Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-lerning - matematyka - poziom rozszerzony

Temat: Elementy logiki i teorii zbiorów.

Materiały merytoryczne

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Slajd1

Potęga matematyki polega na pomijaniu wszystkich myśli zbędnych i cudownej oszczędności operacji myślowych.

Ernst Mach

Elementy logiki i teorii zbiorów

Charakterystyczną cechą matematyki jest przeprowadzanie na jej gruncie dowodów, to znaczy wyprowadzanie jednych twierdzeń z innych, których prawdziwość została już poprzednio ustalona lub które zostały przyjęte za wyjściowe. Wyprowadzanie jednych twierdzeń z drugich odbywa się za pomocą tak zwanego rozumowania dedukcyjnego, które stanowi ważne narzędzie matematyki. Nauką, której jednym z zadań jest badanie natury rozumowań stosowanych w matematyce i ustalanie kryteriów ich poprawności, jest logika matematyczna, a w szczególności rachunek zdań. Słowo logika pochodzi od greckiego słowa Logos, które oznacza między innymi myślenie, rozumowanie. Początki rachunku zdań sięgają starożytności i wywodzą się ze szkoły stoików (III wiek p.n.e.), której najwybitniejszym przedstawicielem był Chryzyp. Właściwy rozwój rozpoczął się jednak dopiero w połowie XIX wieku, zainicjowany pracami matematyka angielskiego Georga Boole'a, którego uważa się za twórcę logiki matematycznej.

W kursie poświęconym elementom logiki i teorii zbiorów przybliżymy zasady logicznego myślenia, pojęcie logiki i związanego z nim rachunku zdań oraz pojęciem kwantyfikatorów. Natomiast w rachunku zbiorów analizujemy operacje na zbiorach oraz iloczyn kartezjański zbiorów. Wszystkie pojęcia są poparte przykładami i wzbogacone zagadkami dotyczącymi danego zagadnienia. Kolejna część kursu, to zadania do samodzielnego rozwiązania dla kursanta. Na koniec uczeń ma za zadanie rozwiązać test sprawdzający jego wiadomości i umiejętności z powyższych zagadnień.

Ciekawostka.

Astronom, fizyk i matematyk jechali pociągiem przez Holandię. Za oknem zobaczyli pasącą się krowę.

- O, w Holandii krowy są czarne – powiedział astronom.

- Zbyt pochopnie wyciągasz wnioski - odezwał się fizyk – możemy tylko powiedzieć, że niektóre krowy są czarne.

- Obaj jesteście nieprecyzyjni – rzekł matematyk – możemy powiedzieć: w Holandii jest przynajmniej jedna krowa, która co najmniej z jednej strony jest czarna.

Zatem, matematyka wyróżnia się spośród dziedzin wiedzy między innymi pełną precyzją formułowanych wypowiedzi i wniosków.

slajd

Zdanie

Zdaniem w sensie logiki (**zdaniem logicznym**) nazywamy wypowiedź oznajmującą, o której możemy powiedzieć, że jest tylko prawdziwa albo tylko fałszywa.

Zatem w sensie logiki zdaniami *nie są* zdania pytające i rozkazujące.

Przykład **************** rys ludzika z malwą***************

"*Warszawa jest stolicą Polski*" jest zdaniem (prawdziwym), "*Pcim jest stolicą Polski*" jest zdaniem (fałszywym), "*najładniejsze kwiaty to malwy*" nie jest zdaniem w sensie logiki, bo dla jednej osoby będzie, to prawda, a dla innej fałsz.

Zapis, że zdanie jest prawdziwe lub fałszywe jest kłopotliwy, zatem wprowadzono funkcję wartościowania logicznego oznaczanej literką w, która każdemu prawdziwemu zdaniu logicznemu przyporządkowuje

wartość 1, a każdemu fałszywemu zdaniu logicznemu wartość 0. Zapisujemy to następująco:

zdanie p jest prawdziwe - $w(p) = 1$ lub

zdanie p jest fałszywe - $w(p) = 0$.

W rachunku zdań treść rozpatrywanych zdań nie ma znaczenia, istotna jest jedynie ich wartość logiczna.

slajd

Zdania złożone

Z jednego (lub kilku) zdań możemy utworzyć nowe zdania — **zdania złożone**— przy pomocy *operatorów logicznych* (zw. czasem też *spójnikami zdaniowymi, funktorami zdaniotwórczymi*).

Wartość logiczną zdań złożonych powstałych przez zastosowanie funktorów zdaniotwórczych określa funkcja prawdy, związana z każdym spójnikiem zdaniowym. Wartość ta zależy wyłącznie od prawdziwości lub fałszywości zdań składowych, nie zależy natomiast od ich treści.

**************** rys ludzika z wiązanką malw************************

slajd

Podstawowe operatory

- **Zaprzeczenie (negacja)** zdania: „$\sim$”.

Przykłady

Zdanie p	**Negacja zdania p**
oglądałem mecz	nie oglądałem meczu
liczba 30 jest parzysta	liczba 30 nie jest parzysta
każda liczba naturalna jest dodatnia	istnieje liczba naturalna, która nie jest dodatnia

*************** rys ludzika z wesołą minką i smutną minką*************

Dla zdania p czytamy: "nieprawda, że p". Czyli zdanie p i negacja zdania p mają przeciwne wartości logiczne, co często zapisujemy w postaci tabeli:

Zaprzeczenie (negacja)

p	$\sim p$
1	0
0	1

slajd

- **Koniunkcja** zdań p, q: "$\wedge$". ("Mnożenie" logiczne). Operacja dwuargumentowa: czytamy "*p* i *q*".

Przykłady

Koniunkcja prawdziwa:

Wieloryb jest ssakiem i Polska leży nad Bałtykiem.

zdanie prawdziwe zdanie prawdziwe

Koniunkcja fałszywa:

Wszystkie krowy są czarne i krowy dają mleko.

zdanie fałszywe zdanie prawdziwe

Koniunkcja fałszywa:

Choinka jest drzewem iglastym i choinka jest drzewem liściastym.

zdanie prawdziwe zdanie fałszywe

Koniunkcja fałszywa:

Bocian przynosi dzieci i bocian nie jada żab.

zdanie fałszywe zdanie fałszywe

***************rys czarnej krowy***********************************

Zatem koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania są prawdziwe, co ilustrujemy przy pomocy tabelki logicznej:

Koniunkcja

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0

0	0	0

slajd

- **Alternatywa** zdań p, q: "∨". ("Dodawanie" logiczne). Operacja dwuargumentowa: czytamy "p lub q".

