Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Granice ciągów

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

N początku następnego:

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$,

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,

$[x]$ - część całkowita (cecha) liczby rzeczywistej x.

Na końcu poprzedniego:

Przed wprowadzeniem definicji granicy ciągu liczbowego przypomnijmy, czym jest ciąg liczbowy.

Definicja 1. **Ciągiem liczbowym** nazywać będziemy każdą funkcję $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Uwaga 1. Jeśli $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest ciągiem liczbowym, to n-ty wyraz tego ciągu $a(n)$ oznaczymy przez a_n. Ciąg a oznaczać będziemy przez $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lub prościej (a_n).

Na początku następnego:

W definicji granicy ciągu ważne jest pojęcie wartości bezwzględnej liczby i jego geometryczna interpretacja. W celu przypomnienia niezbędnych wiadomości proponujemy wykonanie serii następujących ćwiczeń.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1. Na osi liczbowej zaznaczyć zbiór

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

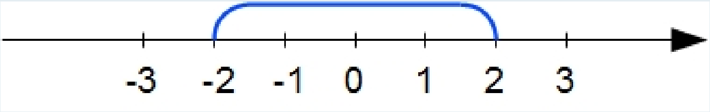
Oczywiście, najpierw należy rozwiązać nierówność.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Mamy oczywiście

$$|x| < 2 \iff (x > -2 \ \wedge \ x < 2) \iff x \in (-2, 2).$$

Stąd



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 2. Na osi liczbowej zaznaczyć zbiór

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant \frac{7}{2} \right\}.$$

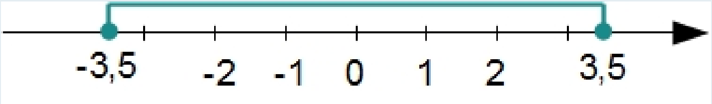
Na początku następnego:

Postąpimy podobnie, jak poprzednio.

Rozwiązanie. Rozwiązując nierówność otrzymamy

$$|x| \leqslant \frac{7}{2} \iff \left(x \geqslant -\frac{7}{2} \ \wedge \ x \leqslant \frac{7}{2}\right) \iff x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right].$$

Zatem



Na początku następnego:

Przejdźmy dalej do bardziej skomplikowanych przykładów.

Ćwiczenie 3. Na osi liczbowej zaznaczyć zbiór

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leqslant 3\}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

W tym przypadku otrzymamy:

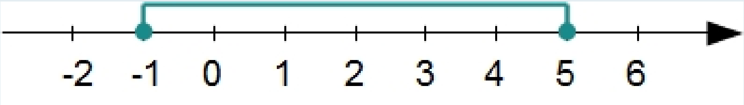
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Rozwiążemy nierówność opisującą zbiór C. Mamy więc

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 &\iff x-2 \geqslant -3 \ \wedge\ x-2 \leqslant 3 \\ &\iff x \geqslant -1 \ \wedge\ x \leqslant 5 \\ &\iff x \in [-1,5]. \end{aligned}$$

Przedstawiając otrzymany przedział na osi liczbowej otrzymamy



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Dla wprawy, spróbuj wykonać jeszcze jedno ćwiczenie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 4. Na osi liczbowej zaznaczyć zbiór

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 2\}.$$

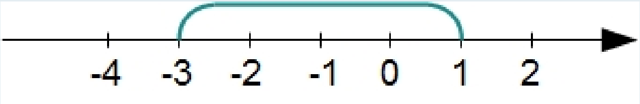
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie . Rozwiązując nierówność wyznaczającą zbiór D otrzymamy

$$
\begin{aligned}
|x+1|<2 &\iff x+1>-2 \ \wedge\ x+1<2 \\
&\iff x>-3 \ \wedge\ x<1 \\
&\iff x\in(-3,1).
\end{aligned}
$$

Zbiór D ma następujące przedstawienie na osi liczbowej:



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Spróbuj teraz odpowiedzieć na następujące pytanie.

Problem 1. Jaki jest geometryczny sens modułu liczby rzeczywistej?

Na końcu poprzedniego:

Jeśli nie możesz sobie tego przypomnieć, przeanalizuj powtórnie Ćwiczenia 1 oraz 2.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Prawdziwy jest następujący lemat.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Lemat 1. *Wartość bezwzględna danej liczby równa jest jej odległości od liczby* 0.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Analizując odpowiedzi do Ćwiczeń 1 oraz 2 spróbuj odpowiedzieć na kolejne pytanie:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 2. Jak geometrycznie rozwiązać nierówności $|x| < 2$ oraz $|x| \leqslant \frac{7}{2}$?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

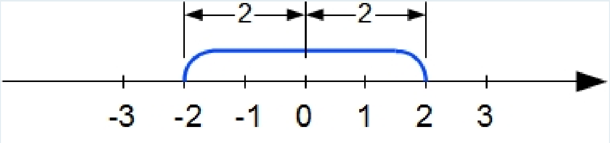
Na początku następnego:

Wykorzystując Lemat 1 można udzielić następującej odpowiedzi:

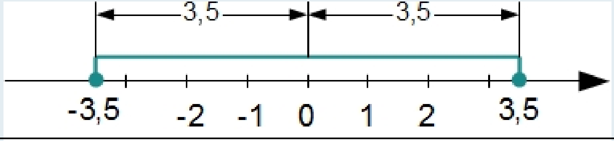
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Nierówność $|x| < 2$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, których odległość od liczby 0 jest mniejsza niż 2. Warunek ten spełniają oczywiście tylko liczby z przedziału $(-2, 2)$.



Z kolei, nierówność $|x| \leqslant \frac{7}{2}$ jest spełniona przez wszystkie liczby, których odległość od 0 jest niewiększa od $\frac{7}{2}$. Ten warunek spełniony jest jedynie przez wszystkie liczby z przedziału $[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}]$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Spróbuj teraz odpowiedzieć na kolejne, bardziej skomplikowane pytanie.

Problem 3. Jaki jest geometryczny sens nierówności z Ćwiczeń 3 oraz 4?

Na końcu poprzedniego:

Jeśli jeszcze nie potrafisz udzielić odpowiedzi, przeanalizuj jeszcze raz wszystkie przerobione ćwiczenia i spróbuj odpowiedzieć na pytanie:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 4. Wyznacz środki przedziałów przedziałów otrzymanych w Ćwiczeniach 1–4. Jaki jest ich związek z nierównościami opisującymi zbiory z tych ćwiczeń?

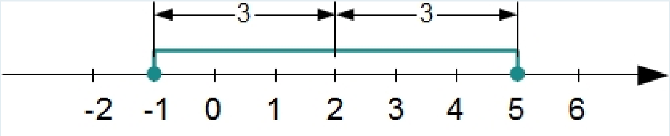
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

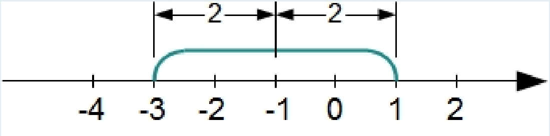
Oczywiście można zaobserwować, że:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Nierówność $|x-2| \leqslant 3$ spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, których odległość od liczby 2 (środek przedziału) jest niewiększa od 3. Warunek ten spełniają tylko liczby z przedziału $[-1, 5]$.



Z kolei, nierówność $|x+1| < 2$ jest spełniona przez wszystkie liczby, których odległość od -1 (środek przedziału) jest mniejsza od 2. Ten warunek spełniony jest jedynie przez liczby z przedziału $(-3, 1)$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 2. W przypadku nierówności $|x-2| \leqslant 3$, której rozwiązaniem jest przedział $[-1, 5]$, liczbę 2 nazywać będziemy **środkiem przedziału** $[-1, 5]$, zaś liczbę 3 nazwiemy **promieniem** tego przedziału. Analogicznie, dla nierówności $|x+1| < 2$, liczba -1 będzie **środkiem**, zaś liczba 2 – **promieniem przedziału** $(-3, 1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Kolejne (nieco abstrakcyjne) ćwiczenie pomoże Ci zrozumieć istotę definicji granicy ciągu liczbowego.

Ćwiczenie 5. Ustalmy dowolnie dodatnią liczbę rzeczywistą ε oraz dowolną liczbę rzeczywistą a. Zaznaczyć na osi liczbowej zbiór

$$E = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

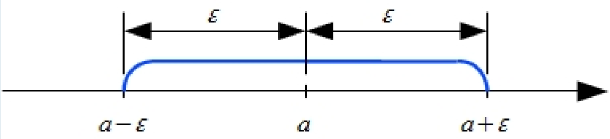
Jeśli nie potrafisz rozwiązać nierówności opisującej zbiór E geometrycznie, spróbuj na początek metody analitycznej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Metoda analityczna daje następujące rozwiązanie:

$$\begin{aligned} |x-a|<\varepsilon &\iff x-a>-\varepsilon \ \wedge \ x-a<\varepsilon \\ &\iff x>a-\varepsilon \ \wedge \ x<a+\varepsilon \\ &\iff x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon). \end{aligned}$$

Metoda geometryczna pozwala stwierdzić, że E jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, których odległość od punktu a (środek przedziału $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ otrzymanego metodą analityczną) jest mniejsza od ε.



