E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Indukcja matematyczna

Materiały merytoryczne do kursu

****************na każdej stronie śmieszne kostki domina********************

"Między duchem a materią pośredniczy matematyka".
HUGO STEINHAUS.

W ramach tego kursu poznamy metodę sprawdzania, czy ogólny wniosek wyciągnięty na podstawie kilku przypadków jest prawdziwy. Ta metoda rozumowania nazywa się zasadą indukcji matematycznej. Obok kilku rozwiązanych przykładów jest kilka propozycji zadań dla przećwiczenia nowo poznanej zasady przypominającej "zasadę domina".

CIEKAWOSTKA

Nieskończoność i googol.

Od początku historii ludzie borykali się z problemami nieskończoności. Próby opanowania pojęcia nieskończoności zaczęły się już w starożytnej Grecji, w szkole pitagorejskiej, w której słusznie przyjmowano, że nieskończoność to jest coś, czemu nie można przypisać żadnej wielkości. W czasach Platona, problem ten zapoczątkował teorię przestrzeni, czasu i nieskończoności. Później pojęcie nieskończoności w matematyce uzyskało sens precyzyjny i nie wydaje się już nieprzejrzyste. Ma ono nawet swój symbol: rodzaj położonej ósemki, zwanej także lemniskatą. Został on wprowadzony do konwencji graficznej matematyki stosunkowo niedawno - zawdzięczamy go angielskiemu matematykowi Johnowi Wallisowi, który użył go po raz pierwszy w 1655 r.

$$\infty$$

Amerykański matematyk - Edward Kasner, chcąc zaprezentować swojemu siostrzeńcowi wielkie liczby, wynalazł pewnego razu googol, liczbę równą 10^{100}, a więc jedynkę ze stoma zerami:

$$1 googol = 10^{100}$$

***************rys1-indukcje*************************

Hasło: długopis

1 Pojęcie Indukcji Matematycznej

Indukcja matematyczna będzie przez nas używana jako metoda dowodzenia twierdzeń. Zazwyczaj są to twierdzenia dotyczące liczb naturalnych, ale - jak się jeszcze wielokrotnie przekonamy - wiele różnych twierdzeń, pozornie nie dotyczących liczb naturalnych, można sformułować tak, by można było je poddać dowodowi indukcyjnemu.

Zasada Indukcji Matematycznej
Jeśli T(n) oznacza pewne twierdzenie mówiące o liczbach naturalnych n, to aby udowodnić, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 (samo n_0 może być równe 1 albo być inną ustaloną liczbą naturalną), wystarczy

dowieść, że:

1. Baza indukcji: zachodzi $T(n_0)$.

2. Założenie indukcyjne: twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej $n \geqslant n_0$, czyli zachodzi $T(n)$.

Teza indukcyjna: jest ono prawdziwe dla następnej liczby naturalnej n + 1, czyli zachodzi $T(n+1)$.

Chodzi bowiem o to, aby wykazać,

$$\forall_{n \geqslant n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1).$$

Często używaną ilustracją indukcji matematycznej jest efekt domina. Załóżmy, że ułożyliśmy bardzo dużo kostek domina, jedna za drugą. Upewniliśmy się też, że jeśli przewróci się dowolna z nich (założenie indukcyjne) to przewróci się też następna (krok indukcyjny). Wtedy, jeśli ktoś nam powie, że przewrócił czwartą kostkę (baza indukcji) to wiemy, iż wszystkie następne (poza być może pierwszymi trzema) też się przewróciły. W indukcji matematycznej liczby naturalne są niejako kostkami domina ułożonymi dostatecznie blisko siebie.

***************rys upadajacego domina*******************

PRZYKŁAD

Przeprowadzimy dowód indukcyjny, że dla dowolnego $n \geqslant 3$ mamy

$$2n + 1 < 2^n.$$

Sprawdzamy dla n=3:

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$$

oraz przy założeniu: $2n + 1 < 2^n$ pokażemy, że $2(n + 1) + 1 < 2^{n+1}$.

