E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Funkcja kwadratowa

Materiały merytoryczne do kursu

1 Wstęp

Prezentacja jest skierowana do tych uczniów, którzy poradzili sobie z materiałem i zadaniami, zawartymi w 1-j części prezentacji. Korzystając ze zdobytej wiedzy i umiejetności, wypracowanych podczas samodzielnej pracy, możemy zająć się bardziej skomplikowanymi zadaniami. Proszę nie zniechęcać się po przeczytaniu zwrotu "skomplikowane zadania". Wszystkie zadania do samodzielnej pracy bedą poprzedzone przykładami z zamieszczonymi rozwiązaniami, lub ze wskazówkami do rozwiazania. Tak więc po tym bardzo krótkim wprowadzeniu pośpieszmy się do dzieła, i oczywiście życzymy przyjemnej lektury!

2 Pojęcia wstępne

Na początku przypomnijmy podstawowe definicje i twierdzenia, z których będziemy korzystali podczas naszej wspólnej pracy. W razie konieczności bedziemy wprowadzać kolejne pojęcia.

Definicja.

Załóżmy, że $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b,\, c \in \mathbb{R}$**. Funkcję**

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

nazywamy funkcją kwadratową (albo trójmianem kwadratowym), a równanie

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

nazywamy równaniem kwadratowym.

Definicja.

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego (albo odpowiadającego temu równaniu trójmianu kwadratowemu $y = a\,x^2 + b\,x + c$).

Twierdzenie.

a) Jeżeli $\triangle \geqslant 0$, to pierwiastkami równania kwadratowego są:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2\,a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2\,a}.$$

b) Jeżeli $\triangle < 0$, to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Wnioski:

1. Jeżeli $\triangle > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2.
2. Jeżeli $\triangle = 0$, to $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2\,a}$.

Rozwiązując zadania, w których występuje funkcja kwadratowa, często korzystamy ze wzorów Viète'a:

Twierdzenie.

Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1\,x_2 = \frac{c}{a}.$$

Przykład 1.

Dane jest równanie

$$x^2 + b\,x + c = 0.$$

Wyznaczyć równanie kwadratowe, pierwiastkami którego będą:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2;$$
$$y_2 = x_1^3 + x_2^3.$$

Rozwiązanie.

Zgodnie z twierdzeniem Viète'a

$$x_1 + x_2 = -\,b\,,$$

$$x_1\,x_2 = c\,.$$

Szukając odpowiedzi, będziemy również korzystać z prostych tożsamościowych przekształceń:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\,x_2 = b^2 - 2\,c;$$

$$y_2 = x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)\,(x_1^2+x_2^2-x_1\,x_2) = -\,b\,(b^2-3c) = 3\,b\,c - b^3.$$

Aby wyznaczyć poszukiwane równanie, jeszcze raz skorzystamy z twierdzenia Viète'a:

$$y^2 - (b^2 - 2\,c + 3\,b\,c - b^3)\,y + (b^2 - 2\,c)\,(3\,b\,c - b^3) = 0.$$

Jak widać, to pozornie trudne zadanie okazało się bardzo proste. Teraz bez żadnego problemu poradzicie sobie z następnym zadaniem. Tym razem wykonajcie go samodzielnie.

Przykład 2.

Dane jest równanie

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0.$$

Wyznaczyć takie równanie kwadratowe, pierwiastkami którego są:

$$y_1 = \frac{1}{x_1},$$
$$y_2 = \frac{1}{x_2}.$$

To zadanie nie jest trudne, spróbuj rozwiązać go samodzielnie.

Rozwiązanie.

W związku z tym, że rozwiązanie tego zadania przeprowadza się tak samo, jak zadania 1, podamy tylko wynik - mamy nadzieję, że otrzymany przez Ciebie jest taki sam:

$$c\,x^2 + b\,x + a = 0,$$
$$a \neq 0, c \neq 0.$$

Porównajcie równania wyjściowe i otrzymane.
Na pewno zobaczyliście symetryczną zamianę współczynników a i c - zaskakujący wynik!

Przykład 3.

Dla jakich wartości parametru a pierwiastki x_1 i x_2 równania kwadratowego:

$$x^2 + a\,x + 1 = 0$$

spełniają nierówność:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 1.$$

To zadanie nie jest trudne, spróbuj rozwiązać go samodzielnie.

Rozwiązanie.

Mam nadzieję, że po przeczytaniu zdania o łatwości zadania, świetnie sobie z nim poradziłeś(-aś)! Jeżeli tak - super, trzeba tylko sprawdzić otrzymany wynik z odpowiedzią, jeżeli jednak nie udało się znaleźć rozwiązania - nie warto wpadać w chandrę i wątpić we własne możliwości. Zadanie wcale nie jest takie łatwe.
Rozwiążmy to zadanie wspólnie. Spójrzmy na nierówność, którą maja spełniać pierwiastki danego nam równania. Przekształćmy lewa stronę nierówności, podnosząc do potęgi drugiej osobno licznik i mianownik każdego z ułamków, a następnie przedstawmy sumę dwóch ułamków w postaci jednego ze wspólnym mianownikiem - może ten prosty zabieg naprowadzi nas na dalszy trop rozwiązania:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 x_2^2} > 1.$$

Teraz napiszmy wzory Viète'a dla danego nam równania:

$$x_1 + x_2 = -\,a,$$
$$x_1\, x_2 = 1.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$x_1^4 + x_2^4 > 1.$$

Otrzymana nierówność jest dużo łatwiejsza, niż pierwotna. Ale co dalej?

