Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Geometria analityczna

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z tytułem:

Powstanie geometrii analitycznej jako działu matematyki oparte jest na pomyśle przypisania każdemu punktowi płaszczyzny pary liczb zwanej współrzędnymi tego punktu. Takie przyporządkowanie umożliwia powiązanie tworów geometrycznych takich jak proste, okręgi czy też inne krzywe, z odpowiadającymi im zależnościami między współrzędnymi punktów tych tworów. Mimo, iż pomysł wprowadzenia układu współrzędnych przypisuje się Kartezjuszowi, to prekursorem metody współrzędnych w geometrii był Fermat, który pierwszy opisał równaniami algebraicznymi proste i krzywe powstałe z przecięcia płaszczyznami powierzchni stożka.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

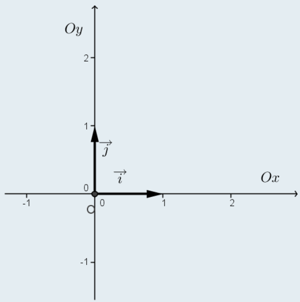
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przyjmiemy, że użytkownik tego kursu zaznajomiony jest z podstawowymi pojęciami geometrii płaskiej i rozróżnia pojęcia wektora zaczepionego i wektora swobodnego. Na początku zajmiemy się analitycznym opisem wektora w układzie współrzędnych. Aby to uczynić, musimy powiedzieć, czym jest układ współrzędnych na płaszczyźnie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 1. **Prostokątnym układem współrzędnych** na płaszczyźnie nazywamy parę wzajemnie prostopadłych wektorów jednostkowych (**wersorów**) $\overrightarrow{i}$ oraz $\overrightarrow{i}$ zaczepionych w punkcie O będącym **początkiem układu współrzędnych**. Proste wyznaczone przez wersory $\overrightarrow{i}$ oraz $\overrightarrow{i}$ traktować będziemy jak osie liczbowe i nazywamy **osiami układu współrzędnych**. Oś wyznaczoną przez $\overrightarrow{i}$ oznaczymy Ox, zaś oś wyznaczoną przez $\overrightarrow{j}$ – Oy.



Z następnym:

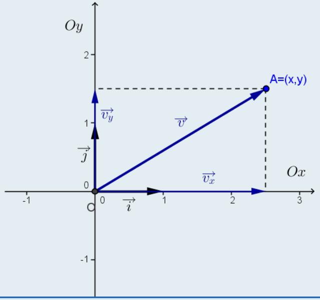
Narzędzia geometrii analitycznej nie pozwalają na analityczny opis w układzie współrzędnych wektora zaczepionego, ale jednoznacznie można opisać każdy wektor swobodny. Takie analityczne przedstawienie wektora swobodnego pozwala opisać za pomocą wzorów operacje dodawania wektorów swobodnych oraz mnożenia tych wektorów przez liczby.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 1. *Każdy wektor swobodny $\overrightarrow{v}$, którego reprezentantem jest wektor zaczepiony $\overrightarrow{OA}$, można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_x + \overrightarrow{v}_y = x \cdot \overrightarrow{i} + y \cdot \overrightarrow{j}, \tag{1}$$

gdzie $\overrightarrow{v}_x$ oraz $\overrightarrow{v}_y$ są rzutami prostokątnymi wektora $\overrightarrow{v}$ na osie, odpowiednio, Ox oraz Ox.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 2. Liczby x oraz y z przedstawienia (1) wektora $\overrightarrow{v}$ nazywamy **współrzędnymi wektora** $\overrightarrow{v}$ i zapisujemy wtedy

$$\overrightarrow{v} = [x, y].$$

Uwaga 1. Liczby x oraz y z przedstawienia (1) wektora $\overrightarrow{v}$ są zarazem współrzędnymi punktu A. Oczywiście wersory $\overrightarrow{i}$ oraz $\overrightarrow{j}$ mają współrzędne równe, odpowiednio,

$$\overrightarrow{i} = [1, 0] \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{j} = [0, 1].$$

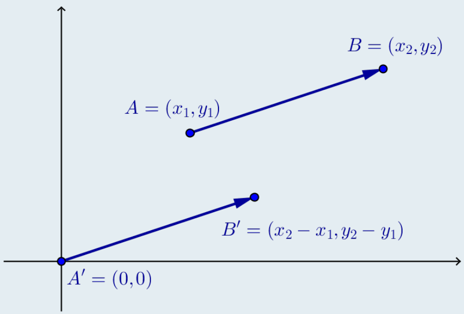
Zbiór wszystkich wektorów swobodnych na płaszczyźnie oznaczymy symbolem $\mathbb{R}^2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 2. Zauważmy, że wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$ o początku w punkcie $A = (x_1, y_1)$ i końcu w punkcie $B = (x_2, y_2)$ ma współrzędne

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1].$$

Wynika to z faktu, że wektory swobodne $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{A'B'}$, gdzie $A' = (0,0)$ oraz $B' = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ są równe.



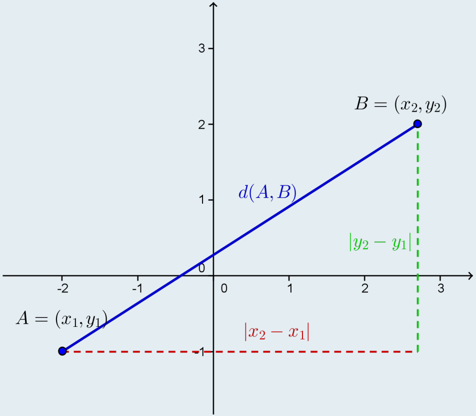
Z następnym:

Przypomnimy jeszcze, w jaki sposób mierzy się odległość w układzie współrzędnych. Uzasadnienie tego twierdzenia zawarte jest w zaprezentowanym poniżej rysunku.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2. *Odległość* $d(A, B)$ *punktów* $A = (x_1, y_1)$ *oraz* $B = (x_2, y_2)$ *jest równa*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

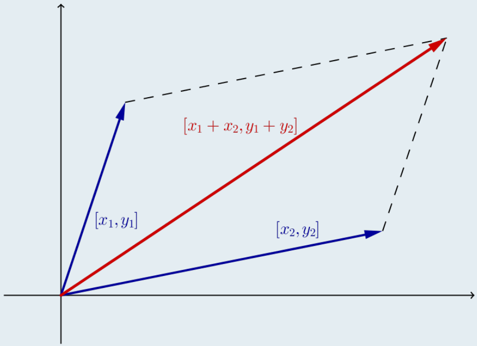
Z następnym:

Na wektorach swobodnych opisanych poprzez ich współrzędne wprowadza się działania dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez liczby tak, aby były one zgodne z geometryczną metodą sumowania wektorów i mnożenia ich przez skalary.

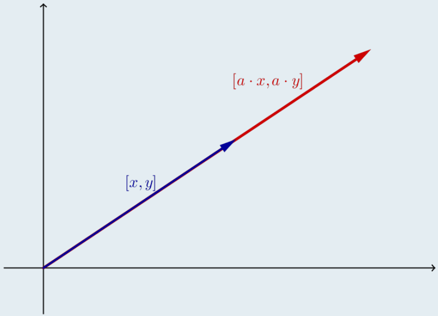
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 3. W zbiorze $\mathbb{R}^2$ wszystkich wektorów swobodnych na płaszczyźnie wprowadza się działania **dodawania wektorów** oraz **mnożenia wektorów przez liczbę rzeczywistą** w następujący sposób: jeśli $\overrightarrow{v}_1 = [x_1, y_1]$, $\overrightarrow{v}_2 = [x_2, y_2]$ oraz $a \in \mathbb{R}$, to

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 &= [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2], \\ a \cdot \overrightarrow{v}_1 &= a \cdot [x_1, y_1] = [a \cdot x_1, a \cdot y_2]. \end{aligned} \tag{2}$$



$[x_1 + x_2, y_1 + y_2]$
$[x_1, y_1]$
$[x_2, y_2]$



$[a \cdot x, a \cdot y]$
$[x, y]$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 3. W matematyce wyższej dowodzi się, że tak wprowadzone działania nadają zbiorowi wszystkich wektorów swobodnych na płaszczyźnie strukturę przestrzeni wektorowej. W szczególności

(i) $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_2, y_2] + [x_1, y_1]$,

(ii) $([x_1, y_1] + [x_2, y_2]) + [x_3, y_3] = [x_1, y_1] + ([x_2, y_2] + [x_3, y_3])$.

Wektor $\overrightarrow{0} = [0, 0]$ spełnia $[x, y] + [0, 0] = [x, y]$, zaś dla każdego $\overrightarrow{v} = [x, y]$ znajdziemy $-\overrightarrow{v} = [-x, -y]$ taki, że $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = [x, y] + [-x, -y] = [0, 0]$. Na koniec

(iii) $a \cdot ([x_1, y_1] + [x_2, y_2]) = a \cdot [x_1, y_1] + a \cdot [x_2, y_2]$,

(iv) $(a + b) \cdot [x, y] = a \cdot [x, y] + b \cdot [x, y]$,

(v) $a \cdot (b \cdot [x, y]) = (a \cdot b) \cdot [x, y]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Wzorując się na rozwiązaniu poprzedniego przykładu udowodnimy następujące twierdzenie:

Z następnym:

Opiszemy teraz analitycznie operację przesunięcia punktu o zadany wektor swobodny.

Problem 1. Czy potrafisz powiedzieć, jakie współrzędne będzie miał obraz punktu (x_0, y_0) w przesunięciu o zadany wektor $[x, y]$?

Na końcu poprzedniego:

Przypomnij definicję operacji przesunięcia na płaszczyźnie o zadany wektor. Jaka jest zależność pomiędzy punktem, jego obrazem i wektorem, o który dokonujemy przesunięcia?

Rozwiązanie. Oczywiście wektor swobodny $[x, y]$ musi mieć takie same współrzędne, jak wektor zaczepiony o początku w punkcie (x_0, y_0) i końcu w punkcie będącym obrazem punktu (x_0, y_0) w przesunięciu o wektor $[x, y]$. Zatem obraz (x_1, y_1) punktu (x_0, y_0) musi spełniać warunek

$$(x_1 - x_0, y_1 - x_0) = [x, y].$$

Na końcu poprzedniego:

Otrzymujemy zatem:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 3. *Niech będzie dany punkt* $A = (x_0, y_0)$ *oraz wektor* $\overrightarrow{v} = [x, y]$. *Obrazem punktu* A *w przesunięciu o wektor* $\overrightarrow{v}$ *jest punkt* B, *który ma współrzędne* $B = (x_0 + x, y_0 + y)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Wprowadzimy teraz kolejną operację na punktach i wektorach swobodnych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 4. Na uporządkowanych parach $((x_0, y_0), [x, y])$ definiujemy operację $\dot{+}$ **przesunięcia punktu** (x_0, y_0) **o wektor** $[x, y]$, której wynikiem jest punkt $(x_0 + x, y_0 + y)$, opisaną równością

$$(x_0, y_0) \dot{+} [x, y] = (x_0 + x, y_0 + y).$$

Uwaga 4. Zapis $[x, y] \dot{+} (x_0, y_0)$ jest niepoprawny i nie ma żadnego sensu matematycznego. Kolejność zapisu $(x_0, y_0) \dot{+} [x, y]$ uwzględnia jej geometryczny sens zaczepienia w punkcie (x_0, y_0) wektora swobodnego $[x, y]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Z klasycznej geometrii znamy pojęcie iloczynu skalarnego wektorów. Przypomnimy je, a następnie podamy analityczny opis tej operacji na wektorach swobodnych.