$2(n+1)+1 = 2n+3 < 2^n+4 = 2^n+2^2 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, czyli, że badana nierówność jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej większej od 2.

PRZYKŁAD

Aby się przekonać, że dla $n \geqslant 5$ mamy

$$n^2 < 2^n.$$

Zauważamy, że dla n=5 nierówność jest prawdziwa

$$5^2 = 25 < 2^5 = 32$$

oraz przy założeniu indukcyjnym: $n^2 < 2^n$ i z poprzedniego przykładu mamy

$$(n+1)^2 = n^2 + (2n+1) < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$

czyli, że badana nierówność $n^2 < 2^n$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej większej od 4.

PRZYKŁAD. NIERÓWNOŚĆ BERNOULLIEGO

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $a > -1$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

1. Baza:

$$(1+a)^1 = 1 + a \geqslant 1 + a,$$

2. Z założenia indukcyjnego $(1+a)^n \geqslant 1+na$, poprzez wymnożenie stronami przez nieujemną liczbę rzeczywistą $1+a$, dostajemy tezę indukcyjną:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 \geqslant 1+(1+n)a.$$

Zatem na mocy indukcji matematycznej nierówność $(1+a)^n \geqslant 1+na$ jest prawdziwe dla dowolnej liczby naturalnej.

***************rys2-indukcje*************************

Hasło: nierówności

PRZYKŁAD

Jako kolejny przykład dowiedziemy, że dla każdej liczby naturalnej prawdziwa jest równość $1 + 3 + 5 + ...(2n - 1) = n^2$.

1. Sprawdzamy czy twierdzenie jest prawdziwe dla $n_0 = 1$.
$L = 1 = P$. Czyli równość jest prawdziwa.

2. Założenie indukcyjne: $1 + 3 + 5 + ...(2n - 1) = n^2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

3. Teza indukcyjna: $1 + 3 + 5 + ...(2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$ dla następnej liczby naturalnej po n, czyli n+1.
Dowód: Z założenia indukcyjnego mamy:
$1 + 3 + 5 + ...(2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$
(na podstawie wzoru skróconego mnożenia).

W ten sposób dowiedliśmy na podstawie zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej spełniona jest równość $1+3+5+...(2n-1) = n^2$.

PRZYKŁAD

Teraz udowodnijmy, że $1+2+3+...n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla n=1:
$L = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = P$.
Teraz stworzymy odpowiednie założenie indukcyjne:
$1+2+3+...n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Pokażemy, że skoro dla n jest prawdziwe to będzie prawdziwe także dla n + 1.
Najpierw sformułujemy tezę indukcyjną:
$1+2+3+...n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Dowód tezy indukcyjnej:

$$1+2+3+...n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Czyli L = P.
Ponieważ stwierdziliśmy, że wzór jest prawdziwy dla n = 1, a także z prawdziwości wzoru dla n wynika prawdziwość wzoru dla n + 1, więc dzięki zasadzie indukcji matematycznej rozważany wzór jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej.

Zasadę indukcji matematycznej możemy także stosować w zadaniach z podzielnością.

PRZYKŁAD

Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi:

$$2|n^2 + n,$$

gdzie $a|b$, gdy istnieje liczba naturalna c taka, że $ac = b$ dla $a, b \in \mathbb{N}$.

Baza indukcji: dla $n = 1$ mamy $2|2$ oraz dla $n = 2$ mamy $2|6$.

Założenie indukcyjne: dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $2|n^2 + n$.

Teza indukcyjna: $2|(n + 1)^2 + n + 1$.

Dowód.

$$(n+1)^2+n+1 = (n+1)[(n+1)+1] = (n+1)(n+2) = n(n+1)+2(n+1).$$

Z założenia indukcyjnego $n(n + 1)$ podzielne jest przez 2 i $2(n + 1)$ jest podzielne przez 2, czyli $2|(n + 1)^2 + n + 1$.

Zatem dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$2|n^2 + n.$$

W kolejnym przykładzie będziemy używać silni:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \ \ dla \ \ n \in \mathbb{N}.$$

PRZYKŁAD

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n mamy:

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + n \cdot (n+2) \cdot (n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1.$$

1. Sprawdzamy wzór dla n=1:

$$L = 1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 = 3 = [(1+1)!]^2 - 1 = P.$$

2. Zakładamy, że wzór jest prawdziwy dla pewnego $n \in \mathbb{N}$:
$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + n \cdot (n+2) \cdot (n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1.$
3. Korzystając z założenia wykazujemy, że jest prawdziwy dla $n+1$:
$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + (n+1) \cdot (n+1+2) \cdot ((n+1)!)^2 = [(n+1+1)!]^2 - 1.$
Dowód:

$$L = 1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + (n+1) \cdot (n+1+2) \cdot ((n+1)!)^2 =$$

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + n \cdot (n+2) \cdot (n!)^2 + (n+1) \cdot (n+1+2) \cdot ((n+1)!)^2 =$$

z założenia indukcyjnego

$$= [(n+1)!]^2 - 1 + (n+1) \cdot (n+1+2) \cdot ((n+1)!)^2 =$$

$$[(n+1)!]^2(1 + (n+1) \cdot (n+1+2)) - 1 = [(n+1)!]^2(1 + n^2 + 3n + n + 3) - 1 =$$
$$[(n+1)!]^2(n^2 + 4n + 4) - 1 = [(n+1)!]^2(n+2)^2 - 1 =$$
$$[(n+1)!(n+2)]^2 - 1 = [(n+2)!]^2 - 1 = P.$$

Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej dla każdej liczby naturalnej n mamy:

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + ... + n \cdot (n+2) \cdot (n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1.$$

PRZYKŁAD

Pokażemy, że o ile tylko $n \geqslant 2$, to liczba postaci 2^{2^n} ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6.
Oznacza to, że $2^{2^n} = 10x + 6$ dla pewnej liczby naturalnej x.

1. Dla $n = 2$ mamy $2^{2^2} = 16 = 10 \cdot 1 + 6$,

2. Przy założeniu $2^{2^n} = 10x + 6$ wykażemy dla pewnej liczby naturalnej z:

$$2^{2^{n+1}} = 10z + 6.$$

Dowód:

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^{2^n})^2 = (10x+6)^2 = 100x^2+120x+36 = 10(10x^2+12x+3)+6.$$

Zatem dla $n \geqslant 2$ liczba postaci 2^{2^n} ma na końcu w zapisie dziesiętnym cyfrę 6.

Zadania:

Zadanie 1. Udowodnij, że:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ...n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 5$ prawdziwa jest nierówność:

$$2^n > n^2 + n - 1.$$

Zadanie 3. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n mamy

$$2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Test:

Zadanie 1. Sprawdź czy prawdą jest że dla $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}.$$

a) tak, b) nie

odp. a)

Zadanie 2. Sprawdź czy prawdą jest że dla $n \in \mathbb{N}$:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^3.$$

a) tak, b) nie

odp. b)

Zadanie 3. Sprawdź czy prawdą jest że dla $n \in \mathbb{N}$ liczba

$$n^3 + 2n$$

jest podzielna przez 3.

a) tak, b) nie

odp. a)

Zadanie 4. Sprawdź czy prawdą jest że dla $n \in \mathbb{N}$ liczba

$$7^n - 1$$

jest podzielna przez 4.

a) tak, b) nie

odp. b)

LITERATURA:

1. Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, część I, PWN, Warszawa 1999.

2. Karpiński M., Dobrowolska M., Braun M., Lech J., Matematyka I, Podręcznik dla liceum i technikum, Wersja dla nauczyciela, Gdańskie Wyd. Oświat., Gdańsk 2003.

3. Pawłowski H., Matematyka I, Zbiór zadań dla liceum i technikum, OPERON, Gdynia 2007.