Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Granice funkcji

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Choć pojęcie granicy funkcji sformułowane zostało stosunkowo późno, bo dopiero w XIX wieku, to intuicyjnie stosowane było już w starożytnej Grecji do obliczania pól figur płaskich. Pojęciem granicy długo posługiwano się w sposób intuicyjny. Pierwszą, całkowicie formalną definicję pojęcia granicy funkcji sformułował francuski matematyk Augustin Cauchy, zaś jej aktualna postać pochodzi od niemieckiego matematyka Karla Weierstrassa. Inna definicja granicy funkcji sformułowana została przez innego niemieckiego matematyka, Heinricha Eduarda Heinego.

Z następnym:

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$,

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,

$[x]$ - część całkowita (cecha) liczby rzeczywistej x,

(a, b) - przedział otwarty o końcach $a < b$,

$[a, b]$ - przedział domknięty o końcach $a \leqslant b$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

W definicji granic ważne jest pojęcie wartości bezwzględnej liczby i jej geometryczna interpretacja. W celu przypomnienia niezbędnych wiadomości proponujemy powtórzyć materiał na ten temat zawarty w kursie omawiającym granice ciągów. Wprowadzimy dalej istotne tu pojęcia otoczenia punktu i sąsiedztwa punktu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 1. Ustalmy punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Prawostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ nazywamy przedział

$$S_+(x_0, \delta) = S_+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

(ii) Lewostronnym sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ nazywamy przedział

$$S_-(x_0, \delta) = S_-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0).$$

(iii) Sąsiedztwem punktu x_0 o promieniu $\delta > 0$ nazywamy zbiór

$$S(x_0, \delta) = S(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 1. Jeśli w naszych rozważaniach promień sąsiedztwa punktu x_0 nie będzie istotny, będziemy go opuszczać przy oznaczeniu tego sąsiedztwa.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Pod pojęciem granicy g funkcji w punkcie x_0 kryje się własność zbliżania się wartości funkcji do liczby g, jeśli tylko argument zbliża się do x_0. Nim to potoczne sformułowanie sformalizujemy, zbadamy stosowne przykłady.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

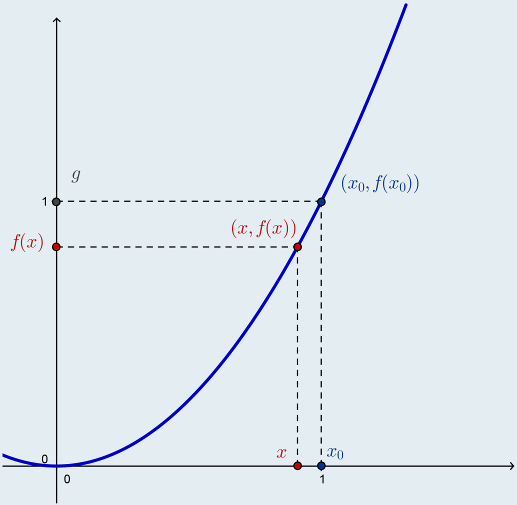
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 1. Zbadać zachowanie się wartości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ w otoczeniu punktu $x_0 = 1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

Zamieszczona animacja pokazuje, że wraz ze zbliżaniem się argumentu x do $x_0 = 1$, wartości $f(x)$ funkcji f zbliżają się do $g = 1$.



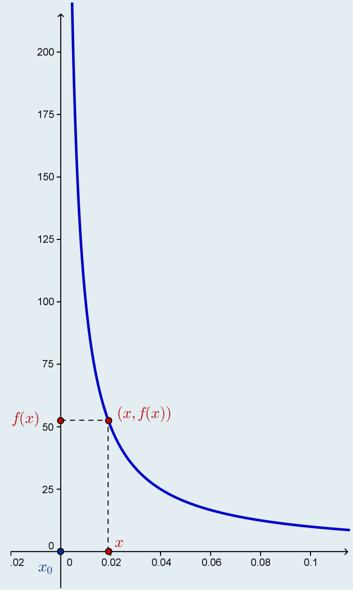
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2. Zbadać zachowanie się wartości funkcji $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ opisanej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

Zamieszczona animacja pokazuje, że wraz ze zbliżaniem się argumentu $x > 0$ do punktu $x_0 = 0$, wartości $f(x)$ funkcji f nie skupiają się wokół żadnej wartości, ale rosną nieograniczenie.

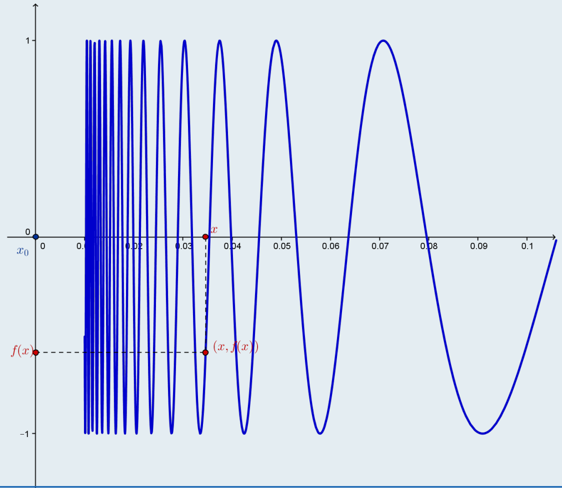


KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3. Zbadać zachowanie się funkcji $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, w prawostronnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Zamieszczona animacja pokazuje, że wraz ze zbliżaniem się argumentu $x > 0$ do punktu $x_0 = 0$, wartości $f(x)$ funkcji f nie skupiają się wokół żadnej wartości i oscylują w przedziale $[-1, 1]$.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Po tych obserwacjach możemy już przystąpić do definicji pojęcia granicy funkcji w punkcie. Wyjdziemy od definicji Heinego.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 2 (Heinego granicy funkcji w punkcie). Niech $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Mówimy, że **funkcja f ma w punkcie x_0 skończoną granicę** g, jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Uwaga 2. Fakt istnienia granicy g funkcji f w punkcie x_0 zapisujemy w postaci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$. Warunek definiujący granicę funkcji f w punkcie x_0 można więc symbolicznie zapisać:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \iff \bigwedge_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \left(\left(x_n \in S(x_0) \wedge \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g \right).$$

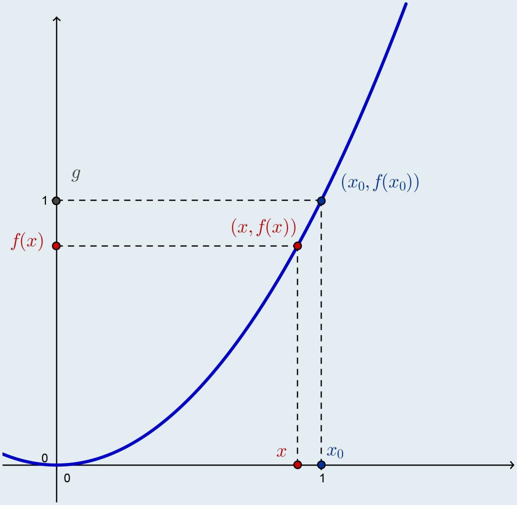
Z następnym:

Wykorzystamy poznaną definicję do wyznaczenia granic funkcji w punkcie. Wrócimy do przykładów rozpatrywanych na początku:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4. W Przykładzie 1 badana była funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ w otoczeniu punktu $x_0 = 1$. Zauważyliśmy, że wartości funkcji f dla argumentów x bliskich $x_0 = 1$ stabilizują się w pobliżu wartości $g = 1$. Wykażemy więc, że