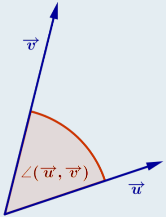
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 5. Jeśli $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$ są niezerowymi wektorami, to iloczynem skalarnym wektorów $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$ nazywamy liczbę $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$ określoną równością

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos(\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})),$$

gdzie $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ jest miarą kąta między wektorami $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$.
Jeśli $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ lub $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, to przyjmujemy

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Tak zdefiniowany iloczyn skalarny ma następujące własności:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 4. *Dla dowolnych wektorów* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ *oraz dla dowolnej liczby* $a \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

(i) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$,

(ii) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w}$,

(iii) $(a \cdot \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{v} = a \cdot (\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v})$,

(iv) $(\overrightarrow{u})^2 = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$,

(v) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + 2 \cdot (\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}) + |\overrightarrow{v}|^2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Z definicji iloczynu skalarnego otrzymamy

Wniosek 1. *Dwa niezerowe wektory* $\overrightarrow{u}$ *oraz* $\overrightarrow{v}$ *są wzajemnie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy* $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$*. W szczególności, dla wersorów* $\overrightarrow{i}$ *oraz* $\overrightarrow{i}$ *mamy* $\overrightarrow{i} \circ \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \circ \overrightarrow{i} = 0$.

Z następnym:

Opiszemy teraz iloczyn skalarny wektorów w zależności od jego współrzędnych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 5. *Jeśli* $\overrightarrow{u} = [x_1, y_1]$ *oraz* $\overrightarrow{v} = [x_2, y_2]$, *to*

$$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Podamy teraz proste uzasadnienie tego twierdzenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Przedstawmy wektory $\overrightarrow{u} = [x_1, y_1]$ oraz $\overrightarrow{v} = [x_2, y_2]$ jako kombinacje wersorów. Mamy zatem

$$\overrightarrow{u} = [x_1, y_1] = x_1 \cdot \overrightarrow{i} + y_1 \cdot \overrightarrow{j} \text{ oraz } \overrightarrow{v} = [x_2, y_2] = x_2 \cdot \overrightarrow{i} + y_2 \cdot \overrightarrow{j}.$$

Wtedy, wykorzystując własności iloczynu skalarnego otrzymamy

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} &= (x_1 \cdot \overrightarrow{i} + y_1 \cdot \overrightarrow{j}) \circ (x_2 \cdot \overrightarrow{i} + y_2 \cdot \overrightarrow{j}) \\
&= (x_1 \cdot x_2) \cdot \overrightarrow{i} \circ \overrightarrow{j} + (x_1 \cdot y_2) \cdot \overrightarrow{i} \circ \overrightarrow{j} \\
&\quad + (x_2 \cdot y_1) \cdot \overrightarrow{j} \circ \overrightarrow{i} + (x_2 \cdot y_2) \cdot \overrightarrow{j} \circ \overrightarrow{j} \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot 1 + x_1 \cdot y_2 \cdot 0 + x_2 \cdot y_1 \cdot 0 + x_2 \cdot y_2 \cdot 1 \\
&= x_1 x_2 + y_1 y_2.
\end{aligned}$$

□

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Z twierdzeń 4 oraz 5 wynika w szczególności:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 2. *Jeśli* $\overrightarrow{u} = [x, y]$, *to*

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Wykorzystamy poznane wiadomości do wyznaczenia miary kąta między wektorami.

Przykład 1. Wyznaczyć miarę kąta między wektorami $\overrightarrow{u} = [1, -3]$ oraz $\overrightarrow{v} = [4, -2]$

Rozwiązanie. Wykorzystamy definicję iloczynu skalarnego oraz twierdzenie opisujące iloczyn skalarny w zależności od współrzędnych wektorów. Z jednej strony mamy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\circ\overrightarrow{v} &= |\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))\\ &= \sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}))\\ &= \sqrt{10}\cdot\sqrt{20}\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})) = 10\sqrt{2}\cdot\cos(\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})).\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\overrightarrow{u}\circ\overrightarrow{v} = 1\cdot 4+(-3)\cdot(-2) = 10.$$

Porównując otrzymane wartości mamy

$$\cos(\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

więc $\angle(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{4}$.

Twierdzenie 6. *Jeśli* $\overrightarrow{u_1} = [x_1, y_1]$ *oraz* $\overrightarrow{u_2} = [x_2, y_2]$ *są niezerowymi wektorami oraz* $\alpha = \angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ *jest miarą kąta między tymi wektorami, to*

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

Dowód. Pierwsza z równości jest konsekwencją definicji iloczynu skalarnego i Twierdzenia 7. Istotnie, mamy

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \overrightarrow{u_1} \circ \overrightarrow{u_2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,\cos\alpha.$$

Ponadto,

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right)^2$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-\left(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2\right)}{\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2} = \frac{x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2x_2^2}{\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right)^2,$$

co wobec $\sin\alpha > 0$ oznacza, że $\sin\alpha = \frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$. □

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Opiszemy teraz analitycznie środek odcinka o zadanych końcach. Spróbujmy zatem rozwiązać następujący problem.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

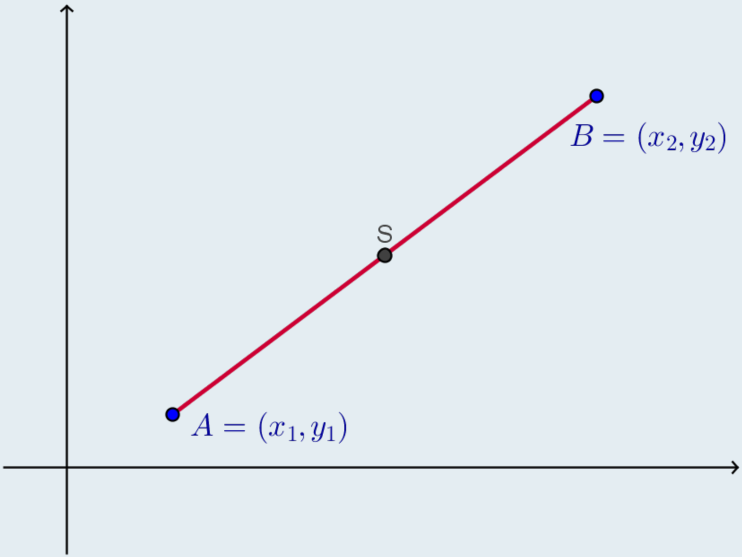
Problem 2. Wyznaczyć środek odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Wykonajmy rysunek:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie



$B = (x_2, y_2)$
S
$A = (x_1, y_1)$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Być może znasz już odpowiedź. Czy potrafisz ją uzasadnić? Udowodnimy zatem następujące twierdzenie:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

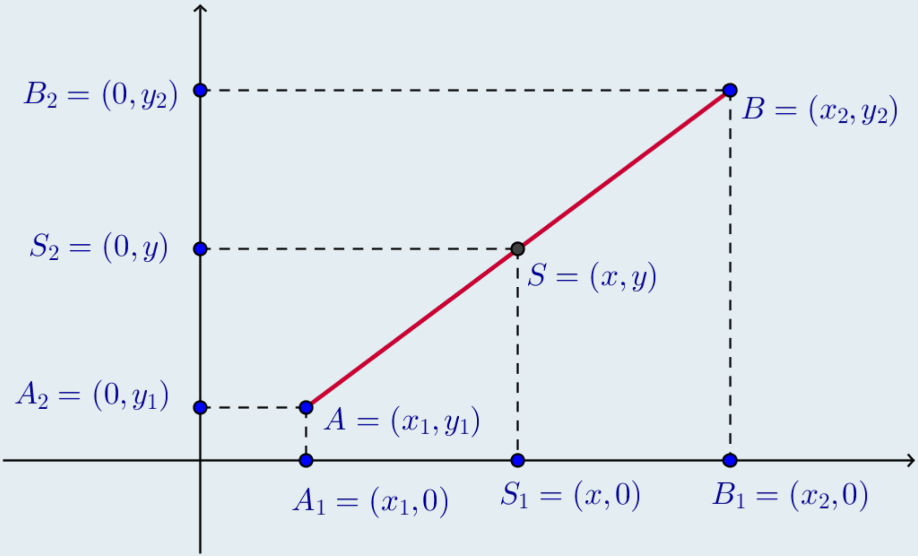
Twierdzenie 7. *Środkiem odcinka* AB *o końcach* $A = (x_1, y_1)$ *oraz* $B = (x_2, y_2)$ *jest punkt*

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Na końcu poprzedniego:

Aby uzasadnić to twierdzenie, narysujmy rzuty naszego odcinka, jego końców i środka, na osie układu współrzędnych:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

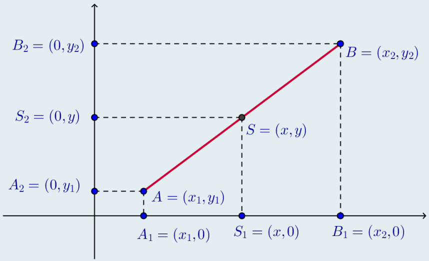
Na końcu poprzedniego:

Możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód.

Niech $S = (x, y)$ będzie środkiem odcinka AB o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$. Rzutując odcinek AB na osie układu współrzędnych otrzymamy odcinki A_1B_1, A_2B_2 o końcach $A_1 = (x_1, 0)$, $B_1 = (x_2, 0)$ oraz $A_2 = (0, y_1)$, $B_2 = (0, y_2)$.



Z twierdzenia Talesa wynika, że rzuty $S_1 = (x, 0)$, $S_2 = (0, y)$ środka $S = (x, y)$ odcinka AB są środkami rzutów A_1B_1 oraz A_2B_2. Zatem

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

□

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

W dalszej kolejności przejdziemy do opisania równaniem prostych na płaszczyźnie. W matematyce szkolnej pojęcie prostej jest pojęciem pierwotnym. Euklides definiował prostą jako ”długość bez szerokości”. Prostą na płaszczyźnie można zdefiniować używając odległości.