Na początku następnego:

Dla wprawy spróbuj samodzielne wykonać następujące zadania.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1. Wykorzystując metodę analityczną i metodę geometryczną zaznaczyć w układzie współrzędnych następujące zbiory:

1. $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{3}{2}| \leqslant \frac{1}{2}\}$,
2. $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| < \frac{1}{3}\}$,
3. $A_3 = \{x \in \mathbb{R} : |x - \frac{1}{3}| < \frac{2}{5}\}$,
4. $A_4 = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leqslant \frac{1}{6}\}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

W dalszej kolejności wykonamy ćwiczenia ”odwrotne” do już wykonanych. Poprzednio, na podstawie opisu analitycznego, zaznaczaliśmy zadany zbiór (przedział) na osi liczbowej. Wykonamy teraz ćwiczenie polegające na znalezieniu opisu analitycznego zadanego przedziału liczbowego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 6. Podać analityczny opis (używając pojęcia modułu liczby rzeczywistej) przedziału $(-2, 4)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

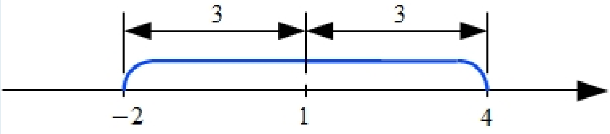
Na końcu poprzedniego:

Jeśli nie potrafisz wykonać tego ćwiczenia, spróbuj wyznaczyć środek i promień przedziału $(-2, 4)$ i wykorzystaj Uwagę 2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Dla przedziału $(-2,4)$ można zapisać

$$(-2,4) = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\}.$$



Na początku następnego:

W celu utrwalenia umiejętności wykonaj następujące zadanie.

Zadanie 2. Podaj analityczny opis następujących przedziałów:

1. $[-1, 4]$,
2. $(0, 1)$,
3. $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$,
4. $[-0,99; 1,02]$.

Na początku następnego:

Wykonajmy na koniec następujące, abstrakcyjne ćwiczenie.

Ćwiczenie 7. Używając pojęcia wartości bezwzględnej liczby zapisać analitycznie przedziały (a, b) oraz $[a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$.

Na końcu poprzedniego:

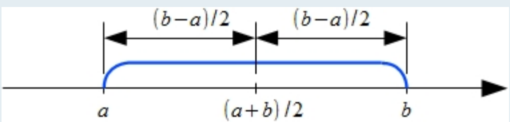
Jeśli masz problem z tym ćwiczeniem, przeanalizuj jeszcze raz Ćwiczenie 6 oraz Zadanie 2.

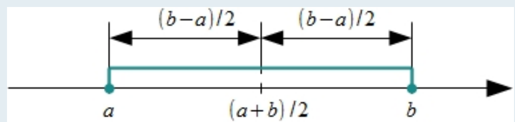
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Oczywiście środkiem każdego z tych przedziałów jest $\frac{a+b}{2}$, zaś ich promień (odległość od środka do jednego z końców przedziałów) wynosi $\frac{b-a}{2}$. Stąd

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\},$$
$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leqslant \frac{b-a}{2}\right\}.$$

Zatem





Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 2. Niech ε będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech g będzie liczbą rzeczywistą. Przedział

$$(g-\varepsilon, g+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-g| < \varepsilon\}$$

nazywamy ε-**otoczeniem punktu** g (**otoczeniem punktu** g **o promieniu** ε, **epsilonowym otoczeniem punktu** g) i oznaczamy symbolem $U(g;\varepsilon)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Wyjaśnimy teraz kolejne ważne pojęcie potrzebne do dobrego zrozumienia granicy ciągu liczbowego.

Definicja 3. Niech X będzie zbiorem nieskończonym i niech W będzie własnością określoną na zbiorze X, tzn. $W : X \to \{0, 1\}$, przy czym $W(x) = 0$ oznacza, że element $x \in X$ nie ma własności W, zaś $W(x) = 1$ – przeciwnie, że element $x \in X$ ma własność W. Mówimy, że **prawie wszystkie elementy zbioru X mają własność W**, jeśli zbiór

$$\{x \in X : W(x) = 0\}$$

jest zbiorem skończonym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

W celu poprawnego zrozumienia Definicji 3 polecamy wykonać następujące ćwiczenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 8. Oceń prawdziwość następujących wypowiedzi:

1) prawie wszystkie liczby naturalne są większe od miliarda,

2) prawie wszystkie liczby naturalne są nieparzyste,

3) prawie wszystkie liczby naturalne są liczbami pierwszymi,

3) prawie wszystkie liczby naturalne są liczbami złożonymi.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

1) zdanie prawdziwe, gdyż zbiór $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 1\ 000\ 000\}$ jest zbiorem skończonym (zawiera "tylko" milion elementów!).

2) zdanie fałszywe, gdyż zbiór $\{n \in \mathbb{N} : n$ jest liczbą parzystą $\}$ jest zbiorem nieskończonym.

3) zdanie fałszywe, gdyż zbiór $\{n \in \mathbb{N} : n$ jest liczbą złożoną $\}$ jest zbiorem nieskończonym (zawiera m.in. liczby parzyste większe od 2).

4) zdanie fałszywe, gdyż zbiór $\{n \in \mathbb{N} : n$ jest liczbą pierwszą $\}$ jest zbiorem nieskończonym, co wynika z następującego lematu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 2. *Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest zbiorem nieskończonym.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Przeprowadzimy dowód tego lematu. W dowodzie tym wykorzystamy fakt, że każda liczba naturalna większa od 1 jest albo liczbą pierwszą, albo iloczynem liczb pierwszych. W konsekwencji każda liczba naturalna większa od 1 ma przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Przypuśćmy, że zbiór P wszystkich liczb pierwszych jest zbiorem skończonym, tzn. $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Rozważmy większą od 1 liczbę naturalną

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Zauważmy, że dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ liczba n nie jest podzielna przez p_k (reszta z dzielenia liczby n przez liczbę p_k wynosi 1). Przeczy to faktowi, że każda liczba naturalna większa od 1 ma przynajmniej jeden dzielnik będący liczbą pierwszą. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że zbiór P wszystkich liczb pierwszych jest zbiorem nieskończonym. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Przejdziemy teraz do pojęcia granicy ciągu liczbowego. Istnienie skończonej granicy ciągu mówi wiele o jego zachowaniu dla "bardzo dużych" wskaźników n. Nim sformułujemy ścisłą definicję granicy ciągu, spróbujmy zaobserwować zachowanie pewnych ciągów dla "dużych" n.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 3. W celu ułatwienia obliczeń w kolejnych przykładach proponujemy wykorzystać przygotowane arkusze programu *MS Excel* lub, co oczywiście będzie korzystniejsze dla użytkownika tej prezentacji, samodzielnie przygotować arkusze do stosownych obliczeń.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 9. Obliczyć przybliżone wartości wyrazów ciągu

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

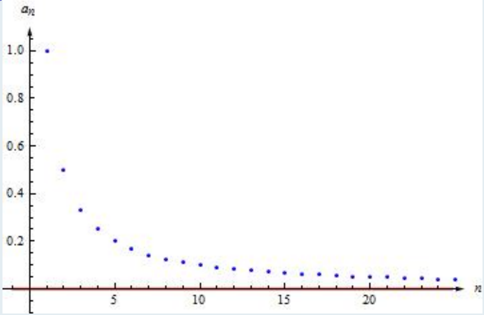
Jaką prawidłowość dotyczącą wyrazów tego ciągu dla "dużych" n możesz zaobserwować?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Poniżej przedstawiono wartości ciągu (a_n) dla wybranych wskaźników n. (, zakładka a_n)

n	10	256	790	1 012	2 566	8 652	11 256	16 478	22 520	35 890	67 680	95 761
a_n	0,100000	0,003906	0,001266	0,000988	0,000390	0,000116	0,000089	0,000061	0,000044	0,000028	0,000015	0,000010

Można zaobserwować, że wyrazy ciągu (a_n) "dla coraz większych" wskaźników n "leżą coraz bliżej" liczby 0. Wykres początkowych wyrazów ciągu (a_n) można zaobserwować na poniższym rysunku.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 10. Obliczyć przybliżone wartości wyrazów ciągu

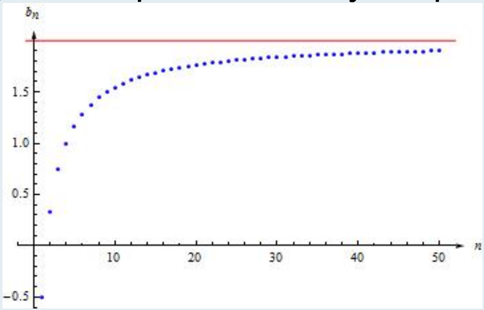
$$b_n = \frac{2n-3}{n+1} \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Czy dla "dużych" n wyrazy tego ciągu wykazują jakąś prawidłowość?

Rozwiązanie. W tabeli poniżej przedstawione zostały wartości ciągu (b_n) dla wybranych n. (, zakładka b_n)

n	12	351	815	1 125	2 467	9 765	12 567	18 952	27 546	41 450	72 852	105 780
b_n	1,769231	1,991477	1,996324	1,997336	1,998784	1,999693	1,999761	1,999842	1,999891	1,999928	1,999959	1,999972

Tutaj obserwujemy, że wyrazy ciągu (b_n) "dla coraz większych" wskaźników n "leżą coraz bliżej" liczby 2. Wykres początkowych wyrazów ciągu (b_n) został przedstawiony na poniższym rysunku.



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 11. Wypisać początkowe wyrazy ciągu

$$c_n = (-1)^n \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Czy tutaj wyrazy wykazują jakąś prawidłowość? Czy ta prawidłowość jest tego samego typu, co w poprzednich przykładach?