Przykłady

Alternatywa prawdziwa:

$\sqrt{16}$ jest liczbą całkowitą lub $\sqrt{16}$ jest liczbą niewymierną.

zdanie prawdziwe zdanie fałszywe

Alternatywa prawdziwa:

$\sqrt{5}$ jest liczbą całkowitą lub $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną.

zdanie fałszywe zdanie prawdziwe

Alternatywa prawdziwa:

$\sqrt{16}$ jest liczbą całkowitą lub $\sqrt{16}$ jest liczbą wymierną.

zdanie prawdziwe zdanie prawdziwe

Alternatywa fałszywa:

$\sqrt{5}$ jest liczbą całkowitą lub $\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną.

zdanie fałszywe zdanie fałszywe

***************rys biegających pierwiastków**********************************

Zatem alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z nich jest prawdziwe. Zapisujemy to przy użyciu tabelki:

Alternatywa

p	q	$p \vee q$
1	1	1

1	0	1
0	1	1
0	0	0

slajd

- **Implikacja** zdań p, q: "$\Rightarrow$". Operacja dwuargumentowa: czytamy "jeżeli p to q".

Przykłady

Implikacja prawdziwa:

Jeżeli Polska leży nad Bałtykiem, to Polska ma granicę morską.

zdanie prawdziwe zdanie prawdziwe

Implikacja prawdziwa:

Jeżeli Kraków leży nad morzem, to Szczecin leży na północy Polski.

zdanie fałszywe zdanie prawdziwe

Implikacja prawdziwa:

Jeżeli cukier jest słony, to sól jest słodka.

zdanie fałszywe zdanie fałszywe

Implikacja fałszywa:

Jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Warszawa jest stolicą Europy

zdanie prawdziwe zdanie fałszywe

***************rys ludzika patrzącego na mape***********************************

Zatem implikacja jest zdaniem fałszywym tylko w jednym przypadku, gdy poprzednik implikacji jest zdaniem prawdziwym, a następnik zdaniem fałszywym

Implikacja

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0

0	1	1
0	0	1

Slajd

Zabawa przysłowiami.

Znane przysłowia zapiszemy w postaci implikacji:

Krowa, która dużo ryczy mało mleka daje. Jeżeli krowa dużo ryczy, to mało mleka daje.

Gdy nie potrafisz, nie pchasz się na afisz. Jeżeli nie potrafisz, to nie pchasz się na afisz.

Teraz Wy spróbujcie:

Baba z wozu, koniom lżej.

Na pochyłe drzewo wszystkie kozy skaczą.

***************rys pochylonego drzewa i koz skaczących na nie*******************************

Slajd

- **Równoważność** zdań: p, q: "$\Leftrightarrow$". Operacja dwuargumentowa: czytamy "p wtedy i tylko wtedy, gdy q".

Przykłady

Równoważność fałszywa:

6 jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy 6+7 jest liczbą nieparzystą.

zdanie prawdziwe zdanie prawdziwe

Równoważność fałszywa:

$\sqrt{20}$ jest liczbą niewymierną wtedy i tylko wtedy, gdy 2 $\sqrt{5}$ jest liczbą wymierną

zdanie prawdziwe zdanie fałszywe

Równoważność fałszywa:

Każda liczba całkowita jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba naturalna jest nieujemna.

zdanie fałszywe zdanie prawdziwe

Równoważność prawdziwa:

2 $\sqrt{36}$ jest liczbą niewymierną wtedy i tylko wtedy, gdy 4 $\sqrt{9}$ jest liczbą niewymierną.

zdanie fałszywe zdanie fałszywe

***************rys biegających pierwiastkow***********************************

Zatem widzimy, że dwa zdania są równoważne, gdy są oba jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe:

Równoważność

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0

0	1	0
0	0	1

Slajd

**********************rys chłopca wybijającego okno piłką*****************

Zagadka

Jurek, Leszek i Wacek zrzucają na siebie winę. **Kto zbił okno sąsiadki** ?
Wacek - Ja nie zbiłem. Leszek też nie.
Leszek - Wacek nie zbił okna. Jurek go zbił.
Jurek - Ja nie zbiłem szyby. Wacek ją zbił.
Ustal kto zbił okno wiedząc że, jeden z chłopców 2 razy skłamał, drugi raz skłamał i raz powiedział prawdę, trzeci dwa razy powiedział prawdę.

Slajd

Rozwiązanie:
Tę zagadkę rozwiążemy stosując zasadę dedukcji. Nie wiemy kto zawsze mówi prawdę dlatego najpierw załóżmy, że Wacek mówi dwa razy prawdę. Stąd wynika, że Wacek nie zbił szyby i Leszek nie zbił, zatem, to Jurek był sprawcą. Wobec tego Leszek także mówiłby tylko prawdę, co jest sprzeczne z treścią zadania (tylko jeden chłopiec mówi oba zdania prawdziwe).
Analizując np, że Jurek kłamie, a Leszek mówi prawdę dochodzisz także do sprzeczności. Ponieważ są możliwe tylko trzy przypadki zatem możemy od razu wysnuć wniosek że Jurek mówi tylko prawdę. Przeanalizujmy ten przypadek.

Załóżmy więc, że Jurek mówi tylko prawdę. Stąd wynika, że Jurek nie zbił szyby tylko zbił ją Wacek. tym samym Leszek kłamie dwa razy, gdyż wypowiada zdania będące negacją zdań Jurka, który jest prawdomówny. Natomiast Wacek i kłamie i mówi prawdę, gdyż ze słów prawdomównego Jurka wynika, że to on zbił szybę (czego się wypiera), ale potwierdza ,że Leszek nie zbił szyby.
Wszystko się zgadza, zatem okno zbił Wacek.

Slajd

"Twierdzenia matematyczne uważane są za prawdziwe,

ponieważ w niczyim **interesie** nie leży, by uważać je za fałszywe." (MONTESKIUSZ)

Prawo logiczne (tautologia)

Tautologią nazywamy zdanie złożone, które jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań, z których jest złożone~~.~~

Niektóre z tautologii (te częściej używane) nazywamy prawami rachunku zdań i zapisujemy je w postaci symbolicznej przy użyciu funktorów zdaniotwórczych i nazw zdań.

****************rys zamyslonego ludzika************************************

Slajd

Niektóre prawa rachunku zdań

1. Prawo przemienności koniunkcji: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.
2. Prawo przemienności alternatywy: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.
3. Prawa łączności:
    1. Łączność koniunkcji: $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.
    2. Łączność alternatywy: $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.
4. Prawa rozdzielności:
    1. koniunkcji względem alternatywy: $[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$.
    2. alternatywy względem koniunkcji: $[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$.

****************rys smiesznego ludzika************************************

Slajd

Przykładowo przeanalizujemy inne prawa:

Rozważymy zaprzeczenie zdania:

Mickiewicz był poetą i był Polakiem.

Zauważmy, że powyższe zdanie jest zdaniem złożonym i składa się z koniunkcji dwóch zdań prostych, prawdziwych. Zatem to zdanie jest prawdziwe.

