tylko reprezentantów pewnej większej grupy (populacji), a wnioski chcemy otrzymać dla całej populacji.

Jak zwykle na początku podamy trochę teorii.

Definicja 15.

- **Populacją** lub **zbiorowością statystyczną** nazywamy zbiór elementów (osób, przedmiotów, zjawisk itp.) mających jedną (lub więcej) wspólną własność zwaną **cechą statystyczną**.
- Elementy populacji nazywamy **jednostkami statystycznymi**.
- **Próbą statystyczną** nazywamy każdy podzbiór populacji.

Przykład 30. Zobaczmy przykłady powyższych pojęć.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Osoby mieszkające w Polsce	Osoby mieszkające w Rzeszowie	Mieszkaniec Rzeszowa	- wzrost - waga - zarobki

Może się tak zdarzyć, że próba w jednym badaniu w innym jest populacją.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Osoby mieszkające w Rzeszowie	Mieszkańcy Rzeszowa w wieku 30-50 lat	Mieszkaniec Rzeszowa w wieku 30-50 lat	- płeć - przebyta choroba nowotworowa

Jak widać w powyższym przykładzie cecha nie musi mieć charakter ilościowy (czyli, jej wynik nie musi być wyrażony liczbowo).

Inny przykład.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Słonie	Słonie w ZOO w Polsce	Słoń z ZOO w Polsce	- stan uzębienia - ilość wychowanego potomstwa

Próby statystyczne możemy podzielić na: **próby losowe** (gdy jednostki statystyczne są dobierane zupełnie losowo - przypadkowo) lub **próby nielosowe** (gdy wybór elementów próby jest celowy - nieprzypadkowy).

Do przeprowadzenia badań statystycznych potrzebujemy **danych statystycznych**, czyli wyników (ilościowych lub nie) odzwierciedlających badaną cechę w populacji lub próbie.

Przykład 31. W pewnym zakładzie produkowane są śruby. Z partii wyprodukowanych śrub wybrano losowo 50 w celu zbadania zgodności ich długości z normą. Otrzymano wyniki w cm: 3,6; 5,0; 4,0; 4,7; 5,2; 5,9; 4,5; 5,3; 5,5; 3,9; 5,6; 3,5; 5,4; 5,2; 4,1; 5,0; 3,1; 5,8; 4,8; 4,4; 4,6; 5,1; 4,7; 3,0; 5,5; 6,1; 3,8; 4,9; 5,6; 6,1; 5,9; 4,2; 6,4; 5,3; 4,5; 4,9; 4,0; 5,2; 3,3; 5,4; 4,7; 6,4; 5,1; 3,4; 5,2; 6,2; 4,4; 4,3; 5,8; 3,7.

W tym przypadku mamy

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna	Cecha
Śruby z danej partii	50 śrub z tej partii	Pojedyncza śruba	Długość śruby

Niestety zapis danych przedstawiony w treści przykładu jest mało czytelny. Dlatego ustawmy wyniki od najmniejszego do największego

3,0; 3,1; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 4,0; 4,0; 4,1; 4,2; 4,3; 4,4; 4,4; 4,5; 4,5; 4,6; 4,7; 4,7; 4,7; 4,8; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,2; 5,2; 5,2; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,4; 5,5; 5,5; 5,6; 5,6; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 6,1; 6,1; 6,2; 6,4; 6,4.

Nawet uporządkowane dane mogą być mało czytelne (zwłaszcza jak jest ich bardzo dużo). Dla uproszczenia możemy przedstawić wyniki za pomocą **szeregu rozdzielczego**, który składa się z dwóch wierszy: pierwszy podaje wariant badanej cechy, a drugi - **liczebność** lub inaczej **częstość** (czyli ilość wyników mających podany wariant cechy).

W tym przypadku szereg rozdzielczy może wyglądać następująco

Wariant badanej cechy	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
Liczebność	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1

4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
1	2	2	1	3	1	2	2	2	4

5,3	5,4	5,5	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4
2	2	2	2	2	2	2	1	2

Graficznie przedstawiamy szereg rozdzielczy za pomocą **diagramów**.