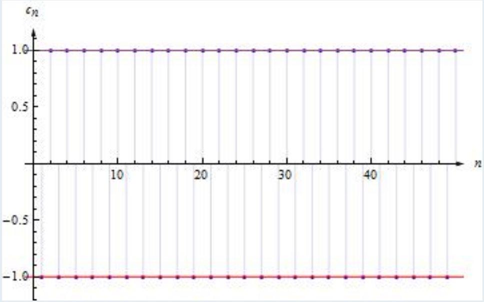
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. W tabeli poniżej przedstawiono wartości ciągu (c_n) dla początkowych n. (, zakładka c_n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
c_n	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Tutaj obserwujemy, że wyrazy ciągu (c_n) dla kolejnych n leżą naprzemiennie na prostych $y = -1$ oraz $y = 1$. Wykres początkowych wyrazów ciągu (c_n) został przedstawiony na poniższym rysunku.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Warto tutaj jeszcze przeanalizować następujący przykład.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 12. Wypisać początkowe wyrazy ciągu

$$d_n = \frac{n^2 + 2n}{n + 5} \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

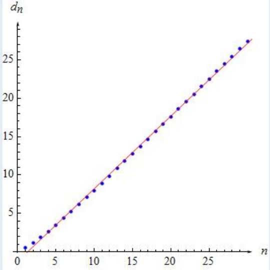
Czy tutaj wyrazy wykazują jakąś prawidłowość?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. W tabeli przedstawiono dla wybranych n wartości ciągu (d_n). (, zakładka d_n)

n	7	421	752	1 365	2 682	8 154	14 651	19 874	29 560	42 155	65 432	80 206
d_n	5,25	418,04	749,02	1 362,01	2 679,01	8 151,00	14 648,00	19 871,00	29 557,00	42 152,00	65 429,00	80 203,00

Tutaj wyrazy ciągu (d_n) nie "stabilizują się wokół" żadnej wartości. Można stwierdzić, że "**uciekają one do nieskończoności**". Wykres początkowych wyrazów ciągu (d_n) został przedstawiony rysunku.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

Nim przejdziemy do ścisłej definicji granicy ciągu spróbujemy jeszcze na przykładach sprecyzować potoczne sformułowania "dla coraz większych wskaźników" oraz "leżą coraz bliżej".

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 13. Ile początkowych wyrazów ciągu (a_n) z Ćwiczenia 9 należy odrzucić, aby pozostałe należały do przedziału

$$(-0,01; 0,01) = U(0; 0,01)?$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Wykorzystując wiadomości o opisie przedziału liczbowego przy użyciu wartości bezwzględnej, analizowany problem sprowadza się do wyznaczenia tych wskaźników n, dla których

$$a_n \in (0,01; 0,01) = U(0; 0,01) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < 0,01\}.$$

Rozwiązując nierówność

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0,01$$

w zbiorze liczb naturalnych otrzymamy jej rozwiązanie $n > 100$. Oznacza to, że po odrzuceniu początkowych 100 wyrazów, pozostałe (tj. "prawie wszystkie") leżą w przedziale $(-0,01; 0,01)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 4. Symulację numerycznego rozwiązanie tego ćwiczenia zawiera arkuszu programu *MS Excel* w pliku (zakładka a_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		n	g	ε	a_n	test		
3		1	0	0,01	1,000000000	NIE		

Komórka B3 zawiera ustaloną na 1 wartość wskaźnika n. W komórkach C3 i D3 ustawiono parametry opisujące przedział $(-0,01; 0,01)$ (środek $g = 0$, promień $\varepsilon = 0,01$). W komórce E3 wpisano formułę =1/B3 obliczającą wyraz ciągu (a_n) odpowiadający ustalonej w komórce B3 wartości n, zaś w F3 – formułę

=JEŻELI(MODUŁ.LICZBY(E3-C3)<D3;"TAK";"NIE")

sprawdzającą, czy dla ustalonego w komórce B3 wskaźnika n wyraz ciągu (a_n) spełnia nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Zmieniając wartość komórki B3 sprawdzimy, kiedy warunek testujący może dać TAK.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 14. Ile początkowych wyrazów ciągu (b_n) z Ćwiczenia 10 należy odrzucić, aby pozostałe należały do przedziału

$$(1,98;2,02)=U(2;0,02)?$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Postępując jak w rozwiązaniu poprzedniego ćwiczenia wyznaczymy wskaźniki n, dla których

$$b_n \in (1,98; 2,02) = U(2; 0,02) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 0,02\}.$$

Wykonując w nierówności

$$\left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| < 0,02$$

odejmowanie pod znakiem modułu otrzymamy $\left|\frac{-5}{n+1}\right| < 0,02$. Stąd $n > 249$, co oznacza, że odrzucając początkowe 249 wyrazów, pozostałe (tj. "prawie wszystkie") leżą w przedziale $(1,98; 2,02)$. Numeryczną symulację tego ćwiczenia zawiera plik (zakładka b_n).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 15. Modyfikując w pliku (zakładki a_n oraz b_n) wartości promieni ε (komórki D3) zbadać, czy dla tak zmodyfikowanych promieni ε potrafimy powiedzieć, ile początkowych wyrazów należy odrzucić, aby dla pozostałych funkcja testująca (komórka F3) dawała wartość TAK. Czy dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ wystarczy odrzucić skończenie wiele wyrazów, aby pozostałe spełniały warunek testujący?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Spróbuj odpowiedzieć teraz na następujące pytanie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 5. Czy dla ciągu (c_n) z Ćwiczenia 11 można znaleźć taki przedział otwarty długości 1, do którego należą "prawie wszystkie" wyrazy ciągu (c_n)?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Jeśli masz trudności z udzieleniem odpowiedzi na to pytanie, spróbuj przeanalizować wykres początkowych wyrazów tego ciągu zawarty w rozwiązaniu do Ćwiczenia 11.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Oczywiście taki przedział nie istnieje, gdyż odległość każdych dwóch kolejnych wyrazów ciągu (c_n) zawsze równa jest 2.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Po zbadaniu zachowań wybranych ciągów dla "dużych wskaźników" możemy przejść do precyzyjnego zdefiniowania pojęcia granicy ciągu. W tym celu dokonamy uściślenia obrazowych określeń: "dla coraz większych wskaźników", "leżą coraz bliżej", "stabilizują się wokół", "uciekają do nieskończoności", użytych przy opisie zachowań analizowanych ciągów.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 5. Wyjdziemy od następującej, "potocznej" definicji granicy ciągu, którą następnie zapiszemy symbolicznie. Symboliczny zapis jest bardziej użyteczny w uzasadnieniach, nie pokazuje jednak istoty definicji granicy ciągu.

Definicja 4. Mówimy, że **liczba rzeczywista g jest granicą ciągu** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli **dowolnie blisko g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n).

Inną, potoczną i równoważną definicję granicy ciągu można sformułować następująco.

Definicja 5. Mówimy, że **liczba rzeczywista g jest granicą ciągu** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli **w dowolnie małym otoczeniu liczby g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Precyzując intuicyjne sformułowania "dowolnie blisko", "w dowolnie małym otoczeniu" oraz "prawie wszystkie wyrazy ciągu", można podać następującą, formalną definicję granicy ciągu liczbowego.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 6. Mówimy, że **liczba rzeczywista g jest granicą ciągu** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (co zapisujemy $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ lub krótko $a_n \longrightarrow a$), jeśli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} |a_n - g| < \varepsilon. \tag{1}$$

Mówimy, że **ciąg** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **jest zbieżny**, jeśli ma (skończoną) granicę.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

Pokażemy teraz, jak potoczne definicje 4 oraz 5 zostały zamienione na symbolikę matematyczną.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 6. Sformułowaniom "**dowolnie blisko** g leżą wyrazy ciągu" z Definicji 4 oraz "**w dowolnie małym otoczeniu liczby** g leżą wyrazy ciągu" z Definicji 5 odpowiadają elementy warunku (1) zaznaczone kolorem czerwonym

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Wynika to z faktu, że nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ równoważna jest warunkowi $a_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon) = U(g;\varepsilon)$, zaś odległość dowolnej liczby z przedziału $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ od g jest mniejsza od ε.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 7. Poniżej, kolorem czerwonym zaznaczono fragmenty warunku (1) odpowiadające w obu Definicjach 4 oraz 5 sformułowaniu "leżą **prawie wszystkie** wyrazy ciągu "

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Istotnie, warunek zaznaczony na czerwono oznacza, że nierówności $|a_n - g| < \varepsilon$ mogą nie spełniać jedynie liczby zbioru $\{1, \ldots, N\}$, który jest zbiorem skończonym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pusta strona:

Uzasadnimy teraz, że zaobserwowane w Ćwiczeniach 9–11 oraz 13–14 prawidłowości pozwalają stwierdzić, że badane w tych ćwiczeniach ciągi mają granice.

Przykład 1. Uzasadnimy, że ciąg (a_n),

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{dla} \;\; n \in \mathbb{N},$$

jest zbieżny do liczby 0, tzn. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uzasadnienie. Ustalamy $\varepsilon > 0$. Znajdziemy takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

W tym celu rozważamy nierówność $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$, która (wobec dodatniości n) prowadzi do warunku $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Otrzymujemy więc $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (zauważmy, że $n > 0$, $\varepsilon > 0$) .
Przyjmijmy teraz $N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Jeśli $n \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $n > N$, to wtedy $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, więc $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Stąd $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, co należało uzasadnić.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2. Uzasadnimy, że ciąg (b_n),

$$b_n = \frac{2n-3}{n+1} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N},$$

ma granicę równą 2, tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uzasadnienie. Ustalamy $\varepsilon > 0$. Szukany takiego $N \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{2n-3}{n+1} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Wykonując odejmowanie pod znakiem wartości bezwzględnej otrzymamy $\left|\frac{-5}{n+1}\right| < \varepsilon$, co implikuje $\frac{5}{n+1} < \varepsilon$. Zatem $n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$.
Przyjmując $N := \left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$ dostaniemy, że dla takich $n \in \mathbb{N}$, że $n > N$, zachodzi $n > \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] > \frac{5}{\varepsilon} - 1$, więc $n + 1 > \frac{5}{\varepsilon}$, czyli $\frac{5}{n+1} < \varepsilon$. Wtedy

$$\left|\frac{2n-3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-5}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

co należało uzasadnić.

Na początku następnego:

W Ćwiczeniu 11 analizowany był przykład ciągu (c_n), dla którego nie można było wskazać liczby, wokół której "stabilizowały się" wartości tego ciągu dla "dużych" n. W myśl definicji 4–6 oznacza to, że ciąg ten nie ma granicy.

Przykład 3. Pokażemy, że ciąg

$$c_n = (-1)^n \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N},$$

nie ma granicy.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 8. Warunek (1) w Definicji 6 stwierdza, kiedy dany ciąg (a_n) ma granicę, tzn. kiedy istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$, która jest granicą tego ciągu. Dołączając do warunku (1) "istnienie spełniającej go liczby g", otrzymamy warunek definiujący zbieżność ciągu liczbowego:

$$\bigvee_{g\in\mathbb{R}} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N},n>N} |a_n - g| < \varepsilon. \tag{2}$$

Zatem ciąg (a_n) nie będzie miał granicy, jeśli spełniony będzie warunek będący zaprzeczeniem (2), tzn.

$$\bigwedge_{g\in\mathbb{R}} \bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{N\in\mathbb{N}} \bigvee_{n\in\mathbb{N},n>N} |a_n - g| \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uzasadnienie Przykładu 3. Wykorzystamy warunek (3) z Uwagi 8. Ustalmy dowolnie $g \in \mathbb{R}$ oraz niech $\varepsilon = 1$. Ustalmy dowolne $N \in \mathbb{N}$. Jeśli $g \geqslant 0$, to biorąc dowolną nieparzystą liczbę naturalną $n > N$, wobec nieujemności g otrzymamy

$$|(-1)^n - g| = |-1-g| = |1+g| = 1+g \geqslant 1.$$

Z drugiej strony, dla $g < 0$, biorąc dowolną parzystą liczbę naturalną $n > N$, wobec ujemności g otrzymamy

$$|(-1)^n - g| = |1-g| = |1+(-g)| = 1+(-g) \geqslant 1.$$

Zatem nie istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pusta strona:

Scharakteryzujemy jeszcze przypadek ciągu analizowanego w Ćwiczeniu 12. Co prawda wyrazy ciągu (d_n) nie skupiają się wokół żadnej liczby rzeczywistej, ale też nie zachowują się tak chaotycznie, jak wyrazy ciągu $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jak już zostało to zaobserwowane na podstawie wykresu ciągu (d_n), jego wyrazy "rosną nieograniczenie". Opiszemy teraz takie zachowanie w definicji.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 7. Mówimy, że **ciąg** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **jest rozbieżny do** $+\infty$ (**ma granicę** $+\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ lub krótko $a_n \longrightarrow +\infty$), jeśli

$$\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} a_n > M. \tag{4}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Nie badaliśmy tutaj przypadku takiego ciągu, którego wyrazy "maleją nieograniczenie". Przypadek taki zostanie opisany w kolejnej definicji.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 8. Mówimy, że **ciąg** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **jest rozbieżny do** $-\infty$ (**ma granicę** $-\infty$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$ lub krótko $a_n \longrightarrow -\infty$), jeśli

$$\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} a_n < M. \tag{5}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 9. Warunki (4)–(5) definiujące rozbieżność, odpowiednio do $+\infty$ oraz $-\infty$ można równoważnie zapisać w postaci

$$\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} a_n \in (M, +\infty),$$

$$\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n>N} a_n \in (-\infty, M).$$

Przedziały $(M, +\infty)$ i $(-\infty, M)$ dla $M \in \mathbb{R}$ można traktować jako, odpowiednio, "otoczenie $+\infty$" oraz "otoczenie $-\infty$". Stąd Definicje 7 oraz 8 można równoważnie sformułować następująco:

Definicja 9. Mówimy, że $+\infty$ [odpowiednio, $-\infty$] **jest granicą ciągu** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeśli **w każdym otoczeniu** $+\infty$ [odpowiednio, $-\infty$] **leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Uzasadnimy teraz na podstawie Definicji 7, że ciąg z Ćwiczenia 12 ma granicę równą $+\infty$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4. Udowodnimy, że ciąg (d_n),

$$d_n = \frac{n^2 + 2n}{n + 5} \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N},$$

ma granicę równą $+\infty$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{5n+1} = +\infty$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód–1 sposób. Ustalmy $M \in \mathbb{R}$. Szukamy takiego $N \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{n^2+2n}{n+5} > M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Wykonując szacowanie można zaobserwować, że

$$\frac{n^2+2n}{5n+1} = \frac{n^2+5n}{n+5} + \frac{-3n}{n+5} = n + \frac{-3n-15}{n+5} + \frac{15}{n+5} > n - 3.$$

Niech $N := \max\{1, [M]+4\}$. Wówczas dla $n > N$ mamy $n-3 > [M]+1 > M$. Z powyższego oszacowania wynika

$$\frac{n^2+2n}{n+5} > n - 3 > M,$$

co należało uzasadnić. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód–2 sposób. Ustalmy $M \in \mathbb{R}$. Szukamy takiego $N \in \mathbb{N}$, że

$$\frac{n^2+2n}{n+5} > M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Musimy więc wyznaczyć takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$n^2 + (2 - M)n - 5M > 0 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N. \tag{6}$$

Jeśli $\Delta = M^2 + 6M + 4 < 0$, to (6) jest spełnione z $N = 1$. Stąd dla $n > N = 1$ mamy $\frac{n^2+2n}{n+5} > M$. Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to (6) zachodzi z $N = \max\left\{1, \left[\frac{M-2+\sqrt{M^2+6M+4}}{2}\right] + 1\right\}$. Dla $n > N$ mamy więc

$$n > \left[\frac{M-2+\sqrt{M^2+6M+4}}{2}\right] + 1 > \frac{M-2+\sqrt{M^2+6M+4}}{2},$$

a wtedy $\frac{n^2+2n}{n+5} > M$, co należało uzasadnić. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Spróbuj teraz samodzielnie wykonać następujące zadanie.

Zadanie 3. Wykorzystując definicje 6, 7 oraz 8 uzasadnić, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2},$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{n+3} = -1.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3) = +\infty,$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-5n) = -\infty,$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0,$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

N przykładach mogłeś już zaobserwować, że dowodzenie dla zadanego ciągu jego zbieżności do pewnej granicy nie jest proste, tym bardziej, że przed takim dowodem należy odkryć, do jakiej granicy zadany ciąg jest zbieżny. W wyznaczaniu granic ciągów pomocne są wtedy prawa dotyczące operacji arytmetycznych na ciągach i ich granicach. Z kolei, w obliczaniu granic ciągów niezwykle istotna jest znajomość granic pewnych "bazowych" ciągów. Przytoczymy teraz i udowodnimy lemat dotyczący granic takich właśnie ciągów.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 3.

(i) Ciąg stały, $a_n = c$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*, ma granicę* c*.*

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

(ii) Ciąg $a_n = n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *ma granicę* ∞*, tj.*

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód.
(i) Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i niech $N = 1$. Wówczas dla $n > N = 1$ mamy

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon,$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.
(ii) Ustalmy dowolnie $M \in \mathbb{R}$ i niech $N = \max\{1, [M] + 1\}$. Wówczas dla $n > N$ mamy

$$n > [M] + 1 > M$$

więc $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

W definicji granicy ciągu "leżenie blisko granicy" opisane jest poprzez wartość bezwzględną różnicy. W dowodach granic niezwykle pomocne będą więc własności modułu liczby rzeczywistej opisane w następującym lemacie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 4. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych* a, b *i dla nieujemnych liczb rzeczywistych* α, β *zachodzą następujące własności:*

(i) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

(ii) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a - b|$, *więc w szczególności* $|a| - |b| \leqslant |a - b|$;

(iii) $(|a| \leqslant \alpha \ \wedge \ |b| \leqslant \beta) \Longrightarrow |a + b| \leqslant \alpha + \beta$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (i). Zauważmy, że z definicji wartości bezwzględnej wynika

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a| \quad \text{oraz} \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Dodając powyższe nierówności stronami otrzymamy

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|,$$

skąd wynika $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (ii). Ponieważ $a = (a - b) + b$, więc wykorzystując udowodnioną własność (i) otrzymamy

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

więc $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Podobnie, $b = (b - a) + a$, więc

$$|b| = |(b - a) + a| \leqslant |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

skąd wynika $|b| - |a| = -(|a| - |b|) \leqslant |a - b|$. Mamy więc

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \quad \text{oraz} \quad -(|a| - |b|) \leqslant |a - b|,$$

co implikuje $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a - b|$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii). Zauważmy, że z udowodnionej już własności (i) otrzymamy

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \leqslant \alpha + \beta.$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Nim sformułujemy i udowodnimy twierdzenia opisujące arytmetykę granic, wykażemy pewną istotną własność ciągów zbieżnych do skończonej granicy. W tym celu potrzebna będzie następująca definicja.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 10. Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym**, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista $M > 0$, że

$$|a_n| \leqslant M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Sformułujemy i udowodnimy teraz ważną własność ciągów zbieżnych.

Twierdzenie 1. *Każdy ciąg liczbowy zbieżny do skończonej granicy jest ograniczony.*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Niech $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$. Z definicji granicy ciągu, dla $\varepsilon = 1$ istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a| < 1 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Wówczas, z Lematu 4 (ii) wynika, że $|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a| < 1$, więc

$$|a_n| < 1 + |a| \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Niech $M := \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$. Wtedy

$$|a_n| \leqslant \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\} = M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

co oznacza, że (a_n) jest ciągiem ograniczonym. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Udowodnimy dalej twierdzenie opisujące arytmetyczne własności skończonych granic ciągów.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2. *Niech ciągi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą zbieżne do skończonych granic, odpowiednio* a *oraz* b. *Wówczas zachodzą następujące prawa:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

(iii) jeśli $b_n\neq 0$ *dla* $n\in\mathbb{N}$ *oraz* $b\neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (i). Ustalamy $\varepsilon > 0$ dowolnie. Ponieważ $a_n \longrightarrow a$ oraz $b_n \longrightarrow b$, więc istnieją takie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \textbf{dla}\ \ n \in \mathbb{N}, n > N_1,$$

$$|b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \textbf{dla}\ \ n \in \mathbb{N}, n > N_2.$$

Z lematu 4 (i) wynika, że dla $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ zachodzi

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

co oznacza, że $a_n + b_n \longrightarrow a + b$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (ii). Ustalamy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, z Twierdzenia 1 wynika, że istnieje takie $M > 0$, że $|a_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dalej, $a_n \longrightarrow a$ oraz $b_n \longrightarrow b$, więc istnieją takie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{M+|b|} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n > N_1,$$
$$|b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{M+|b|} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n > N_2.$$

Z Lematu 4 (i) wynika, że dla $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ zachodzi

$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< M \cdot \tfrac{\varepsilon}{M+|b|} + |b| \cdot \tfrac{\varepsilon}{M+|b|} = \varepsilon,\end{aligned}$$

co oznacza, że $a_nb_n \longrightarrow ab$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii). Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, więc

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \textbf{dla} \ \ n \in \mathbb{N}, n > N_1,$$

dla pewnego $N_1 \in \mathbb{N}$. Z Lematu 4 (ii) wynika wtedy $|b| - |b_n| \leqslant |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$, więc $|b_n| > \frac{|b|}{2}$. Stąd $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ dla $n > N_1$. Zbieżność $b_n \longrightarrow b \in \mathbb{R}$ implikuje, że istnieje takie $N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon |b|^2}{2} \quad \textbf{dla} \ \ n \in \mathbb{N}, n > N_2.$$

Stąd, dla $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot |b_n|} = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{|b_n|} \cdot |b - b_n| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon,$$

czyli $\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$. To kończy dowód Twierdzenia 2. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Możemy teraz sformułować jeszcze wnioski płynące z Twierdzenia 2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 1. *Niech ciągi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą zbieżne do skończonych granic, odpowiednio* a *oraz* b. *Wówczas:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(iii) jeśli $b_n \neq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $b \neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód.

(i) Z Lematu 3 (i) oraz z Twierdzenia 2 (i),(ii) otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)\cdot b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n + \Big(\lim_{n\to\infty}(-1)\Big)\cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a + (-1)\cdot b = a - b.$$

(ii) Podobnie z Lematu 3 (i) oraz z Twierdzenia 2 (ii),(iii) wynika

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} = a\cdot\frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

$\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Wykorzystując Przykład 1, indukcję matematyczną oraz Twierdzenie 2 (ii) można udowodnić następujący lemat. Indukcyjny dowód tego faktu (względem p) pozostawiamy jako ćwiczenie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 5. *Ustalmy dowolnie liczbę naturalną p. Ciąg $a_n = \frac{1}{n^p}$ dla $n \in \mathbb{N}$ ma granicę 0, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

Zatem, dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n^p} = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 10. Z Lematu 5 wynika w szczególności, że ciągi $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $\left(\frac{1}{n^{97}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., mają granicę równą 0.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Pokażemy teraz, jak wykorzystując Twierdzenie 2, Wniosek 1 oraz Lematy 3 (i) oraz 5 obliczać granice ciągów.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5. Obliczymy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5n-8}{3n^2-2n+1}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Granicy tej nie można obliczyć stosując wprost Twierdzenie 2 oraz Wniosek 1. O tym, dlaczego tak jest, powiemy później, gdy przeanalizujemy arytmetykę na granicach ciągów zbieżnych do nieskończoności.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Metodą wyłączania przed nawias sprowadzimy rachunki do granicy obliczonej w Lemacie 5, a następnie zastosujemy Twierdzenie 2 oraz Wniosek 1. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n-8}{3n^2-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{5}{n}-\frac{8}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}-\frac{8}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Ponieważ (Lemat 5) $2 \longrightarrow 2$ $\frac{5}{n} \longrightarrow 0$, $\frac{8}{n^2} \longrightarrow 0$, $3 \longrightarrow 3$ $\frac{2}{n} \longrightarrow 0$ oraz $\frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, więc wykorzystując Twierdzenie 2 oraz Wniosek 1 otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n-8}{3n^2-2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{5}{n}-\frac{8}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0-0}{3-0+0}=\frac{2}{3}.$$

Na początku następnego:

Prześledzimy jeszcze jeden przykład.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6. Obliczymy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 7n + 4}{n^3 + 4n^2 - 1}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Będziemy postępować analogicznie jak w Przykładzie 5.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Zauważamy, że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+4}{n^3+4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3-\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{3-\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}}.$$

Ponieważ (Lemat 5) $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$, $3\longrightarrow 3$, $\frac{7}{n}\longrightarrow 0$, $\frac{4}{n^2}\longrightarrow 0$, $1\longrightarrow 1$, $\frac{4}{n}\longrightarrow 0$ oraz $\frac{1}{n^3}\longrightarrow 0$, więc wykorzystując Twierdzenie 2 oraz Wniosek 1 otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+4}{n^3+4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{3-\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}}\right) = 0\cdot\frac{3-0+0}{1+0-0} = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Proponujemy teraz, aby, wykorzystując opisaną w Przykładach 5-6 metodę, samodzielnie obliczyć następujące granice.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+3}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+1}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3}{(4n-1)(2-2n)(n+5)}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2-n+1}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Podamy jedynie odpowiedzi do tego zadania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

a) 2,

b) 0,

c) $-\frac{3}{8}$,

d) $\frac{1}{3}$,

e) 1,

f) $\frac{1}{2}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

Przeanalizujemy teraz arytmetykę zbieżności dla granic dopuszczając symbole $-\infty$ oraz $+\infty$. W tym celu wprowadzimy pojęcia ograniczoności ciągu z dołu i ograniczoności ciągu z góry.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 11. Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z dołu**, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista L, że

$$a_n \geqslant L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Definicja 12. Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry**, jeśli istnieje taka liczba rzeczywista L, że

$$a_n \leqslant L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 11. Zauważmy początek, że ograniczony ciąg (a_n) jest jednocześnie ograniczony z góry i z dołu. Wynika to stąd, że ograniczoność ciągu (a_n) (por. Definicja 10) jest równoważna warunkowi

$$-M \leqslant a_n \leqslant M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Jednocześnie, ograniczoność z dołu i z góry implikują łącznie ograniczoność. Istotnie, jeśli

$$a_n \geqslant L_1 \text{ oraz } a_n \leqslant L_2 \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

to przyjmując $L := \max\{|L_1|, |L_2|\}$ otrzymamy

$$|a_n| \leqslant L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Wykażemy teraz pewien lemat istotny w dalszych badaniach nad zbieżnościami.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 6.

(i) *Każdy ciąg zbieżny do* $+\infty$ *jest ograniczony z dołu.*

(ii) *Każdy ciąg zbieżny do* $-\infty$ *jest ograniczony z góry.*

(iii) *Każdy ciąg zbieżny do skończonej granicy jest ograniczony z dołu i z góry.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód.

(i) Niech $a_n \longrightarrow +\infty$. Z definicji wynika, że

$$a_n > M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N,$$

dla pewnego $N \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$a_n \geqslant \min\{a_1, \ldots, a_N, M\} =: L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

co oznacza, że ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu.

(ii) Dowód tej własności pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

(iii) Z Twierdzenia 1 wynika, że ciąg zbieżny jest ograniczony, co na podstawie Uwagi 11 oznacza, że jest ograniczony jednocześnie z dołu i z góry. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Analizę arytmetyki zbieżności ”na nieskończonościach” rozpoczniemy od następujących dwóch lematów.

Lemat 7. *Niech* (a_n) *oraz* (b_n) *będą ciągami.*

(i) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *oraz ciąg* (b_n) *jest ograniczony z dołu, to*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

(ii) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *oraz ciąg* (b_n) *jest ograniczony z góry, to*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

(iii) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Udowodnimy jedynie pierwszy podpunkt Lematu 7. Pozostałe punkty pozostawiamy jako ćwiczenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (i). Niech $M \in \mathbb{R}$ będzie dowolne. Ponieważ ciąg b_n jest ograniczony z dołu, więc istnieje takie $L \in \mathbb{R}$, że

$$b_n \geqslant L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Jednocześnie $a_n \longrightarrow +\infty$, więc istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$a_n > M - L \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Wtedy

$$a_n + b_n > (M - L) + L = M \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}, n > N,$$

więc $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 8. *Niech* (a_n) *oraz* (b_n) *będą ciągami.*

(i) Jeśli $a_n \geqslant c$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ *z pewnymi* $N_1 \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty.$$

(ii) Jeśli $a_n \geqslant c$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ *z pewnymi* $N_1 \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty.$$

(iii) Jeśli ciąg a_n *jest ograniczony oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Udowodnimy tutaj własności (i) oraz (iii). Drugą z własności, dowodzoną podobnie jak pierwszą, pozostawimy jako proste ćwiczenie.