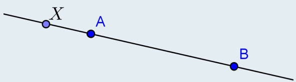
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

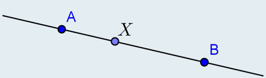
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

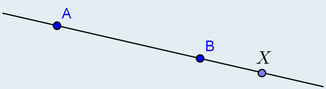
Definicja 6. Mówimy, że punkt X **leży pomiędzy** różnymi punktami A oraz B, jeśli

$$|AX| + |XB| = |AB|.$$

Definicja 7. Prostą na płaszczyźnie przechodzącą przez różne punkty A oraz B nazywamy zbiór wszystkich takich punktów płaszczyzny X, że $X = A$ lub $X = B$ lub A leży pomiędzy punktami X oraz B lub X leży pomiędzy punktami A oraz B lub B leży pomiędzy punktami A oraz X.







Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zajmiemy się teraz do analitycznym opisem prostej na płaszczyźnie.

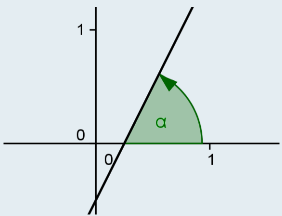
Rozpoczniemy od równania kierunkowego prostej.

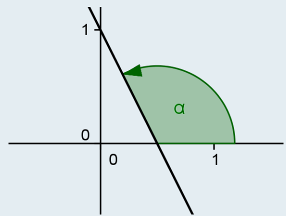
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 8. *Równanie prostej l nachylonej pod kątem $\alpha \neq 90°$ do osi OX i przecinającej oś OY w punkcie $B(0,b)$ ma postać*

$$l : y = ax + b, \tag{3}$$

gdzie $a = \operatorname{tg} \alpha$.





Na odwrót, dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b, równanie (3) opisuje prostą nachyloną pod kątem $\alpha \neq 90°$ do osi OX i przecinającą oś OY w punkcie $B(0,b)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 5. Analizując twierdzenie 1 można zauważyć, że nie każdą prostą na płaszczyźnie można opisać równaniem kierunkowym. Wiadomo, że każdą prostą prostopadłą do osi Ox i przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) można opisać równaniem

$$x = x_0.$$

Proste opisane takimi równaniami, warunki równoległości i prostopadłości zostaną przedstawione przy okazji badania równania ogólnego prostej.

Z następnym:

Współczynniki pojawiające się w równaniu kierunkowym prostej opisują daną prostą jednoznacznie, tzn. prawdziwy jest następujący wniosek.

Wniosek 3. *Dwie proste k oraz l opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \ y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \ y = a_2 x + b_2,$$

są identyczne (pokrywają się) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 \quad \textit{oraz} \quad b_1 = b_2.$$

Z następnym:

Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez dwa różne punkty nie leżące na prostej prostopadłej do osi Ox układu współrzędnych sprowadza się do rozwiązania układu dwóch równań z dwoma niewiadomymi będącymi współczynnikami w równaniu kierunkowym prostej. Przećwiczymy to przy okazji rozwiązywania bardziej skomplikowanych zadań. Przypomnimy dalej, kiedy dwie proste dane równaniami kierunkowymi są równoległe i kiedy takie proste są prostopadłe. Przytoczone własności wynikają wprost z interpretacji geometrycznej współczynników równania kierunkowego prostych opisanych równaniami kierunkowymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 4. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \ y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \ y = a_2 x + b_2,$$

są równoległe (co zapisujemy $k \parallel l$*) wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn.*

$$a_1 = a_2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 5. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \ y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \ y = a_2 x + b_2,$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

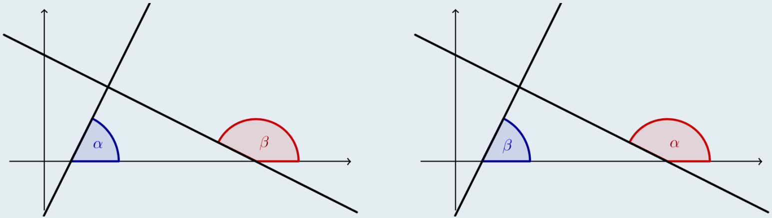
$$a_1 a_2 = -1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Pierwszy z przedstawionych wniosków jest oczywisty. Zajmijmy się uzasadnieniem drugiego.

Dowód Wniosku 5. Obserwując rysunki



można zauważyć, że miary α oraz β kątów nachylenia prostych spełniają zależność $\alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2}$. Stąd i ze wzorów redukcyjnych dla funkcji tg otrzymamy

$$a_1 a_2 = \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta = -1.$$

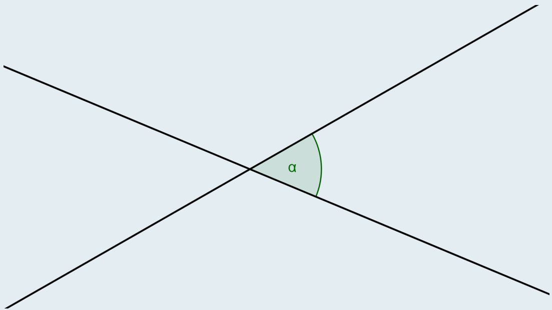
$\square$

Z następnym:

Wiemy już, kiedy proste opisane równaniami kierunkowymi są prostopadłe. Mając dwie proste opisane równaniami kierunkowymi wyznaczymy teraz kąt przecięcia między tymi prostymi. Nim sformułujemy odpowiednią własność przypomnimy, jak rozumieć należy kąt pomiędzy dwoma przecinającymi się prostymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 8. Dwie przecinające się na płaszczyźnie proste tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych, z których nie większy nazywamy **kątem pomiędzy dwoma przecinającymi się prostymi**.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 9. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \; y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \; y = a_2 x + b_2,$$

które nie są prostopadłe, przecinają się pod takim kątem γ*, że*

$$\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \right|.$$

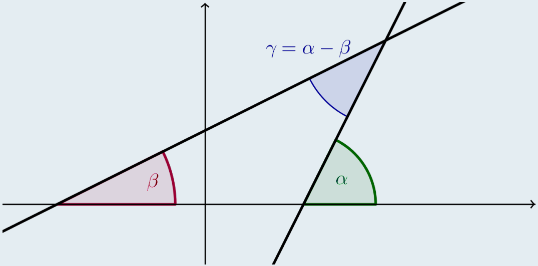
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

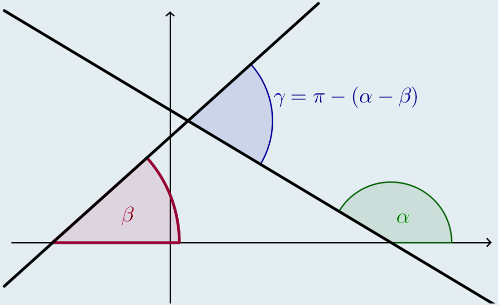
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

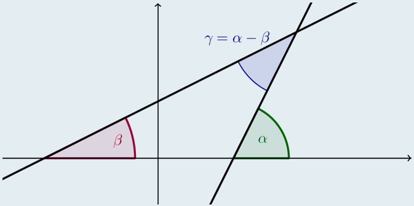
Spróbujmy uzasadnić przedstawione twierdzenie. Wykonajmy w tym celu rysunek. Dwie z wielu możliwości przedstawione są na kolejnym slajdzie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie


$\gamma = \alpha - \beta$
β
α


$\gamma = \pi - (\alpha - \beta)$
β
α

Dowód.



Zauważmy, że w zależności od przyjętych oznaczeń, we wszystkich możliwych przypadkach miary kątów α oraz β nachylenia prostych do osi oraz miara kąta γ między tymi prostymi spełniają $0 \leqslant \gamma < \frac{\pi}{2}$ oraz jedną z zależności

$$\gamma = \pm(\alpha - \beta) \quad \textbf{lub} \quad \gamma = \pi \pm (\alpha - \beta).$$

Wówczas, wykorzystując ewentualnie wzory redukcyjne, otrzymamy

$$\operatorname{tg}\gamma = |\operatorname{tg}\gamma| = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\, \operatorname{tg}\beta}\right| = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}\right|.$$

$\square$

Z następnym:

Przypomniane własności wykorzystamy do rozwiązania następujących zadań.

Przykład 2. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (1,5)$, $B = (-8,2)$ oraz $C = (0,-2)$. Wyznaczyć miarę kąta pomiędzy prostymi zawierającymi wysokości tego trójkąta, które opuszczono z wierzchołków A oraz C.

Na końcu poprzedniego:

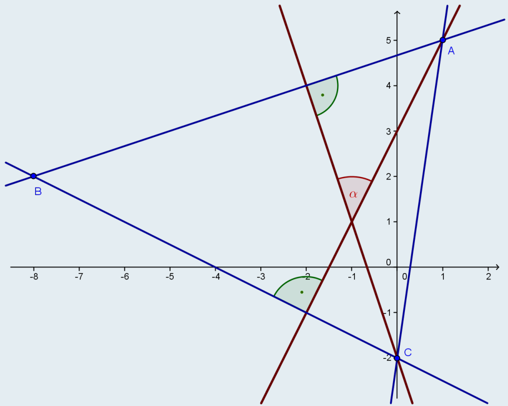
Wpiszemy dane i szukane oraz wykonamy stosowny rysunek.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (1, 5)$
$B = (-8, 2)$
$C = (0, -2)$

Sz: kąt α przecięcia się prostych zawierających wysokości opuszczone z wierzchołków A oraz C.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Po wypisaniu danych i wykonaniu rysunku należy utworzyć plan rozwiązania zadania, tzn. należy stwierdzić, co i w jakiej kolejności będziemy wyznaczać lub obliczać, aby otrzymać odpowiedź.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan rozwiązania zadania:

1. napisać równanie prostej k_1 przechodzącej przez punkty B i C oraz równanie prostej k_2 przechodzącej przez punkty A i B,
2. napisać równania prostych l_1 oraz l_2 prostopadłych do prostych, odpowiednio, k_1 oraz k_2 i przechodzących przez punkty, odpowiednio, A oraz C,
3. wyznaczyć miarę kąta przecięcia sią prostych l_1 oraz l_2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Zrealizujemy teraz przedstawiony plan.

Rozwiązanie.