Więc negacja tego zdania jest zdaniem fałszywym, a koniunkcja jest fałszywa jeśli co najmniej jedno ze zdań jest fałszywe, czyli

Nie prawda, że Mickiewicz był poetą lub nie prawda, że był Polakiem.

***************rys ludzika literata***********************************

Powyższy przykład reprezentuje:

5. Prawo zaprzeczenia koniunkcji: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$.

Udowodnijmy je! ☺

Sprawdzimy czy zdanie: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ jest tautologią?

Sprawdzanie czy rozbudowane zdania są tautologiami wykonujemy na dwa sposoby: sposobem dla leniuszków (tzw. metoda tabelkowa lub zero-jedynkowa), lub sposobem myślicieli (tzw. dowód nie wprost).

slajd

Sposób I (tabelkowy):

Rysujemy tabelę, w której w początkowych kolumnach zapisujemy wszystkie zdania występujące w rozpatrywanym wyrażeniu. Następne kolumny dopisujemy tak jak budowane jest wyrażenie. Ilość wierszy tabeli jest zależna od ilości wszystkich możliwych wartościowań zdań p, q. Zauważmy, że każdemu zdaniu możemy przyporządkować dwa wartościowania: prawda (1) lub fałsz (0).

Krok 1. Wypełniamy pierwszy wiersz tabeli i podajemy wszystkie możliwe wartościowania zdań p, q

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1						

Krok 2.Wyznaczamy wartość logiczną zdania $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1					

Krok 3. Wyznaczamy wartość logiczną zdania $\sim (p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1	0				

Krok 4. Wyznaczamy wartość logiczną zdania $\sim p$ i $\sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0		

Krok 5. Wyznaczamy wartość logiczną zdania $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0	0	

Krok 5. Wyznaczamy wartość logiczną zdania : $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0	0	1

Cały przebieg postępowania dla pozostałych wierszy przedstawiamy poniżej.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
1	**1**	1	0	0	0	0	1
0	**0**	0	1	1	1	1	1
1	**0**	0	1	0	1	1	1
0	**1**	0	1	1	0	1	1

W ostatniej kolumnie są same jedynki, zatem badane zdanie jest tautologią. Gdyby zdarzyła się sytuacja, w której co najmniej jedna z komórek ostatniej kolumny przyjmie wartość zero, to nasze zdanie nie byłoby tautologią.

slajd

Sposób II (nie wprost): Idea tego postępowania polega na rozpatrzeniu sytuacji przeciwnej do podanej, czyli zadaniu pytania co by było gdyby było przeciwnie. Zatem pytamy co by było gdyby nasze zdanie nie było tautologią. Odpowiadając na to pytanie staramy się znaleźć takie wartości logiczne zdań podstawowych, przy których badane zdanie nie będzie tautologią. Jeśli znajdziemy takie wartościowanie to będzie oznaczało, że nasze przypuszczenie (w matematyce nazywane hipotezą) było prawdziwe i badane zdanie nie jest tautologią. Jeżeli natomiast dojdziemy do jakiejś sprzeczności, to będzie oznaczało, że nasza hipoteza jest nieprawdziwa, a zatem badane zdanie jest tautologią.

Stawiamy zatem hipotezę, że badane zdanie nie jest tautologią. Oznacza to, że ma wartość logiczną 0. Zapisujemy to w skrócie:

$$\text{H: w}(\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q)=0.$$

Równoważność jest zdaniem fałszywym gdy zdania po obu stronach równoważności mają różne wartości logiczne, czyli

$$\text{I:} \qquad \text{w}(\sim(p \wedge q))=1 \ \text{ i } \ \text{w}(\sim p \vee \sim q)=0$$

lub

$$\text{II:} \qquad \text{w}(\sim(p \wedge q))=0 \ \text{ i } \ \text{w}(\sim p \vee \sim q)=1$$

Zatem mamy do rozpatrzenia dwa przypadki I i II. Rozważymy teraz I:

Z drugiego warunku, czyli w($\sim p \vee \sim q$)=0 otrzymujemy jednoznacznie

w($\sim p$)=0 i w($\sim q$)=0, wtedy w(p)=1 i w(q)=1.

A zatem w($p \wedge q$)=1, czyli w($\sim$($p \wedge q$))=0, co jest sprzeczne z w($\sim(p \wedge q)$)=1.

Rozważymy teraz przypadek II:

Z pierwszego warunku, czyli w($\sim(p \wedge q)$)=0 i otrzymujemy w($p \wedge q$)=1

wtedy w(p)=1 i w(q)=1.

A zatem w($\sim p$)=0 i w($\sim q$)=0, czyli w($\sim p \vee \sim q$)=0, co jest sprzeczne z drugim warunkiem w II, czyli w($\sim p \vee \sim q$)=1.

W obu przypadkach, gdy równoważność jest fałszywa otrzymaliśmy sprzeczność w rozumowaniu, czyli hipoteza była fałszywa. Zatem zdanie $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ jest tautologią.

Slajd

Podobnie możecie samodzielnie udowodnić:

6. Prawo zaprzeczenia alternatywy: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$.

Prawa 8 i 9 nazywamy prawami de Morgana.

****************rys czarnej i bialej krowy************************************

Slajd

Przedstawimy kolejne prawo logiczne na przykładzie:

Zapiszemy znane przysłowie: „Gdzie kucharek sześć, tam nie ma co jeść” w postaci implikacji:

Jeżeli jest kucharek sześć, to nie ma co jeść.

Jako przysłowie wiemy, że jest to zdanie prawdziwe. Zbadamy zaprzeczenie tej implikacji, które będzie zdaniem fałszywym. Pamiętamy, że implikacja jest fałszywa wyłącznie gdy poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Zatem negacją naszej implikacji jest:

Jest kucharek sześć i jest co jeść.

****************rys 6 kucharek***********************************

Otrzymaliśmy

7. Prawo zaprzeczenia implikacji: $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Udowodnijmy je! ☺

Zastosujemy metodę tabelkową (dla leniuszków ☺):

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1

W ostatniej kolumnie są same jedynki, zatem badane zdanie jest tautologią.

Stosując do prawa 10 poznane prawo de Morgana - 8 możecie udowodnić:

8. Prawo eliminacji implikacji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

Udowodnijcie samodzielnie metodą np. dla „leniuszków”, że są tautologiami następujące prawa:

9. Prawo podwójnego przeczenia: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.
10. Prawo wyłączonego środka: $w(p \vee \sim p) = 1$
11. Prawa pochłaniania: $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$ oraz $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

slajd

Przykład

Zadajmy pytanie: Jaką wartość logiczną ma wyrażenie

$x^2 > x.$

Odpowiedź na to pytanie jest prosta. Wartość logiczna podanego wyrażenia zależy od wartości zmiennej x. Zatem wyrażenie $x^2 > x$ nie jest zdaniem, gdyż jego wartość logiczną poznajemy dopiero po podstawieniu konkretnej wartości za zmienną x.