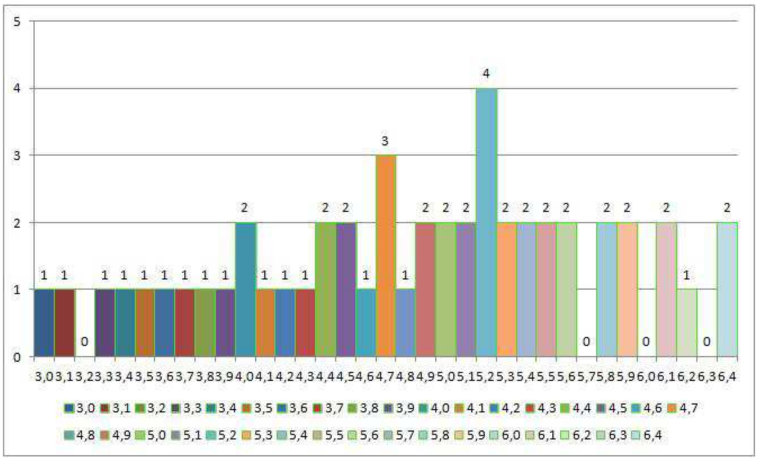


Diagram słupkowy - histogram

Można też zapisać dane w postaci szeregu rozdzielczego wprowadzając przedziały klasowe.

Długość śruby w cm	$\langle 3,0;3,5)$	$\langle 3,5;4,0)$	$\langle 4,0;4,5)$	$\langle 4,5;5,0)$	$\langle 5,0;5,5)$	$\langle 5,5;6,0)$	$\langle 6,0;6,5)$
Liczebność	4	5	7	9	12	8	5

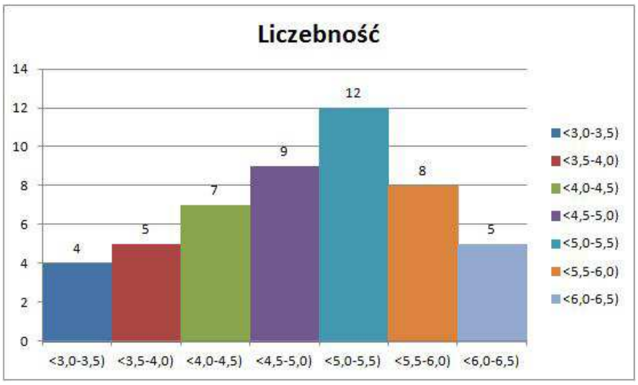
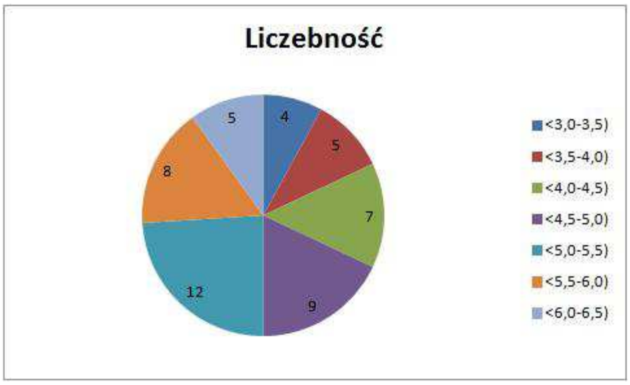
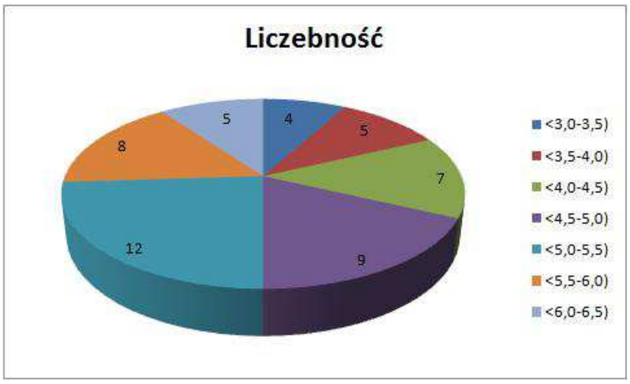


Diagram słupkowy





Diagramy kołowe

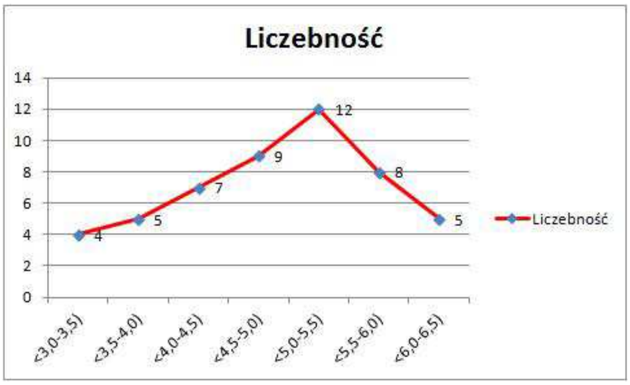


Diagram liniowy

W przypadku szeregów rozdzielczych można określić **częstość względną**, czyli iloraz występowania danej wartości cechy przez liczbę wszystkich wyników. Częstość względna jest statystycznym odpowiednikiem prawdopodobieństwa w rachunku prawdopodobieństwa.