Krok 1. Przypuśćmy, że poszukiwana prosta k_1 ma równanie

$$k_1: \; y = ax + b,$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznaczymy te parametry podstawiając do równania prostej k_1 współrzędne punktów B oraz C, przez które ta prosta przechodzi. Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2 = -8a + b \\ -2 = 0a + b, \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest para $a = -\frac{1}{2}$ i $b = -2$. Stąd

$$k_1: \; y = -\tfrac{1}{2}x - 2.$$

Postępując podobnie otrzymamy

$$k_2: \; y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{14}{3}.$$

Krok 2. Wyznaczymy równanie prostej l_1 prostopadłej do k_1 i przechodzącej przez punkt A. Ponieważ prosta k_1 ma współczynnik kierunkowy równy $-\frac{1}{2}$, więc prosta prostopadła będzie miała równanie

$$l_1: \; y = 2x + b.$$

Parametr b wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej l_1 otrzymując

$$5 = 2 \cdot 1 + b,$$

czyli $b = 3$. Ostatecznie mamy więc

$$l_1: \; y = 2x + 3.$$

Postępując podobnie otrzymamy równanie prostej l_2 prostopadłej do prostej k_2 i przechodzącej przez punkt C:

$$l_2: \; y = -3x - 2.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 3. Obliczymy miarę kąta między prostymi l_1 oraz l_2. Wykorzystując Twierdzenie 9 otrzymamy

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| = |-1| = 1,$$

czyli $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Proste zawierające wysokości trójkąta opuszczone z wierzchołków A oraz C przecinają się pod kątem o mierze $\frac{\pi}{4}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przeanalizujemy jeszcze następujący przykład elementarnego zastosowania równania prostej w fizyce.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

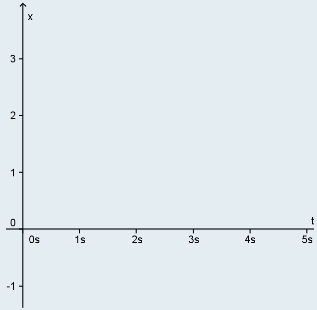
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3. Dwie kule A oraz B poruszają się na jednowymiarowej osi w dodatnim jej kierunku. Kula A rozpoczyna swój ruch w punkcie $x_1 = 3$ w chwili $t_1 = 2$ i porusza się z prędkością $v_1 = 4\frac{\text{jedn.}}{s}$, zaś kula B startuje z punktu $x_2 = -1$ w chwili $t_2 = 7$ i porusza się z prędkością $v_2 = 6\frac{\text{jedn.}}{s}$. Po jakim czasie od swojego startu kula B dogoni kulę A.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 6. Miejsce położenia obu kul w czasie, a więc i opis ruchu tych kul przedstawimy w układzie współrzędnych, w którym pierwszą współrzędną będzie czas, zaś druga współrzędna oznaczać będzie miejsce położenia kuli na osi.



Zakładamy, że obie kule poruszają się ruchem jednostajnym, więc przebyta droga jest proporcjonalna do czasu ruchu, zaś współczynnikiem proporcjonalności jest prędkość ruchu tych kul.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie. Z warunków zadania wiadomo, że kula A startuje punktu $x_1 = 3$ w chwili $t_1 = 2$ i porusza się (ruchem jednostajnym) z prędkością $v_1 = 4\frac{\text{jedn.}}{s}$, więc jej położenie w dowolnej chwili $t \geqslant 4$ można opisać równaniem

$$x = x_1 + v_1 \cdot (t - t_1) = 3 + 4 \cdot (t - 2) \quad \text{dla wszystkich } t \geqslant 4.$$

Analogicznie, dla kuli B otrzymamy równanie ruchu

$$x = x_2 + v_2 \cdot (t - t_2) = -1 + 6 \cdot (t - 7) \quad \text{dla wszystkich } t \geqslant 4.$$

Zatem kula B dogoni kulę A, gdy dla pewnego $t \geqslant 7$ zajdzie

$$3 + 4 \cdot (t - 2) = -1 + 6 \cdot (t - 7).$$

Wówczas $t = 19$, więc $t - t_2 = 12$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Kula B dogoni kulę A po 12 sekundach od chwili rozpoczęcia swojego ruchu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Proponujemy teraz rozwiązać samodzielnie następujące zadania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1.

a) Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (-3, 1)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $y = 4x + 3$.

b) Napisać równanie prostej będącej symetralną odcinka o końcach $A = (-2, 1)$ oraz $B = (4, -3)$.

c) Wyznaczyć miarę kąta przecięcia się prostych zawierających środkowe trójkąta o wierzchołkach $A = (5, 3)$, $B = (-2, 2)$ oraz $C = (0, -2)$ poprowadzone z wierzchołków B oraz C.

d) Wyznaczyć środek i długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (5, -1)$, $B = (-3, 3)$ oraz $C = (1, -3)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Podamy tu jedynie odpowiedzi do tego zadania oraz ewentualne wskazówki:

Odp.

a) Poszukiwana prosta ma równanie $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

b) Symetralna odcinka AB ma równanie $y-3x+5$ (*Wskazówka:* symetralna odcinka jest prostą prostopadłą do odcinka, przechodzącą przez jego środek).

c) Proste zawierające środkowe poprowadzone z wierzchołków B oraz C przecinają się pod kątem prostym (*Wskazówka:* środkowa jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku).

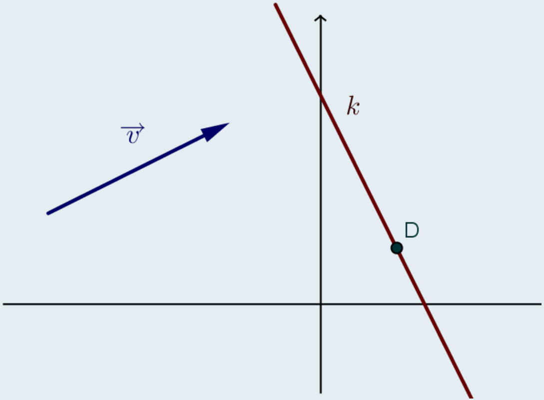
d) Środek okręgu ma współrzędne $S = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$, a jego promień ma długość $r = \frac{5}{4}\sqrt{13}$ (*Wskazówka:* środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia się symetralnych jego boków).

Z następnym:

Przeanalizujemy następnie inny typ równań opisujących proste w układzie współrzędnych. Na pewno pamiętasz, że równaniem kierunkowym nie można opisać prostych prostopadłych do osi OX. Równanie ogólne prostej nie będzie miało takiego defektu. Punktem wyjścia będzie tu następująca obserwacja:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 7. Dla dowolnego niezerowego wektora $\overrightarrow{v}$ i dla dowolnego punktu D istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do wektora $\overrightarrow{v}$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Spróbujmy się teraz zastanowić, jak analitycznie opisać można prostą przedstawioną na tym rysunku.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 3. Opisać analitycznie prostą przedstawioną na rysunku w Uwadze 7. Przyjąć, że dany jest niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = [A, B]$ (stąd $A^2 + B^2 > 0$) oraz punkt $D = (x_0, y_0)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

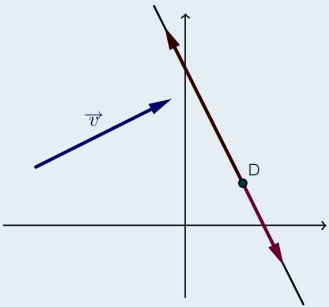
Na końcu poprzedniego:

Jeśli nie wiesz, od czego zacząć, zastanów się, co można powiedzieć o wszystkich wektorach zaczepionych w punkcie D, których końce leżą na prostej, którą chcemy opisać równaniem?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

Oczywiście wszystkie wektory zaczepione w punkcie D, których końce leżą na prostej, są prostopadłe do wektora $\overrightarrow{v}$. Jeśli więc $X = (x, y)$ jest dowolnym punktem na prostej, to wektor $\overrightarrow{DX} = [x - x_0, y - y_0]$ będzie prostopadły do wektora $\overrightarrow{v} = [A, B]$. Zatem



$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0,$$

skąd po przekształceniach otrzymamy

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $C = -Ax_0 - By_0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

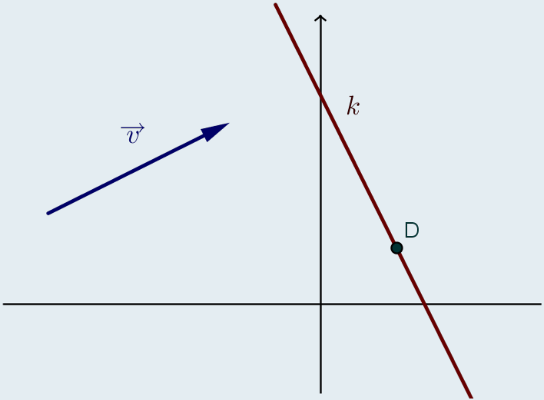
W szczególności udowodniliśmy:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 10. *Prosta przechodząca przez punkt* $D = (x_0, y_0)$ *i prostopadła do niezerowego wektora* $\overrightarrow{v} = [A, B]$ *ma równanie*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

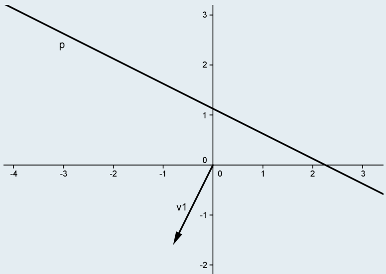
Uzasadnione zostało również następujące twierdzenie:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 11. *Każdą prostą p na płaszczyźnie można opisać równaniem*

$$p : Ax + By + C = 0. \tag{4}$$



Na odwrót, dla dowolnych takich liczb rzeczywistych A, B, C, że $A^2 + B^2 > 0$, równanie (4) przedstawia prostą prostopadłą do niezerowego wektora $[A, B]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

W pewnych przypadkach proste na płaszczyźnie można opisać zarówno równaniem ogólnym, jak i równaniem kierunkowym. Obserwacja ta zawarta jest w następującej uwadze:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 8. Prosta k opisana równaniem kierunkowym

$$k: \ y = ax + b$$

jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{v} = [a, -1]$, gdyż można ją opisać równoważnym równaniem ogólnym

$$k: \ ax - y + b = 0.$$

Na odwrót, dla $B \neq 0$ prosta p opisana równaniem ogólnym

$$p: \ Ax + By + C = 0$$

jest nachylona pod takim kątem α do osi Ox, że $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$, gdyż można ją przedstawić równaniem kierunkowym

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 9. Z Twierdzenia 11 wiemy, że równaniem ogólnym można opisać każdą prostą na płaszczyźnie. Zalety takiej nie miało równanie kierunkowe. Niestety, "wadą" równania ogólnego jest brak jednoznaczności opisu, tzn. dla każdą prostej na płaszczyźnie można opisać wieloma równaniami w postaci ogólnej.