Dowód (i). Ustalamy dowolnie $M \in \mathbb{R}$. Niech $a_n \geqslant c$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ z pewnymi $N_1 \in \mathbb{N}$ oraz $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Ponieważ $b_n \longrightarrow +\infty$, więc istnieje takie $N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$b_n > \frac{M}{c} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n > N_2.$$

Wówczas, dla $N := \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$a_n b_n > c \cdot \frac{M}{c} = M \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n > N,$$

co oznacza, że $a_n b_n \longrightarrow 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii). Ustalamy dowolnie $\varepsilon > 0$. Niech $|a_n| \leqslant M$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n > N_1$ z pewnymi $N_1 \in \mathbb{N}$ oraz $M > 0$. Ponieważ $|b_n| \longrightarrow +\infty$, więc istnieje takie $N_2 \in \mathbb{N}$, że

$$|b_n| > \frac{M}{\varepsilon} \quad \text{dla } \ n \in \mathbb{N}, n > N_2.$$

Wówczas, dla $N := \max\{N_1, N_2\}$ mamy

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} = |a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \text{dla } \ n \in \mathbb{N}, n > N,$$

co oznacza, że $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

Rozszerzymy teraz Twierdzenie 2 na przypadek zbieżności do "nieskończoności". W tym celu wprowadzimy pojęcie rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych i określimy dopuszczalne działania arytmetyczne na elementach tego zbioru.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 13. **Rozszerzonym zbiorem liczb rzeczywistych** nazywamy zbiór

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

ze zwykłymi przemiennymi działaniami dodawania i mnożenia zakładając dodatkowo, że:

$$\begin{array}{llll}
a + (+\infty) = +\infty & \textbf{oraz} \;\; a - (+\infty) = -\infty & \textbf{dla} & a \in \mathbb{R}, \\
a + (-\infty) = -\infty & \textbf{oraz} \;\; a - (-\infty) = +\infty & \textbf{dla} & a \in \mathbb{R}, \\
a \cdot (+\infty) = +\infty & \textbf{oraz} \;\; a \cdot (-\infty) = -\infty & \textbf{dla} & a \in \mathbb{R}, a > 0, \\
a \cdot (+\infty) = -\infty & \textbf{oraz} \;\; a \cdot (-\infty) = +\infty & \textbf{dla} & a \in \mathbb{R}, a < 0, \\
\dfrac{a}{+\infty} = \dfrac{a}{-\infty} = 0 & & \textbf{dla} & a \in \mathbb{R}, \\
\multicolumn{4}{l}{(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \;\; \textbf{oraz} \;\; (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.}
\end{array}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 12. Za **symbole nieoznaczone** (**operacje niedopuszczalne**) przyjmujemy

$$(+\infty)+(-\infty),\ (+\infty)-(+\infty),$$

$$0\cdot(\pm\infty),\ \frac{0}{0},\ \frac{a}{0},\ \frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)},$$

$$0^0,\ 0^{(\pm\infty)},\ 1^{(\pm\infty)}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Możemy teraz sformułować i udowodnić twierdzenie opisujące operacje arytmetyczne na granicach ciągów.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 3. *Niech ciągi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *będą zbieżne do (skończonych będź nieskończonych) granic, odpowiednio* a *oraz* b. *Wówczas (o ile nie prowadzi to do symboli nieoznaczonych) zachodzą następujące prawa:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

(iv) jeśli $b_n\neq 0$ *dla* $n\in\mathbb{N}$ *oraz* $b\neq 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:
Dowody w każdym z podpunktów sprowadzają się do zbadania odpowiednich przypadków w zależności od granic a, b. Ponieważ przypadek skończonych granic został udowodniony w Twierdzeniu 2, udowodnimy Twierdzenie 3 dla pozostałych przypadków.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (i). Rozpatrzymy kolejno następujące przypadki:

$a \in \mathbb{R}, b = \pm\infty$ - z Twierdzenia 1 wynika, że ciąg (a_n) zbieżny do skończonej granicy jest ograniczony. Dla $b = +\infty$ Lemat 7 (i) implikuje $(a_n + b_n) \longrightarrow +\infty = a + b$, zaś dla $b = -\infty$ z Lematu 7 (ii) wynika $(a_n + b_n) \longrightarrow -\infty = a + b$.

$a = b = +\infty$ **lub** $a = b = -\infty$ - z Lematu 6 wynika, że dla $a = +\infty$ ciąg (a_n) zbieżny do $+\infty$ jest ograniczony z dołu, więc z Lematu 7 (i) wynika $(a_n + b_n) \longrightarrow +\infty = a + b$. Dla $a = -\infty$ ciąg (a_n) zbieżny do $-\infty$ jest ograniczony z góry, więc z Lematu 7 (ii) otrzymamy $(a_n + b_n) \longrightarrow +\infty = a + b$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii). Rozpatrzymy kolejno przypadki:

$a \in \mathbb{R}, a > 0, b = \pm\infty$ - ponieważ $a_n \longrightarrow a > 0$, więc istnieje takie $N_1 \in \mathbb{N}$, że $|a_n - a| < \frac{a}{2}$ dla $n > N_1$. Stąd $a_n - a > -\frac{a}{2}$, czyli $a_n > \frac{a}{2}$ dla $n > N_1$. Dla $b = +\infty$, wykorzystując Lemat 8 (i) otrzymamy $a_n b_n \longrightarrow +\infty = ab$, zaś dla $b = -\infty$, z Lematu 8 (ii) wynika $a_n b_n \longrightarrow -\infty = ab$.

$a = +\infty, b = \pm\infty$ - ponieważ $a_n \longrightarrow +\infty$, więc istnieje takie $N_1 \in \mathbb{N}$, że $a_n > 1$ dla $n > N_1$. Jeśli $b_n \longrightarrow +\infty$, to z Lematu 8 (i) otrzymamy $a_n b_n \longrightarrow +\infty = ab$, zaś dla $b_n \longrightarrow -\infty$, Lemat 8 (ii) implikuje $a_n b_n \longrightarrow -\infty = ab$.

$a \in \mathbb{R}, a < 0, b = \pm\infty$ **lub** $a = -\infty, b = -\infty$ - wystarczy zauważyć, że na podstawie rozważonych już przypadków mamy $a_n b_n = (-a_n) \cdot (-b_n) \longrightarrow (-a) \cdot (-b) = ab$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (ii). Zauważmy, że o ile tylko działania w zbiorze $\overline{\mathbb{R}}$ nie prowadzą do symboli nieoznaczonych, to wykorzystując udowodnione już własności otrzymamy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)\cdot b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} a_n + \left(\lim_{n\to\infty}(-1)\right)\cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a + (-1)\cdot b = a - b.\end{aligned}$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iv). Rozważymy następujące przypadki:

$a \in \mathbb{R}, b = \pm\infty$ - ponieważ $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$, więc z Twierdzenia 1 wynika, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Ponadto $|b_n| \longrightarrow +\infty$, więc z Lematu 8 (iii) otrzymamy $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0 = \frac{a}{b}$.

$a = \pm\infty, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - wykorzystując udowodnioną już własność (iii) otrzymamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

To kończy dowód twierdzenia. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Nim przejdziemy do przeanalizowania konkretnych zastosowań Twierdzenia 3 zauważmy, że stosując indukcję matematyczną, Lemat 3 (ii) oraz Twierdzenie 3 (iii) można udowodnić następujący pożyteczny wniosek. Dowód tego wniosku pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 2. *Ustalmy dowolnie liczbę naturalną p. Ciąg $a_n = n^p$ dla $n \in \mathbb{N}$ ma granicę $+\infty$, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} n^p = +\infty.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 13. Z Wniosku 2 wynika w szczególności, że ciągi $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(n^{61})_{n\in\mathbb{N}}$, ..., mają granicę równą $+\infty$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Przeanalizujemy teraz kolejne przykłady granic obliczanych z wykorzystaniem Twierdzenia 3 oraz Wniosku 2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 7. Wyznaczymy granicę $\lim_{n\to\infty}(n^3-2n-1)$.

Rozwiązanie. Postąpimy następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2n-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot\left(1-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right).$$

Zauważmy, że $1\longrightarrow 1$, $\frac{2}{n^2}\longrightarrow 0$ oraz $\frac{1}{n^3}\longrightarrow 0$. Ponadto, z Wniosku 2 otrzymamy $n^3\longrightarrow +\infty$, więc

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2n-1\right)\\&\qquad=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot\left(1-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=+\infty\cdot(1-0-0)=+\infty.\end{aligned}$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Obliczymy jeszcze następującą granicę.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 8. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-4n+2}{3-2n}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Postąpimy podobnie, jak w Przykładach 5-6:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+2}{3-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\frac{3}{n}-2\right)}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}-2}.$$

Zauważmy, że $1\longrightarrow 1$, $\frac{4}{n}\longrightarrow 0$, $\frac{2}{n^2}\longrightarrow 0$, $\frac{3}{n}\longrightarrow 0$ oraz $2\longrightarrow 2$. Ponadto $n\longrightarrow +\infty$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+2}{3-2n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n}-2}$$

$$=+\infty\cdot\frac{1-0+0}{0-2}=+\infty\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\infty.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pusta strona:

Nim przejdziemy do zadań wyjaśnimy na przykładach, dlaczego za symbole nieoznaczone przyjęto operacje w $\overline{\mathbb{R}}$ wymienione w Uwadze 12 i dlaczego tym samym nie można w tych przypadkach bezpośrednio stosować Twierdzenia 3. Zaznaczmy wyraźnie, że w wymienionych w Uwadze 12 przypadkach nie można stosować Twierdzenia, a granice należy badać dla takiego ciągu indywidualnie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przypadki: $(+\infty) - (+\infty), (+\infty) + (-\infty)$. Niech

$$\begin{array}{ll} a_n = n \longrightarrow +\infty & b_n = n \longrightarrow +\infty \\ a_n' = n + 1 \longrightarrow +\infty & b_n' = n \longrightarrow +\infty. \end{array}$$

Wówczas

$$a_n - b_n = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad a_n' - b_n' = 1 \longrightarrow 1.$$

Zatem w pierwszym przypadku nie można bezpośrednio zastosować Twierdzenia 3 (ii). Aby uzasadnić, że nie można stosować Twierdzenia 3 (i), w drugim przypadku wystarczy w powyższym przykładzie przyjąć

$$b_n = b_n' = -n \longrightarrow +\infty,$$

a wtedy

$$a_n + b_n = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad a_n' + b_n' = 1 \longrightarrow 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przypadki: $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Przyjmijmy

$$a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad b_n = n \longrightarrow +\infty$$
$$a_n' = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad b_n' = n^2 \longrightarrow +\infty.$$

Wówczas

$$a_n b_n = 1 \longrightarrow 1 \quad \text{oraz} \quad a_n' b_n' = n \longrightarrow +\infty.$$

Stąd w pierwszym przypadku nie można bezpośrednio zastosować Twierdzenia 3 (iii). Podobnie, dla własności (iv) w Twierdzenia 3, w drugim przypadku wystarczy przyjąć w powyższym przykładadzie

$$a_n = a_n' = n \longrightarrow +\infty,$$

i wówczas

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 \longrightarrow 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_n'}{b_n'} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przypadki: $\frac{a}{0}, \frac{0}{0}$. Niech $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ oraz

$$a_n = a \longrightarrow a \quad b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$
$$a'_n = a \longrightarrow a \quad b'_n = -\frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Wtedy

$$\frac{a_n}{b_n} = an \longrightarrow +\infty \quad \text{oraz} \quad \frac{a'_n}{b'_n} = -an \longrightarrow -\infty,$$

co uzasadnia, że w pierwszym przypadku nie można bezpośrednio zastosować Twierdzenia 3 (iv). Nie można tego zrobić również w drugim przypadku, gdyż w powyższym przykładzie należy przyjąć

$$a_n = a'_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

a wtedy

$$\frac{a_n}{b_n} = 0 \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad a' + n - b'_n = 1 \longrightarrow 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Proponujemy teraz, aby, wykorzystując opisaną w Przykładach 7-8 metodę, samodzielnie obliczyć następujące granice.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 5. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-7n+4}{3-2n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-2n)^2$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n-1)^2}{n+2}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-3n)^3$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-1)(3-2n)(4+n)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Podamy odpowiedzi do tego zadania.

Odp.

a) $-\infty$,

b) $+\infty$,

c) $+\infty$,

d) $+\infty$,

e) $-\infty$,

f) $-\infty$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Pokażemy teraz pewną metodę obliczania granic opartą na szacowaniu. Wyjdziemy od następującego lematu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Lemat 9. *Jeśli ciąg* (c_n) *o wyrazach nieujemnych (*$c_n \geqslant 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*) jest zbieżny (do skończonej granicy), to* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \geqslant 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Niech $c_n \longrightarrow c$ i przypuśćmy, że $c < 0$. Wtedy $-c > 0$, więc z definicji granicy ciągu znajdziemy takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|c_n - c| < -c \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, n > N.$$

W szczególności mamy $c_{N+1} - a < -a$, co oznacza, że $c_{N+1} < 0$. Otrzymana sprzeczność z założeniem dowodzi, że $c \geqslant 0$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Jako wniosek otrzymamy

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 3. *Załóżmy, że dla ciągów* (a_n) *oraz* (b_n) *zachodzi nierówność*

$$a_n \leqslant b_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

(i) Jeśli ciągi (a_n), (b_n) *są zbieżne (do skończonej granicy), to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *to ciąg* (b_n) *jest rozbieżny do* $+\infty$, *tzn.* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 14. We Wniosku 3 wystarczy założyć, że nierówność (7) zachodzi dla $n > N$ z pewnym $N \in \mathbb{N}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód Wniosku 3.

(i) Niech $c_n = b_n - a_n$. Z założenia wynika, że $c_n \geqslant 0$. Wówczas, wykorzystując Twierdzenie 2 (ii) oraz Lemat 9 dostaniemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} c_n \geqslant 0,$$

czyli $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.

(ii) Ponieważ $a_n \longrightarrow +\infty$, więc dla dowolnie ustalonego $M \in \mathbb{R}$, wykorzystując zakładaną nierówność otrzymamy

$$M < a_n \leqslant b_n \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N}, n > N,$$

z pewnym $N \in \mathbb{N}$. Zatem $b_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Udowodnimy teraz twierdzenie, które pozwala obliczać granice ciągów w oparciu o pewne oszacowania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 4 (**twierdzenie o trzech ciągach**). *Załóżmy, że ciągi* (a_n), (b_n) *oraz* (c_n) *spełniają nierówność*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \quad \textit{dla} \ n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Jeśli ciągi (a_n) *oraz* (c_n) *są zbieżne (do skończonych granic) oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, *to ciąg* (b_n) *jest zbieżny i zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 15. W Twierdzeniu 4, podobnie jak we Wniosku 3, wystarczy założyć, że nierówność (8) zachodzi dla $n > N$ z pewnym $N \in \mathbb{N}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód Twierdzenia 4. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Ponieważ $a_n \longrightarrow g \longleftarrow c_n$, więc istnieją takie $N \in \mathbb{N}$, że

$$|a_n - g| < \varepsilon \ \text{ oraz } \ |c_n - g| < \varepsilon \quad \text{dla } \ n \in \mathbb{N}, n > N.$$

Stąd $a_n - g > -\varepsilon$ oraz $c_n - g < \varepsilon$. Wykorzystując nierówność (8) otrzymamy wtedy

$$-\varepsilon < a_n - g \leqslant b_n - g \leqslant c_n - g < \varepsilon.$$

Zatem $|c_n - g| < \varepsilon$ dla $n > N$, więc $b_n \longrightarrow g$. $\square$

Na początku następnego:

Jak prosty wniosek z Twierdzenia 4 otrzymamy:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 4. *Jeśli* (a_n) *jest taki ciągiem, że* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Zauważmy, że

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n| \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ zaś $\lim_{n\to\infty}(-|a_n|) = 0 = \lim_{n\to\infty}|a_n|$, więc z Twierdzenia 4 wynika natychmiast $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Pokażemy teraz przykłady zastosowań Twierdzenia 4 i Wniosku 4.

Przykład 9. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2+3} \cos\left(\frac{n^2+1}{n+4}\right)$.

Rozwiązanie. Funkcja $\cos$ jest funkcją ograniczoną. Zatem

$$\left|\cos\left(\frac{n^2+1}{n+4}\right)\right| \leqslant 1 \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponadto

$$0 \leqslant \left|\frac{n-1}{2n^2+3}\cos\left(\frac{n^2+1}{n+4}\right)\right| \leqslant \frac{n-1}{2n^2+3} \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $0 \longrightarrow 0$ oraz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}} = 0\cdot\frac{1-0}{2+0} = 0,$$

więc z Twierdzenia 4 otrzymamy $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{2n^2+3}\cos\left(\frac{n^2+1}{n+4}\right)\right| = 0$. Wówczas z Wniosku 3 wynika $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n^2+3}\cos\left(\frac{n^2+1}{n+4}\right) = 0$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Przed analizą drugiego przykładu zacytujemy bez dowodu następujący lemat.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 10.

(i) Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 10. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$5^n \leqslant 2^n + 3^n + 5^n \leqslant 5^n + 5^n + 5^n = 3 \cdot 5^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd

$$5 = \sqrt[n]{2^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \leqslant \sqrt[n]{3 \cdot 5^n} = 5\sqrt[n]{3} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ $5 \longrightarrow 5$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 5 \cdot 1 = 5,$$

więc z Twierdzenia 4 otrzymamy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} = 5$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Proponujemy jeszcze, wykorzystując twierdzenie o trzech ciągach, obliczyć następujące granice.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 6. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} \sin(4n-2)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^3+3} \cos(n!)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 7 \cdot 6^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n}{n} + 3n}$,

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Jeśli nie wiesz, jak rozwiązać te zadania, proponujemy rozważyć następujące oszacowania:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wskazówki.

a) $0 \leqslant \left|\frac{3n-2}{n^2+1}\sin(4n-2)\right| \leqslant \frac{3n-2}{n^2+1}$,

b) $0 \leqslant \left|\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+3}\cos(n!)\right| \leqslant \frac{1+2+\ldots+n}{n^3+3}$,

c) $0 \leqslant 2\cdot 3^n \leqslant 2\cdot 6^n$,

d) $0 \leqslant 2\cdot 3^n \leqslant 2\cdot 5^n$, więc

$$2\cdot 5^n = 4\cdot 5^n - 2\cdot 5^n \leqslant 4\cdot 5^n - 2\cdot 3^n \leqslant 4\cdot 5^n,$$

e) $-n \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant n$, więc

$$2n = -n + 3n \leqslant \frac{(-1)^n}{n} + 3n \leqslant 4n.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Podamy teraz odpowiedzi do tego zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) 0,

b) 0,

c) 6,

d) 5,

e) 1.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Zbadamy na koniec pewne ciągi mające zastosowanie w praktyce. Pierwszym z analizowanych ciągów będzie ciąg geometryczny o ilorazie q. W tym dowodzie granicy ciągu geometrycznego wykorzystamy nierówność Bernoulli'ego, której prosty dowód indukcyjny pozostawimy jako ćwiczenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 11 (nierówność Bernulli'ego). *Dla dowolnej liczby rzeczywistej* $c \geqslant -1$ *oraz dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi nierówność*

$$(1+c)^n \geqslant 1+nc.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 5. *Niech q będzie liczbą rzeczywistą.*

(i) Jeśli $q > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

(ii) Jeśli $q = 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

(iii) Jeśli $|q| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

(iv) Jeśli $q \leqslant -1$, to ciąg $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozbieżny (tzn. nie jest zbieżny do żadnej liczby rzeczywistej i nie jest rozbieżny ani do $+\infty$ ani do $-\infty$).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (i). Niech $c = q - 1$. Wtedy $c > 0$ oraz $nc \longrightarrow +\infty$. Ponadto, z Lematu 11 wynika

$$q^n = (1+c)^n \geqslant 1 + nc.$$

Wykorzystując Wniosek 3 (ii) otrzymamy wtedy $q^n \longrightarrow +\infty$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód (ii). Oczywiście $1^n = 1 \longrightarrow 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iii). Dla $q = 0$ dowodzona własność jest oczywista. Załóżmy więc, że $q \neq 0$. Wówczas $\frac{1}{|q|} > 1$, więc z udowodnionej własności (i) mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{q}\right|^n = +\infty.$$

Wykorzystując Lemat 8 (iii) otrzymamy wtedy

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód (iv). Przypadek $q = -1$ został rozważony w Przykładzie 3. Zauważmy dalej, że dla $q < -1$ mamy $|q| > 1$, więc $|q|^n \longrightarrow +\infty$. Na koniec,

$$q^n = (-1)^n \cdot |q|^n,$$

więc w ciągu $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ występują na przemian, wyrazy dowolnie duże i wyrazy dowolnie małe. Oznacza to, że ciąg $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie może być zbieżny do żadnej liczby rzeczywistej i nie może być rozbieżny ani do $+\infty$ ani do $-\infty$. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Zbadamy na koniec przypadek ciągu niezmiernie ważnego z punktu widzenia ekonomii. W tym celu rozważymy problem częstości kapitalizacji przy lokacie bankowej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 6. Dla uproszczenia przyjmiemy (chodzi o istotę problemu, a nie o sam wynik, który uogólnimy), że inwestujemy kwotę $K = 1$ na okres $N = 1$ roku przy oprocentowaniu rocznym (nierealne!) $r = 100\%$. Stąd końcowa wartość inwestycji jest równa

$$FV = 1 \cdot (1 + 100\%) = 1 \cdot (1 + 1) = 2.$$

Załóżmy, że wynegocjujemy w banku (przy niezmienionym oprocentowaniu) kapitalizację półroczną. Da to końcową wartość inwestycji

$$FV = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{2}\right)^2 = 1 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4} = 2,25.$$

W kapitalizacji kwartalnej otrzymamy

$$FV = 1 \cdot \left(1 + \frac{100\%}{4}\right)^4 = 1 \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^4 = \tfrac{625}{256} \approx 2,44.$$

Czy można wynegocjować tak częstą kapitalizację (np. dzienną lub co sekundę!), aby końcowa wartość inwestycji wyniosła 100?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Odpowiedź na tak postawione pytanie sprowadza się do zbadania zachowania ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{dla} \ n \in \mathbb{N}.$$

Spróbuj przeanalizować zachowanie ciągu (a_n) wykonując obliczenia na kalkulatorze, lub wykorzystaj przygotowany w tym celu plik w arkuszu programu *MS Excel*.

kapitalizacja miesięczna -

n	a_n
12	2,61303529

kapitalizacja dzienna -

n	a_n
365	2,71456748

kapitalizacja godzinna -

n	a_n
8760	2,71812669

kapitalizacja sekundowa -

n	a_n
31536000	2,71828178

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 16. Dowodzi się, że każdy ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny. O ciągu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ można pokazać (co wcale nie jest łatwe!), że spełnia wspomniane własności. Można więc sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Ciąg*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \textit{dla} \; n \in \mathbb{N},$$

ma skończoną granicę, którą oznacza się symbolem e, *tzn.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Uwaga 17. O liczbie e (oznaczonej tak po raz pierwszy przez niemieckiego matematyka Leonarda Eulera) udowodniono, że nie jest liczbą wymierną. Pokazuje się (co jest o wiele trudniejsze), że nie jest też ona liczbą algebraiczną, tj. liczba e nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Aby numerycznie wyznaczyć przybliżoną wartość liczby e wykazano, że

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Stosując powyższą równość można wyznaczyć liczbę e z dowolną żądaną dokładnością. Dla przykładu

$$e \approx 2,71828\ 18284\ 59045.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp (Problem 6). Jeśli wynegocjowalibyśmy kapitalizację nieskończenie częstą, to inwestując kwotę $K = 1$ na okres $N = 1$ roku przy oprocentowaniu $r = 100\%$, końcowa wartość inwestycji nie przekroczy $2,72$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Obliczymy teraz granicę następującego ciągu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 11. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Dalej mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ponadto, $\frac{1}{n-1} \longrightarrow 0$, więc $\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

W dalszej kolejności przytoczymy bez dowodu twierdzenie ogólniejsze od Twierdzenia 6.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 7.

(i) *Niech* (a_n) *będzie takim rosnącym ciągiem o wyrazach dodatnich, że* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

(ii) *Niech* (a_n) *będzie takim malejącym ciągiem o wyrazach dodatnich, że* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Rozwiążemy na koniec następujący problem z dziedziny ekonomii.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 7. Powróćmy do analizowanego już wcześniej Problemu 6. Załóżmy, że inwestujemy teraz pewną kwotę K_0 na okres $N = 1$ roku przy rocznej stopie procentowej r. Jaka będzie końcowa wartość inwestycji przy założeniu "nieskończenie częstej" kapitalizacji?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 18. Kapitalizację, o której mowa w Problemie 7 nazywamy **kapitalizacją ciągłą**.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Analizując powtórnie Problem 6 można zauważyć, że rozwiązanie Problemu 7 sprowadza się do obliczenia granicy $\lim_{n\to\infty}\left(K_0\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)$. Można łatwo sprawdzić, że ciąg $\left(\frac{r}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest dla $r>0$ ciągiem rosnącym, $\frac{r}{n}\longrightarrow+\infty$ oraz $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\longrightarrow e$. Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left(K_0\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)=K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}\cdot r}$$
$$=K_0\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r=K_0\cdot e^r,$$

gdyż na mocy Twierdzenia 7 (i) mamy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}=e$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp (Problem 7). Inwestując kwotę K_0 na okres $N = 1$ roku przy rocznej stopie procentowej $r = 100\%$, końcowa wartość inwestycji przy kapitalizacji ciągłej wyniesie K_0e^r.

Na początku następnego:

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Pytanie 1. Zbiór rozwiązań nierówności $|x+2| < \frac{1}{3}$ jest przedziałem

(a) $[-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}]$,

(b) $(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$

(c) $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}]$,

(d) $(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3})$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 2. Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których odległość od liczby -1 jest mniejsza niż $\frac{2}{5}$ można opisać nierównością

(a) $|x-1| < \frac{2}{5}$,

(b) $|x-1| \leqslant \frac{2}{5}$,

(c) $|x+1| \leqslant \frac{2}{5}$,

(d) $|x+1| < \frac{2}{5}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 3. Liczba g jest granicą ciągu (a_n) jeśli

(a) dowolnie blisko g leżą wszystkie wyrazy ciągu (a_n),

(b) blisko g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n),

(c) dowolnie blisko g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n),

(d) dowolnie blisko g leży nieskończenie wiele wyrazów ciągu (a_n).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 4. Ciąg $(-1)^{n^2-1}$ jest

(a) zbieżny do 1,

(b) zbieżny do -1,

(c) rozbieżny do $-\infty$ (ma granicę $-\infty$),

(d) rozbieżny.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 5. Spośród operacji w rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych $\overline{\mathbb{R}}$ nieoznaczona jest

(a) $(+\infty) - (+\infty)$,

(b) $(+\infty) - (-\infty)$,

(c) $(-\infty) + (-\infty)$,

(d) $(+\infty) + (+\infty)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 6. Spośród operacji w rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych $\overline{\mathbb{R}}$ nieoznaczona jest

(a) $(+\infty) \cdot 0$,

(b) $(+\infty) \cdot a$, $a \neq 0$,

(c) $(+\infty) \cdot (+\infty)$,

(d) $(+\infty) \cdot (-\infty)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 7. Ciąg $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ jest

(a) zbieżny do 1,

(b) zbieżny do 0,

(c) rozbieżny do $+\infty$ (ma granicę $+\infty$),

(d) rozbieżny.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 8. Ciąg $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ jest

(a) zbieżny do 1 dla $p \in \mathbb{N}$,

(b) rozbieżny do $+\infty$ dla $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$,

(c) zbieżny do 0 dla $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$,

(d) zbieżny do 0 dla $p \in \mathbb{N}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 9. Ciąg $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ ma granicę

(a) e,

(b) e^2,

(c) $2e$,

(d) $\sqrt{e}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 10. ciąg $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do

(a) 1,

(b) $\frac{1}{3}$,

(c) $\frac{1}{2}$,

(d) 0.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Klucz odpowiedzi:

1(b), 2(d), 3(c), 4(d), 5(b), 6(a), 7(a), 8(c), 9(b), 10(c).