Długość śruby w *cm*	$\langle 3,0;3,5)$	$\langle 3,5;4,0)$	$\langle 4,0;4,5)$	$\langle 4,5;5,0)$	$\langle 5,0;5,5)$	$\langle 5,5;6,0)$	$\langle 6,0;6,5)$
Częstość względna	$\frac{4}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{8}{50}$	$\frac{5}{50}$

Do porównywania elementów populacji lub całych populacji służą parametry.

Do pierwszej grupy parametrów, które mówią nam o podobieństwie jednostek populacji, zaliczamy m.in.: średnią arytmetyczną, medianę, dominantę i średnią ważoną.

Definicja 16. Przez **średnią arytmetyczną** liczb $x_1, \ldots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Przykład 32. Zapytano pięć kobiet o ich wiek i uzyskano wyniki: 30, 44, 66, 22, 83. Obliczyć średni wiek tych pań.

Rozwiązanie. Badaną cechą jest wiek kobiet. Wartości cechy (wieku) wynoszą odpowiednio

$$x_1 = 30,\ x_2 = 44,\ x_3 = 66,\ x_4 = 22,\ x_5 = 83 \text{ lat.}$$

Średni wiek tych pań wynosi

$$\overline{x} = \frac{30 + 44 + 66 + 22 + 83}{5} = 49 \text{ lat.}$$

Definicja 17. **Medianą** (**wartością środkową**) nazywamy liczbę dzielącą populację (lub elementy próby) na dwie części takie, że połowa jednostek statystycznych ma wartość cechy nie większą od mediany, a połowa ma wartość nie mniejszą od mediany.

Aby wyliczyć medianę musimy dane uporządkować od wartości najmniejszej do największej. Przypuśćmy, że już mamy takie uporządkowanie

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Wówczas medianę wyznaczamy ze wzoru

$$M = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste;} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Przykład 33. Rozpatrzmy dane z Przykładu 32. Ustawiamy dane od najmniejszej do największej wartości

$$x_1 = 22,\ x_2 = 30,\ x_3 = 44,\ x_4 = 66,\ x_5 = 83 \text{ lat.}$$

W tym przypadku $n = 5$, więc mediana jest równa $x_3 = 44$ lata.

Jeżeli zapytamy dodatkowo jeszcze jedną panią o wiek (uzyskana dana to 36 lat), to ciąg rosnący danych wygląda następująco

$$x_1 = 22,\ x_2 = 30,\ x_3 = 36,\ x_4 = 44,\ x_5 = 66,\ x_6 = 83.$$

W tym przypadku $n = 6$, a mediana jest równa

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{36 + 44}{2} = 40 \text{ lat.}$$

Definicja 18. **Dominantą** (**wartością modalną**, **modą**) nazywamy wartość, która występuje wśród danych najczęściej.

Jeżeli w zbiorze danych kilka liczb występuje z tą samą najwyższą częstością, to każda z tych liczb jest dominantą.

Jeżeli jednak wszystkie liczby występują tak samo często, to nie mamy dominanty wśród tych danych.

Przykład 34.

- w przypadku danych z Przykładów 32 i 33 nie mamy dominanty;
- dla danych: $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4$ dominanta $D = 4$;
- dla danych: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5$ dominanta $D \in \{2, 4, 5\}$, czyli mamy trzy mody: 2, 4 i 5.

Średnią arytmetyczną używamy do scharakteryzowania pewnej cechy populacji (lub próby) w przypadku, gdy wszystkie wyniki (jakie posiadamy) cechy są tak samo ważne. Zdarza się jednak, że pewne wyniki mogą mieć większą wagę (ważność) od innych wyników. „Przewagę” jednych wyników nad innymi zaznacza się za pomocą przypisanej im „wagi” (zob. Przykład 35). W takich przypadkach zamiast średniej arytmetycznej określa się średnią ważoną.

Definicja 19. **Średnią ważoną** liczb $x_1, \ldots, x_n$ z dodatnimi wagami $a_1, \ldots, a_n$ określamy wzorem

$$\hat{x} = \frac{x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

Przykład 35. Regulamin rekrutacji na studia matematyczne na Uniwersytecie X przewiduje, że o przyjęciu na nie decyduje ranking sporządzony na podstawie średniej ważonej ocen na świadectwie maturalnym z pięciu przedmiotów:

- matematyki - z wagą 4;
- fizyki i informatyki - z wagą 3;
- języka angielskiego - z wagą 2;
- języka polskiego - z wagą 1.

Ustal, która spośród osób (Adam, Bartek, Kinga, Ola) zajmie najwyższe, a która najniższe miejsce na liście rankingowej, jeżeli ich oceny są takie jak w tabelce

Przedmiot	Ocena			
	Adam	Bartek	Kinga	Ola
matematyka	6	3	6	3
fizyka	3	4	5	3
informatyka	6	4	5	4
język angielski	3	6	3	6
język polski	4	5	3	6

Rozwiązanie. Zauważmy, że każdy z uczniów ma tą samą średnią arytmetyczną ocen $4,4$. Natomiast średnie ważone kształtują się następująco

- Adam: $\frac{6\cdot4+3\cdot3+6\cdot3+3\cdot2+4\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{61}{13} \approx 4,69$;
- Bartek: $\frac{3\cdot4+4\cdot3+4\cdot3+6\cdot2+5\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{53}{13} \approx 4,08$;
- Kinga: $\frac{6\cdot4+5\cdot3+5\cdot3+3\cdot2+3\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{63}{13} \approx 4,85$;
- Ola: $\frac{3\cdot4+3\cdot3+4\cdot3+6\cdot2+6\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{51}{13} \approx 3,92$.

Przykład 36. Oblicz średnią arytmetyczną liczb:

$$1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8.$$

Powinno wyjść $\overline{x} = 5,3$.

Następnie tworzymy (z podanych wyników) szereg rozdzielczy

Liczba	1	3	5	6	7	8
Liczebność	2	4	4	1	6	3

Traktując liczebność (częstość występowania) liczb jako wagi policzmy średnia ważoną tych danych

$$\hat{x} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 3}{20} = 5,3.$$

Jak widać obie średnie są równe, dlatego też w niektórych podręcznikach średnia ważona nazywana jest **średnią arytmetyczną ważoną**.

My pojęcie średniej arytmetycznej ważonej będziemy używać tylko w stosunku do szeregów rozdzielczych.

Dla danych przedstawionych w tym przykładzie możemy zbudować inny szereg rozdzielczy np.

Liczba	$(0,2\rangle$	$(2,4\rangle$	$(4,6\rangle$	$(6,8\rangle$
Liczebność	2	4	5	9

Pojawia się naturalne pytanie, czy dla takiego szeregu możemy policzyć średnią arytmetyczną ważoną?

Oczywiście, z tym że oprócz przedziałów klasowych musimy dodatkowo wyznaczyć środki tych klas (przedziałów klasowych)

Liczba	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 4, 6\rangle$	$\langle 6, 8\rangle$
Środki klas	1	3	5	7
Liczebność	2	4	5	9

Dla takiego szeregu średnia arytmetyczna ważona wynosi

$$\hat{x} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 9}{2 + 4 + 5 + 9} = \frac{102}{20} = 5,1.$$

Jak widać (w tym przypadku) otrzymana średnia arytmetyczna ważona nie jest taka sama jak średnia arytmetyczna z danych przedstawionych w treści przykładu (choć wyniki są zbliżone). Niestety jest to koszt jaki musimy „zapłacić” za większą przejrzystość takich szeregów rozdzielczych i diagramów wyznaczonych za ich pomocą.

Znajomość „parametrów podobieństw" nie wystarcza do otrzymania pełnego obrazu badanej próby lub populacji. Przykładowo znajomość średniej arytmetycznej nie mówi nam nic o tym, czy wyniki skupiają się wokół niej, czy są bardziej rozproszone. Standardowym przykładem jest wysokość średniego wynagrodzenia w Polsce, które (jak dobrze wiemy) zdecydowana większość osób nie jest w stanie osiągnąć. W tym przypadku na wysokość średnich zarobków wpływają bardzo wysokie pensje, nielicznej grupy, osób „dobrze zarabiających".