Przykład 4. Narysować w układzie współrzędnych proste

$$k : 2x - y + 1 = 0,$$
$$l : 4x - 2y + 2 = 0.$$

Można tu wykorzystać program *Geogebra*. Zauważmy dalej, że wyznaczając z obu równań zmienną y, proste te można opisać jednym równaniem kierunkowym

$$y = 2x + 1.$$

Na końcu poprzedniego:

Z tych obserwacji wynika następujący wniosek:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 6. *Dwie proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{5}$$

przy czym warunek (5) *oznacza* ***proporcję***.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przejdziemy teraz do analizy przypadku prostych równoległych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 10. Z interpretacji geometrycznej współczynników równania ogólnego otrzymamy, że prosta

$$p : Ax + By + C = 0$$

jest prostopadła do wektora $[A, B]$. Jednocześnie wszystkie wektory proporcjonalne do niezerowego wektora są równoległe, więc prosta p będzie prostopadła do każdego wektora $[tA, tB] = t \cdot [A, B]$, gdzie $t \neq 0$. Do wektora $[tA, tB]$ prostopadłą jest z kolei prosta o równaniu

$$k : tAx + tBy + C' = 0.$$

Stąd proste p i k są równoległe (jako prostopadłe do dwóch współliniowych wektorów). Obserwacja ta prowadzi do następującego:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 7. *Dwie proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \textbf{(proporcja)}$$

co oczywiście równoważne jest warunkowi

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zastanówmy się teraz, jak napisać równanie prostej prostopadłej do zadanej. Wiadomo, że

Uwaga 11. Równanie ogólne prostej (oznaczmy ją przez k) wyznacza jeden z wielu wektorów do niej prostopadłych. Niech to będzie wektor $\overrightarrow{v} = [A, B]$. Naturalnym się więc staje, że aby napisać równanie rodziny prostych prostopadłych do zadanej należy wyznaczyć wektor $\overrightarrow{w}$ prostopadły do wektora $\overrightarrow{v}$. Można dla przykładu przyjąć, że $\overrightarrow{w} = [B, -A]$, gdyż

$$\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w} = [A, B] \circ [B, -A] = AB - BA = 0.$$

Wektor ten jest równoległy do prostej k. Wówczas każda prosta l prostopadła do wektora v (jej równanie potrafimy napisać) będzie prostopadła do prostej k. Opisaną procedurę można prześledzić na następującej prezentacji wykonanej w programie *Geogebra* (należy odtworzyć prezentację przyciskiem *Odtwórz*).

Z następnym:

Z przeprowadzonego rozumowania wynika następujący wniosek.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 8. *Dwie proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

W szczególności prosta

$$k:\ Ax + By + C_1 = 0$$

jest prostopadła do każdej z prostych

$$l_1:\ Bx - Ay + C_2 = 0$$
$$l_2:\ -Bx + Ay + C_3 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

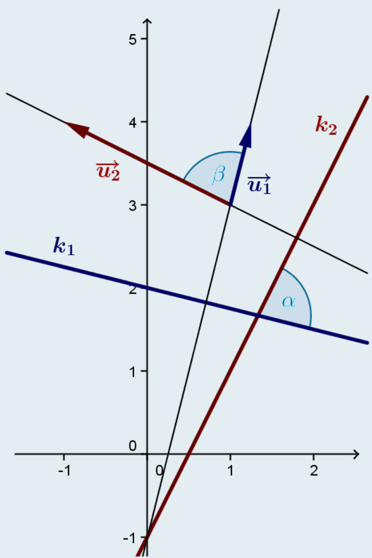
Na końcu poprzedniego:

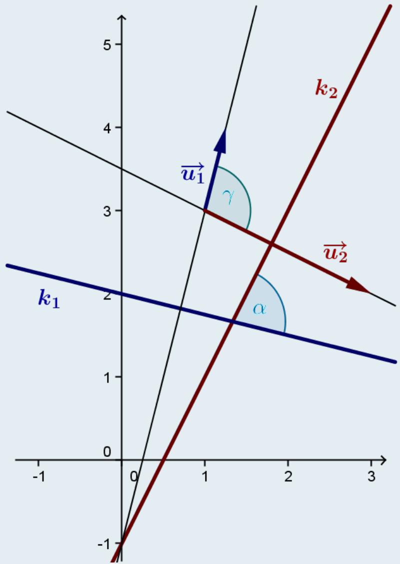
Wiemy już, jak dla prostych opisanych równaniami ogólnymi badać prostopadłość tych prostych. Zastanówmy się teraz jeszcze, w jaki sposób w tym przypadku wyznaczyć można miarę kąt przecięcia się prostych opisanych równaniami ogólnymi. Wykonajmy odpowiedni rysunek.

Z następnym:

Wiemy już, że z równania ogólnego prostej odczytać można jedynie kierunek wektora prostopadłego, tzn. rodzinę wszystkich niezerowych wektorów prostopadłych do tej prostej. Przy wyborze wektorów prostopadłych do zadanych prostych (bez znajomości ich zwrotów), zdarzyć mogą się dwie następujące możliwości przedstawione na rysunku:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego





$$\alpha = \beta \qquad \alpha = \pi - \gamma$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W pierwszym przypadku mamy więc

$$\cos(\angle(k_1, k_2)) = \cos\alpha = \cos\beta = \cos(\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})),$$

zaś w drugim

$$\cos(\angle(k_1, k_2)) = \cos\alpha$$
$$= \cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma = -\cos(\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})).$$

Podobnie,

$$\sin(\angle(k_1, k_2)) = \sin\alpha = \sin\beta = \sin(\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})),$$

oraz

$$\sin(\angle(k_1, k_2)) = \sin\alpha = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma = \sin(\angle(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Prowadzi to do następującego twierdzenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 12. *Dwie mające co najmniej jeden punkt wspólny proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

przecinają się pod kątem o takiej mierze α, *że*

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

$$\sin\alpha = \frac{|A_1B_2 - A_2B_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

W przypadku ogólnego równania prostej podać można wzór na odległość punktu od prostej zadanej takim równaniem.

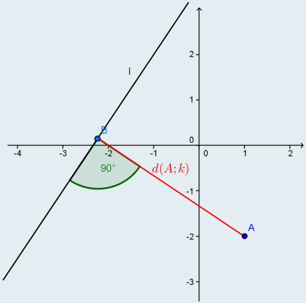
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 13. *Odległość punktu* (x_0, y_0) *od prostej*

$$l: \; Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$, *wyraża się wzorem*

$$d((x_0, y_0); l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

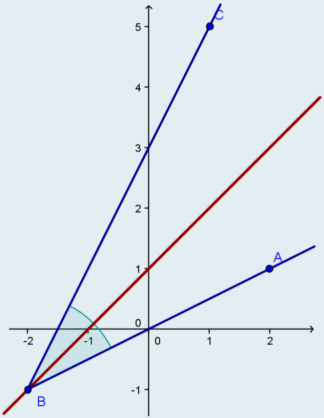
Uzasadnienie tego twierdzenia przedstawimy po wprowadzeniu równania parametrycznego prostej, co umożliwi prostsze wyjaśnienie potrzebnych faktów.

Z następnym:

Wykorzystamy teraz przedstawione wiadomości do rozwiązania kolejnych przykładowych zadań.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 5. Niech $A = (2, 1)$, $B = (-2, -1)$ oraz $C = (1, 5)$. Napisać równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC (patrz rysunek).



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

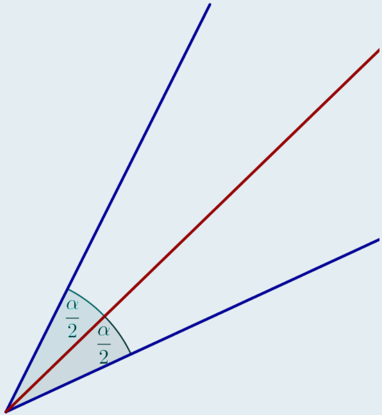
Na końcu poprzedniego:

Nim przystąpimy do rozwiązania tego zadania, przypomnijmy czym jest dwusieczna kąta i jakie ma własności metryczne. Pamiętasz zapewne, że:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 9. Dwusieczną kąta nazywamy półprostą o początku w wierzchołku tego kąta i dzielącą ten kąt na dwa kąty przystające (a więc na dwa kąty o równych miarach).



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

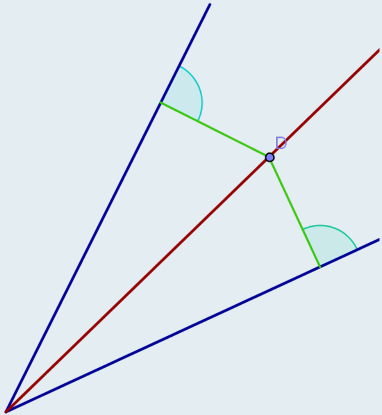
Na końcu poprzedniego:

Definicja ta w geometrii analitycznej nie jest użyteczna ze względu na konieczność mierzenia kątów. Aby rozwiązać nasze przykładowe zadanie, wykorzystać należy następującą metryczną własność punktów dwusiecznej zadanego kąta.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 14. *Dwusieczna dowolnego kąta wypukłego (tzn, o mierze mniejszej od π) jest zbiorem wszystkich punktów równoodległych od obu ramion kąta.*



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Rozpoczniemy od wypisania danych i szukanych w tym przykładzie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (2, 1)$ Sz: prosta zawierająca dwusieczną
$B = (-2, -1)$ kąta ABC.
$C = (1, 5)$

Aby skorzystać z przytoczonych twierdzeń, napiszemy równania prostych zawierających ramiona kąta ABC. Prosta przechodząca przez punkty A oraz B ma równanie

$$k: \ y = \tfrac{1}{2}x,$$

zaś prosta przechodząca przez punkty B oraz C – równanie

$$l: \ y = 2x + 3.$$

Zapisując te równania w postaci ogólnej otrzymamy

$$k: \ x - 2y = 0,$$
$$l: \ 2x - y - 3 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z Twierdzenia 14 wiemy, że dwusieczna jest zbiorem punktów równo oddalonych od obu ramion kąta, więc każdy punkt $X = (x, y)$ musi być jednakowo odległy od obu prostych k oraz l, więc otrzymamy

$$\frac{|x-2y|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{|2x-y-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}. \qquad (6)$$

Mnożąc stronami przez $\sqrt{5}$ i opuszczając moduły otrzymamy

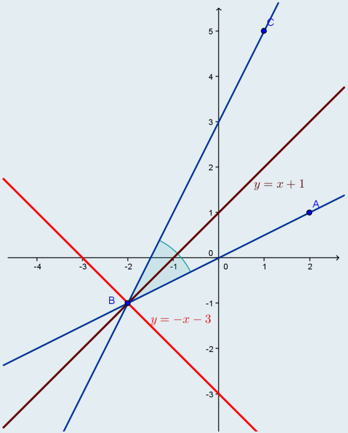
$$x - 2y = 2x - y - 3 \quad \text{lub} \quad x - 2y = -(2x - y - 3)$$

czyli

$$x + y - 3 = 0 \quad \text{lub} \quad 3x - 3y - 3 = 0$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pierwszą z otrzymanych prostych należy odrzucić. Pojawia się ona niejako nadprogramowo, gdyż równość (6) opisuje zbiór punktów równoodległych nie tyle od ramion kąta ABC, co od prostych k oraz l.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Dwusieczna kąta ABC zawarta jest w prostej o równaniu $y = x + 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Ten sam przykład rozwiążemy później jeszcze raz inną metodą, znając interpretację geometryczną równania parametrycznego prostej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Rozwiążemy teraz następujące zadanie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6. Wyznaczyć środek okręgu wpisanego w trójkąt o wierzchołkach $A = (5, 1)$, $B = (-3, 1)$ oraz $C = (0, -2)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

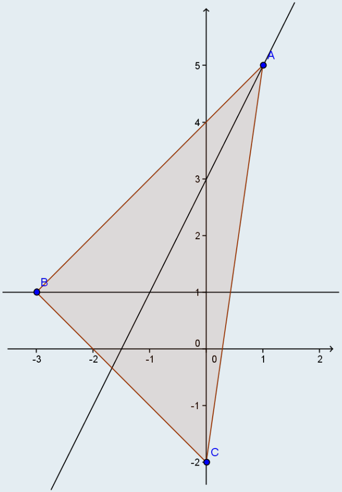
Wyjdźmy od wypisania danych i szukanych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