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Niech (x_n) będzie takim ciągiem liczb rzeczywistych, że $x_n \in S(1)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Wtedy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n)^2 = 1^2 = 1.$$

Wobec dowolności wyboru ciągu (x_n) mamy

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z poprzednim:

Do kolejnych z rozpatrywanych przykładów wrócimy przy okazji badania granic jednostronnych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Rozważymy teraz inny przypadek granicy funkcji w punkcie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5. Zbadać istnienie granicy funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$, w punkcie $x_0 = 3$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Ten przykład nie jest tak prosty jak poprzedni. Wybierzmy dowolny taki ciąg (x_n), że $x_n \in S(3)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$. Granice licznika oraz mianownika funkcji f równe są, odpowiednio:

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n^2 - 5x_n + 6) = \lim_{n\to+\infty} x_n^2 - 5\cdot\lim_{n\to+\infty} x_n + 6 = 3^2 - 5\cdot 3 + 6 = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - 3) = \lim_{n\to+\infty} x_n - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Granicy tej nie policzymy więc wprost, ale postąpimy następująco:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{x_n - 3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(x_n - 3)(x_n - 2)}{x_n - 3} = \lim_{n\to+\infty}(x_n - 2) = \lim_{n\to+\infty} x_n - 2 = 3 - 2 = 1.$$

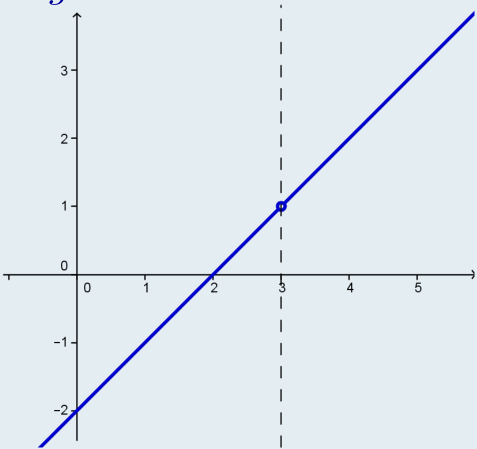
Wobec dowolności wyboru ciągu (x_n) mamy $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} = 1$.

Na końcu poprzedniego:

Aby w pełni zrozumieć poprzedni przykład, proponujemy wykonać jeszcze wykres funkcji f.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykresem rozpatrywanej funkcji f jest prosta o równaniu $y = x - 2$ z pominięciem punktu $(3, 1)$. Można tu zaobserwować, że wraz ze zbliżaniem się argumentu x funkcji f do punktu $x_0 = 3$, wartości funkcji zbliżają się do $g = 1$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przeanalizujemy kolejny istotny przykład.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

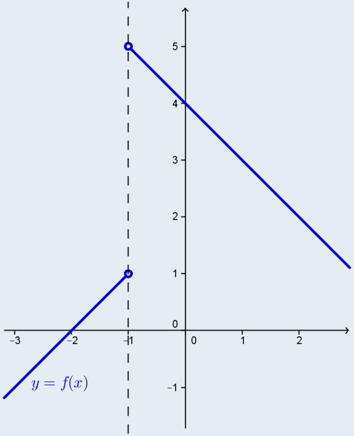
Przykład 6. Zbadać istnienie granicy funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla} \quad x < -1 \\ -x + 4 & \text{dla} \quad x > -1, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

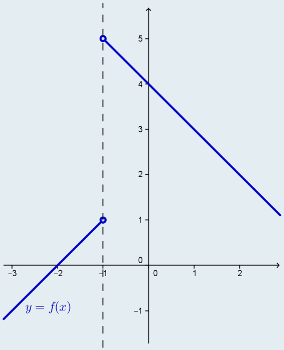
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Wykonując wykres funkcji f można zaobserwować, że wartości funkcji są bliskie 1 dla argumentów $x < -1$ i bliskich $x_0 = -1$. Jednocześnie, wartości tej funkcji są bliskie 5 dla argumentów $x > -1$ i bliskich $x_0 = -1$. Jak zobaczymy, będzie to oznaczało, że granica funkcji f w punkcie $x_0 = -1$ nie istnieje.



Rozpatrzmy dwa ciągi (x_n) oraz (x'_n) określone wzorami:

$$x_n = -1 - \frac{1}{n} \quad \textbf{oraz} \quad x'_n = -1 + \frac{1}{n}.$$



Wówczas $x_n \in S_-(-1)$, $x'_n \in S_+(-1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = -1$, a ponadto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n + 2) = \lim_{n\to+\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + 2\right) = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} (-x_n + 4) = \lim_{n\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} + 4\right) = 5.$$

Wskazaliśmy więc dwa ciągi (x_n) oraz (x'_n), które generują dwie **różne** granice ciągów wartości funkcji $(f(x_n))$ oraz $(f(x'_n))$. Oznacza to, że granica $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ **nie istnieje**.

Uwaga 3. Ciągi (x_n), (x'_n),

$$x_n = -1 - \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad x'_n = -1 + \frac{1}{n}.$$

użyte w uzasadnieniu Przykładu 5 nie są jedynymi możliwymi. W przypadku, gdy rozpatrywana funkcja określona jest różnymi (ale nieskomplikowanymi) przepisami z lewej – i z prawej strony punktu x_0 oraz wartości funkcji z obu stron punktu x_0 dla argumentów bliskich x_0 skupiają się wokół różnych wartości, metoda postępowania jest z reguły następująca: obieramy dowolny taki ciąg (a_n) dodatnich liczb rzeczywistych, że $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ (najprostszym takim ciągiem jest $a_n = \frac{1}{n}$) i definiujemy ciągi (x_n) oraz (x'_n) wzorami

$$x_n = x_0 - a_n \quad \text{oraz} \quad x'_n = x_0 + a_n.$$

Wówczas $x_n < x_0$, $x'_n > x_0$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = x_0$.

Z następnym:

Powrócimy jeszcze do pewnej modyfikacji funkcji, która badana była w Przykładzie 2. Pokażemy, że:

Przykład 7. Funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie ma skończonej granicy w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że istnieje skończona granica

$$g = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

Niech (x_n) będzie takim ciągiem, że $x_n = \frac{1}{n}$. Wówczas $x_n \in S(0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ oraz

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty,$$

co jest sprzeczne z przypuszczeniem, że istnieje skończona granica $g = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$. Zatem funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ **nie ma skończonej granicy** w punkcie $x_0 = 0$.

Z następnym:

W celu utrwalenia poznanych metod proponujemy samodzielnie wykonać następujące ćwiczenie:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1. Sprawdzić, korzystając z definicji, czy istnieją granice podanych funkcji w zadanych punktach x_0:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$, $x_0 = -2$,
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 - x + 2$, $x_0 = 2$,
3. $k : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{-x^2+3x+4}{4-x}$, $x_0 = 4$,
4. $l : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$, $l(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x < -3 \\ x+3 & \text{dla } x > -3, \end{cases}$ $x_0 = -3$,
5. $s : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $s(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{2x-2} & \text{dla } x < 1 \\ x+1 & \text{dla } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Do tego ćwiczenia na kolejnym slajdzie podajemy odpowiedzi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

1. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -8$,
2. $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 8$,
3. $\lim\limits_{x\to 4} k(x) = 5$,
4. $\lim\limits_{x\to -3} l(x)$ nie istnieje (Wskazówka: rozważyć ciągi (x_n), (x'_n) określone wzorami $x_n = -3 - \frac{1}{n}$ oraz $x'_n = -3 + \frac{1}{n}$),
5. $\lim\limits_{x\to 1} s(x)$ nie istnieje (Wskazówka: rozważyć ciągi (x_n), (x'_n) określone wzorami $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ oraz $x'_n = 1 + \frac{1}{n}$).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Zajmiemy się teraz przypadkiem funkcji badanej w Przykładzie 2, gdzie wartości funkcji w sąsiedztwie punktu rosły nieograniczenie. Są to tzw. granice niewłaściwe. W teorii granic rozróżnia się dwa typy niewłaściwości. W pierwszym przypadku niewłaściwość granicy związana jest ze zbiorem wartości funkcji w pewnym sąsiedztwie ustalonego punktu. Drugi typ granic niewłaściych wiąże się z niewłaściwością argumentu, w pobliżu którego badamy zachowanie się wartości funkcji. Wyjdźmy od pierwszego z przedstawionych typów niewłaściwości:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 3 (Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie). Niech $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Mówimy, że **funkcja** f **ma w punkcie** x_0 **granicę** $+\infty$, jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, zachodzi
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty.$$

Definicja 4 (Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie). Niech $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0. Mówimy, że **funkcja** f **ma w punkcie** x_0 **granicę** $-\infty$, jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$ zachodzi
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

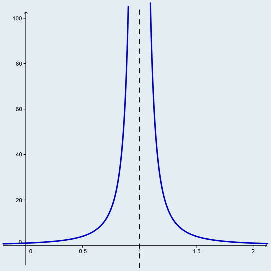
Na końcu poprzedniego:

Możemy teraz przeanalizować stosowny przykład:

Przykład 8. Zbadać istnienie granicy funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Rozwiązanie. Niech (x_n) będzie dowolnym taki ciągiem liczb rzeczywistych, że $x_n \in S(1)$ oraz $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Wtedy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(x_n-1)^2}.$$



Ponieważ $x_n \to 1$, więc $x_n - 1 \to 0$. Wówczas $(x_n-1)^2 \to 0^+$ (oznacza to, że ciąg $(x_n-1)^2$ dąży do 0 "po liczbach dodatnich"). Ostatecznie więc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(x_n-1)^2} = +\infty.$$

Z następnym:

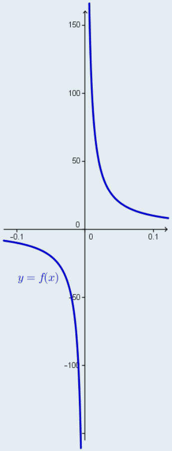
Powrócimy jeszcze do przykładu badanego na początku:

Przykład 9. Funkcja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nie ma granicy z punkcie $x_0 = 0$.

Na końcu poprzedniego:

Postępowanie jest tu analogiczne do tego z Przykładu 6, w którym obserwowane było różne zachowanie się wartości funkcji z lewej i z prawej strony punktu, w którym badana była granica funkcji.

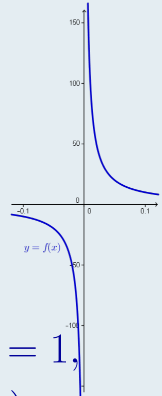
Rozwiązanie. Wykonując wykres funkcji f widzimy, że wartości funkcji rosną nieograniczenie wraz ze zbliżaniem się argumentów x do $x_0 = 0$ z prawej strony (po argumentach dodatnich) i jednocześnie, wartości tej funkcji maleją nieograniczenie 5 wraz ze zbliżaniem się argumentów $x < 0$ do $x_0 = 0$. Będzie to w tym przypadku oznaczać, że granica funkcji f w punkcie $x_0 = -1$ nie istnieje.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozpatrzmy ciągi (x_n) oraz (x'_n) określone wzorami:

$$x_n = -\frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad x'_n = \frac{1}{n}.$$



Wówczas $x_n \in S_-(0)$, $x'_n \in S_+(0)$,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x'_n = 0,$$

a ponadto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (x_n + 2) = \lim_{n\to+\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + 2\right) = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} (-x_n + 4) = \lim_{n\to+\infty} \left(-1 + \frac{1}{n} + 4\right) = 5.$$

Wskazaliśmy więc dwa ciągi (x_n) oraz (x'_n), które generują dwie **różne** granice ciągów wartości funkcji $(f(x_n))$ oraz $(f(x'_n))$. Oznacza to, że granica $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ **nie istnieje**.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przejdziemy teraz do analizy drugiego typu niewłaściwości przy badaniu granic funkcji. Zajmiemy się teraz niewłaściwością dotyczącą argumentu funkcji. W celu ujednolicenia oznaczeń i terminologii, wprowadzimy następującą definicję:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 5. Przedziały postaci

$$S(-\infty) = (-\infty, a) \quad \text{oraz} \quad S(+\infty) = (b, +\infty),$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, nazywamy, odpowiednio, **sąsiedztwem** $-+\infty$ oraz **sąsiedztwem** $+\infty$.

Z następnym:

Rozważając niewłaściwość granicy funkcji ze względu na argumenty funkcji dopuszczać będziemy możliwość, że granica ta może być również niewłaściwa ze względu na wartości funkcji. Aby ujednolicić nasze rozważania bez rozważania różnych przypadków, przypomnimy wprowadzone przy rozważaniu granic ciągów pojęcie rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 6. Rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiór

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

ze zwykłymi przemiennymi działaniami dodawania i mnożenia zakładając dodatkowo, że:

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \textbf{oraz} \quad a - (+\infty) = -\infty \quad \textbf{dla} \quad a \in \mathbb{R},$$
$$a + (-\infty) = -\infty \quad \textbf{oraz} \quad a - (-\infty) = +\infty \quad \textbf{dla} \quad a \in \mathbb{R},$$
$$a \cdot (+\infty) = +\infty \quad \textbf{oraz} \quad a \cdot (-\infty) = -\infty \quad \textbf{dla} \quad a \in \mathbb{R}, a > 0,$$
$$a \cdot (+\infty) = -\infty \quad \textbf{oraz} \quad a \cdot (-\infty) = +\infty \quad \textbf{dla} \quad a \in \mathbb{R}, a < 0,$$
$$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \quad \textbf{dla} \quad a \in \mathbb{R},$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \quad \textbf{oraz} \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 4. Operacje niedopuszczalne:

$$(+\infty)+(-\infty),\, (+\infty)-(+\infty),$$
$$0\cdot(\pm\infty),\, \frac{0}{0},\, \frac{a}{0},\, \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)},\, 0^0,\, 0^{(\pm\infty)},\, 1^{(\pm\infty)}.$$

Z następnym:

Możemy teraz zdefiniować pojęcie granicy w nieskończoności:

Definicja 7 (**Heinego granicy funkcji w $-\infty$**). Mówimy, że **funkcja** $f : S(-\infty) \to \mathbb{R}$ **ma w** $-\infty$ **granicę** $g \in \overline{\mathbb{R}}$ (co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S(-\infty)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 8 (**Heinego granicy funkcji w $+\infty$**). Mówimy, że **funkcja** $f : S(+\infty) \to \mathbb{R}$ **ma w** $+\infty$ **granicę** $g \in \overline{\mathbb{R}}$ (co zapisujemy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$), jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S(+\infty)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Z następnym:

Przejdźmy do stosownych przykładów:

Przykład 10. Obliczyć granicę funkcji $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2} \quad \text{dla} \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$$

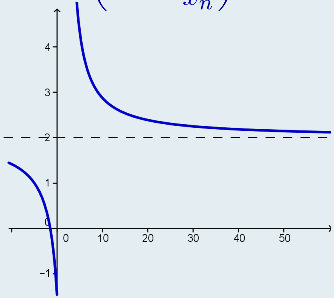
w $+\infty$.

Rozwiązanie. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym $x_n \in S(+\infty)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x_n+3}{x_n-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n\left(2+\frac{3}{x_n}\right)}{x_n\left(1-\frac{2}{x_n}\right)}.$$

Ponieważ $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, więc $\frac{3}{x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ oraz $\frac{2}{x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x_n}}{1-\frac{2}{x_n}} = \frac{2-0}{1-0} = 2,$$



co oznacza, że

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2.$$

Przykład 11. Obliczyć granicę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -3x + 4 \quad \text{dla} \ \ x \in \mathbb{R},$$

w $-\infty$.

Z następnym:

Przed rozwiązaniem tego zadania proponujemy samodzielne wykonanie wykresu funkcji f.

Rozwiązanie. Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym $x_n \in S(-\infty)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (-3x+4) = \lim_{n\to+\infty} x_n \left(-3 + \frac{4}{x_n}\right).$$

Ponieważ $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, więc $\frac{4}{x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \left(-3 + \frac{4}{x_n}\right) \overset{[(-\infty)\cdot(-3)]}{=} +\infty.$$

Z następnym:

W celu utrwalenia umiejętności proponujemy obliczenie z definicji następujących granic funkcji:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 2. Wykorzystując definicję granicy obliczyć następujące granice:

1. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{x-2}$,
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+5}{2x-5}$,
3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x+2}{2x^2+x-1}$,
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+4}{x^2-2x-1}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Do tego ćwiczenia na kolejnym slajdzie podajemy odpowiedzi.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

1. -2,
2. $+\infty$,
3. $-\frac{1}{2}$,
4. 3.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Obserwując Przykład 6 oraz podpunkty 4. oraz 5. z Ćwiczenia 1 widzimy, że granice funkcji w tych przypadkach nie istnieją ze względu na różne zachowanie się wartości badanych funkcji z obu stron punktu x_0. Dlatego też sens ma badanie zachowania się wartości funkcji z każdej strony punktu x_0 osobno. Prowadzi to do pojęcia granic jednostronnych w punkcie. Innym uzasadnieniem potrzeby badania takich granic jednostronnych są Przykłady 2-3, gdy funkcja określona jest jedynie z jednej strony punktu, w którym badamy jej zachowanie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 9 (Heinego granicy lewostronnej funkcji w punkcie). **Funkcja $f : S_-(x_0) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 granicę lewostronną $g \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$)**, jeśli dla każdego takiego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $x_n \in S_-(x_0)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 10 (Heinego granicy prawostronnej funkcji w punkcie). **Funkcja $f : S_+(x_0) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 granicę prawostronną $g \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$)**, jeśli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego $x_n \in S_+(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, zachodzi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = g.$$

Z następnym:

Przejdźmy do przykładów. W Przykładzie 2 badane było zachowanie się wartości funkcji $\frac{1}{x}$ w prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, zaś w Przykładzie 7 pokazano, że funkcja $\frac{1}{x}$ nie ma skończonej granicy w tym punkcie. Wyznaczymy teraz granice jednostronne funkcji $\frac{1}{x}$ w punkcie 0.

Przykład 12. Zbadać istnienie granic jednostronnych funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{dla} \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

w punkcie $x_0 = 0$ (wiemy już, że granica $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje).

Na końcu poprzedniego:

Przed wyznaczeniem granic proponujemy wykonać wykres funkcji f.

Rozwiązanie. Niech ciągi (x_n), (x'_n) będą dowolne i takie, że

$$x_n \in S_-(0),\ \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \quad \text{oraz} \quad x'_n \in S_+(0),\ \lim_{n\to+\infty} x'_n = 0.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x'_n}.$$

Ponieważ $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0^-$, więc $\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$. Jednocześnie $x'_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0^+$, więc $\frac{1}{x_n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = +\infty.$$

Wobec dowolności wyboru ciągów (x_n) oraz (x'_n) oznacza to, że

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Z następnym:

Powróćmy do kolejnego z rozpatrywanych wcześniej przykładów. Pokażemy, że nie istnieje granica prawostronna funkcji z Przykładu 3.

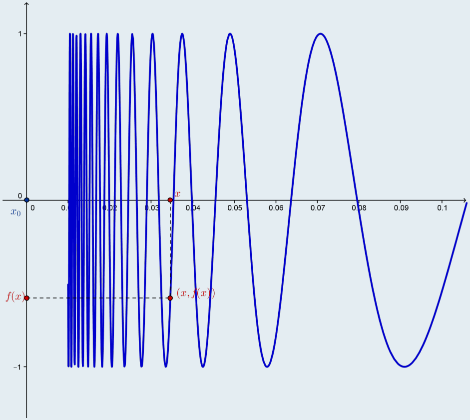
Przykład 13. Nie istnieje granica prawostronna funkcji $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla} \;\; x \in (0, \pi),$$

w punkcie $x_0 = 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Wykonując wykres funkcji f można zaobserwować, że wartości funkcji wahają się w prawostronnym otoczeniu 0 w przedziale $[-1, 1]$ i nie stabilizują się w pobliżu żadnej z liczb z tego przedziału.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

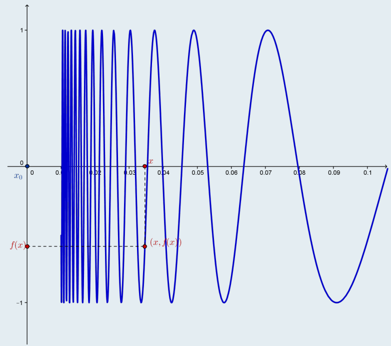
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozpatrzmy dwa ciągi (x_n) oraz (x'_n),

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{oraz} \quad x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}.$$

Wówczas $x_n, x'_n \in S_+(0)$, oraz

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\pi} = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} x'_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(4n+1)\pi} = 0,$$



a ponadto

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \sin n\pi = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin \frac{1}{\frac{2}{(4n+1)\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1,$$

gdyż $\sin n\pi = 0$ oraz $\sin(4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wskazaliśmy ciągi (x_n), (x'_n), dla których granice ciągów wartości $(f(x_n))$ oraz $(f(x'_n))$ są **różne**. Zatem granica $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ **nie istnieje**.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

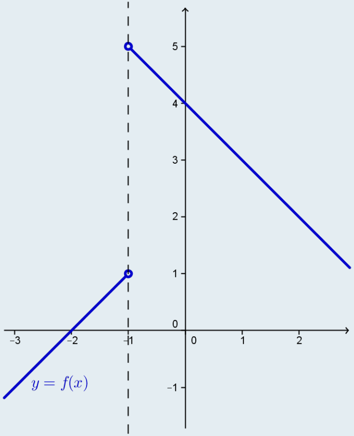
Powrócimy jeszcze do analizowanej już w Przykładzie 6 funkcji opisanej różnymi przepisami na dwóch rozłącznych podzbiorach swojej dziedziny. Pokazaliśmy, że funkcja ta nie ma granicy w punkcie $x_0 = -1$. Wyznaczymy teraz granice jednostronne tej funkcji w zadanym punkcie $x_0 = -1$.

Przykład 14. Zbadać istnienie granic jednostronnych funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{dla} \quad x < -1 \\ -x + 4 & \text{dla} \quad x > -1, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

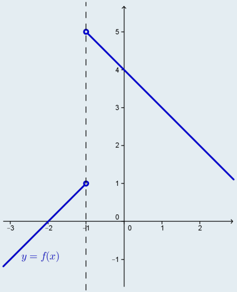
Rozwiązanie. Przypomnijmy tu, że wartości funkcji f są bliskie 1 dla argumentów $x < -1$ i bliskich $x_0 = -1$ oraz wartości tej funkcji są bliskie 5 dla argumentów $x > -1$ i bliskich $x_0 = -1$. Będzie to oznaczało, że istnieją granice jednostronne funkcji f w punkcie $x_0 = -1$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Niech (x_n) oraz (x'_n) będą dowolnymi takimi ciągami, że $x_n \in S_-(-1)$, $x'_n \in S_+(-1)$ oraz

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x'_n = -1.$$



Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n+2) = \lim_{n\to+\infty}\left(-1-\frac{1}{n}+2\right) = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to+\infty}(-x_n+4) = \lim_{n\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{n}+4\right) = 5.$$

Wobec dowolności wyboru ciągów (x_n) oraz (x'_n) otrzymamy

$$\lim_{x\to-1-} f(x) = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = 5.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Zajmiemy się teraz związkiem między istnieniem granicy funkcji w punkcie i istnieniem w tym punkcie granic jednostronnych. Następująca obserwacja jest oczywistą konsekwencją przedstawionych definicji granic funkcji w punkcie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 1. *Niech* $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją. Jeśli istnieje (skończona bądź też nieskończona) granica* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \in \overline{\mathbb{R}}$, *to istnieją granice* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *oraz* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *i są one równe. Co więcej, zachodzi równość*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Z definicji granicy funkcji w punkcie wynika, że obierając dowolny taki ciąg (x_n), że $x_n \in S(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, zachodzi równość

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_0) = g.$$

W szczególności, jeśli ograniczymy wybór do takich ciągów (x_n), że $x_n \in S_-(x_0)$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, to również otrzymamy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_0) = g,$$

co oznacza, że $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$.

Równość $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$ uzasadnimy analogicznie. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Duże praktyczne znaczenie ma stwierdzenie odwrotne do Wniosku 1. Sformułujemy je tutaj, zaś jego zasadność wykażemy później, gdy wprowadzimy, równoważną definicji Heinego, definicję Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 1. *Niech $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Jeśli istnieją (skończone bądź też nieskończone) równe sobie granice*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

to istnieje granica $\lim_{x \to x_0} f(x)$ i zachodzi równość

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Omówimy teraz krótko inną, równoważną definicji Heinego, definicję Cauchy'ego granicy funkcji. W celu poprawnego i pełnego jej zrozumienia należy sobie przypomnieć, omówione dokładnie przy okazji granic ciągów, opisanie przedziałów przy pomocy nierówności z wartością bezwzględną.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

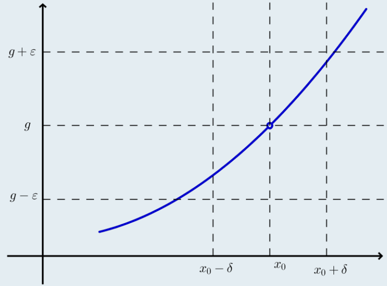
Definicja 11 (Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie).

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że **funkcja $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie x_0 skończoną granicę g** $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g\right)$, jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} |f(x) - g| < \varepsilon,$$

lub równoważnie

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0)} (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon).$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 5. Równość $\lim_{x\to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R}$ oznacza, że dla dowolnie wąskiego pasa P leżącego wokół prostej $y = g$ (pas leżący między prostymi $y = g - \varepsilon$ oraz $y = g + \varepsilon$) istnieje na tyle wąski pas H wokół prostej $x = x_0$ (pas leżący między prostymi $x = x_0 - \delta$ oraz $x = x_0 + \delta$), że część wykresu funkcji f (krzywa $y = f(x)$) leżąca w pasie H, musi jednocześnie leżeć w pasie P.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Prostą konsekwencją poczynionej tutaj obserwacji jest następujące stwierdzenie dotyczące znaku wartości funkcji w sąsiedztwie punktu, w którym granica istnieje i jest różna od zera.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 2. *Niech* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *oraz niech funkcja* $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ *ma w punkcie granicę* $\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \overline{\mathbb{R}}$, $g \neq 0$. *Wówczas istnieje takie sąsiedztwo* $S'(x_0) \subset S(x_0)$ *punktu* x_0, *że*

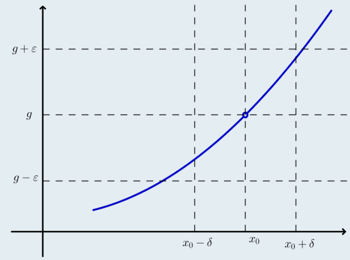
(i) $f(x) > 0$ *dla* $x \in S'(x_0)$, *jeśli* $g > 0$,

(ii) $f(x) < 0$ *dla* $x \in S'(x_0)$, *jeśli* $g < 0$.

Na końcu poprzedniego:

Przeprowadzimy prosty dowód tego wniosku w przypadku, gdy x_0 oraz g są skończonymi liczbami rzeczywistymi. Zaznaczmy też, że wniosek ten jest prawdziwy również w przypadkach, gdy x_0 lub g są nieskończonościami, ale wymaga to wprowadzenia serii odpowiednich definicji.

Dowód w przypadku $x_0, g \in \mathbb{R}$. Dowodzoną własność można uzasadnić wykorzystując obserwację poczynioną w Uwadze 5. Zakładając dla przykładu, że $g > 0$ możemy dobrać $\varepsilon > 0$ na tyle małe, aby również $g - \varepsilon > 0$. Wówczas (por. rysunek obok) na mocy definicji Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie znajdziemy takie



$\delta > 0$, że dla $x \in S(x_0)$, $0 < |x - x_0| < \delta$, zachodzi $f(x) > g - \varepsilon$. Jeśli $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset S(x_0)$, to $S'(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, zaś w przeciwnym przypadku należy jeszcze odpowiednio zmniejszyć δ tak, aby $S'(x_0) = (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \subset S(x_0)$. W obu przypadkach będziemy mieli $f(x) > 0$ dla $x \in S'(x_0)$. Dowód dla $g < 0$ jest analogiczny. $\square$

Z następnym:

Na początek udowodnimy, że obie podane definicje granicy funkcji w punkcie są sobie równoważne.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2. *Definicja Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie równoważna jest definicji Heinego granicy funkcji w punkcie.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód. ($\Longrightarrow$) Załóżmy, że zachodzi warunek z definicji Cauchy'ego granicy funkcji. Niech (x_n) będzie takim ciągiem, że $x_n \in S(x_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Pokażemy, że $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$. W tym cel ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$ i niech $\delta > 0$ będzie takie, że

$$\bigwedge_{x\in S(x_0)} \left(0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\right). \tag{1}$$

Z założenia $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x_0$, więc dla $\delta > 0$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ zachodzi

$$|x_n - x_0| < \delta.$$

Wówczas z warunku (1) wynika

$$|f(x_n) - g| < \varepsilon,$$

co w konsekwencji oznacza, że $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$.

Dowód. ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, tzn. zachodzi warunek z definicji Heinego granicy funkcji i przypuśćmy, że warunek z definicji Cauchy'ego nie zachodzi. Znajdziemy więc takie $\varepsilon > 0$, że

$$\bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{x\in S(x_0)} \left(0 < |x - x_0| < \delta \quad \wedge \quad |f(x) - g| \geqslant \varepsilon\right). \tag{2}$$

Przyjmując w powyższym warunku (2) $\delta = \frac{1}{n}$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, otrzymamy istnienie takich elementów x_n, że $x_n \in S(x_0)$,

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad |f(x_n) - g| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Oznacza to, że $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Z definicji Heinego wynika wtedy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = g$, co przeczy drugiemu warunkowi koniunkcji (3). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że przypuszczenie, że nie zachodzi warunek z definicji Cauchy'ego granicy funkcji było fałszywe. $\square$

Uwaga 6. Porównując obie definicje granicy funkcji w punkcie można zaobserwować, że definicja Heinego jest niejako definicją "czynnościową". Używając tej definicji można obliczać nieznane granice funkcji. W porównaniu z definicją Heinego, definicja Cauchy'ego jest bardziej sformalizowana i nie pozwala na odkrycie granicy, a jedynie na uzasadnienie, że dana liczba jest granicą funkcji w zadanym punkcie.

Z następnym:

Na elementarnym przykładzie pokażemy teraz zastosowanie definicji Cauchy'ego do uzasadnienia granicy funkcji w punkcie.

Przykład 15. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=3x-5 \quad \text{dla} \ \ x\in\mathbb{R}.$$

Pokazać, że $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-2$.

Na końcu poprzedniego:

Będziemy postępować zgodnie z warunkiem definicyjnym.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$. Szukamy takiego $\delta > 0$, że dla wszystkich $x \in S(1)$ spełniona była implikacja

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow |(3x-5)-(-2)| < \varepsilon.$$

Z nierówność $|(3x-5)-(-2)| < \varepsilon$ po przekształceniach otrzymamy $|3x-3| < \varepsilon$, co można zapisać w postaci

$$3|x-1| < \varepsilon.$$

Przyjmując $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ otrzymamy $|x-1| < \delta$.
Widzimy zatem, że istnieje takie $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, że dla dowolnego $x \in S(1)$ spełniającego $|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ zachodzi

$$|(3x-5)-(-2)| = 3|x-1| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To kończy uzasadnienie równości $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Porównując obie definicje nasuwa się następująca obserwacja:

Uwaga 7. Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie jest w istocie definicją "czynnościową", tzn. pokazuje wprost, jak obliczamy granicę funkcji, jeśli ona istnieje. Definicja Cauchy'ego jest definicją wysoce formalną, która nie pozwala na obliczanie granicy, a jedynie na sprawdzenie, czy liczba, którą niestety należy "odkryć", jest granicą danej funkcji.

Z następnym:

Przejdziemy teraz do zdefiniowania granicy jednostronnej funkcji w punkcie. Wprowadzone definicje pozwolą na prosty i elementarny dowód Twierdzenia 1, którego dowód na gruncie definicji Heinego jest bardziej skomplikowany.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 12 (**Cauchy'ego granicy lewostronnej funkcji w punkcie**). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że **funkcja** $f : S_-(x_0) \to \mathbb{R}$ **ma w punkcie** x_0 **skończoną granicę lewostronną** g ($\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$), jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S_-(x_0)} \left(x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\right).$$

Definicja 13 (**Cauchy'ego granicy prawostronnej funkcji w punkcie**). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że **funkcja** $f : S_+(x_0) \to \mathbb{R}$ **ma w punkcie** x_0 **skończoną granicę prawostronną** g ($\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$), jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x \in S_+(x_0)} \left(x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - g| < \varepsilon\right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przejdźmy zatem to związku między istnieniem granicy funkcji w punkcie a istnieniem granic jednostronnych w tym punkcie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 8. Zauważmy, że nierówność $0 < |x - x_0| < \delta$ jest równoważna koniunkcji dwóch nierówności

$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \wedge \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Porównując więc warunki z Definicji 11-13 widzimy, że istnienie skończonej granicy funkcji w punkcie implikuje istnienie skończonych granic jednostronnych w tym punkcie, które w oczywisty sposób równe są granicy funkcji w tym punkcie. W ten sposób podaliśmy inne uzasadnienie Wniosku 1 dla granic skończonych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przejdźmy więc do dowodu Twierdzenia 2 dla granic skończonych.

Dowód Twierdzenia 2. Załóżmy, że istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$. Pokażemy, że $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$. W tym celu ustalamy dowolne $\varepsilon > 0$. Z założenia o istnieniu granic jednostronnych (Definicje 12-13) otrzymamy

$$\begin{aligned} &\bigvee_{\delta_1>0}\ \bigwedge_{x\in S_-(x_0)} \left(x_0-\delta_1 < x < x_0 \Longrightarrow |f(x)-g| < \varepsilon\right), \\ &\bigvee_{\delta_2>0}\ \bigwedge_{x\in S_+(x_0)} \left(x_0 < x < x_0+\delta_2 \Longrightarrow |f(x)-g| < \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Przyjmijmy $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Weźmy dowolne $x \in S(x_0)$ takie, że $0 < |x - x_0| < \delta$. Jeśli $x \in S_-(x_0)$, to wtedy $x_0 - \delta < x < x_0$, a więc również $x_0 - \delta_1 < x < x_0$. Jeśli zaś $x \in S_+(x_0)$, to $x_0 < x < x_0+\delta$, a wówczas $x_0 < x < x_0+\delta_2$. W obu przypadkach z (4) otrzymamy $|f(x) - g| < \varepsilon$, co kończy dowód. $\square$

Z następnym:

Zaznaczmy tutaj, że dla granic niewłaściwych można również sformułować odpowiednie warunki definiujące te granice w sensie Cauchy'ego. Dla przykładu:

Definicja 14 (Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że **funkcja** $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ **ma w punkcie** x_0 **granicę** $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$), jeśli

$$\bigwedge_{m<0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S_-(x_0)} (x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow f(x) < m).$$

Definicja 15 (Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Mówimy, że **funkcja** $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$ **ma w punkcie** x_0 **granicę** $+\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$), jeśli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in S_+(x_0)} (x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow f(x) > M).$$

Z następnym:

Wykorzystanie definicji do obliczania granic nie jest optymalne. Wskażemy pewne bazowe granice oraz operacje na granicach funkcji, które znacznie upraszczają obliczanie granic. Wyjdziemy od następującego lematu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 1. *Niech* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *(*$x_0 \in \mathbb{R}$ *lub* $x_0 = -\infty$ *lub* $x_0 = +\infty$*) oraz* $f : S(x_0) \to \mathbb{R}$*.*

(i) Jeśli $f(x) = c \in \mathbb{R}$ *dla* $x \in S(x_0)$*, to* $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$*.*

(ii) Jeśli $f(x) = x$ *dla* $x \in S(x_0)$*, to* $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$*.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Przedstawimy teraz prosty dowód tego lematu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód. Niech (x_n) będzie dowolnym takim ciągiem, że $x_n \in S(x_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Jeśli $f(x) = c$ dla $x \in S(x_0)$, to

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} c = c,$$

więc $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

W przypadku, gdy $f(x) = x$ dla $x \in S(x_0)$ mamy

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0,$$

czyli $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. $\square$

Z następnym:

Jako elementarną konsekwencję Lematu 1, na podstawie Wniosku 1 otrzymamy:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 3. *Niech* $x_0 \in \mathbb{R}$ *oraz* $c \in \mathbb{R}$. *Wówczas*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^-} c = \lim\limits_{x \to x_0^+} c = c$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0^-} x = \lim\limits_{x \to x_0^+} x = x_0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przejdziemy teraz do omówienia operacji arytmetycznych na granicach funkcji.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 3. *Niech* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : S(x_0) \to \mathbb{R}$. *Załóżmy, że istnieją (skończone bądź nieskończone) granice* $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$. *Wtedy (o ile nie prowadzi to do symboli nieoznaczonych)*

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,

(ii) $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$,

(iv) jeśli $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ *(co oznacza* $g(x) \neq 0$ *dla* $x \in S'(x_0)$*), to*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Dowód tego twierdzenia oparty jest na wykorzystaniu odpowiednich praw dotyczących operacji arytmetycznych na granicach ciągów sformułowanych w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 4. *Niech ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą zbieżne do granic skończonych bądź nieskończonych. Wówczas (o ile nie prowadzi to do symboli nieoznaczonych) zachodzą następujące prawa:*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$,

(iv) jeśli $b_n \neq 0$ *dla* $n\in\mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, *to*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Dla przykładu udowodnimy pierwszą z własności. Pozostałe dowodzi się analogicznie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód Twierdzenia 3 (i). Niech (x_n) będzie dowolnym taki ciągiem, że $x_n \in S(x_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Wówczas

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) + \lim_{n\to+\infty}(g(x_n)).$$

Z definicji Heinego granicy funkcji mamy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x),$$
$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} g(x),$$

więc

$$\lim_{n\to+\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Oznacza to, wobec dowolności wyboru ciągu (x_n), że istnieje granica $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ oraz zachodzi równość

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

□

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przed rozpatrzeniem konkretnych przykładów zastosowań Twierdzenia 3 zauważmy, że stosując indukcję matematyczną, Lemat 1 (ii) oraz Twierdzenie 3 (iii) (iv), można udowodnić następujący pożyteczny wniosek. Dowód tego wniosku pozostawiamy jako ćwiczenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 4. *Ustalmy* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *oraz dowolną liczbę naturalną* p. *Wówczas*

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} x^p = x_0^p$,

(ii) jeśli $x_0 \neq 0$, *to* $\lim\limits_{x \to x_0} x^{-p} = x_0^{-p}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zaznaczmy na koniec, że własności operacji arytmetycznych na granicach funkcji sformułowane w Twierdzeniu 3 oraz Wniosku 4 przysługują również granicom jednostronnym, zaś z Przykładu 12 mamy:

Wniosek 5. *Ustalmy dowolnie liczbę naturalną p. Wówczas*

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^p} = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^p} = (-1)^p \cdot (+\infty)$.

Z następnym:

Przejdziemy teraz do stosownych przykładów zastosowania poznanych własności:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 16. Obliczyć (o ile istnieje) granicę $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2x^2-7x-4}{-x^2+6x-8}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Wykorzystując Wnioski 3, 4 oraz Twierdzenie 3 otrzymamy

$$\lim_{x\to 4}(2x^2-7x-4)=2\cdot 4^2-7\cdot 4-4=0,$$
$$\lim_{x\to 4}(-x^2+6x-8)=-4^2+6\cdot 4-8=0.$$

Zatem

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{-x^2+6x-8}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(2x+1)}{(x-4)(2-x)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x+1}{2-x}\overset{\left[\frac{2\cdot 4+1}{2-4}\right]}{=}-\frac{9}{2}.$$

Z następnym:

Obliczymy jeszcze granicę tej samej funkcji, ale w nieskończoności. Wówczas postępujemy odmiennie, niż w przypadku granicy właściwej.

Przykład 17. Wyznaczyć granicę $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x-4}{-x^2+6x-8}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x-4}{-x^2+6x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(-1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}.$$

Wykorzystując Wniosek 4 otrzymamy $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}\overset{\left[\frac{7}{-\infty}\right]}{=\!=}0$. Podobnie $\frac{4}{x^2}\xrightarrow{x\to-\infty}0$, $\frac{6}{x}\xrightarrow{x\to-\infty}0$ oraz $\frac{8}{x^2}\xrightarrow{x\to-\infty}0$, więc z Twierdzenia 3 otrzymamy

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-7x-4}{-x^2+6x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}}{-1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}\overset{\left[\frac{2-0-0}{-1+0-0}\right]}{=\!=}-2.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 18. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2}\left[\frac{\sqrt{6-2}-2}{2-2}=\frac{0}{0}\right].$$

Przekształcając wyrażenie pod granicą otrzymamy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{x-2} &\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x}-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)}{(x-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(x-2)\cdot(\sqrt{6-x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt{6-x}+2} \overset{\left[\frac{-1}{\sqrt{6-2}+2}\right]}{=} -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 19. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}\left[\frac{\sqrt[3]{64}-4}{\sqrt{64}-8}=\frac{0}{0}\right].$$

Przekształcając wyrażenie pod granicą wykorzystamy zależność

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Otrzymamy więc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} &\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+4\sqrt[3]{x}+16}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+4\sqrt[3]{x}+16}\cdot\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8}\\ &= \lim_{x\to 64}\frac{(x-64)\cdot(\sqrt{x}+8)}{(x-64)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+4\sqrt[3]{x}+16\right)}\\ &= \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}+8}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+4\sqrt[3]{x}+16} \overset{\left[\frac{\sqrt{64}+8}{(\sqrt[3]{64})^2+4\cdot\sqrt[3]{64}+16}\right]}{=} \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Przykład 20. Wyznaczyć granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x + 1)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Przekształcając wyrażenie pod granicą otrzymamy

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right).$$

Wykorzystując Wniosek 4 otrzymamy $\frac{2}{x^2}\xrightarrow{x\to-\infty}0$, $\frac{1}{x^3}\xrightarrow{x\to-\infty}0$ oraz $x^3\xrightarrow{x\to-\infty}-\infty$, więc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+1) &= \lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\\ &\overset{[(-\infty)\cdot(1-0+0)]}{=} -\infty.\end{aligned}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Proponujemy teraz samodzielnie obliczyć następujące granice:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3. Obliczyć granice:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^3-27}$,
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$,
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-5x+6}{x(2x-1)}$,
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{1+3x^2}$,
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x-2}{2x^2+x-1}$,
6. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x+2}{3x^2+x-2}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Kolejny slajd zawiera odpowiedzi:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

1. $\frac{2}{9}$,
2. $\frac{3}{2}$,
3. $\frac{1}{2}$,
4. $+\infty$,
5. 0,
6. $-\frac{2}{5}$.

Z następnym:

Przejdziemy teraz do analizy granic jednostronnych. Jak to już wiadomo, warunkiem koniecznym istnienia granicy funkcji w punkcie jest istnienie równych sobie granic jednostronnych funkcji w tym punkcie. Wykorzystamy ten fakt do wykazania, że pewne granice nie istnieją.

Przykład 21. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+1}{x+2}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+1}{x+2} \left[\frac{5}{0}\right],$$

przy czym $\frac{5}{0}$ jest operacją niedopuszczalną w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$. Obliczmy zatem granice jednostronne:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x+2} \overset{\left[\frac{5}{0^-}\right]}{=\!=} -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x+2} \overset{\left[\frac{5}{0^+}\right]}{=\!=} +\infty,$$

więc granica $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+1}{x+2}$ **nie istnieje**.

Przykład 22. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{x\to 3} \frac{-2x+4}{(x-3)^2}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to -3} \frac{-2x+4}{(x-3)^2} \overset{\left[\frac{-2}{0^+}\right]}{=} \underset{=}{\left[-\frac{2}{0^+}\right]} -\infty.$$

Z następnym:

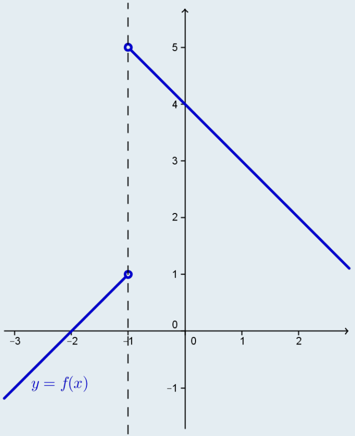
Wrócimy jeszcze do Przykładu 6, gdzie pokazaliśmy, że badana tam funkcja nie ma granicy w punkcie $x_0 = -1$. Zauważyliśmy wtedy, że fakt ten wynika z różnego zachowania się funkcji po różnych stronach punktu x_0.

Przykład 23. Nie istnieje granica funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla} \quad x < -1 \\ -x+4 & \text{dla} \quad x > -1, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = -1$.

Rozwiązanie . Przypominając wykres funkcji f zauważamy, że funkcja tam różne granice jednostronne.



Istotnie,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+2) = 1,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-x+4) = 5,$$

co oznacza, że granica $\lim_{x \to -1} f(x)$ **nie istnieje**.

Z następnym:

Proponujemy teraz samodzielnie zbadać istnienie następujących granic:

Ćwiczenie 4. Zbadać istnienie granic:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2-1}$,

2. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{-3}{(x+2)^4}$,

3. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x+4}{(x+1)^3}$.

Na końcu poprzedniego:

Kolejny slajd zawiera odpowiedzi:

Odp.

1. granica nie istnieje (*Wskazówka:* $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$ *oraz* $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = +\infty$),
2. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{-3}{(x+2)^4} = -\infty$,
3. granica nie istnieje (*Wskazówka:* $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{2x+4}{(x+1)^3} = -\infty$ *oraz* $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{2x+4}{(x+1)^3} = +\infty$).

Z następnym:

Sformułujemy dalej ważne twierdzenie pomagające obliczać granice funkcji.

Twierdzenie 5 (o trzech funkcjach). *Niech $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ oraz funkcje $f, g, h : S(x_0) \to \mathbb{R}$ spełniają nierówność*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \textit{dla} \ x \in S(x_0).$$

Jeśli istnieją (skończone bądź nieskończone) i równe sobie granice

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \overline{g} = \lim_{x \to x_0} h(x),$$

to istnieje granica $\lim_{x \to x_0} g(x)$ i zachodzi równość

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \overline{g}.$$

Na końcu poprzedniego:

Twierdzenie o trzech funkcjach jest prostą konsekwencją znanego z teorii granic ciągów twierdzenia o trzech ciągach.

Dowód. Niech (x_n) będzie dowolnym takim ciągiem, że $x_n \in S(x_0)$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. Na mocy założenia o istnieniu granic funkcji f oraz h mamy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \overline{g} = \lim_{n\to+\infty} h(x_n).$$

Wówczas z oszacowania wartości funkcji f, g oraz h i z twierdzenia o trzech ciągach wynika istnienie granicy $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n)$ i równość $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = \overline{g}$. Wobec dowolności wyboru ciągu (x_n) wnosimy istnienie granicy funkcji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ równej $\overline{g}$. □

Uwaga 9. Zaznaczmy, że Twierdzenie o trzech funkcjach zachodzi również dla granic jednostronnych. W dowodzie wystarczy założyć, że wyrazy ciągu (x_n) należą do odpowiedniego sąsiedztwa punktu x_0.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Nim przystąpimy do obliczenia pewnych ważnych granic, uzasadnimy istotną w naszych rozważaniach nierówność dotyczącą wartości funkcji sinus i cosinus.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 24. Mamy

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{dla} \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

skąd wynika też oszacowanie

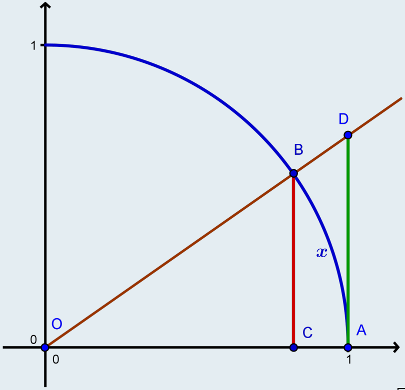
$$|\sin x| \leqslant |x| \quad \text{dla} \ \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uzasadnienie. Obserwując rysunek zauważamy, że

$$\sin x = \frac{|BC|}{|OB|} = |BC| < \overset{\frown}{AB} = x,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{|AD|}{|OA|} = |AD| > \overset{\frown}{AB} = x.$$



$\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Wykorzystując uzasadnione oszacowany wykażemy na początek:

Przykład 25. Udowodnimy, że $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$ oraz $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$-|x| < \sin x < |x| \quad \text{dla } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\},$$

i ponieważ $\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0$, więc z Twierdzenia 5 otrzymamy $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Ponadto, mamy równość $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, więc

$$-\tfrac{1}{2}x^2 < 1 - \cos x < \tfrac{1}{2}x^2 \quad \text{dla } x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Ponieważ zaś $\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^2 = 0$, więc z Twierdzenia 5 otrzymamy $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x) = 0$. Zatem $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z następnym:

Uzasadnimy teraz następujące:

Twierdzenie 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dowód. Zauważmy, że z Przykładu 24 mamy

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{dla} \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Otrzymamy stąd

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{dla} \;\; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$, więc z twierdzenia o trzech funkcjach dla granicy prawostronnej otrzymamy $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ponadto,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

więc ostatecznie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\square$

Przykład 26. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{5} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Przykład 27. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że ponieważ $|\sin t| \leqslant 1$, więc

$$-\frac{1}{|x|} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{|x|} \text{ dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ponieważ zaś $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, więc z Twierdzenia o trzech funkcjach wynika

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Z następnym:

Proponujemy teraz samodzielnie zbadać istnienie następujących granic:

Ćwiczenie 5. Obliczyć granice:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sin 4x}$,

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Kolejny slajd zawiera odpowiedzi:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

1. $\frac{3}{4}$,
2. $\frac{2}{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Pytanie 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 3x^3 - 2$$

ma w punkcie $x_0 = -1$ granicę równą

(a) 3,

(b) -3,

(c) -5,

(d) 1.

Pytanie 2. Granica $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$

(a) jest równa 0,

(b) jest równa $+\infty$,

(c) jest równa $-\infty$,

(d) nie istnieje.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 3. Granica funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{dla } x < -1 \\ -x + 2 & \text{dla } x \geqslant -1 \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = -1$

(a) nie istnieje,

(b) jest równa 3,

(c) jest równa 0,

(d) jest równa -1.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 4. Spośród granic $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ oraz $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

(a) istnieją obie,

(b) istnieje tylko pierwsza,

(c) istnieje tylko druga,

(d) nie istnieje żadna z tych granic.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 5. Symbolem nieoznaczonym jest

(a) $(+\infty) + (+\infty)$,

(b) $(+\infty) \cdot \frac{1}{\pi}$,

(c) $(-\infty) + 3$,

(d) $(-\infty) + (+\infty)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 6. Symbolem oznaczonym jest

(a) $\frac{+\infty}{2}$,

(b) $\frac{+\infty}{+\infty}$,

(c) $0 \cdot (-\infty)$,

(d) $\frac{+\infty}{-\infty}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 7. Granica $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-1}{2x^2-2}$

(a) nie istnieje,

(b) jest równa 2,

(c) jest równa $\frac{1}{2}$,

(d) jest równa 0.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 8. Granica $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$

(a) nie istnieje,

(b) jest równa 1,

(c) jest równa -1,

(d) jest równa $+\infty$.

Pytanie 9. Granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$

(a) nie istnieje,

(b) jest równa $+\infty$,

(c) jest równa 0,

(d) jest równa 1.

Pytanie 10. Granica $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$

(a) nie istnieje,

(b) równa jest $-\infty$,

(c) równa jest 0,

(d) równa jest $+\infty$.

Klucz odpowiedzi:

1(c), 2(d), 3(b), 4(a), 5(d), 6(a), 7(d), 8(b), 9(c), 10(b).