Drugą grupą parametrów, którą będziemy rozważać są tzw. **miary rozproszenia**, które (poprawnie interpretowane) podają nam informacje o rozrzucie wyników od średniej.

Do tej grupy parametrów zaliczamy m.in.: rozstęp, odchylenie przeciętne od wartości średniej, wariancję i odchylenie standardowe.

Definicja 20. Przez **rozstęp** liczb $x_1, \ldots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

gdzie $x_{\max}$ i $x_{\min}$ są odpowiednio największą i najmniejszą liczbą spośród $x_1, \ldots, x_n$.

Definicja 21. **Odchylenie przeciętne od wartości średniej** liczb $x_1, \ldots, x_n$ określamy wzorem

$$d = \frac{|x_1 - \overline{x}| + \ldots + |x_n - \overline{x}|}{n},$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

Definicja 22. **Wariancję** liczb $x_1, \ldots, x_n$ określamy wzorem

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n},$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

Wariancja jest miarą rozproszenia podawaną w kwadratach jednostek badanej cechy. W wielu przypadkach wygodniej jest podawać miarę rozproszenia w jednostkach, w których wyrażone są wyniki badanej cechy. Takim parametrem jest odchylenie standardowe.

Definicja 23. Przez **odchylenie standardowe** liczb $x_1, \ldots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}.$$

Przykład 37. Dla danych z Przykładu 32 obliczyć podane wyżej miary rozproszenia.

Rozwiązanie. Łatwo widać, że $x_{\min} = 22$, $x_{\max} = 83$. Wówczas:

• rozstęp: $R = 83 - 22 = 61$;

• odchylenie przeciętne od wartości średniej:

$$d = \frac{G}{5} = \frac{102}{5} = 20,4,$$

gdzie $G = |30 - 49| + |44 - 49| + |66 - 49| + |22 - 49| + |83 - 49|$;

• wariancja:

$$S^2 = \frac{L}{5} = \frac{2560}{5} = 512,$$

gdzie $L = (30 - 49)^2 + (44 - 49)^2 + (66 - 49)^2 + (22 - 49)^2 + (83 - 49)^2$;

• odchylenie standardowe: $S = \sqrt{512} \approx 22,63$.

Warto pamiętać, że im niższe wartości miar rozproszenia tym skupienie wyników wokół średniej jest większe.

Rozważane miary rozproszenia zawsze przyjmują wartości nieujemne i tylko w przypadku, gdy wszystkie dane (liczby) są sobie równe; rozstęp, odchylenie przeciętne od wartości średniej, wariancja i odchylenie standardowe wynosi 0.

Przykład 38. Rozważmy dane z Przykładu 36, czyli liczby

$$1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8.$$

Wówczas: $R = 7$; $d = 1,9$; $S^2 = 4,91$ oraz $S = \sqrt{4,91} \approx 2,22$ (sprawdź!).

Z powyższych danych możemy utworzyć szereg rozdzielczy

Liczba	1	3	5	6	7	8
Liczebność	2	4	4	1	6	3

Jak policzyć z takiego szeregu, rozważane wyżej, miary rozproszenia?

Rozstęp wyznaczamy podobnie jak wcześniej

$$R = 8 - 1 = 7.$$

Aby obliczyć odchylenie przeciętne od wartości średniej i wariancję wystarczy, że znamy średnią arytmetyczną ważoną $\hat{x} = \overline{x} = 5,3$. Wówczas

$$d = \frac{G}{2+4+4+1+6+3} = 1,9, \tag{21}$$

gdzie $G = |1-5,3| \cdot 2 + |3-5,3| \cdot 4 + |5-5,3| \cdot 4 + |6-5,3| \cdot 1 + |7-5,3| \cdot 6 + |8-5,3| \cdot 3$
oraz

$$S^2 = \frac{L}{2+4+4+1+6+3} = 4,91, \tag{22}$$

gdzie $L = (1-5,3)^2 \cdot 2 + (3-5,3)^2 \cdot 4 + (5-5,3)^2 \cdot 4 + (6-5,3)^2 \cdot 1 + (7-5,3)^2 \cdot 6 + (8-5,3)^2 \cdot 3$.

Oczywiście $S = \sqrt{S^2} \approx 2,22$.

Otrzymane wyniki dla powyższego szeregu rozdzielczego są identyczne z tymi dla danych podanych w treści przykładu.

Rozważmy teraz szereg rozdzielczy, który zawiera przedziały klasowe np. ten co w Przykładzie 36.

Liczba	$\langle 0,2)$	$\langle 2,4)$	$\langle 4,6)$	$\langle 6,8\rangle$
Środki klas	1	3	5	7
Liczebność	2	4	5	9

W przypadku wyznaczania rozstępu problem wiąże się z określeniem wartości najmniejszej i największej. Za wartość największą przyjmujemy prawy koniec „ostatniego" przedziału (w tym przypadku $x_{\max} = 8$), a wartość najmniejszą - lewy koniec „pierwszego przedziału" (w tym przypadku $x_{\min} = 0$). Stąd

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 8.$$

W tym przypadku we wzorach na odchylenie przeciętne od wartości średniej oraz wariancję (zob. (21) i (22) oraz ich otoczenie) w miejsce danych liczb musimy podstawić środki przedziałów klasowych. Pamiętając, że średnia arytmetyczna ważona dla tego szeregu wynosi $5,1$, odchylenie przeciętne od wartości średniej

$$d = \frac{G}{2+4+5+9} = 1,71,$$

gdzie $G = |1-5,1| \cdot 2 + |3-5,1| \cdot 4 + |5-5,1| \cdot 5 + |7-5,1| \cdot 9$, a wariancja

$$S^2 = \frac{L}{2+4+5+9} = 4,19,$$

gdzie $L = (1-5,1)^2 \cdot 2 + (3-5,1)^2 \cdot 4 + (5-5,1)^2 \cdot 5 + (7-5,1)^2 \cdot 9$.

Odchylenie standardowe wynosi $S = \sqrt{4,19} \approx 2,05$.

W przypadku takiego typu szeregów rozdzielczych uzyskane wartości parametrów różnią się od tych otrzymanych wcześniej, ale można było się tego spodziewać.

Zadanie 11. Wykonano 10 pomiarów długości życia pewnych bakterii w organizmie człowieka i otrzymano następujące wyniki w *godz.*: 1,56; 1,55; 1,50; 1,46; 1,56; 1,51; 1,49; 1,49; 1,40; 1,49.
Oblicz:

a) średnią długość życia tych bakterii;
b) modę, medianę i rozstęp otrzymanych wyników;
c) odchylenie przeciętne od wartości średniej, wariancję i odchylenie standardowe czasu życia badanych bakterii.

Zbuduj szereg rozdzielczy dla podanych danych przyjmując następujące przedziały klasowe:

$$\langle 1,39; 1,44\rangle,\ \langle 1,44; 1,49\rangle,\ \langle 1,49; 1,54\rangle,\ \langle 1,54; 1,59\rangle.$$

Dla tak wyznaczonego szeregu oblicz częstość względną, parametry z podpunktów a) i c) oraz rozstęp. Narysuj diagram słupkowy, kołowy i liniowy dla tego szeregu rozdzielczego.

Odp.

Ad. a) $\overline{x} = 1,501$;

Ad. b) $D = 1,49$; $M = 1,495$; $R = 0,16$;

Ad. c) $d = 0,0352$; $S^2 = 0,002169$; $S = \sqrt{S^2} \approx 0,047$.

Szereg rozdzielczy

Czas życia	$\langle 1,39; 1,44\rangle$	$\langle 1,44; 1,49\rangle$	$\langle 1,49; 1,54\rangle$	$\langle 1,54; 1,59\rangle$
Liczebność	1	4	2	3

Częstość względna

Czas życia	$\langle 1,39; 1,44\rangle$	$\langle 1,44; 1,49\rangle$	$\langle 1,49; 1,54\rangle$	$\langle 1,54; 1,59\rangle$
Częstość względna	0,1	0,4	0,2	0,3

$\hat{x} = 1,5$; $R = 0,2$; $d = 0,045$; $S^2 = 0,002525$; $S \approx 0,05$.