Zatem zauważamy potrzebę rozpatrywania tzw. formy zdaniowej.

***************rys ludzika lezacego na brzuszku nad zeszycikiem******************************

Formą zdaniową zmiennej x nazywamy wyrażenie zawierającą zmienną x, przy czym, to wyrażenie staje się zdaniem logicznym dopiero po zastąpieniu x nazwą pewnego elementu.

Uwaga. Każde równanie jest formą zdaniową

Przy *formach zdaniowych* możemy używać kwantyfikatorów (wyrażeń opisujących zakres przebiegu zmiennej) w celu większej precyzji wypowiedzi.

Przykład
Dla każdej liczby całkowitej x: $x^2 > x$.
Tutaj zmienna x przebiega zbiór liczb całkowitych.

Istnieje jabłko, które jest zgniłe.
Tutaj zmienną są jabłka, a kwantyfikator istnieje określa, że przynajmniej jeden element spełnia formę zdaniową: jabłko jest zgniłe.

Slajd

Kwantyfikatory

Uściślijmy pojęcie kwantyfikatora.

Definicja

- Wyrażenie „dla każdego x …” nazywamy **kwantyfikatorem dużym lub ogólnym** i zapisujemy $\forall_x$ (ang. for all, często też używa się oznaczenia: $\bigwedge\limits_x$).
- Zwrot „istnieje takie x, że …” nazywamy **kwantyfikatorem małym lub szczegółowym** i zapisujemy $\exists_x$ (ang. exists, często też używa się oznaczenia: $\bigvee\limits_x$).

***************rys ludzikow w kształcie kwantyfikatorow*****************************

Do zdań zawierających kwantyfikatory możemy stosować funktor przeczenia. Mówimy wtedy np. nie prawda, że istnieje taki element x, który spełnia formę zdaniową. Wydaje się oczywistym, że skoro takiego elementu, który spełnia formę zdaniową nie ma, to ta forma nie jest spełniona dla wszystkich elementów x. Takie rozumowanie jest całkowicie poprawne i w sposób formalny zapisujemy je jako jedno z praw de Morgana.

Slajd

Przykłady

Powiedzieć, że "nieprawda, że wszystkie liczby naturalne są parzyste" jest tym samym, co powiedzieć, że "istnieje taka liczba naturalna, która nie jest parzysta".

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

$$\sim (\exists_x \psi(x)) \iff \forall_{x \in X} (\sim \psi(x))$$

$$\sim (\forall_{x \in X} \phi(x)) \iff \exists_{x \in X} (\sim \phi(x))$$

Slajd

***************rys zamyslonego ludzika***********************************

Zadanie

Czy prawdziwe jest zdanie:

1. $\forall_{x\in R} x^2 > 0$.

Zdanie, to nie jest prawdziwe, gdyż dla $x = 0$ zdanie $x^2 > 0$ jest fałszywe.

2. $\exists_{x\in N} x - 234 < 0$.

Zdanie jest prawdziwe, bo znajdziemy takie $\boldsymbol{x}$ naturalne np. $\mathbf{233}$, aby warunek był spełniony.

3. $\forall_{x\in R} \exists_{y\in R} x + y = 0$.

Jest to zdanie prawdziwe, bo dla każdej liczby rzeczywistej $\boldsymbol{x}$ istnieje do niej liczba przeciwna.

Slajd

Zbiory

W otaczającym nas świecie zauważamy różne zbiory, np. zbiór uczniów w klasie, zbiór monet, gwiazdozbiór, …. Również w matematyce zbiór zajmuje bardzo ważne miejsce.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym. Oznacza to, że wiemy co to jest, posługujemy się tym pojęciem, czyli mamy tzw. intuicję pojęcia, ale go nie definiujemy. Aby jednak na tym nie poprzestać i powiedzieć o co tu chodzi, to taką pseudodefinicją mogłoby być: "coś, co zawiera elementy". Oczywiście taka pseudodefinicja jest niepoprawna, gdyż może prowadzić do wielu paradoksów. Chętnych zapraszamy do poszukania informacji o **Paradoksie Russella, czy paradoksie fryzjerów itp.**

Zbiorem pustym nazywamy zbiór, który nie zawiera żadnego elementu. Oznacza się go $\emptyset$.

Ilość elementów zbioru *A* oznaczamy symbolem $|A|$ lub $\text{card}\,A$ (od słowa cardinal).

***************rys stada myszek i obok stada kotow***********************************

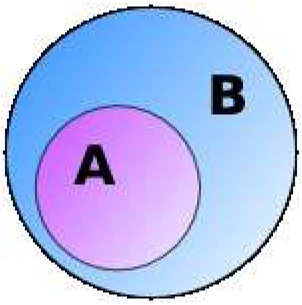
Slajd

Pomiędzy zbiorami zachodzą następujące relacje:

Zawieranie się zbiorów

Zbiór *A* **zawiera się** w zbiorze *B* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru *A* jest jednocześnie elementem zbioru *B*. Sytuację taką oznaczamy $A \subset B$, a o zbiorze *A* mówimy, że jest *podzbiorem* zbioru *B*. Zapisujemy to tak: $A \subset B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

lub inaczej: $A \subset B \Leftrightarrow \forall_{a \in A} a \in B$.



A jest **podzbiorem** *B*

Przykład

Zbiór liczb parzystych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Niektóre proste własności inkluzji (zawierania się) zbiorów

- $\forall_A : \emptyset \subset A$ (zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru *A*)
- $\forall_A : A \subset A$ (każdy zbiór jest swoim podzbiorem).

Podzbiór właściwy

Jeśli $A \subset B$ i $A \neq B$, to mówimy, że *A* jest **podzbiorem właściwym** zbioru *B*.

Równość zbiorów

Mówimy, że zbiory A i B są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i

każdy element zbioru B należy do zbioru A. Zapisujemy to tak:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A),$$

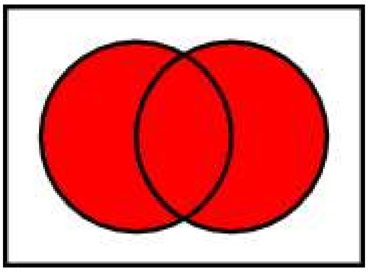
co inaczej możemy zapisać:

$A = B \Leftrightarrow \forall_a (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$.