D: $A = (2, 1)$
$B = (-3, 1)$
$C = (0, -2)$

Sz: środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:
Środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąt. Wyjdziemy od napisania równań prostych zawierających boki trójkąta ABC. Następnie, jak to zostało uczynione w poprzednim zadaniu, wyznaczymy równania dwóch prostych zawierających dwusieczne kątów wewnętrznych tego trójkąta. Punkt Przecięcia tych prostych będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Przedstawimy tu jedynie wyniki obliczeń licząc na samodzielność Użytkownika tego kursu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 1. Prosta przechodząca przez punkty A oraz B ma równanie

$$k_1: \ y = x + 4,$$

prosta przechodząca przez punkty B oraz C – równanie

$$k_2: \ y = -x - 2,$$

zaś prosta przechodząca przez punkty A oraz C – równanie

$$k_3: \ y = 7x - 2,$$

Zapisując te równania w postaci ogólnej otrzymamy:

$$\begin{aligned} k_1 &: \ x - y + 4 = 0, \\ k_2 &: \ x + y + 2 = 0, \\ k_3 &: \ 7x - y - 2 = 0. \end{aligned}$$

Wykorzystując metodę poznaną w poprzednim zadaniu wiadomo, że dwusieczna kąta przy wierzchołku B musi spełniać równanie

$$\frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|x+y+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}, \tag{7}$$

zaś dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A – równanie

$$\frac{|x-y+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|7x-y-2|}{\sqrt{7^2+1^2}}. \tag{8}$$

Postępując jak w poprzednim zadaniu, równość (7) implikuje

$$x-y+4=x+y+2 \quad \textbf{lub} \quad x-y+4=-(x+y+2),$$

oraz, z (8) dostaniemy ($\sqrt{50}=5\sqrt{2}$)

$$5\cdot(x-y+4)=7x-y-2$$
$$\textbf{lub} \quad 5\cdot(x-y+4)=-(7x-y-2).$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

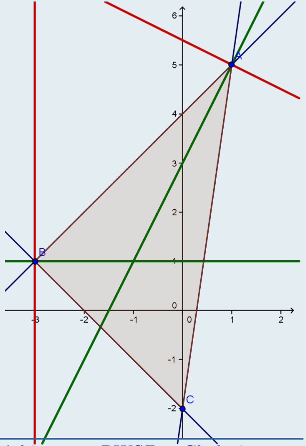
Mamy więc

$$y = 1 \quad \text{lub} \quad x = -3$$

oraz

$$x + 2y - 11 = 0 \quad \text{lub} \quad 2x - y + 3 = 0.$$

Obserwując wykonany na początku rysunek przekonujemy się, że dwusieczna kąta przy wierzchołku A zawarta jest w prostej o równaniu (*kolor zielony na rysunku obok, proste oznaczone kolorem czerwonym odrzucamy*)



$$l_1: \; y = 2x + 3,$$

zaś dwusieczna kąta przy wierzchołku B – w prostej o równaniu

$$l_2: \; y = 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punktem przecięcia się wyznaczonych prostych. Rozwiązując zatem układ równań

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

otrzymamy współrzędne $S = (-1, 1)$ środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp . Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest punkt $(-1, 1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Czas na kolejny przykład.

Przykład 7. Na prostej o równaniu $y = 2x - 1$ wyznaczyć taki punkt, aby okrąg o środku w tym punkcie i promieniu długości $r = 5$ był styczny do prostej o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Jak poprzednio, rozpoczniemy od wypisania danych i szukanych w tym ćwiczeniu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiązanie.

D: $k : y = 2x - 1$
$l : y = -\frac{3}{4}x + 1$
$r = 5$

Sz: środek okręgu stycznego do prostej l, leżący na prostej k.

Na końcu poprzedniego:

Spróbujmy "odkryć" rozwiązanie. Narysuj więc okrąg styczny do prostej. Czy wiesz już, jak należy rozwiązać ten problem?

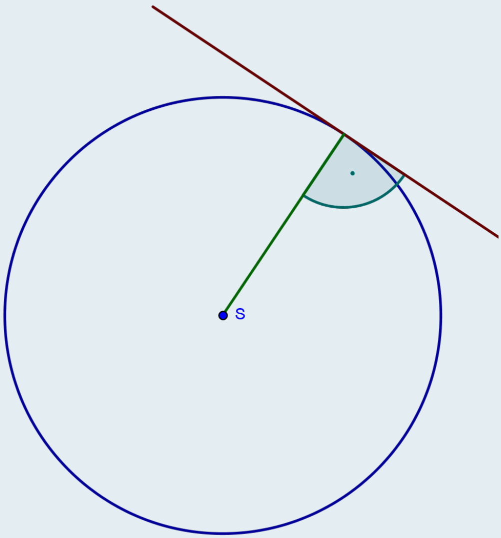
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Jeśli jeszcze nie znasz metody rozwiązania, obejrzyj rysunek i odpowiedz na pytanie: ile równa jest odległość środka okręgu stycznego do prostej od tej prostej?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Widzimy, że środek okręgu stycznego do prostej leży w odległości równej długości promienia od tej prostej. Wynika stąd, że w celu rozwiązania tego przykładu na prostej k musimy znaleźć punkt ...

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:
Oczywiście, musimy na prostej k znaleźć punkt, którego odległość od prostej l jest równa 5. Powróćmy zatem do naszego rozwiązania.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $k : y = 2x - 1$ Sz: środek okręgu stycznego

$l : y = -\frac{3}{4}x + 1$ do prostej l,

$r = 5$ leżący na prostej k.

Niech punkt $S = (x_0, y_0)$ będzie środkiem poszukiwanego okręgu. Wówczas punkt X leży na prostej k, tzn.

$$y_0 = 2x_0 - 1,$$

zaś jego odległość od prostej l wynosi

$$\frac{\left|\frac{3}{4}x_0 + y_0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0 - 1 \\ \dfrac{\left|\frac{3}{4}x_0 + y_0 - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2}} = 5. \end{cases}$$

Ponieważ $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{5}{4}$, więc podstawiając wyznaczone z pierwszego równania y_0 do drugiego równania otrzymamy równanie

$$\left|\frac{3}{4}y_0 + (2x_0 - 1) - 1\right| = \frac{25}{4},$$

którego rozwiązaniami są liczby $x_0 = 3$ lub $x_0 = -\frac{17}{11}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Drugą współrzędną środków okręgów wyznaczymy z pierwszego równania rozpatrywanego układu równań otrzymując ostatecznie punkty $S_1 = (3, 5)$ oraz $S_2 = (-\frac{17}{11}, -\frac{45}{11})$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Poszukiwanymi środkami okręgów stycznych do prostej l, leżącymi na prostej k są punkty $(3, 5)$ oraz $(-\frac{17}{11}, -\frac{45}{11})$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Proponujemy teraz rozwiązać samodzielnie następujące zadania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2.

a) Wyznaczyć wzajemną odległość prostych (równoległych) $5x + 12y + 9 = 0$ oraz $5x + 12y - 4 = 0$.

b) Obliczyć długość wysokości trójkąta o wierzchołkach $A = (-3, -1)$, $B = (5, 5)$ oraz $C = (-1, 3)$ opuszczonej z wierzchołka C.

c) Napisać równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (0, 0)$ oraz $B = (4, 2)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Podamy jedynie odpowiedzi do tego zadania oraz ewentualne wskazówki:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) Odległość prostych w zadaniu równa jest 1 (*Wskazówka:* odległość ta równa jest odległości dowolnego punktu jednej prostej od prostej drugiej).

b) Długość wysokości opuszczonej z wierzchołka C trójkąta ABS wynosi 2. (*Wskazówka:* długość wysokości równa jest odległości punktu C od prostej wyznaczonej przez punkty A oraz B).

c) Symetralna odcinka AB ma równanie $4(x-2)+2(y-1)=0$, tzn. $2x+y-5=0$ (*Wskazówka:* symetralna odcinka AB jest prostą prostopadłą do wektora $\overrightarrow{AB}$ i przechodzącą przez środek odcinka AB).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zajmiemy się teraz jeszcze innym analitycznym opisem prostej. Opiera się on na następującej obserwacji:

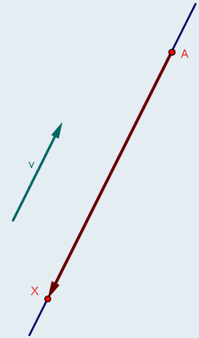
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 12.



Rozważmy prostą k i niezerowy wektor swobodny $\overrightarrow{v}$ równoległy do tej prostej. Ustalmy punkt A na prostej k. Wtedy dla każdego punktu X leżącego na prostej k i różnego od A, wektor zaczepiony $\overrightarrow{AX}$ jest równoległy do wektora $\overrightarrow{v}$. Stąd $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{v}$.

Ponieważ $A \dot{+} \overrightarrow{AX} = X$, więc ostatecznie

$$X = A \dot{+} t \cdot \overrightarrow{v} \quad \text{dla pewnego } t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Przyjmując $A = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{v} = [a, b]$, $X = (x, y)$, równość (9) zapiszemy w postaci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \dot{+} t \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \end{pmatrix}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Przedstawione rozumowanie uzasadnia prawdziwość następującego:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 15. *Każdą prostą k na płaszczyźnie można opisać równaniem parametrycznym*

$$k: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

*gdzie $A = (x_0, y_0)$ jest punktem prostej k zaś $\overrightarrow{v} = [a, b]$ jest niezerowym wektorem równoległym do tej prostej (nazywanym **wektorem kierunkowym prostej**).*

Na odwrót, dla dowolnego punktu $A = (x_0, y_0)$ i dla dowolnego niezerowego wektora $\overrightarrow{v} = [a, b]$, równanie (9) przedstawia prostą k przechodzącą przez punkt $A = (x_0, y_0)$ i równoległą do wektora $\overrightarrow{v} = [a, b]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 13. Rozważając jednocześnie kilka prostych, pisząc ich równania parametryczne należy zadbać o to, aby w opisie każdej prostej użyty był inny "parametr", tzn. aby opis w postaci parametrycznej każdej prostej był niezależny od opisów parametrycznych pozostałych prostych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku następnego:

Podobnie, jak to było dla równania ogólnego prostej, również w przypadku równania parametrycznego prostej nie ma jednoznaczności opisu. Obserwacja ta zawarta jest w następującej uwadze:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 14. Dla każdej prostej na płaszczyźnie możliwych jest nieskończenie wiele jej opisów parametrycznych. Dla przykładu, prostą

$$k_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

można opisać również równaniem

$$k_2: \begin{cases} x = -1 + 4s \\ y = 2 - 2s, \quad s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdyż punkt $(-1, 2)$ należy do prostej k_1 (dla parametru $t_0 = -1$), zaś $\overrightarrow{v_1} = [2, -1]$ oraz $\overrightarrow{v_2} = [4, -2]$ są równoległymi wektorami kierunkowymi tych prostych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Przedstawimy teraz dowód twierdzenia o odległości punktu od prostej opisanej równaniem ogólnym. Przypomnijmy je zatem:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