Mamy jeszcze jeden, niewykorzystany póki co w zadaniu, wzór Viète'a:

$$x_1 + x_2 = -\,a.$$

Trzeba poszukać sposobu na jego wykorzystanie. Uwzględniając, że

$$x_1^4 = (x_1^2)^2$$

i korzystając z bardzo prostych tożsamościowych przekształceń oraz wzorów skróconego mnożenia (mam nadzieję, że nikt nie ma najmniejszego problemu w operowaniu wzorami skróconego mnożenia!), możemy przeprowadzić dalsze obliczenia:

$$x_1^4+x_2^4 = (x_1^2+x_2^2)^2-2\,x_1^2\,x_2^2 = ((x_1+x_2)^2-2\,x_1\,x_2)^2-2x_1^2\,x_2^2.$$

Po przeprowadzonych przekształceniach ponownie zastosujmy wzory Viète'a:

$$x_1^4 + x_2^4 = [a^2 - 2]^2 - 2 > 1,$$

po uproszczeniu otrzymujemy nierówność dwukwadratową:

$$a^4 - 4a^2 + 1 > 0,$$

którą rozwiązujemy, sprowadzając ją do kwadratowej przez podstawienie

$$z = a^2.$$

Ostatecznie rozwiązaniem zadania są wartości parametru a, spełniające warunki:

$$|a| > \sqrt{2+\sqrt{3}};$$
$$|a| > \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

3 Pomocne twierdzenia

Jeszcze trochę teorii, abyśmy mogli rozwiązywać ciekawsze zadania.

Twierdzenie.

I. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$y = ax^2 + bx + c$$

były liczbami rzeczywistymi i miały takie same znaki, jest spełnienie następujących warunków:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0, \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0,$$

przy czym obydwa pierwiastki będą większe od 0**, jeżeli dodatkowo będzie spełniony warunek:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

i mniejsze od 0**, jeżeli**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

Twierdzenie.

II. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

były liczbami rzeczywistymi i miały różne znaki, jest spełnienie następujących warunków:

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c > 0,$$

$$x_1\,x_2 = \frac{c}{a} < 0,$$

przy czym pierwiastek o znaku dodatnim będzie miał większą wartość bezwzględna, jeżeli spełniony będzie warunek:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

natomiast jeżeli

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0,$$

wtedy to ujemny pierwiastek będzie miał większą wartość bezwzględna.

Przykład 4.

Wyznaczyć wszystkie wartości parametru a, dla których równania

$$x^2 + a\,x + 1 = 0,$$

$$x^2 + x + a = 0$$

mają co najmniej jeden wspólny pierwiastek.
Proszę się nie zniechęcać i rozwiązać to zadanie samodzielnie.

Rozwiązanie.

Mam nadzieję, że to nietypowe zadanie dało się rozwiązać. Jeżeli nie - proszę się nie przejmować, rozwiążemy go wspólnie.
Przeanalizujmy treść zadania. Informacja o tym, że równania mają co najmniej jeden wspólny pierwiastek oznacza, że podane równania mogą mieć 2 lub 1 wspólny pierwiastek.

Zacznijmy od przypadku, gdy równania mają 2 wspólne pierwiastki. Jest to możliwe, gdy równania mają identyczne współczynniki. W naszym zadaniu taka sytuacja ma miejsce dla $a = 1$.

Rozpatrzmy teraz przypadek $a \neq 1$ (niestety, jest on trudniejszy!). Proszę zwrócić uwagę na fakt, że jeżeli liczba x_1 jest jednocześnie pierwiastkiem równań $f(x) = 0$ i $g(x) = 0$, to ta liczba będzie również rozwiązaniem równań $f(x) \pm g(x) = 0$. Przeciwna sytuacja, niestety, nie zawsze ma miejsce. Stąd mamy tylko warunek konieczny, aby 2 równania miały wspólny pierwiastek. Stwórzmy różnicę tych równań:

$$\Big(x^2 + a\,x + 1\Big) - \Big(x^2 + x + a\Big) = 0.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$x\,(a-1)-(a-1)=0.$$

Ponieważ w założeniu $a \neq 1$, stąd to $x = 1$, a ponieważ równania mają wspólny pierwiastek, to $x_1 = 1$. Wyznaczmy teraz wartość współczynnika a. Podstawmy $x_1 = 1$ do danych nam równań:

$$1+a+1=0,$$

$$1+1+a=0.$$

Stąd $a = -2$. Czyli dla $a = 1$ i $a = -2$ dane nam równania mają co najmniej jeden wspólny pierwiastek.
Proszę jeszcze raz przeanalizować rozwiązanie tego nietypowego zadania.

Przykład 5.

Przedstawić trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej i iloczynowej:

$$y = 2\,x^2 - 6\,x + 4.$$

To zadanie nie jest trudne, spróbuj rozwiązać go samodzielnie.

Rozwiązanie.

Pewnie nie miałeś większych problemów z zadaniem? Łatwo sprawdzić, że $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ są pierwiastkami równania $2\,x^2 - 6\,x + 4 = 0$. Ponieważ $a = 2$, więc

$$2\,x^2 - 6\,x + 4 = 2\,(x-1)(x-2).$$

Teraz postać kanoniczna. Przypomnijmy wzór:

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a}.$$

Możemy po prostu podstawić do wzoru odpowiednie współczynniki naszego trójmianu, ale wzoru możemy po jakimś czasie zapomnieć, warto więc poznać zasady jego tworzenia - wtedy łatwiej nam będzie w razie potrzeby go odtworzyć.

Wykonajmy bardzo proste działania po prawej stronie naszego wzoru, mianowicie zastosujmy wzór skróconego mnożenia (te wzory są bardzo pomocne, ich pamiętać należy!!!), wynik pomnóżmy przez stałą, po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\overbrace{a\,x^2 + b\,x} + c = a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4\,a} =$$

$$= a\left(x^2 + 2\,x\,\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2\,a}\right)^2\right) - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a} =$$

$$= \overbrace{a\,x^2 + b\,x} + \frac{b^2}{4\,a} - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a} = a\,x^2 + b\,x + c.$$

Porównajmy wyrażenia zaznaczone klamrą - są takie same, stąd aby uzyskać postać kanoniczną, trzeba w pierwszej kolejności wyłączyć przed nawias współczynnik przy x^2, następnie uwzględniając wyłącznie wyrazy zawierające x^2 i x, tak dobrać stałą we wzorze skróconego mnożenia, żeby po jego rozwinięciu otrzymaliśmy dokładnie takie same wyrażenia zawierające x^2 i x, jak w wyjściowym wzorze.

Przypomnijmy wzory skróconego mnożenia, z których będziemy korzystać:

$$(y+t)^2 = y^2 + 2\,t\,y + t^2,$$
$$(y-t)^2 = y^2 - 2\,t\,y + t^2.$$

Zatem

$$2\,x^2 - 6\,x + 4 = 2(\underbrace{x^2 - 3\,x} + 2) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + ???\right] =$$

Co należy wpisać w miejscu "???".

To jest proste:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3\,x + \frac{9}{4},$$

po podniesieniu do kwadratu wyrażenia w nawiasach otrzymaliśmy stałą, którą musimy uwzględnić w dalszych obliczeniach, pamiętając o tym, że wolno nam dokonywać tylko tożsamościowych przekształceń, stąd

$$"???" = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$2\,x^2 - 6\,x + 4 = 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Umiejętność przekształcenia trójmianów kwadratowych do postaci kanonicznej i iloczynowej jest bardzo ważną czynnością, przyda się ona na studiach wyższych przy obliczaniu całek, ale to tylko uwaga na marginesie.

4 Rozwiązywanie układów równań

A teraz będziemy rozwiązywać układy równań. Pewnie zastanawiasz się, dlaczego ten temat znalazł się w 2 części prezentacji? Przecież to jest trywialne zagadnienie. Prosimy jednak o pozostawienie oceny na temat prostoty tematu na koniec lektury.
Na początek rozwiążmy parę prostych układów.

Przykład 6.

Rozwiązać układy równań:

1. $\begin{cases} 5\,xy - y^2 = 9, \\ 2\,x - y = 3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 - 5\,xy = 10, \\ x - 5\,y = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Rozwiązanie.

Te zadania rzeczywiście są bardzo proste.

1. $\begin{cases} 5\,xy - y^2 = 9, \\ 2\,x - y = 3. \end{cases}$

   Ten układ rozwiązujemy standardową metodą poprzez podstawienie.
   Z drugiego równania wyznaczamy wzór dla zmiennej x, wyrażonej przez zmienną y i podstawiamy go do pierwszego równania:

   $$\begin{cases} 5\,xy - y^2 = 9, \\ x = \frac{3+y}{2}. \end{cases}$$

Uprośćmy równanie, mnożąc go przez 2, po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$15\,y + 5\,y^2 - 2\,y^2 = 18,$$

$$y^2 + 5\,y - 6 = 0.$$

Rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe i podstawiając wyznaczone wartości y do wzoru na x, otrzymamy 2 pary pierwiastków.

Odpowiedź: $(2;1)\,,\ \left(-\frac{3}{2};-6\right)$

2. $\begin{cases} x^2 - 5\,x\,y = 10, \\ x - 5\,y = 1. \end{cases}$

Ten układ jest bardzo prosty, podamy tylko odpowiedź do sprawdzenia.

Odpowiedź: $\left(10; \frac{9}{5}\right)$.

3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Ten układ też jest bardzo prosty - wystarczy dodać stronami obydwa równania - otrzymamy proste równanie względem zmiennej x:

$$x^2 = 16.$$

Po wyznaczeniu dwóch wartości zmiennej x, podstawiamy je do wybranego równania, wyznaczając y.

Odpowiedź: $(4;3)\,,(4;-3)\,,(-4;3)\,,(-4;-3)\,.$

Po tej "rozgrzewce" możemy przystąpić do ciekawszych zadań.

Przykład 7.

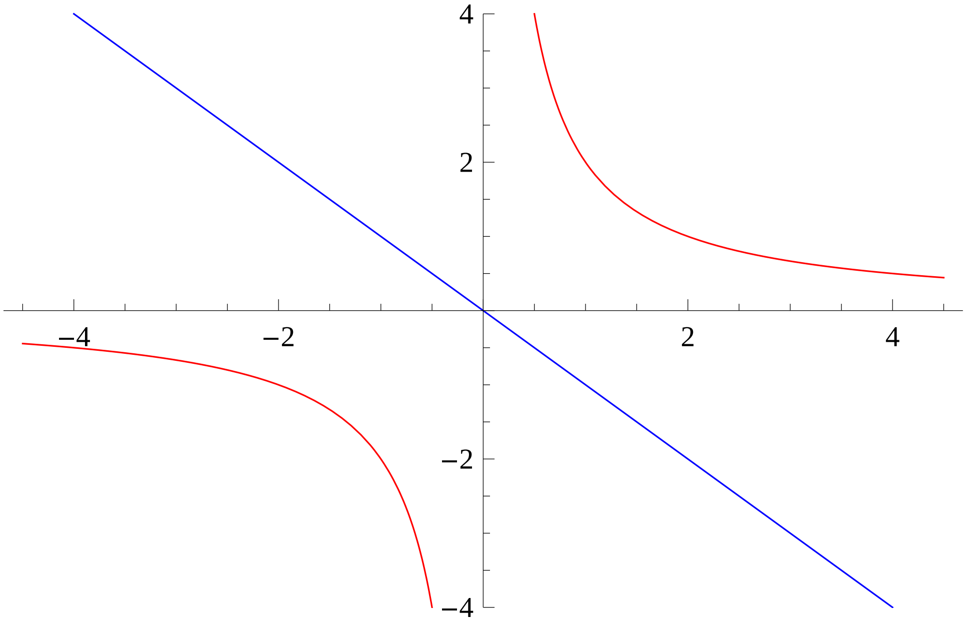
Wyjaśnić czy dane równania mają rozwiązania, wykorzystując w tym celu metodę graficzną.

1. $\frac{2}{x} = -x$;
2. $x^2 = -\frac{6}{x}$;
3. $x^3 = (x-4)^2$

Proszę nie śpieszyć się zaglądać do rozwiązania - warto samemu trochę "powalczyć" z zadaniem. Chyba że z tym równaniem poradziliście sobie błyskawicznie. Jeżeli tak - bardzo się cieszę, jeżeli mieliście problemy z rozwiązaniem - uszy do góry, wspólnie rozwiążemy jedno zadanie, a z resztą poradzicie sobie na pewno.

Rozwiązanie.

1. Zadania takiego typu rozwiązujemy w sposób następujący: tworzymy wykresy funkcji $y = \frac{15}{x}$ i $y = -x$. Jeżeli wykresy mają wspólne punkty - równanie ma pierwiastki, jeżeli nie - pierwiastków brak. Wykresem pierwszej funkcji jest hiperbola, a drugiej - prosta, która jest dwusieczną II i IV ćwiartki. Oczywiste jest, że te krzywe nie mają punktów wspólnych. Dobrze to widać na wykresie:


4
2
−2
−4
−4
−2
2
4

Odpowiedź: Równanie nie posiada pierwiastków.

2 pozostałe równania proszę rozwiązać samodzielnie. Podamy tylko odpowiedzi do sprawdzenia.

2. Równanie ma 1 pierwiastek.

3. Równanie ma 1 pierwiastek.

Przykład 8.

Ile pierwiastków może mieć układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = -x^2 + 4. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Liczba rozwiązań tego układu zależy od wartości parametru r w prawej części pierwszego równania. Wykresem krzywej, opisanej równaniem

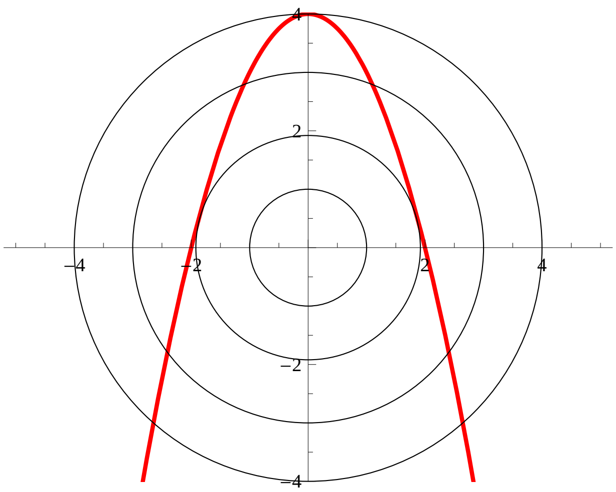
$$x^2 + y^2 = r^2$$

jest okrąg o promieniu r, środek którego znajduje się w punkcie o współrzędnych $(0;0)$ - jest to początek układu współrzędnych. Wykres drugiego równania - parabola, ramiona której skierowane są do dołu, a wierzchołek znajduje się w punkcie o współrzędnych $(0;4)$. Jeżeli wykresy funkcji przecinają się, to układ będzie miał tyle pierwiastków, ile punktów wspólnych będą mieć wykresy funkcji. Brak punktów wspólnych oznacza brak pierwiastków.
Jeżeli promień okręgu będzie na tyle mały, że okrąg nie przetnie i nie dotknie paraboli, to układ nie będzie miał rozwiązań.

Zacznijmy zwiększać promień. Doprowadzi to do tego, że w pewnym momencie dla określonej wartości promienia r parabola i okrąg będą mieć 2 punkty wspólne (wynika to z symetrii paraboli i okręgu).

Dalsze zwiększenie promienia prowadzi do tego, że obie krzywe mają po 2 punkty wspólne z każdej strony - to znaczy, że pierwiastków będzie 4.

Dalej zwiększając promień, w pewnym momencie uzyskamy sytuacje, w której okrąg przejdzie przez wierzchołek paraboli - układ będzie miał wtedy 3 rozwiązania. Dalsze zwiększenie promienia nie wpłynie już na liczbę pierwiastków - układ będzie miał 2 pierwiastki.



Odpowiedź: 0, 2, 3, 4.

Przykład 9.

Wyjaśnić dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

ma tylko jedno rozwiązanie, należące do zbioru liczb rzeczywistych i wyznaczyć to rozwiązanie.

Rozwiązanie.

Z analizy pierwszego równania wynika, że dla danych wartości x i y wartość z jest określona w sposób jednoznaczny:

$$z = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Po podstawieniu wyrażenia na z do drugiego równania, otrzymamy:

$$x^2 + x + y^2 + y = a.$$

Przekształćmy to równanie w sposób następujący:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Jeżeli $a+\frac{1}{2}<0$, to równanie (2) nie ma pierwiastków rzeczywistych, ponieważ przy x i y, będących liczbami rzeczywistymi, wyrażenie po lewej stronie równania może przyjmować znaczenia większe bądź równe 0. Jeżeli zaś $a+\frac{1}{2}>0$, to równanie (2), a zarazem cały układ, będą mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Stąd wynika, że układ będzie miał jedno rozwiązanie tylko w przypadku, gdy $a+\frac{1}{2}=0$.

Równanie (2) przyjmie postać:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

i ma jedyne rozwiązanie: $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Z pierwszego równania wyznaczamy z. Ostatecznie wnioskujemy, że układ ma jedyne rozwiązanie tylko dla wartości $a = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Dla $a = -\frac{1}{2}$ jedynym rozwiązaniem są:

$$x = -\frac{1}{2}, \qquad y = -\frac{1}{2}, \qquad z = \frac{1}{2}.$$

Przykład 10.

Wyznaczyć wszystkie pierwiastki układu równań, będące liczbami rzeczywistymi:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2\, y + 2\, x\, y^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

Rozwiązanie.

Wykonując elementarne przekształcenia z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (znowu te wzory!!!), zapiszmy dany układ w postaci:

$$\begin{cases} (x+y)\,(x^2 - x\,y + y^2) = 1, \\ y\,(x+y)^2 = 2. \end{cases}$$

Następnie podzielmy pierwsze równanie przez drugie stronami. Po elementarnych przekształceniach otrzymamy:

$$y^2 - 3\,x\,y + 2\,x^2 = 0.$$

Rozwiązując otrzymane równanie kwadratowe względem niewiadomej y, otrzymamy 2 rozwiązania:

$$y_1 = x,\;\; y_2 = 2\,x.$$

Następnie podstawiając to rozwiązanie do drugiego równania z danego nam układu, wyznaczamy jego rzeczywiste pierwiastki. Sprawdźcie poprawność rozwiązania poprzez podstawienie.

Odpowiedź:

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4},\ y_1 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4};$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3},\ y_2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}.$$

5 Równania, nierówności i układy równań, zawierające wartość bezwzględną

Równania i nierówności, zawierające wartość bezwzględną, sprawiają dużo trudności uczniom. Pokażemy na prostych i nie całkiem prostych zadaniach, jak należy rozwiązywać takiego typu zadania. Mamy nadzieję, że po tej lekturze bez problemu poradzicie sobie z każdym zadaniem.

Przykład 11.

Rozwiązać nierówność:

$$|\, x^2 - 2\,x - 8\,| > 5.$$

Rozwiązanie.

Przypomnijmy definicję wartości bezwzględnej:

$$|\, t \,| = \begin{cases} t, & \text{dla} \quad t \geqslant 0; \\ -\, t, & \text{dla} \quad t < 0. \end{cases}$$

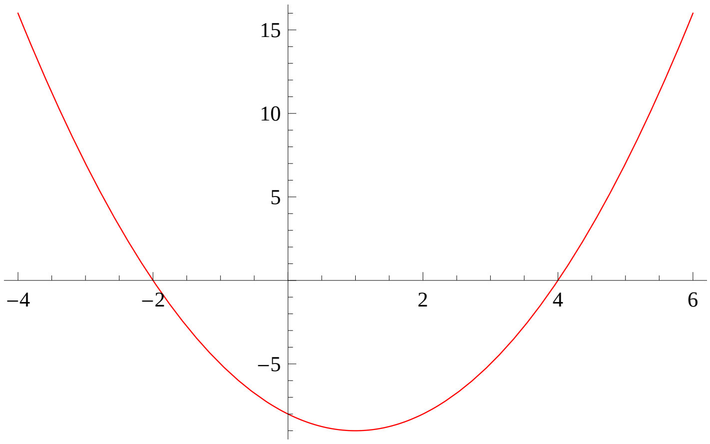
Aby rozwiązać równanie bądź nierówność, w której niewiadoma znajduje się pod znakiem wartości bezwzględnej, należy postępować w taki oto sposób:

1. Wyznaczamy miejsca zerowe wszystkich wyrażeń pod znakiem wartości bezwzględnej; zaznaczamy te liczby na osi liczbowej, dzieląc ją w taki sposób na przedziały.

2. Następnie w każdym z zaznaczonych przedziałów zapisujemy dane nam równanie lub nierówność bez wartości bezwzględnej (robimy to zgodnie z definicją wartości bezwzględnej, oceniając w każdym z przedziałów znaki wyrażeń).

3. Z otrzymanych rozwiązań wybieramy tylko te, które należą do przedziałów, w których rozwiązywaliśmy równania bądź nierówności po opuszczeniu wartości bezwzględnej.

Zgodnie z podanym schematem, pierwszym etapem rozwiązania danego nam zadania będzie wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego pod znakiem wartości bezwzględnej i zaznaczenie ich na osi liczbowej. Narysujmy wykres trójmianu kwadratowego:



Jeżeli $x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$, to trójmian kwadratowy przyjmuje wartości większe bądź równe 0, dana nierówność przyjmie postać:

$$x^2 - 2\,x - 8 > 5,$$

rozwiązaniem będą: $x \in \left(-\infty, 1 - \sqrt{14}\right) \cup \left(1 + \sqrt{14}, +\infty\right).$

Jeżeli $x \in (-2, 4)$, to

$$-(x^2 - 2\,x - 8) > 5,$$

rozwiązaniem będą: $x \in (-1, 3)$.

Odpowiedź: $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{14}\right) \cup (-1, 3) \cup \left(1+\sqrt{14}, +\infty\right).$

Przykład 12.

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} |\,x-1\,| + |\,y-5\,| = 1, \\ y = 5 + |\,x-1\,|. \end{cases}$$

Proszę nie zaglądać do rozwiązania i samodzielnie wyznaczyć rozwiązania układu równań. Proszę przy tym zmierzyć czas, potrzebny na otrzymanie wyniku.

Rozwiązanie.

Pewnie poradziłeś sobie, trochę się napracowałeś, ale po podstawieniu uzyskałeś tożsamość - to dobrze! Nie przypadkowo poprosiliśmy o zmierzenie czasu, potrzebnego na rozwiązanie. Pokażemy, jak z pomocą prostych przekształceń, wykorzystując definicję wartości bezwzględnej i odrobinę logiki, możemy skrócić czas, niezbędny na rozwiązanie układu.

Z drugiego równania układu i definicji wartości bezwzględnej możemy zapisać:

$$y - 5 = 1 - |x - 1| \geqslant 0,$$

stąd $y \geqslant 5$. Wtedy pierwsze równanie może być zapisane w postaci:

$$y - 5 = 1 - |x - 1|.$$

Dodając stronami to równanie i drugie równanie układu, otrzymujemy:

$$2\,(y - 5) = 1.$$

Stąd $y = \frac{11}{2}$. Z drugiego równania wyznaczamy

$$|x - 1| = \frac{1}{2},$$

stąd wynika że

$$x - 1 = \pm\frac{1}{2},$$

czyli

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ostatecznie układ ma 2 pary pierwiastków.

Odpowiedź:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad y_1 = \frac{11}{2};$$

$$x_2 = \frac{3}{2}, \qquad y_2 = \frac{11}{2}.$$

Przykład 13.

Wyznaczyć pary liczb całkowitych x i y, spełniających nierówność:

$$\begin{cases} y - |\, x^2 - 2\,x \,| + \frac{1}{2} > 0, \\ y + |\, x - 1 \,| < 2. \end{cases}$$

Proszę nie zaglądać do rozwiązania i samodzielnie wyznaczyć rozwiązania układu równań.

Rozwiązanie.

Pewnie nie łatwo było wyznaczyć rozwiązania tego nietypowego zadania, o ile w ogóle udało się tego dokonać. Za pewną inspirację mogło posłużyć rozwiązanie, zaproponowane w Przykładzie 12.

Na początku zapiszmy układ nierówności w taki oto sposób:

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2} > |\, x^2 - 2\,x \,|, \\ y < 2 - |\, x - 1 \,|. \end{cases}$$

Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że dla wszystkich wartości x

$$|x^2 - 2\,x| \geqslant 0, \qquad |x - 1| \geqslant 0,$$

stąd wnioskujemy, że

$$-\frac{1}{2} < \; y \; < 2.$$

Jedynymi liczbami całkowitymi y, spełniającymi tą podwójną nierówność, są liczby 0 i 1. Stąd wynika, że rozwiązania układu nierówności, będące liczbami całkowitymi, należy poszukiwać tylko dla wartości $y = 0$ i $y = 1$. Rozpatrzmy obydwa przypadki.

Przypadek 1.

Jeżeli $y = 0$, to układ nierówności przyjmuje postać:

$$\begin{cases} |\, x^2 - 2\,x \,| < \frac{1}{2}, \\ |\, x - 1 \,| < 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem drugiej nierówności jest trójka liczb całkowitych: 0, 1, 2. Podstawiając te wartości do pierwszej nierówności, upewniamy się, że liczby 0 i 2 spełniają i ją. Więc przypadkowi $y = 0$, odpowiadają dwie pary rozwiązań:

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0;$$

$$x_2 = 2, \qquad y_2 = 0.$$

Drugi przypadek proszę rozwiązać samodzielnie.

Odpowiedź:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0; \qquad x_2 = 2,\ y_2 = 0, \qquad x_3 = 1,\ y_3 = 1.$$

6 Zadania geometryczne

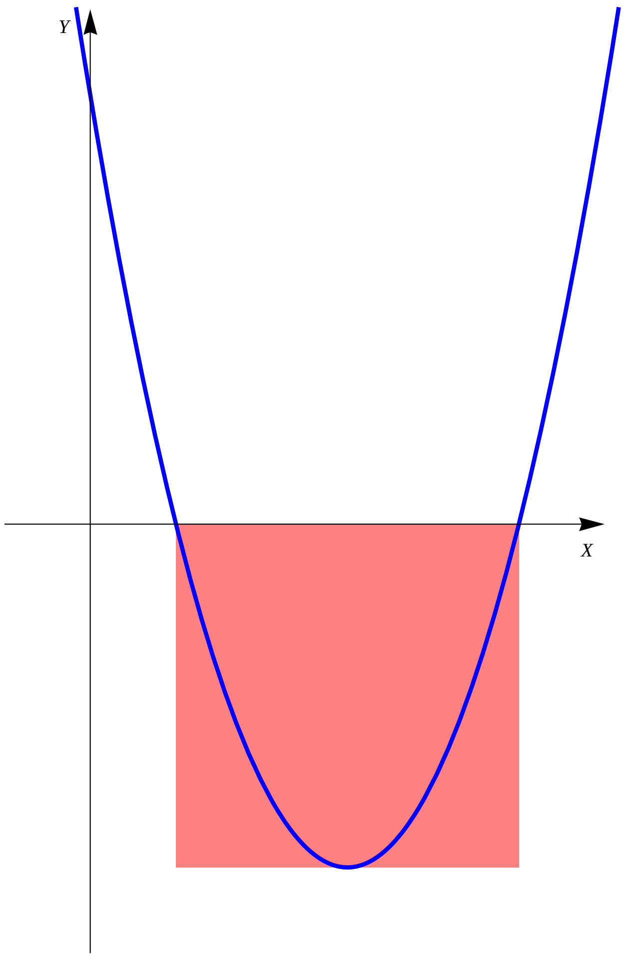
A teraz na prostych zadaniach zademonstrujemy zastosowanie funkcji kwadratowej w zadaniach geometrycznych, na przykład przy obliczaniu pola figur. Przyjemnego liczenia!

Przykład 14.

Oblicz pole prostokąta zaznaczonego na rysunku.

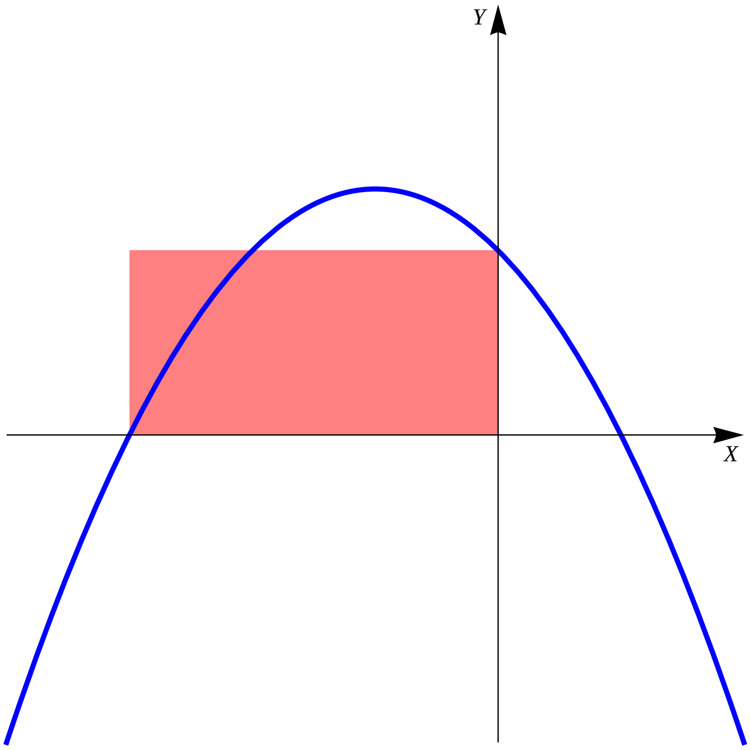
1. Równanie paraboli:

$$y = x^2 - 6x + 5.$$



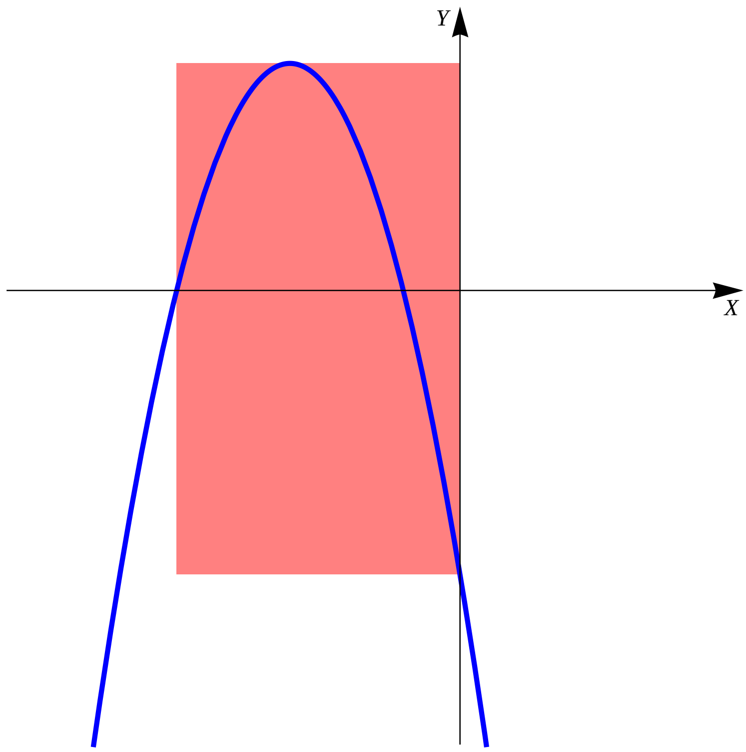
2. Równanie paraboli:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3.$$



3. Równanie paraboli:

$$y = -x^2 - 6x + 3.$$



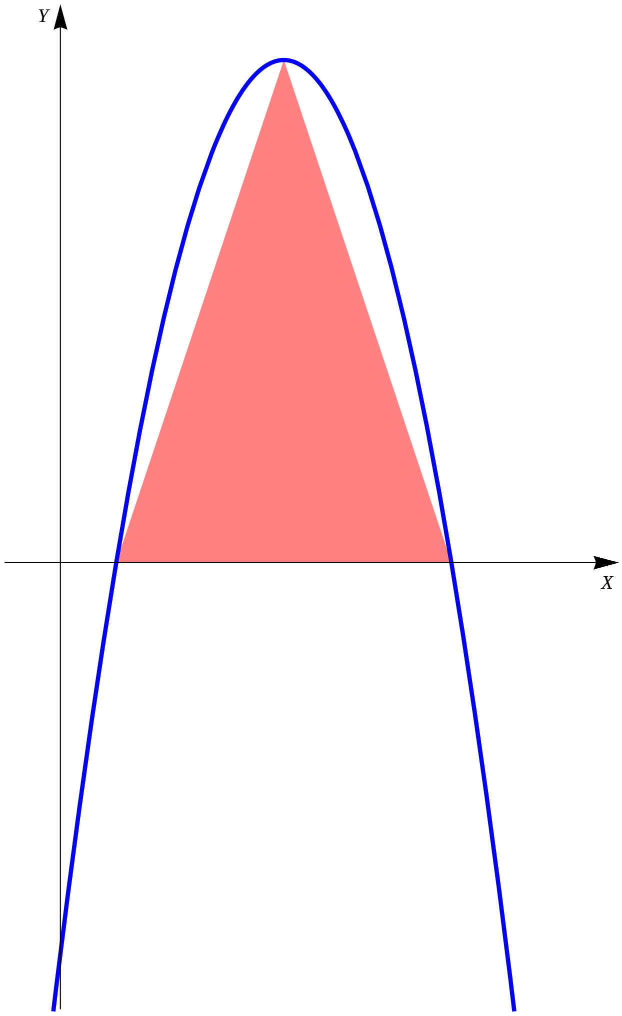
Odpowiedzi:

1. 16,
2. 18,
3. 45.

Przykład 15.

Oblicz pole figur - trójkąta równoramiennego, rombu oraz trapezu, zacieniowanych na rysunkach.

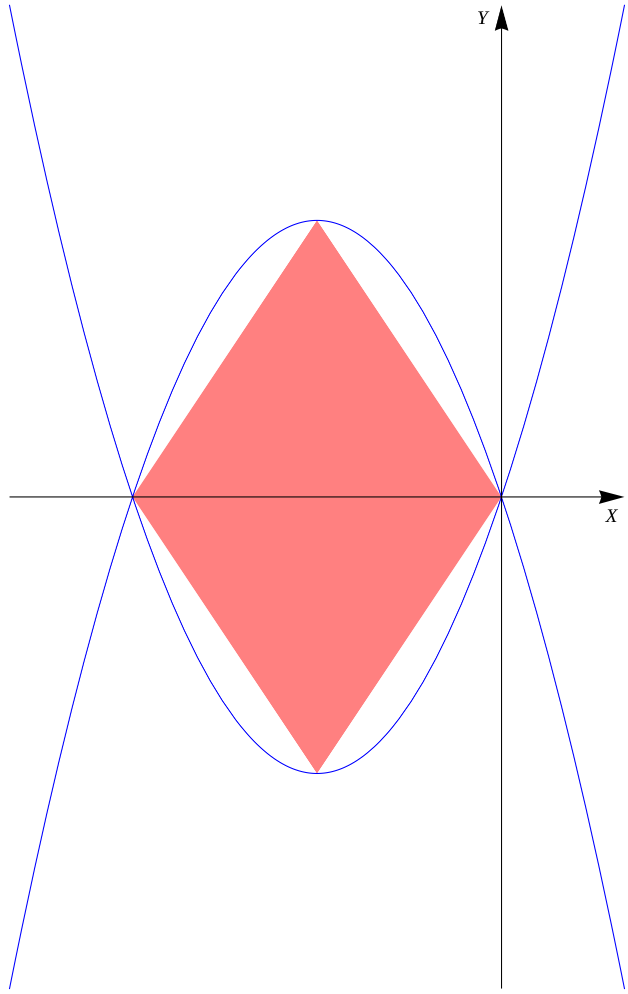
1. Równanie paraboli: $y = -x^2 + 8x - 7$.



2. Równania parabol:

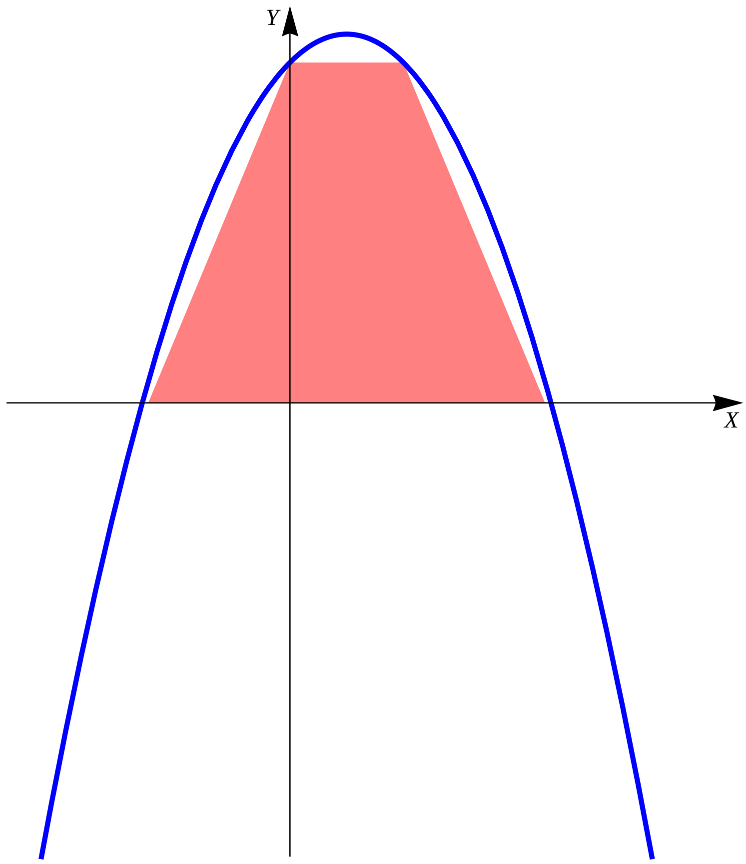
$$y_1 = -\frac{1}{2}x^2 - 3x;$$

$$y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x.$$



3. Równanie paraboli:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 6.$$



Odpowiedzi:

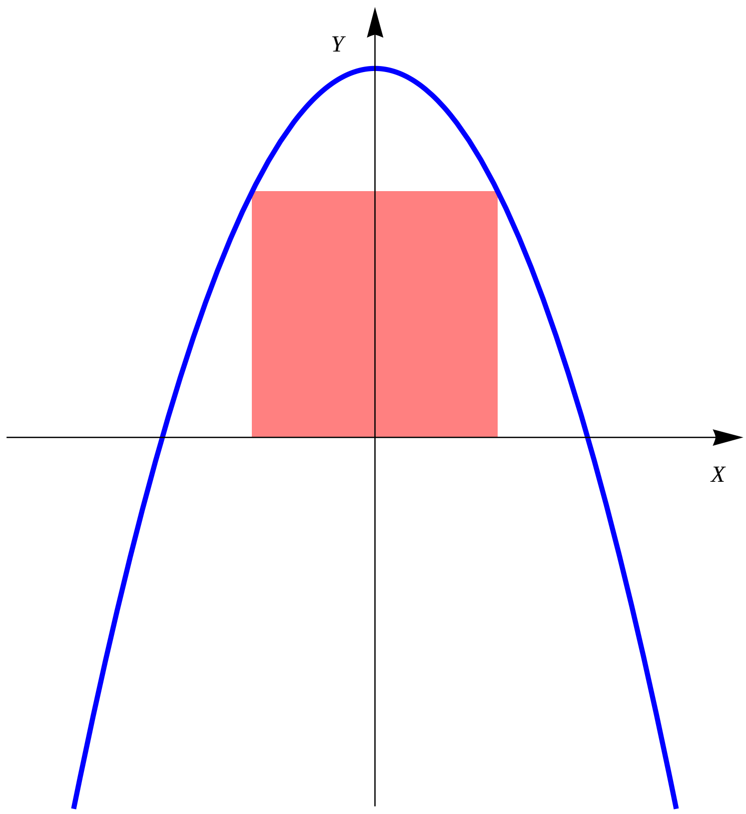
1. 27,
2. 27,
3. 36.

Przykład 16.

Parabola na rysunku jest wykresem funkcji

$$y = -x^2 + 3.$$

Zacieniowana figura to kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na tej paraboli, a pozostałe dwa - na osi X. Oblicz pole tego kwadratu.



Odpowiedź: 4

Literatura

[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] M. Antek, P. Grabowski, Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym, Nowa Era , Warszawa 2006.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Małek, Geometria. Zbiór zadań cz. 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1993.

[5] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.