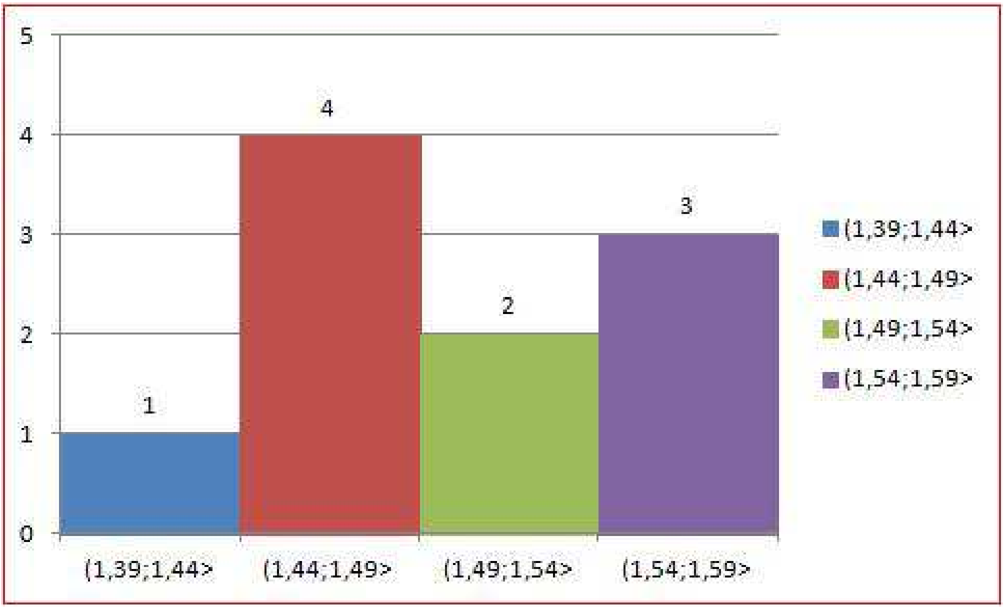


Diagram słupkowy - histogram

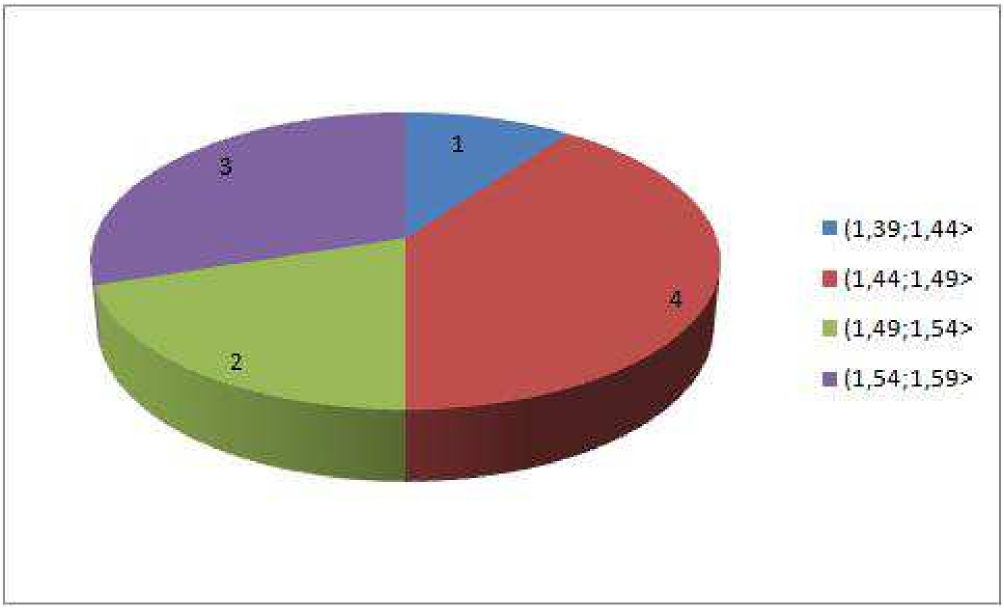


Diagram kołowy

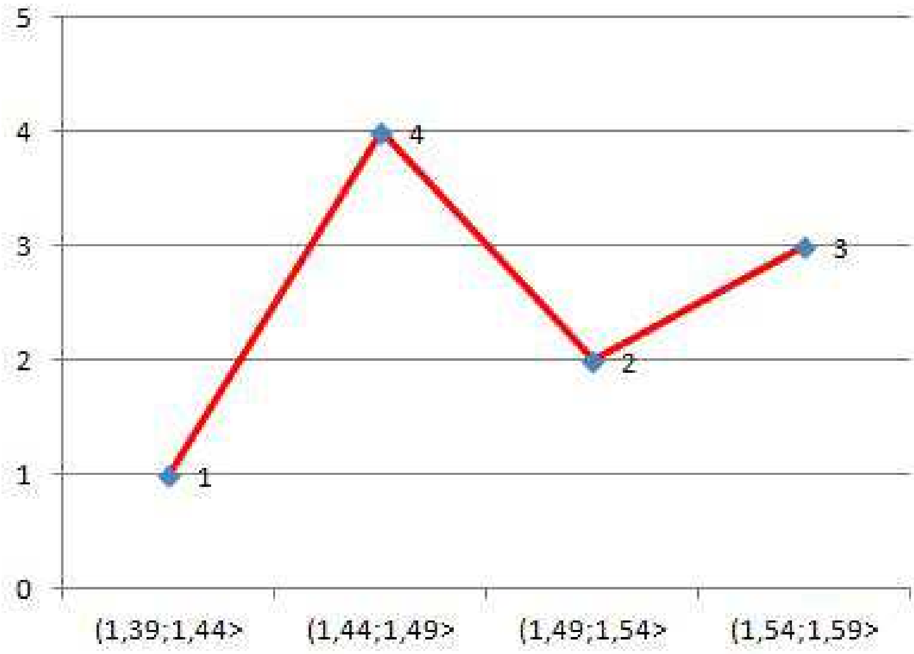
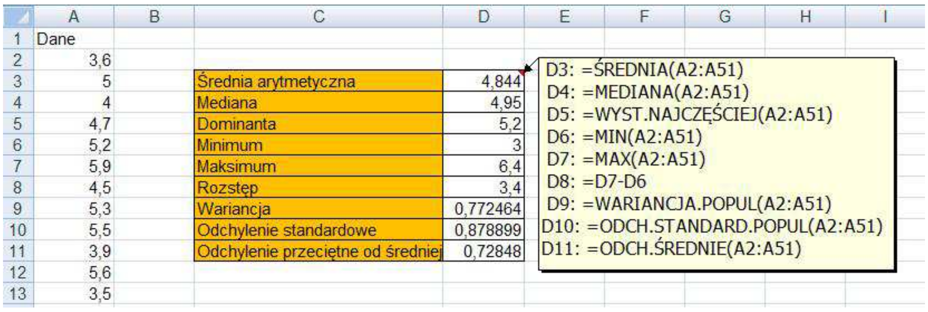


Diagram liniowy

Zadanie 12. Dla danych z Przykładu 31 wyznaczyć poznane wcześniej parametry.

Dla porównania zamieszczamy poniżej fragment arkusza programu EXCEL, w którym znajdziesz wyniki szukanych parametrów. Odnajdź, w tym arkuszu, formuły ułatwiające wyliczenie (za pomocą EXCEL-a) rozważanych parametrów i spróbuj je wykorzystać do innego przykładu.



	A	B	C	D
1	Dane			
2	3,6			
3	5		Średnia arytmetyczna	4,844
4	4		Mediana	4,95
5	4,7		Dominanta	5,2
6	5,2		Minimum	3
7	5,9		Maksimum	6,4
8	4,5		Rozstęp	3,4
9	5,3		Wariancja	0,772464
10	5,5		Odchylenie standardowe	0,878899
11	3,9		Odchylenie przeciętne od średniej	0,72848
12	5,6			
13	3,5			

D3: =ŚREDNIA(A2:A51)
D4: =MEDIANA(A2:A51)
D5: =WYST.NAJCZĘŚCIEJ(A2:A51)
D6: =MIN(A2:A51)
D7: =MAX(A2:A51)
D8: =D7-D6
D9: =WARIANCJA.POPUL(A2:A51)
D10: =ODCH.STANDARD.POPUL(A2:A51)
D11: =ODCH.ŚREDNIE(A2:A51)

Literatura

[1] W. Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, J. Wesołowska, *Matematyka 3. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2006.

[2] R. Kalina, T. Szymański, F. Linke, M. Woźniak, *Matematyka dla klasy III liceum i technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Sens, Warszawa 2006.

[3] K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań do III i IV klasy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2001.

[4] E. Kowalik, *Kombinatoryka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

[5] H. Pawłowski, *Matematyka 3. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego. Zakres rozszerzony*, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, *Matematyka 3. Zbiór zadań. Zakres podstawowy i rozszerzony*, OPERON, Gdynia 2004.