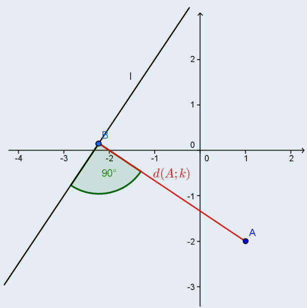
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 16. *Odległość punktu* (x_0, y_0) *od prostej*

$$l: \ Ax + By + C = 0,$$

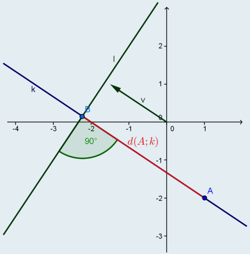
gdzie $A^2 + B^2 > 0$*, wyraża się wzorem*

$$d((x_0, y_0); l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód.
Z przedstawionego rysunku wynika, że odległość punktu A od prostej l równa jest długości odcinka AB, gdzie B jest punktem przecięcia się prostej l z prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez A. Wiadomo, że wektorem prostopadłym do prostej l jest wektor $\overrightarrow{v} = [A, B]$. Jest to więc wektor kierunkowy prostej prostopadłej do prostej l, więc równanie takiej prostej przechodzącej przez punkt $A = (x_0, y_0)$ ma postać



$$k: \begin{cases} x = x_0 + tA \\ y = y_0 + tB, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Współrzędne punktu B przecięcia się prostych l oraz k wyznaczymy przez podstawienie współrzędnych opisujących prostą k do równania prostej l. Otrzymamy równanie

$$A(x_0+tA)+B(y_0+tB)+C=0,$$

którego rozwiązaniem jest $t_0=\frac{-Ax_0-By_0-C}{A^2+B^2}$. Zatem

$$B:\quad \begin{cases} x=x_0+\frac{-Ax_0-By_0-C}{A^2+B^2}A \\ y=y_0+\frac{-Ax_0-By_0-C}{A^2+B^2}B. \end{cases}$$

Stąd odległość punktów A oraz B równa jest

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \sqrt{\frac{(-Ax_0-By_0-C)^2}{(A^2+B^2)^2}A^2+\frac{(-Ax_0-By_0-C)^2}{(A^2+B^2)^2}B^2} \\ &= \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \end{aligned}$$

Z następnym:

W wielu przypadkach łatwiej jest napisać równanie parametryczne prostej, niż inne równania tej samej prostej. Dlatego też pożyteczne jest nabycie umiejętności przechodzenia pomiędzy różnymi (ale równoważnymi) opisami prostej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 8. Napisać równanie ogólne i kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa (różne) punkty $A = (1, 2)$ oraz $B = (-1, -1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Spróbujmy się zastanowić, jak sprawnie napisać równanie parametryczne poszukiwanej prostej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na początku następnego:

Oczywiście, należy napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt A i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Łatwo napiszemy równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (1, 2)$ i równoległej do wektora

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [-1 - 1, 2 - (-1)] = [-2, 3].$$

Mamy więc

$$l: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aby wyznaczyć równanie kierunkowe (w tym przypadku jest to możliwe) prostej, wyznaczymy parametr t z pierwszej z równości opisujących prostą l, i wstawimy otrzymaną wartość do drugiej z nich otrzymując

$$y = 2 + 3 \cdot \frac{1 - x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Prosta przechodząca przez punkty A oraz B ma równanie kierunkowe postaci

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

oraz można ją przedstawić równaniem ogólnym

$$x + 2y - 5 = 0.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 15. Zaznaczmy tu jeszcze, że dla dowolnie ustalonego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, równania

$$l_1 : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{oraz} \quad l_2 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + at, \end{cases} t \in \mathbb{R},$$

opisują proste, odpowiednio,

$$l_1 : \ y = y_0 \quad \text{oraz} \quad l_2 : \ x = x_0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przejdziemy teraz w przeciwną stronę, tzn. zastanowimy się jak, mając równanie kierunkowe lub równanie ogólne prostej, napisać równanie parametryczne tej prostej.

Przykład 9. Napisać równanie parametryczne prostej

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

Rozwiązanie. W tym przypadku możemy postąpić dwojako. Wyznaczając z równania prostej zmienną x otrzymamy

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{5}{2}.$$

Przyjmując np. $y = 2t$ (tak, aby nie mieć ułamków, ale można też przyjąć $y = t$) dostaniemy, po podstawieniu do wyliczonego już x,

$$l: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 3t \\ y = 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Jednocześnie, z równania prostej można wyznaczyć zmienną y:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Wtedy dla $x = 3t$, po podstawieniu do wyliczonego y mamy:

$$l: \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{5}{3} - 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 16. Odwrotnie jak to było w Uwadze 15, proste

$$l_1 : \; y = y_0 \quad \text{oraz} \quad l_2 : \; x = x_0$$

można opisać równaniami parametrycznymi

$$l_1 : \begin{cases} x = at \\ y = y_0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{oraz} \;\; l_2 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = bt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mogą być dowolnie ustalone.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

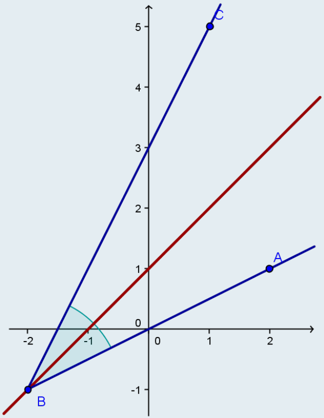
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Powróćmy jeszcze, co już było anonsowane wcześniej, do Przykładu 5, gdzie wyznaczaliśmy prostą zawierającą dwusieczną zadanego kąta. Przypomnijmy ten przykład.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 10. Niech $A = (2,1)$, $B = (-2,-1)$ oraz $C = (1,5)$. Napisać równanie prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC (patrz rysunek).



Na końcu poprzedniego:

Wypiszmy dane i szukane w tym zadaniu. W rozwiązaniu skorzystamy z faktu, że przekątne w rombie przecinają się pod kątem prostym.

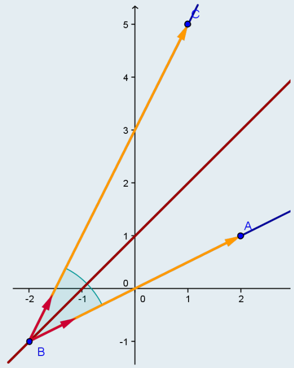
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (2,1)$, $B = (-2,-1)$, $C = (1,5)$

Sz: prosta zawierająca dwusieczną kąta ABC.

Rozważmy wektory $v_1 = \overrightarrow{BA} = [2-(-2), 1-(-1)] = [4,2]$ oraz $v_2 = \overrightarrow{BC} = [1-(-2), 5-(-1)] = [3,6]$. Aby wyznaczyć wektor kierunkowy prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC, potrzebujemy jednakowej długości wektorów o identycznych kierunkach i zwrotach, jak wektory v_1 i v_2. Najprościej jest wyznaczyć w tym celu wektory jednostkowe, tj. wziąć wektory v_1 i v_2 podzielone przez ich długości.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Mamy zatem

$$\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{|\overrightarrow{v_1}|} \cdot \overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{20}} \cdot [4,2] = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot [4,2] = \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right],$$

$$\overrightarrow{w_2} = \frac{1}{|\overrightarrow{v_2}|} \cdot \overrightarrow{v_2} = \frac{1}{\sqrt{45}} \cdot [3,6] = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot [3,6] = \left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right],$$

Wtedy

$$\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} = \left[3\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right] = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot [1,1],$$

więc wektor $\overrightarrow{u} = [1,1]$ może być przyjęty jako wektor kierunkowy prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC. Zatem prosta zawierająca dwusieczną tego kąta (prosta przechodząca przez punkt B, o kierunku wektora $[1,1]$) ma równanie

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Dwusieczna kąta ABC zawarta jest w prostej o równaniu:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Uwaga 17. Pozostawiamy oczywiście sprawdzenie, że w obu przypadkach (Przykład 5 oraz Przykład 10) otrzymaliśmy tą samą prostą.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zajmiemy się teraz problemem wzajemnego położenia prostych na płaszczyźnie.

Przykład 11. Przeanalizować wzajemne położenie prostych

$$\begin{cases} k: \ y = -x + 3, \\ l: \ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

na płaszczyźnie.

Na końcu poprzedniego:

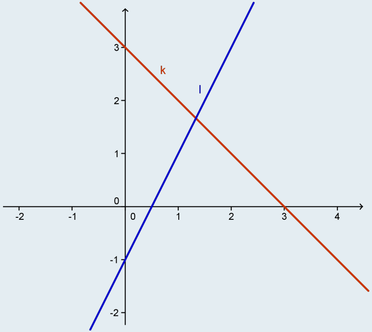
Wypiszemy dane w zadaniu. Wykonanie rysunku powinno zasugerować odpowiedź, którą należy poprawnie uzasadnić!

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $k: \ y = -x + 3$ Sz: wzajemne położenie

$l: \ 2x - y - 1 = 0$ prostych k i l.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Stworzymy plan rozwiązania tego przykładowego zadania. Przeanalizujemy możliwe przypadki. W tym celu musimy obie proste opisać tym samym typem równania. Prosta l opisana jest równaniem ogólnym, zaś prosta k – równaniem kierunkowym, które zapiszemy w postaci równania ogólnego. Przeanalizujemy możliwości dotyczące wektorów prostopadłych do obu prostych. Wykorzystać można tutaj Wnioski 6 oraz 7 lub też wyznaczyć miarę kąta pomiędzy wektorami prostopadłymi do obu prostych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zapisując dla obu prostych ich równania ogólne otrzymamy

$$\begin{cases} k: \ x + y - 3 = 0, \\ l: \ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Ponieważ $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$ więc proste k oraz l nie są równoległe (por. Wniosek 6), a więc tym bardziej nie pokrywają się.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Proste k oraz l przecinają się (mają dokładnie jeden punkt wspólny).

Przykład 12. Przeanalizować wzajemne położenie prostych

$$\begin{cases} k: \ 2x + 2y - 1 = 0 \\ l: \ y = -x + 4. \end{cases}$$

ma płaszczyźnie.

Na końcu poprzedniego:

Postępując jak poprzednio otrzymamy

Rozwiązanie.

D: $k:\ 2x+2y-1=0$ Sz: wzajemne położenie
$l: y=-x+4$ prostych k i l.

Zauważmy, że dla prostych z zadania zapisanych równaniami ogólnymi

$$\begin{cases} k:\ 2x+2y-1=0 \\ l:\ x+y-4=0, \end{cases}$$

zachodzi

$$\frac{2}{1}=\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-4},$$

więc na mocy Wniosków 6 oraz 7 są one równoległe, ale nie pokrywają się.