Suma zbiorów

Sumą zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy to jako:

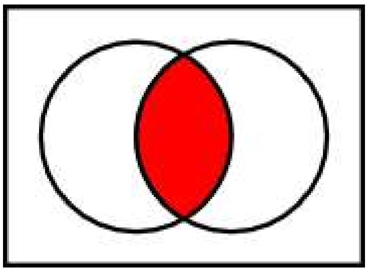
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$



Przecięcie zbiorów

Przecięciem (iloczynem) zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór tych elementów, które należą do obu zbiorów. (Przecięcie nazywamy też *częścią wspólną*). Zapisujemy to jako:

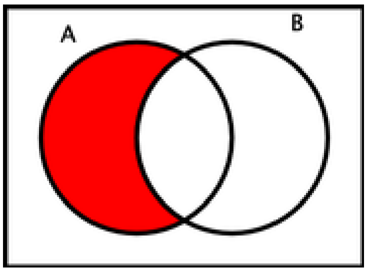
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$



Różnica zbiorów

Różnicę zbiorów *A* i *B* zapiszemy już tylko wzorem i zilustrujemy:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



Różnica
A\B

Przykład

Niech zbiór A oznacza dziewczęta startujące w wyborach miss szkoły będące blondynkami lub brunetkami, a zbiór B oznacza zbiór blondynek biorących udział w tych wyborach. Wtedy zbiór A\B tworzą brunetki.

Rozłączność zbiorów

Mówimy, że zbiory *A* i *B* są **rozłączne** wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają wspólnych elementów, tzn. gdy $A \cap B = \emptyset$.

Dla zbiorów definiujemy także pojęcie dopełnienia

Dopełnienie zbioru

Każdy zbiór *A* możemy uważać za podzbiór jakiegoś większego zbioru Ω (wtedy Ω nazywamy **nadzbiorem** zbioru *A*).

Definicja

Dopełnieniem zbioru *A* do zbioru Ω nazywamy zbiór *A*' = Ω*A* (Czasem dopełnienie *A* oznacza się też A^C od "complement").

Przy dowodach zależności pomiędzy zbiorami wykorzystujemy definicje działań na zbiorach oraz prawa rachunku zdań.

Przykład

Analogicznie jak w rachunku zdań mamy **prawa de Morgana** dla zbiorów:

$$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B, \qquad \sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

Slajd

***************rys myszek walczacych o symbol X ***********************************

Ważnym pojęciem w rachunku zbiorów jest iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański zbiorów

Iloczynem kartezjańskim zbiorów *A* i *B* nazywamy zbiór par uporządkowanych (*a*,*b*), gdzie $a \in A, b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

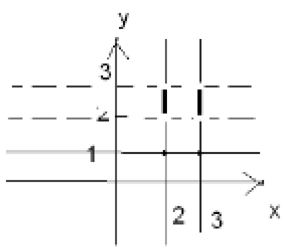
Przykład

Niech $x, y \in A = \mathbb{R}$. Wtedy (*x*,*y*) — parę liczb rzeczywistych można interpretować jako współrzędne punktu na płaszczyźnie. Tak więc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, to *płaszczyzna*.

Przykład

1. Niech *A* oznacza zbiór dat, *B* oznacza zbiór miejsc na Ziemi; wtedy *A*×*B*= $(data,\ miejsce)$ można interpretować jako zbiór zdarzeń historycznych.

2. Podać interpretację geometryczną w układzie współrzędnych zbioru: $A \times B$:
$A = \{2,3\}$, $B = \{1\} \cup (2,3)$.



Logikę stosujecie także w życiu codziennym:

W klasie...

Spośród uczniów w klasie:

50% ma czarne włosy,
25% ma blond włosy,
33% to dziewczynki,
67% to chłopcy.

***************rys dzieci z roznym kolorem wlosow***********************************

a) Wszyscy uczniowie o włosach blond to chłopcy.
b) Niektórzy chłopcy mają czarne włosy.
c) Niektórzy uczniowie o włosach blond to dziewczynki.

d) Zarówno chłopcy, jak i dziewczynki mają czarne włosy.

Pytanie: Które z następujących zdań jest na pewno prawdziwe?

Prawidłowa jest odpowiedź b)

Przykładem logicznego myślenia jest analiza rozwiązania następującego problemu:

Trzech przyjaciół

Jasio, Józio i Czesio uprawiają po dwie dyscypliny sportowe każdy: zajmują się piłką nożną, pływaniem, siatkówką, koszykówką, skokami narciarskimi i łyżwiarstwem.

Z podanych niżej faktów należy wywnioskować, jakim dwóm dyscyplinom oddaje się każdy z trzech chłopców:

1. Piłkarz obraził siatkarza, wyśmiewając jego długie włosy,
2. Zarówno siatkarz, jak i łyżwiarz chodzili na ryby z Jasiem,
3. Koszykarz odkupił rękawiczki od piłkarza,
4. Piłkarz zalecał się do siostry koszykarz,
5. Józio pożyczył od łyżwiarza 20 złotych i oddał je pływakowi,
6. Czesio lepiej pływa zarówno od Józia, jak i od koszykarza.

***************rys 3 chlopcow uprawiających rozne dyscypliny sportowe z zdania*****************

Rozwiązanie:

Dla ułatwienia rozważań rozwiązując tego typu łamigłówki, rejestrujemy dane w tabelkach. Zwykle też mamy do czynienia z dwoma typami danych (w naszym przypadku imiona i sporty). Wówczas konstruujemy tabelę, w której wiersze odpowiadają jednemu typowi danych, a kolumny drugiemu typowi. Zatem powinniśmy skonstruować następującą tabelę

	sporty					
	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio						
Józio						
Czesio						

W naszym przypadku mamy dodatkowe utrudnienie polegające na tym, że podane osoby mogą uprwiać nie jeden a dwa sporty. W tym celu dodajemy jeszcze dodatkowe wiersze sportów.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio						
Józio						
Czesio						
piłkarz						
koszykarz						
skoczek						
pływak						

łyżwiarz						
siatkarz						

Wszelkie informacje będziemy zapisywać używając oznaczeń:
„+” gdy dana osoba uprawia dany sport,
„—” gdy dana osoba nie wykonuje określonej dyscypliny.
Następnym etapem jest już analiza zadania (każdego z warunków).

1. Z warunku 1 wynika, że piłkarz nie może być siatkarzem.

	piłkarz	koszykarz	Skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio						
Józio						
Czesio						
piłkarz						—
koszykarz						
skoczek						
pływak						
łyżwiarz						
siatkarz	—					

2. Z warunku 2 wynika, że siatkarz nie może być łyżwiarzem oraz, że Jasio nie jest ani siatkarzem, ani łyżwiarzem.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio					—	—
Józio						
Czesio						
piłkarz						—
koszykarz						
skoczek						
pływak						
łyżwiarz						—
siatkarz	—				—	

3. Z warunków 3 i 4 wynika, że koszykarz nie jest piłkarzem.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio					—	—
Józio						
Czesio						
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak						

łyżwiarz						—
siatkarz	—				—	

4. Z warunku 5 mamy, że Józio nie jest ani łyżwiarzem, ani pływakiem oraz łyżwiarz nie może być pływakiem (zastanów się dlaczego?).

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio					—	—
Józio				—	—	
Czesio						
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

5. Z warunku 6 mamy, że ani Czesio ani Józio nie jest koszykarzem, więc koszykarz to Jasio.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio		+			—	—
Józio		—		—	—	
Czesio		—				
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

**************** obok tabelki rys koszykarza*************************************

Po wykorzystaniu warunków zadania należy dokonać analizy tabeli

6. Łyżwiarzem nie jest ani Jasio ani Józio, czyli musi nim być Czesio. Ponieważ łyżwiarz nie może być ani pływakiem ani siatkarzem (tam są minusy), więc Czesio nie jest ani pływakiem ani siatkarzem.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio		+			—	—
Józio		—		—	—	
Czesio		—		—	+	—
piłkarz		—				—

koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

*************** obok tabelki rys lyzwiarza***********************************

7. Dalej widzimy, że pływakiem jest Jasio, a siatkarzem Józio.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio		+		+	—	—
Józio		—		—	—	+
Czesio		—		—	+	—
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

*************** obok tabelki rys plywaka***********************************

8. Jasio ma już dwie dyscypliny, więc nie jest ani piłkarzem, ani skoczkiem. Z dolnej tabeli siatkarz nie jest piłkarzem, czyli Józio, który jest siatkarzem nie jest piłkarzem.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio	—	+	—	+	—	—
Józio	—	—		—	—	+
Czesio		—		—	+	—
Piłkarz		—				—
Koszykarz	—					
Skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

*************** obok tabelki rys siatki do gry***********************************

9. Zatem Czesio jest piłkarzem i to jest jego druga dyscyplina, więc nie jest skoczkiem.

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio	—	+	—	+	—	—
Józio	—	—		—	—	+
Czesio	+	—	—	—	+	—
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

*************** obok tabelki rys pilkarza***********************************

10. Tym samym pozostaje, że skoczkiem jest Józio

	piłkarz	koszykarz	skoczek	pływak	łyżwiarz	siatkarz
Jasio	—	+	—	+	—	—
Józio	—	—	+	—	—	+
Czesio	+	—	—	—	+	—
piłkarz		—				—
koszykarz	—					
skoczek						
pływak					—	
łyżwiarz				—		—
siatkarz	—				—	

*************** obok tabelki rys skoczka***********************************

Odp. **Jasio jest koszykarzem i pływakiem, Józio skoczkiem i siatkarzem, Czesio zaś zajmuje piłką nożną i łyżwiarstwem.**

Slajd

*************** rys ludzika***********************************

Zadania

Zadanie 1.
Podaj wartość logiczną zdań:
a) $\sim\left(\sqrt{2} < 2\right)$,
b) $\left(2^0 = 1\right) \vee \left(2^0 = 0\right)$,
c) $\left(3 \leq 3\right) \wedge \left(2^3 = 8\right)$,
d) $\left(\pi > 4\right) \Rightarrow \left(\pi^2 < 10\right)$,
e) nieprawda, że suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 2π,
f) długość okręgu jest mniejsza od długości jego średnicy lub długość okręgu jest większa od długości jego promienia,
g) suma kątów wewnętrznych w równoległoboku jest równa 2π i długość obwodu równoległoboku jest większa od sumy długości jego przekątnych,
h) jeżeli liczba 8 jest podzielna przez 5, to liczba 8 jest podzielna przez 3,
i) $\sqrt{12^2 + 7^2} = 19 \vee 4^{10} + 4^{10} + 4^{10} + 4^{10} = 4^{40}$,
j) istnieje liczba pierwsza mniejsza od liczby 2.

Zadanie 2.
Określ, które z poniższych wyrażeń jest zdaniem, a które formą zdaniową.
a) Odwrotność liczby a jest równa 4 lub a jest liczbą podzielną przez 3.
b) Istnieje liczba rzeczywista p, której wartość bezwzględna jest liczbą niedodatnią.
c) Pierwiastek kwadratowy z kwadratu dowolnej liczby rzeczywistej y jest równy wartości bezwzględnej tej liczby.
d) x^2+2x-4
e) Dowolna liczba rzeczywista x jest równa swojej odwrotności.
f) $\sqrt{3} < 2 \wedge 3^{10} = 300$.

Zadanie 3.
Podaj zaprzeczenie zdania: *Jeśli będę otrzymywał dobre stopnie w liceum to dostanę się na studia lub wyjadę na stypendium za granicę.*

Zadanie 4.
Wiadomo, że $w(p \wedge q) = 1$. Jaką wartość logiczną ma zdanie: $[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$?

Zadanie 5.
Wiadomo, że $w(p \Rightarrow q) = 0$. Jaką wartość logiczną ma zdanie: $[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$?

Zadanie 6.
Sprawdź, czy podane wyrażenia rachunku zdań są tautologiami (prawami rachunku zdań):
a) $p \vee (\sim p)$,
b) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$,

c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$,

d) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$,

e) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$,

f) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$,

g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$,

h) $[(p \vee q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$.

Zadanie 7.

Podać wartości logiczne zdań:

a) $\forall_{x \in R} \sqrt{x^2} = x,$

b) $\exists_{x \in C} x^2 - \sqrt{2}x = 0,$

c) $\forall_{x \in R} \forall_{x \in R} \; x^2 + xy = 0,$

d) $\forall_{x \in R} \exists_{y \in R} \; y^2 + xy = 0,$

e) $\forall_{y \in R} \exists_{x \in R} \; y^2 + xy = 0.$

Zadanie 8.

Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zaznacz zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają formę zdaniową

a) $x + y - 1 > 0 \wedge -x + y + 1 > 0,$

b) $x - y + 2 < 0 \vee x + y - 3 > 0.$

Zadanie 9.

Zbiór A oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od 10; B oznacza zbiór liczb całkowitych parzystych, których odległość od 0 na osi liczbowej jest niewiększa od 8.

a) Wypisz elementy zbioru A i elementy zbioru B.

b) Wskaż liczby pierwsze należące do zbioru A.

c) Znajdź zbiory $A \cup B$, $A \cap B$.

d) Wypisz elementy zbioru A \ B.

Zadanie 10.

Wyznacz zbiory $A \cup B, D \cap A, C \setminus B, B \setminus D, (A \cup C) \setminus B, D \setminus (A \cap C)$, jeśli:

$A = \{x : x^2 - 9 = 0\}, \quad B = \{x : x^2 - 8x + 16 = 0\}, \quad C = \{x : |x| = 3\}, \quad D = \{x : x \in N \wedge x \mid 12\}.$

Zadanie 11.

Wykaż, że dla dowolnych zbiorów *A,B* zachodzą równości

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,

d) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus (A \cap B)$.

Zadanie 12.

Podać interpretację geometryczną w układzie współrzędnych zbioru: $A \times B$, gdy:

a) $A = [1,2]$, $B = [-1,3)$,

b) $A = \{x : | x | > 2\}$, $B = \{x : | x + 1 | \leq 3\}$.

Zadanie 13*.

Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą następujące implikacje

a) $((A \subset B) \wedge (C \subset D)) \Rightarrow ((A \cap C) \subset (B \cap D))$,

b) $((A \subset B) \wedge (C \subset D)) \Rightarrow ((A \setminus D) \subset (B \setminus C))$.

Zadanie 14*.

Niech $A_1, ..., A_n$ będą pewnymi zbiorami i niech $k \le n$. Udowodnić, że suma wszystkich iloczynów k różnych zbiorów spośród zbiorów A_i jest równa iloczynowi wszystkich sum $n-k+1$ różnych zbiorów spośród A_i.

Rozwiązania:

Zad. 1. a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1, f) 1, g) 1, h) 1, i) 0, j) 0.

Zad. 2. a) Forma zdaniowa, b) Forma zdaniowa, c) Zdanie logiczne, d) ani forma zdaniowa ani zdanie, e) Zdanie logiczne, f) Zdanie logiczne.

Zad. 3. Będę otrzymywał dobre stopnie w liceum i nie dostanę się na studia i nie wyjadę za granicę.

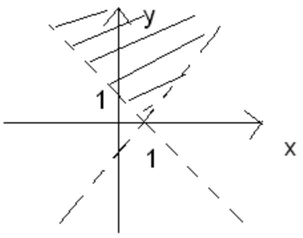
Zad. 4. 1

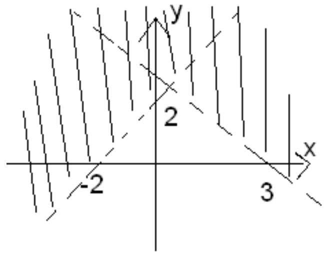
Zad. 5. 0

Zad. 6. a) Tak, b) Tak, c) Tak, d) Nie, e) Tak, f) Tak, g) Tak, h) Nie.

Zad. 7. a) 0, b) 1, c) 0, d) 1, e) 1.

Zad. 8. a) b)





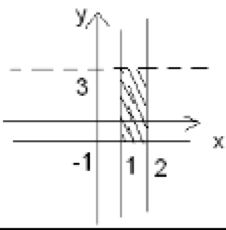
Zad. 9. a) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, B={-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8}

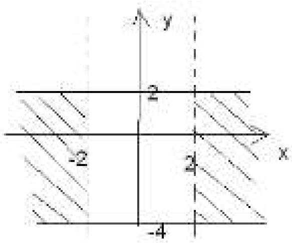
b) 2,3,5,7, c) A∪B={-8,-6,-4,-2,0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, A∩B={2,4,6,8}

d) A-B={1,3,5,7,9,10}.

Zad. 10. A∪B={-3,3,4}, D∩A={3}, C-B={-3,3}, B-D=∅, (A∪C)-B={-3}, D-(A∩C)={1,2,4,6,12}.

Zad. 12. a) b)





Slajd

Test wyjścia

*************** rys ludzika***********************************

Zad. 1. Podaj wartość logiczną zdań:
1.1. Liczba 3 jest dzielnikiem liczby 7 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 5 jest dzielnikiem liczby 5.
a) 1, b) 0.
odp. b

1.2. $\sqrt{11^2+6^2}=18 \vee 3^{10} + 3^{10} + 3^{10} = 3^{30}$.
a) 1, b) 0.
odp. b

1.3. Istnieje liczba pierwsza mniejsza od liczby 13 a większa od 10
a) 1, b) 0.
odp. a

Zad. 2. Określ, które z poniższych wyrażeń jest zdaniem, a które formą zdaniową.
2.1. Odwrotność liczby a jest równa 5 lub a jest liczbą podzielną przez 7
a) Zdanie; b) Forma zdaniowa; c) Nie jest ani zdaniem, ani formą zdaniową.
odp. b

2.2. x^2+2x-9
a) Zdanie; b) Forma zdaniowa; c) Nie jest ani zdaniem, ani formą zdaniową.
odp. c

Zad. 3. Wiadomo, że $w(p \wedge q) = 1$.
Jaką wartość logiczną ma zdanie: $[(\sim p \Leftrightarrow q) \wedge (p \wedge q)] \Leftrightarrow q$?
a) 1, b) 0.
odp. b

Zad. 4. Wiadomo, że $w(p \Rightarrow q) = 0$.
Jaką wartość logiczną ma zdanie: $[(p \Leftrightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$?
a) 1, b) 0.
odp. b

Zad. 5. Które z poniższych wyrażeń rachunku zdań jest tautologią (prawem rachunku zdań):
a) $p \wedge (\sim p)$,
b) $(p \vee q) \Rightarrow [p \wedge (\sim q)]$,
c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
odp. c

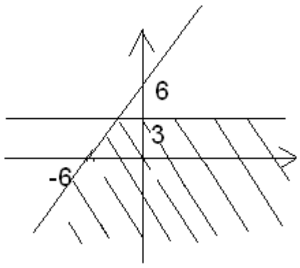
Zad. 6. Negacją zdania: *Jest smutno wtedy i tylko wtedy, gdy pada deszcz* jest zdanie:
a) (Jest smutno i nie pada deszcz) lub (pada deszcz i nie jest smutno);
b) Nie jest smutno gdy pada deszcz;

c) Gdy jest smutno nie pada deszcz.
odp. a

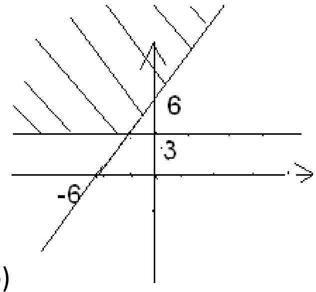
Zad. 7. Podać wartości logiczne zdań:

7.1. $\exists x \in R \ \exists y \in R, \quad x^2 + xy = 0,$
a) 1, b) 0.
odp. a
7.2. $\exists y \in R \ \forall x \in R, \quad y^2 + xy = 0,$
a) 1, b) 0.
odp. a
7.3. $\exists x \in R \ \forall y \in R, \quad y^2 + xy = 0,$
a) 1, b) 0.
odp. b

Zad. 8. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych zaznacz zbiór wszystkich punktów, których współrzędne spełniają formę zdaniową
~(y > 3) $\wedge$ y – x < 6.



a)



b)

odp. a

Zad. 9. Zbiór A oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od 12; B oznacza zbiór liczb całkowitych parzystych, których odległość od 0 na osi liczbowej jest niewiększa od 10.
9.1. Wypisz elementy zbioru A i elementy zbioru B.
a) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}, B={-8,-7,-6,-4,-2,0,2,4,6,7,8},
b) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, B={-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10},
c) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}, B={-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10}.
odp. c

9.2. Wskaż liczby pierwsze należące do zbioru A.
a) {1,3,5,7,11},
b) {2,3,5,7,11},
c) {1,2,3,5,7,11}.
odp. b

9.3. Znajdź zbiory A$\cup$B, A$\cap$B.
a) A$\cup$B={-10,-8,-6,-4,-2,0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} , A$\cap$B={2,4,6,8,10},
b) A$\cup$B={-10,-8,-6,-4,-2,0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} , A$\cap$B={2,4,6,8},
c) A$\cup$B={-10,-8,-6,-4,-2,0, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} , A$\cap$B={2,4,6,8,10}.
odp. a

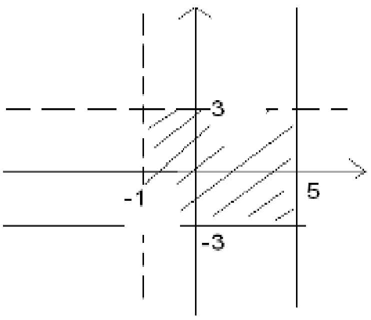
9.4. Wypisz elementy zbioru A \ B i opisz ten zbiór za pomocą symboli.

a) A \ B={1,3,5,7,9,11}, b) A \ B={-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10}, c) A \B={0,1,3,5,7,9,11}.
odp. a

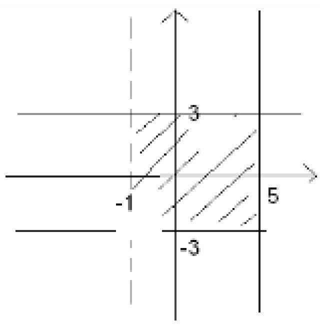
Zad. 10. Wyznacz zbiory: $A\cup B, D\cap A, C\setminus B, B\setminus D, (A\cup C)\setminus B, D\setminus(A\cap C)$, jeśli:
$A=\{x: x^2-16=0\}$, $B=\{x: x^2-8x+16=0\}$, $C=\{x: |x|=4\}$, $D=\{x: x\in N\wedge x\,|\,8\}$,
a) $A\cup B=\{-4,4\}$, $D\cap A=\{-4\}$, $C\setminus B=\{4\}$, $B\setminus D=\phi, (A\cup C)\setminus B=\{-4\}, D\setminus(A\cap C)=\{1,2,8\}$,
b) $A\cup B=\{-4,4\}$, $D\cap A=\{4\}$, $C\setminus B=\{-4\}$, $B\setminus D=\phi, (A\cup C)\setminus B=\{-4\}, D\setminus(A\cap C)=\{1,2,8\}$, c) $A\cup B=\{-4\}$, $D\cap A=\{4\}$, $C\setminus B=\{-4\}$, $B\setminus D=\phi, (A\cup C)\setminus B=\{-4\}, D\setminus(A\cap C)=\{1,2,4,8\}$.
odp. b

Zad. 11. Wyznacz zbiory $(A\cap B)\cup C$ oraz $(C\setminus B)\cap A$, jeśli:
$A=\{x: (x-3)(x+6)=0\}$, $B=\{x: x=3p\wedge p\in Z\wedge -6\le p\le 3\}$, $C=\{x: x\in N \wedge 2^x<9\}$.
a) $(A\cap B)\cup C=\{-6,1,2,3\}$, $(C\setminus B)\cap A=\phi$,
b) $(A\cap B)\cup C=\{1,2,3\}$, $(C\setminus B)\cap A=\phi$.
odp. a

Zad. 12. Podać interpretację geometryczną w układzie współrzędnych zbioru: $A\times B$:
12.1. $A=(-1,5]$, $B=[-3,3)$,



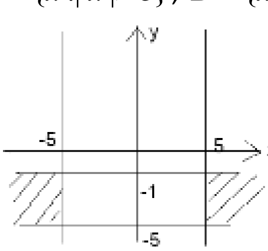
a)



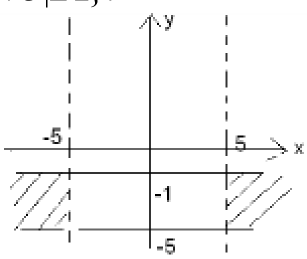
b)

odp. a

12.2. $A=\{x: |x|>5\}$, $B=\{x: |x+3|\le 2\}$.



a)



b)

odp. b

Zad. 13. Znaleźć $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, jeżeli:
$A=\{x\in R: |x-1|<2\}$, $B=\{x\in R: x^2-6x+9\le 0\}$.

a) $A\cup B=[-1,3]$, $A\cap B=3$, $A\setminus B=(-1,2)$, $B\setminus A=3$,
b) $A\cup B=(-1,3]$, $A\cap B=\phi$, $A\setminus B=(-1,3)$, $B\setminus A=3$,
c) $A\cup B=[-1,3]$, $A\cap B=\phi$, $A\setminus B=(-1,3)$, $B\setminus A=3$,
d) $A\cup B=(-1,3]$, $A\cap B=3$, $A\setminus B=(-1,2)$, $B\setminus A=3$.

odp. b

Zad. 14. Czy dla dowolnych zbiorów *A, B* powiedz czy zachodzi równość
$\left(A \cup B\right) \setminus A = B \setminus \left(A \cap B\right)$?

a) 1, b) 0.

odp. a

Zad. 15*. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D prawdziwa jest następująca implikacja:
$(\left(A \subset B\right) \wedge \left(C \subset D\right)) \Rightarrow \left((A \cup C) \subset (B \cup D)\right)$?

a) TAK, b) NIE.

odp. a

Slajd

**************** rys ludzika************************************

Literatura:

1) A. Drążek, B. Grabowska, Z. Szadkowska, Matematyka wokół nas, Podręcznik do kl. 2 Gimnazjum, WSiP, Warszawa 2006.
2) J.M. Jędrzejewski, K. Gałązka, E. Leśniak, Matematyka krok po kroku, Ćwiczenia sprawdzające dla kl. 2 Gimnazjum, RES Polona, Łódź.
3) R. Kalina, T. Szymański, Matematyka z Sensem, Zestawy zadań sprawdzających wiedzę uczniów rozpoczynających naukę w liceum i technikum, SENS, Poznań 2005.
4) A. Kiełbasa, Matura z matematyki 2010-..., poziom podstawowy i rozszerzony cz. 1, 2000, Warszawa 2009.
5) K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, Matematyka, Zbiór zadań do liceów i techników kl. I., Oficyna Edukacyjna K. Pazdro, WSiP, Warszawa 2007.
6) W. Marek, J. Onyszkiewicz, Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach, PWN, Warszawa 2004.
7) D. Masłowska, T. Masłowski, A. Makowski, P. Nodzyński, E. Słomińska, A. Strzelczyk, Testy maturalne. Matematyka, poziom podstawowy, AKSJOMAT, Toruń 2009.
8) H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2007.