Odp. Proste k oraz l są rozłączne.

Z następnym:

Proponujemy teraz wykonać samodzielnie następujące ćwiczenia:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3. Zbadać wzajemne położenie następujących par prostych:

a) $\begin{cases} k_1 : \ 4x - 6y + 5 = 0, \\ l_1 : \ y = \frac{2}{3}x + 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} k_2 : \ x - 2y + 4 = 0, \\ l_2 : \ y = -\frac{1}{2}x + 2, \end{cases}$

c) $\begin{cases} k_3 : \ y = 3x - 3, \\ l_3 : \ x + 2y = -1. \end{cases}$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Kolejny slajd zawiera odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) Proste k_1 oraz l_1 są rozłączne.

b) Proste k_2 oraz l_2 pokrywają się.

c) Proste k_3 oraz l_3 mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Poczynione w wykonanych przykładach obserwacje zbierzemy formułując stosowne twierdzenie. Nim to uczynimy, w celu prostszego opisu formułowanych własności zdefiniujemy pojęcie macierzy kwadratowej i jej wyznacznika.

Definicja 10. **Macierzą kwadratową wymiaru** 2 nazywamy tablicę liczb

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

gdzie $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ dla $i, j \in \{1, 2\}$ nazywamy **wyrazami macierzy**. Wskaźniki i oraz j elementu a_{ij} informują, że znajduje się on w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 11. Wyznacznikiem macierzy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

zdefiniowaną równością

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 18. Wykorzystując poznaną definicję wyznacznika macierzy zauważamy, że proporcje pomiędzy liczbami można zapisać przy pomocy wyznacznika, tzn. zachodzi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Wykorzystując poczynioną uwagę, możemy teraz sformułować, na mocy Wniosków 6 oraz 7, następujące twierdzenie dotyczące wzajemne położenie prostych opisanych równaniami ogólnymi:

Twierdzenie 17. *Proste opisane równaniami ogólnymi*

$$\begin{cases} k_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ l_1: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases}$$

(i) przecinają się (mają dokładnie jeden punkt wspólny) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

(ii) pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

(iii) są rozłączne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \ \left(\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \vee \ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right).$$

Z następnym:

Zajmiemy się na koniec interpretacją geometryczną układu równań.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 19. Rozważmy układ równań
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$
gdzie $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ są takie, że $a_1^2 + b_1^2 > 0$ oraz $a_2^2 + b_2^2 > 0$ (a_1, b_1 oraz a_2, b_2 nie są jednocześnie równe 0). Każde z równań tego układu opisuje pewną prostą na płaszczyźnie. Istnienie rozwiązania (x_0, y_0) układu równań należy interpretować jako istnienie punktu należącego do obu prostych jednocześnie. Zatem mamy:

a) układ równań jest oznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu przecinają się,
b) układ równań jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu są rozłączne,
c) układ równań jest nieoznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy proste opisane równaniami tego układu pokrywają się.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Zastanówmy się dalej jak, wykorzystując Twierdzenie 17 oraz Uwagę 19, opisać istnienie i ilość rozwiązań układu równań poprzez współczynniki równań tego układu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Odpowiedź na to pytanie jest oczywista. Jej sformułowanie w postaci twierdzenia poprzedzimy następującą uwagą.

Uwaga 20. Zauważyć można następującą własność wyznaczników

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Z twierdzenia 17 i poczynionej uwagi wynika:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 18. *Układ równań*

$$\begin{cases} k_1: \ a_1x + b_1y = c_1, \\ l_1: \ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

(i) jest oznaczony (ma dokładnie jedno rozwiązanie) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

(ii) jest nieoznaczony (ma nieskończenie wiele rozwiązań) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0,$$

(iii) jest sprzeczny (nie ma rozwiązań) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \ \wedge \left(\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \ \vee \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Na koniec spróbujemy rozwiązać układ równań metodą geometryczną. Wykonajmy więc następujące przykładowe zadanie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 13. Rozwiązać graficznie układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Musimy powiedzieć, jak należy rozumieć rozwiązywanie układu równań metodą graficzną.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 21. Etapy graficznego rozwiązywania układu równań:

1. zbadanie czy układ posiada rozwiązanie i określenie ich liczby (wynika ze wzajemnego położenia prostych opisanych równaniami układu równań):
   a) proste są równoległe i nie pokrywają się – układ sprzeczny,
   b) proste pokrywają się – układ nieoznaczony,
   c) proste przecinają się – układ oznaczony,
2. wykreślenie prostych i wyznaczenie rozwiązania (o ile istnieje),
3. sprawdzenie, czy wyznaczona para liczb spełnia układ równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Wracając do naszego przykładu, wypiszemy dane i szukane w tym zadaniu:

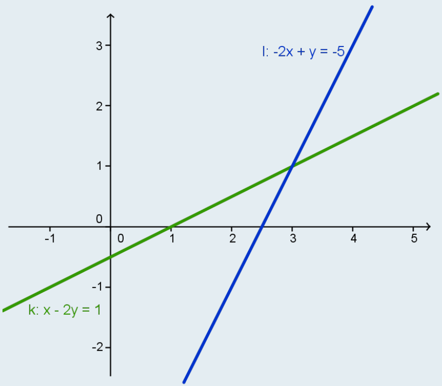
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: układ równań   Sz: rozwiązanie układu.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5. \end{cases}$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Rozwiążemy teraz graficznie ten układ równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 1. Zapisujemy równania układu tak, aby opisywały proste dane równaniami ogólnymi. Mamy zatem

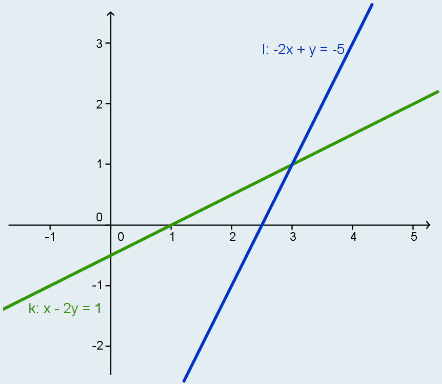
$$\begin{cases} k: & x - 2y - 1 = 0 \\ l: & -2x + y + 5 = 0, \end{cases}$$

Wykorzystując Wniosek 7, obliczamy $1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = -3 \neq 0$, więc proste opisane równaniami naszego układu równań nie są równoległe (tym bardziej więc nie pokrywają się!). Stąd układ równań jest oznaczony i wyznaczymy jego jedyne rozwiązanie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 2. Z rysunku



można odczytać, że rozwiązaniem jest para

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 3. Pozostaje sprawdzić, czy para ta spełnia równania układu (proste sprawdzenie pozostawiamy do samodzielnego przeliczenia).

Odp. Układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Z następnym:

Rozwiążemy jeszcze jeden przykład.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 14. Rozwiązać graficznie układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1, \\ 6x - 4y = -3. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Wypiszemy dane w zadaniu:

Rozwiązanie.

D: układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1, \\ 6x - 4y = -3. \end{cases}$$

Sz: rozwiązanie układu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Rozwiążemy ten układ równań graficznie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zapiszemy równania naszego układu tak, aby opisywały proste równaniami ogólnymi. Mamy więc

$$\begin{cases} k: \quad -3x + 2y - 1 = 0 \\ l: \ 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Na podstawie Wniosku 7, obliczamy $-3 \cdot (-4) - 6 \cdot 2 = 0$, więc proste opisane równaniami naszego układu równań są równoległe. Sprawdzimy teraz, czy te proste pokrywają się. Wykorzystując Wniosek 6 mamy

$$\frac{-3}{6} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-1}{3}$$

więc proste nie pokrywają się. Stąd układ równań nie posiada rozwiązania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

nie posiada rozwiązania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Jako ćwiczenie pozostawiamy do rozwiązania metodą graficzną następujące układy równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. Rozwiązać graficznie następujące układy równań:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ -2x + 2y = -6, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ -2x + y = 1, \end{cases}$

d) $\begin{cases} k: \quad -3x - y = 1, \\ l: \; x + 2y = 3. \end{cases}$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Do zadania tego podamy teraz odpowiedzi.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 7, \end{cases}$$

b) układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań i wszystkie leżą na prostej $y = x - 3$,

c) układ równań nie ma rozwiązania,

d) układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w następującym teście.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 1. Wektor o początku $(1, 2)$ i końcu $(3, -6)$ ma współrzędne

(a) $[4, -4]$,

(b) $[2, -8]$,

(c) $[-2, 8]$,

(d) $[2, -2]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 2. Środkiem odcinka o końcach $(1, 2)$ i $(3, -6)$ jest punkt

(a) $(4, -4)$,

(b) $(2, -8)$,

(c) $(-2, 8)$,

(d) $(2, -2)$.

Pytanie 3. Prosta $y = 2x + 4$ jest prostopadła do prostej

(a) $y = 2x - 4$,

(b) $y = -2x + 4$,

(c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

(d) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 4. Prosta o równaniu $-2x - y + 1 = 0$ jest

(a) równoległa do wektora $[-1, 2]$,

(b) równoległa do wektora $[2, -1]$,

(c) prostopadła do wektora $[-2, 1]$,

(d) prostopadła do wektora $[-1, 2]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 5. Proste k oraz l zadane równaniami

$$\begin{cases} k: \;\; y = -\frac{2}{3}x - 1, \\ l: \;\; 4x - 6y + 3 = 0, \end{cases}$$

(a) przecinają się pod kątem prostym,

(b) są równoległe, ale nie pokrywają się,

(c) przecinają się pod kątem ostrym,

(d) pokrywają się.

Pytanie 6. Prosta o równaniu $y = -x + \sqrt{2}$ jest odległa od początku układu współrzędnych o

(a) $\sqrt{2}$,

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

(c) $\frac{1}{2}$,

(d) 1.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 7. Prosta o równaniu

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

jest prostopadła do wektora

(a) $[-1, 2]$,

(b) $[1, 2]$,

(c) $[2, 1]$,

(d) $[2, -1]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 8. Wektory $[2, 1]$ oraz $[2, -1]$

(a) są równoległe,

(b) tworzą kąt ostry,

(c) tworzą kąt prosty,

(d) tworzą kąt rozwarty.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 9. Proste k i l zadane równaniami

$$\begin{cases} k: \ 2x - y + 1 = 0, \\ l: \ -2x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

(a) przecinają się pod kątem prostym,

(b) są równoległe, ale nie pokrywają się,

(c) przecinają się pod kątem prostym,

(d) pokrywają się.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 10. Wektorem kierunkowym prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC, gdzie $A = (2, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 2)$ jest

(a) $[1, 1]$,

(b) $[2, 1]$,

(c) $[1, 2]$,

(d) $[1, -1]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Klucz odpowiedzi:

1(b), 2(d), 3(d), 4(a), 5(c), 6(d), 7(c), 8(b), 9(d), 10(a).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie