Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom rozszerzony

Funkcja logarytmiczna

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na końcu poprzedniego:

Definicję i własności funkcji logarytmicznej poprzedzimy przypomnieniem własności potęgi o wykładniku rzeczywistym oraz własności funkcji wykładniczej. Na początek przyjmiemy następujące oznaczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}$,

$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,

$[x]$ - część całkowita (cecha) liczby rzeczywistej x.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Potęga o wykładniku rzeczywistym ma własności sformułowane w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b oraz dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości:*

(i) $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$,

(ii) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(iii) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(v) $a^x b^x = (ab)^x$,

(vi) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Z następnym:

W dowodach własności funkcji logarytmicznej potrzebne nam będą następująca własność potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Lemat 1. *Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wówczas $a^x > 0$. Ponadto*

(i) jeśli $a > 1$, to $a^x > 1$ dla $x > 0$,

(ii) jeśli $a \in (0, 1)$, to $a^x \in (0, 1)$ dla $x > 0$.

Z następnym:

Przypomnimy definicję funkcji wykładniczej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 1. **Funkcją wykładniczą o podstawie** a, gdzie a jest taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że $a \neq 1$, nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ określoną wzorem

$$f(x) = a^x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 1. Poprawność określenia funkcji wykładniczej wynika z Lematu ?? ($a^x > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$). Ponadto, funkcji stałej $\mathbb{R} \ni x \mapsto 1$ **nie traktuje się** jako szczególnego przypadku funkcji wykładniczej, stąd założenie $a \neq 1$. Funkcję wykładniczą o podstawie a oznacza się też symbolem $\exp_a$. Zatem

$$\exp_a(x) = a^x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 2. Dla funkcji wykładniczej formułuje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. *Ustalmy dodatnią liczbę rzeczywistą* a*. Dla dowolnie ustalonego* $x \in \mathbb{R}$ *niech* (x_n) *będzie dowolnym takim ciągiem liczb rzeczywistych, że* $x_n \neq x$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x.$$

Twierdzenie ?? implikuje w istocie ciągłość funkcji wykładniczej $\exp_a$ dla $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (temat osobnej prezentacji).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przed przypomnieniem własności funkcji wykładniczej przytoczymy niezbędne definicje. Rozpoczniemy od definicji funkcji różnowartościowej.

Definicja 2. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. Funkcję f nazywamy **różnowartościową**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Na końcu poprzedniego:

Warunek definicyjny pozwalający stwierdzić lub wykluczyć różnowartościowość funkcji jest bardzo intuicyjny, ale tak intuicyjnego warunku nie można wykorzystać do dowodu różnowartościowości funkcji. W tym celu użyć należy następującego lematu.

Lemat 2. *Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. Funkcja f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right).$$

Z następnym:

Kolejną ważną własnością funkcji jest jej monotoniczność.

Definicja 3. Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem i niech funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ odwzorowuje zbiór X w zbiór liczb rzeczywistych. Mówimy, że funkcja f jest

(i) **rosnąca w zbiorze X**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))\,;$$

(ii) **malejąca w zbiorze X**, jeśli spełniony jest warunek

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))\,.$$

Na końcu poprzedniego:

Można sformułować następujące, łatwiejsze w użyciu, warunki równoważne na to, aby funkcja była rosnąca bądź też malejąca.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 3. *Niech* $X \subset \mathbb{R}$ *będzie niepustym zbiorem i niech* $f : X \to \mathbb{R}$. *Funkcja* f *jest*

(i) rosnąca w zbiorze X *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0\right);$$

(ii) malejąca w zbiorze X *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} \left(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0\right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Ostatnim istotnym dla nas pojęciem jest definicja zbioru wartości funkcji.

Definicja 4. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. **Zbiorem wartości funkcji** f nazywamy zbiór $W_f \subset Y$,

$$W_f = \left\{ y \in Y : \bigvee_{x \in X} y = f(x) \right\}.$$

Z następnym:

Przypomnimy teraz własności funkcji wykładniczej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 3. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) Zbiorem wartości funkcji $\exp_a$ *jest przedział* $(0, \infty)$.

(ii) Dla $a > 1$ *funkcja* $\exp_a$ *jest rosnąca w* $\mathbb{R}$.

(iii) Dla $a \in (0, 1)$ *funkcja* $\exp_a$ *jest malejąca w* $\mathbb{R}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Z Twierdzenia ?? wyprowadza się kolejne ważne własności funkcji wykładniczej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 1. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) Funkcja $\exp_a$ *jest funkcją różnowartościową.*

(ii) Jeśli $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} = a^{x_2} \iff x_1 = x_2$.

(iii) Jeśli $a > 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 < x_2$.

(iv) Jeśli $a > 1$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} \leqslant a^{x_2} \iff x_1 \leqslant x_2$.

(v) Jeśli $a \in (0, 1)$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} < a^{x_2} \iff x_1 > x_2$.

(vi) Jeśli $a \in (0, 1)$ *oraz* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *to* $a^{x_1} \leqslant a^{x_2} \iff x_1 \geqslant x_2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

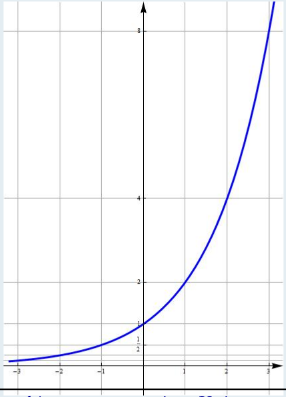
Z następnym:

Znając własności funkcji wykładniczej, a w szczególności jej ciągłość i monotoniczność, przypomnimy sobie, jak wyrysować wykresy funkcji wykładniczych dla pewnych a.

Przykład 1. Narysujemy wykres funkcji $\exp_2$. W tym celu sporządzimy tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

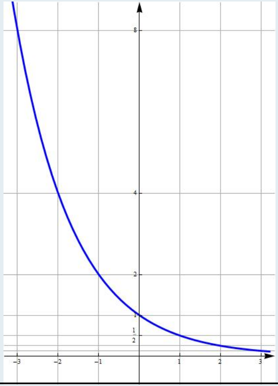
na podstawie której można otrzymać następujący wykres



Przykład 2. Narysujemy wykres funkcji $\exp_{\frac{1}{2}}$. Jak poprzednio, wykonamy tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

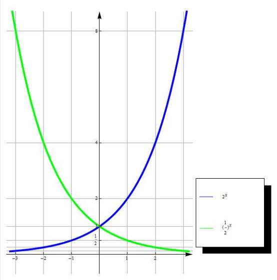
a następnie wyrysujemy wykres naszej funkcji



Definicja 5. Wykres dowolnej funkcji wykładniczej nazywamy **krzywą wykładniczą**.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 3. Porównując otrzymane wykresy funkcji wykładniczych $\exp_2$, $\exp_{\frac{1}{2}}$ (np.wyrysowując je w jednym układzie współrzędnych)



można sią przekonać, że krzywe wykładnicze $y = 2^x$ oraz $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ są symetryczne względem osi OY. Stąd mamy

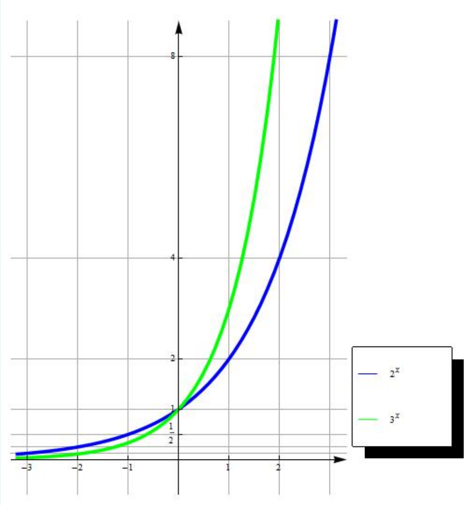
Wniosek 2. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *oraz* $a \neq 1$. *Krzywe wykładnicze* $y = a^x$ *oraz* $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ *są symetryczne względem osi* OY.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Przypomnimy jeszcze, jak położone są względem siebie wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw a oraz b.

Przykład 3. Wykreślając krzywe wykładnicze $y = 2^x$ oraz $y = 3^x$ w jednym układzie współrzędnych



Można zauważyć, że $3^x < 2^x$ dla $x < 0$ oraz $3^x > 2^x$ dla $x > 0$.

Na końcu poprzedniego:

Prowadzi to do następującej, znacznie ogólniejszej obserwacji.

Wniosek 3.

(i) Dla ustalonych liczb rzeczywistych $1 < a < b$ *zachodzi*

$$b^x < a^x \quad \textit{dla} \ \ x < 0 \qquad \textit{oraz} \qquad b^x > a^x \quad \textit{dla} \ \ x > 0.$$

(ii) Dla ustalonych liczb rzeczywistych $0 < a < b < 1$ *zachodzi*

$$b^x > a^x \quad \textit{dla} \ \ x < 0 \qquad \textit{oraz} \qquad b^x < a^x \quad \textit{dla} \ \ x > 0.$$

Pusta strona:

Przypomnijmy na koniec, jak rozwiązywane były proste równania wykładnicze.

Przykład 4. Rozwiązać równanie $8^x = \frac{1}{4}$.

Zauważmy, że

$$8^x = 2^{3x} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{4} = 2^{-2},$$

Rozważane równanie równoważne jest więc następującemu:

$$2^{3x} = 2^{-2},$$

skąd wykorzystując Wniosek ?? (ii) otrzymamy $3x = -2$. Zatem $x = -\frac{2}{3}$.

Z poprzednim:

Przedstawiona procedura sprowadza się do sprowadzenia rozważanego równania do równania równoważnego, w którym występują jedynie potęgi pewnej różnej od 1 rzeczywistej liczby dodatniej. Nie zawsze jednak potrafimy sprowadzić równanie wykładnicze do takiej postaci, która umożliwia wykorzystanie własności (ii) z Wniosku ??.

Przykład 5. Rozwiązać równanie $2^x = 5$.

Z poprzednim:

Okazuje się, że liczby 5 nie potrafimy przedstawić w postaci potęgi liczby 2, ani też liczby 2 nie potrafimy przedstawić w postaci pewnej potęgi liczby 5. Dzieje się tak dlatego, gdyż posiadane wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej nie są wystarczające, aby odpowiedzieć na pytanie:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 1. Do jakiej potęgi należy podnieść liczbę 2, aby otrzymać 5.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z poprzednim:

Z pomocą przychodzą tu logarytmy. Przejdziemy więc teraz do pojęcia logarytmu z dodatniej liczby rzeczywistej. Poprawność naszej definicji wynika z własności funkcji wykładniczej będącej z jednej strony konsekwencją różnowartościowości funkcji wykładniczej, z drugiej zaś strony własność ta wynika z Twierdzenia ?? (i). Własność tą sformułujemy w postaci następującego lematu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Lemat 4. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Wówczas dla każdej liczby dodatniej* b *równanie*

$$a^x = b$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Możemy teraz poprawnie sformułować naszą definicję.

Definicja 6. **Logarytmem z liczby dodatniej b przy podstawie $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$**, nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że

$$a^c = b.$$

Uwaga 4. Na pomysł wprowadzenia logarytmów wpadł szkocki baron John Napier, który matematykę traktował jako swoje hobby.

Logarytmy (ze względu na ich własności, które opiszemy dalej) stanowiły ogromny postęp w metodach rachunkowych, przyczyniając się do rozwoju m.in. astronomii i nawigacji. To ich zastosowanie do obliczeń astronomicznych umożliwiło Johanowi Keplerowi odkryć prawa dotyczące ruchu planet. Własności logarytmów pozwoliły też na skonstruowanie suwaka logarytmicznego, który był powszechnie używany przez inżynierów jeszcze w latach 70-tych poprzedniego wieku.

Nazwę "logarytm" wprowadził sam Napier od greckich słów *logos* – *nauka (wiedza)* oraz *arithmos* – *liczenie*.

Uwaga 5. Na oznaczenie logarytmu z liczby b przy podstawie a używa się symbolu $\log_a b$. Od tej konwencji są dwa wyjątki:

1) logarytm przy podstawie 10 z liczby b oznaczamy symbolem $\log b$ i nazywamy **logarytmem dziesiętnym**,

2) logarytm przy podstawie e (liczba niewymierna będąca granicą ciągu $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) z liczby b oznaczamy symbolem $\ln b$ i nazywamy **logarytmem naturalnym**.

Definicja logarytmu równoważna jest następującemu warunkowi: niech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Wtedy

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b. \tag{1}$$

Na końcu poprzedniego:

Dla lepszego zrozumienia definicji logarytmu, proponujemy wykonać następujące ćwiczenie wykorzystując warunek (??).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 1. Oblicz:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 81$,

b) $\log_4 2$,

c) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$,

d) $\log_2 \sqrt{8}$,

e) $\log_\pi 1$,

f) $\log 0,001$,

g) $\ln e^2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

a) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, bo $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$,

b) $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, bo $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$,

c) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = 6$, bo $\left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$,

d) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$, bo $2^{\frac{3}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}$,

e) $\log_\pi 1 = 0$, bo $\pi^0 = 1$,

f) $\log 0,001 = -3$, bo $10^{-3} = 0,001$,

g) $\ln e^2 = 2$, bo $e^2 = e^2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Bezpośrednią konsekwencją równoważności (??) są następujące tożsamości:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 4. *Niech* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. *Wtedy*

$$\log_a a^c = c \tag{2}$$

oraz

$$a^{\log_a b} = b. \tag{3}$$

Z następnym:

W badaniu własności funkcji logarytmicznej wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 5. *Niech a będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że $a \neq 1$. Dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej zachodzi równoważność*

$$\log_a x = 0 \iff x = 1. \tag{4}$$

Ponadto

(i) jeśli $a > 1$, to $\log_a x > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

(ii) jeśli $a \in (0, 1)$, to $\log_a x < 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$.

Dowód. Równoważność (??) jest konsekwencją równoważności (??).
(i) Niech teraz $a > 1$, $x > 1$ i przypuśćmy, że $\log_a x \leqslant 0$. Wówczas, wykorzystując Wniosek ?? (i) oraz równość (??) z Wniosku ?? otrzymamy

$$x = a^{\log_a x} \leqslant a^0 = 1,$$

co jest sprzeczne z założeniem $x > 1$. Zatem $\log_a x > 0$.
(ii) Załóżmy, że $a \in (0, 1)$, $x > 1$ i przypuśćmy, że $\log_a x \geqslant 0$. Z Wniosku ?? (ii) oraz równości (??) z Wniosku ?? dostaniemy

$$x = a^{\log_a x} \leqslant a^0 = 1,$$

co przeczy założeniu $x > 1$. Stąd $\log_a x < 0$. □

Z następnym:

W celu utrwalenia poznanych własności logarytmów proponujemy wykonać następujące zadanie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1.

1. Obliczyć:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{4})^7$ b) $\log_{\sqrt{7}}\frac{49}{\sqrt{7}}$ c) $\log_{25}\sqrt[3]{5^5}$

d) $\log_{\sqrt[5]{3}}\frac{\sqrt{3}}{9}$ e) $\log_{\sqrt[3]{2}} 8\sqrt[4]{2}$ f) $\log_{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

g) $2^{\log_2 7}$ h) $10^{\log 0,4}$ i) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 11}$.

2. Z podanego wzoru wyznaczyć wskazaną wielkość

a) $P = ma^t$, t b) $R = e^{-\frac{x}{y}}$, y

c) $d = d_0 + k10^{-m}$, m d) $m = m_0 - v\log_2 t$, t

e) $V = V_0\ln(1+x)$, x f) $t = -\frac{\ln\frac{N}{N_0}}{k}$, N

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Do Zadania ?? podamy jedynie prawidłowe odpowiedzi.

Odp.

1.

a) $-\frac{14}{3}$ b) 3 c) $\frac{5}{6}$

d) $-\frac{15}{2}$ e) $\frac{39}{4}$ f) $-\frac{2}{3}$

g) 7 h) $0,4$ i) $\frac{1}{11}$.

2.

a) $t = \log_a \frac{P}{m}$ b) $y = -\frac{x}{\ln R}$

c) $m = -\log \frac{d-d_0}{k}$ d) $t = 2^{\frac{m_0-m}{v}}$

e) $x = e^{\frac{V}{V_0}} - 1$ f) $N = N_0 e^{-tk}$.

Z następnym:

Sformułujemy teraz i udowodnimy kolejne ważne własności logarytmu.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 4. *Niech* $a, x, y, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ *oraz* $y > 0$. *Wówczas*

(i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

(ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

(iii) $\log_a(x^p) = p\log_a x$,

(iv) $\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Przeprowadzimy dowody tych własności.

Dowód (i). Na mocy własności (??) z Wniosku ?? oraz Twierdzenie ?? (ii) mamy

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Wówczas, na podstawie różnowartościowości funkcji $\exp_a$ (Wniosek ?? (ii)), z powyższej równości otrzymamy

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Dowód (ii). Wykorzystując równość (??) z Wniosku ?? oraz Twierdzenie ?? (iii) mamy

$$a^{\log_a\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

Różnowartościowość funkcji $\exp_a$ (Wniosek ?? (ii)) oraz powyższa równość implikują

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Dowód (iii). Na podstawie własności (??) z Wniosku ?? oraz Twierdzenie ?? (iv) mamy

$$a^{\log_a x^p} = x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{(\log_a x)\cdot p} = a^{p \log_a x}.$$

Wykorzystując różnowartościowość funkcji $\exp_a$ (Wniosek ?? (ii)), z powyższej równości otrzymamy

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

Dowód (iv). Z równości (??) w Wniosku ?? oraz z definicji logarytmu otrzymamy

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{p}\log_a x} = a^{p\cdot\frac{1}{p}\log_a x} = a^{\log_a x} = x,$$

co oznacza, że

$$\log_{a^p} x = \frac{1}{p}\log_a x$$

i kończy dowód twierdzenia.

□

Uwaga 6. Należy tutaj wyraźnie podkreślić, że założenie dodatniości liczb x oraz y w Twierdzeniu ?? **jest istotne**. Można rozważać liczbę $\log_2((-3)\cdot(-5))$ równą oczywiście $\log_2 15$, lecz w tym przypadku nie można skorzystać ze wzoru na logarytm iloczynu liczb (Twierdzenie ?? (i)).

Z następnym:

Udowodnimy jeszcze ważne twierdzenie upraszczające rachunki na logarytmach o różnych podstawach.

Twierdzenie 5 (**o zamianie podstawy logarytmu**). *Jeśli* a, b, c *są takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że* $a \neq 1$ *oraz* $c \neq 1$*, to*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Dowód. Z Twierdzenia ?? (iii) otrzymamy

$$\log_c b = \log_c \left(a^{\log_a b}\right) = \log_a b \cdot \log_c a.$$

Wykorzystując Wniosek ?? (przy naszych założeniach $\log_c a \neq 0$) otrzymamy

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$\square$

Z następnym:

Wzór na zamianę podstawy logarytmu można zapisać w innej, równoważnej postaci.

Wniosek 5 (**twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu**). *Jeśli* a, b, c *są takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że* $a \neq 1$ *oraz* $b \neq 1$, *to*

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

Z następnym:

Z Twierdzenia ?? o zamianie podstawy logarytmu wynika też kolejny wniosek.

Wniosek 6. *Jeśli* a, c *są takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że* $a \neq 1$ *oraz* $c \neq 1$*, to*

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}.$$

Z następnym:

Pokażemy teraz zastosowanie udowodnionych własności logarytmów w rachunkach.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 6. Obliczyć $\sqrt[3]{7^{5-\frac{3}{4}\log_7 16}}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Mamy zatem

$$\sqrt[3]{7^{5-\frac{3}{4}\log_7 16}} = \sqrt[3]{7^{5-\log_7 16^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt[3]{7^{5-\log_7\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{7^{5-\log_7 2^3}} = \sqrt[3]{7^{5-\log_7 8}} = \sqrt[3]{7^{5-8}} = \sqrt[3]{7^{-3}} = \frac{1}{7}.$$

Przykład 7. Wyrazić $\log_{20} 12$ poprzez wielkości $a = \log_2 10$ oraz $b = \log 3$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\log_{20} 12 &= \log_{20}\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\log_{20} 2 + \log_{20} 3 \\
&= 2\frac{1}{\log_2 20} + \frac{1}{\log_3 20} = 2\frac{1}{\log_2(2 \cdot 10)} + \frac{1}{\log_3(2 \cdot 10)} \\
&= 2\frac{1}{\log_2 2 + \log_2 10} + \frac{1}{\log_3 2 + \log_3 10} \\
&= 2\frac{1}{1 + \log_2 10} + \frac{1}{\log_3 10 \cdot \log 2 + \frac{1}{\log 3}} \\
&= 2\frac{1}{1 + \log_2 10} + \frac{1}{\frac{1}{\log 3} \cdot \frac{1}{\log_{10} 2} + \frac{1}{\log 3}} \\
&= 2\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{b}} = 2\frac{1}{1 + a} + \frac{ab}{1 + a} = \frac{2 + ab}{1 + a}.
\end{aligned}$$

Z następnym:

Dla utrwalenia przedstawionych własności proponujemy rozwiązać następujące zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. 1. Obliczyć:

a) $\log 4 - \log 5 + \log 125$ b) $\log_2 6 + \log_2 12 - \log_2 \frac{9}{4}$
c) $\ln 2e - \ln 6 + \ln 3e^2$ d) $\log_3 v + \log_3 6v - \log_3 2v$.

2. Przyjmując, że $\log 4 \approx 0,602$ obliczyć:

a) $\log 400$ b) $\log 0,04$ c) $\log(4 \cdot 10^{-6})$.

3. Przyjmując, że $\log_3 2 = a$ oraz $\log_5 3 = a$ wyznaczyć

a) $\log 3$ b) $\log_4 15$ c) $\log_3 12\sqrt[3]{5}$ d) $\log_{\sqrt{2}} 5\sqrt{3}$.

4. Wykazać, że

a) $\log_4 81 + \log_{16} 81 = \log_2 27$
b) $\log_9 4 + \log_{\frac{1}{3}} 10 = \log_3 0,2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

1. a) 2 b) 4 c) 3 d) $1 + \log_3 v$.

2. a) $2,602$ b) $-1,398$ c) $-5,398$.

3. a) $\frac{b}{ab+1}$ b) $\frac{b+1}{2ab}$ c) $2a + 1 + \frac{1}{3b}$ d) $\frac{2+b}{ab}$.

4.
   a) *Wskazówka*: $\log_4 81 = \frac{1}{2}\log_2 81$, $\log_{16} 81 = \frac{1}{4}\log_2 81$
   b) *Wskazówka*: porównaj a).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania funkcji logarytmicznej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 7. **Funkcją logarytmiczną o podstawie** a, gdzie a jest taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że $a \neq 1$, nazywamy funkcję $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x) = \log_a x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Na końcu poprzedniego:

Analizując definicję logarytmu można zaobserwować, że funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna o tej samej podstawie są ze sobą ściśle związane. Związek, który można w tym konkretnym przypadku tu zaobserwować, ma swoją ścisłą matematyczną definicję. Mowa w tym przypadku o wzajemnej odwrotności funkcji. W celu doprecyzowania tego pojęcia potrzebować będziemy kolejnych definicji.

Definicja 8. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y. Funkcję f nazywamy **bijekcją**, jeśli f jest funkcją różnowartościową oraz zbiorem wartości W_f funkcji f jest jej przeciwdziedzina, tzn.

$$W_f = Y.$$

Z następnym:

Pokażemy teraz, jak dla funkcji będącej bijekcją skonstruować można funkcję do niej odwrotną. W tym celu wykorzystamy następujący lemat.

Lemat 6. *Niech* X *oraz* Y *będą niepustymi zbiorami i niech* $f : X \to Y$ *będzie bijekcją. Wówczas funkcja* $g : Y \to X$ *określona warunkiem*

$$\bigwedge_{y \in Y} \left(g(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y \right),$$

jest poprawnie zdefiniowaną bijekcją odwzorowującą zbiór Y *na zbiór* X.

Na końcu poprzedniego:

Możemy teraz zdefiniować funkcję odwrotną do bijekcji.

Definicja 9. Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją. **Funkcją odwrotną do funkcji f** nazywamy funkcję $g : Y \to X$ określoną warunkiem

$$\bigwedge_{y \in Y} \left(g(y) = x \iff f(x) = y\right).$$

Funkcję odwrotną do funkcji f oznacza się symbolem f^{-1}.

Uwaga 7. Wprost z definicji funkcji odwrotnej wynika, że jeśli funkcja $g : Y \to X$ jest funkcją odwrotną to bijekcji $f : X \to Y$, to funkcja f jest funkcją odwrotną do funkcji g, tzn.

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Sprawdzanie wprost z definicji, kiedy pewna funkcja jest funkcją odwrotną do zadanej, może być uciążliwe. Istnieje jednak prosta metoda weryfikacji takiego faktu. Potrzebne nam będzie w tym celu pojęcie złożenia dwu funkcji.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja 10. Niech X, Y, Z będą niepustym zbiorami i niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$ będą funkcjami. **Złożeniem** (**kompozycją**) **funkcji** f **oraz** g nazywamy funkcję $h : X \to Z$ określoną wzorem

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{dla } x \in X.$$

Złożenie funkcji f oraz g oznacza się symbolem $g \circ f$.

Z następnym:

Możemy teraz sformułować prostą metodę weryfikacji, kiedy pewna funkcja jest funkcją odwrotną do funkcji zadanej.

Lemat 7. *Niech X oraz Y będą niepustymi zbiorami i niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją. Funkcja $g : Y \to X$ jest funkcją odwrotną do funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \textit{dla każdego } x \in X$$

oraz

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \quad \textit{dla każdego } y \in Y.$$

Z następnym:

Teraz w prosty sposób sprawdzimy, że funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna, obie o tej samej podstawie, są funkcjami wzajemnie odwrotnymi.

Twierdzenie 6. *Niech* a *będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, że* $a \neq 1$. *Wówczas*

$$(\exp_a)^{-1} = \log_a \quad \textit{oraz} \quad (\log_a)^{-1} = \exp_a .$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dowód. Druga z równości w Twierdzeniu ?? jest konsekwencją pierwszej równości oraz Uwagi ??. Z kolei, pierwsza równość wynika z równości (??) oraz (??) we Wniosku ??. Istotnie, ustalmy najpierw $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$(\log_a \circ \exp_a)(x) = \log_a(\exp_a(x)) = \log_a(a^x) = x.$$

Z drugiej strony, dla $y \in (0, \infty)$ zachodzi

$$(\exp_a \circ \log_a)(y) = \exp_a(\log_a x) = a^{\log_a y} = y,$$

co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Sformułujemy dalej najważniejsze własności funkcji logarytmicznej.

Twierdzenie 7. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) Funkcja $\log_a$ *jest ciągła w przedziale* $(0, \infty)$.

(ii) Zbiorem wartości funkcji $\log_a$ *jest zbiór* $\mathbb{R}$ *wszystkich liczb rzeczywistych.*

(iii) Dla $a > 1$ *funkcja* $\log_a$ *jest rosnąca w* $(0, \infty)$.

(iv) Dla $a \in (0, 1)$ *funkcja* $\log_a$ *jest malejąca w* $(0, \infty)$.

Na końcu poprzedniego:

Dowód pierwszej z własności tego twierdzenia nie jest prosty i wykorzystuje twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej do funkcji ciągłej. Kolejna własność jest konsekwencją m.in. własności Darboux przysługującej funkcjom ciągłym. Udowodnimy tutaj więc jedynie monotoniczność funkcji logarytmicznej w poszczególnych przypadkach.

Dowód (iii) oraz (iv).

(i) Niech $a > 1$. Ustalmy $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $x_1 < x_2$. Wtedy $\frac{x_2}{x_1} > 0$. Wykorzystując Lemat ?? (i) otrzymamy

$$\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \frac{x_2}{x_1} > 0.$$

Stąd $\log_a(x_1) < \log_a x_2$, czyli funkcja $\log_a$ jest rosnąca w $(0, \infty)$.

(ii) Jeśli teraz $a \in (0, 1)$ oraz $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ są takie, że $x_1 < x_2$, to $\frac{x_2}{x_1} > 1$. Z Lematu ?? (ii) wynika

$$\log_a x_2 - \log_a x_1 = \log_a \frac{x_2}{x_1} < 0.$$

Zatem $\log_a x_1 > \log_a x_2$, czyli funkcja $\log_a$ jest malejąca w $(0, \infty)$.

$\square$

Z następnym:

Z Twierdzenia ?? wyprowadzimy kolejne ważne własności funkcji wykładniczej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 7. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

(i) Funkcja $\log_a$ *jest funkcją różnowartościową.*

(ii) Jeśli $x, z \in (0, \infty)$, *to* $\log_a x = \log_a z \iff x = z$.

(iii) Jeśli $a > 1$, $x, z \in (0, \infty)$, *to* $\log_a x < \log_a z \iff x < z$.

(iv) Jeśli $a > 1$, $x, z \in (0, \infty)$, *to* $\log_a x \leqslant \log_a z \iff x \leqslant z$.

(v) Jeśli $a < 1$, $x, z \in (0, \infty)$, *to* $\log_a x < \log_a z \iff x > z$.

(vi) Jeśli $a < 1$, $x, z \in (0, \infty)$, *to* $\log_a x \leqslant \log_a z \iff x \geqslant z$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dowód.
(i) Różnowartościowość funkcji $\log_a$ jest natychmiastową konsekwencją jej monotoniczności (por. Twierdzenie ?? (iii) oraz (iv)).
Warunek (ii) jest z kolei konsekwencją różnowartościowości funkcji logarytmicznej oraz Lematu ??.
Na koniec, warunki (iii) oraz (vi) wynikają z monotoniczności funkcji wykładniczej (por. Twierdzenie ?? (iii) oraz (iv)). $\square$

Na końcu poprzedniego:
Zastosujemy poznane własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania prostych równań i nierówności logarytmicznych.

Przykład 8. Rozwiązać równanie

$$\log_{0,5}(2x-1) = -2.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

(1 sposób) Na początku wyznaczamy dziedzinę rozwiązywanego równania. Ponieważ liczba logarytmowana musi być dodatnia, więc $2x - 1 > 0$, co oznacza, że

$$D: \quad x > \frac{1}{2}.$$

Wykorzystując własność (??) z Uwagi ?? rozwiązywane równanie możemy równoważnie zapisać w postaci

$$(0,5)^{-2} = 2x - 1,$$

którego jedynym rozwiązaniem jest $x = 2,5$. Pozostaje jeszcze sprawdzić, że otrzymane rozwiązanie należy wyznaczonej wcześniej do dziedziny równania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

(2 sposób) Jak poprzednio wyznaczamy dziedzinę rozwiązywanego równania

$$D: \quad x > \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $-2 = \log_{0,5} 4$, więc wyjściowe równanie zapiszemy w sposób równoważny w postaci

$$\log_{0,5}(2x-1) = \log_{0,5} 4.$$

Wykorzystując własność (ii) z Wniosku ?? otrzymamy równanie

$$2x - 1 = 4,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 2,5$. Jak poprzednio sprawdzamy, że $2,5 \in D$.

Z następnym:

Dla osiągnięcia wprawy w rozwiązywaniu równań logarytmicznych proponujemy wykonać następujące zadanie.

Zadanie 3. Rozwiązać następujące równania logarytmiczne:

a) $2\log_x 8 = 6$,

b) $\log_4(x^2 - 9) = 2$,

c) $\log_3(5 - x) = 0$.

Z poprzednim:

Do tego zadania podamy jedynie dziedziny i rozwiązania zaproponowanych równań.

Odp.

a) $D: x > 0, x \neq 1$, rozwiązanie: $x = 2$,

b) $D: x < -3 \ \vee \ x > 3$, rozwiązanie: $x \in \{-5, 5\}$,

c) $D: x < 5$, rozwiązanie: $x = 4$.

Z następnym:

Znając już własności funkcji logarytmicznej można podjąć próbę wyrysowania wykresów funkcji logarytmicznej dla wybranych podstaw a. Dokonamy tego na dwa sposoby. Można tu postąpić podobnie, jak dla funkcji wykładniczej, tzn. na podstawie monotoniczności funkcji, ciągłości oraz wartości funkcji dla wybranych argumentów, można spróbować narysować wykres funkcji. Z drugiej strony wiemy, że funkcja logarytmiczna (o podstawie a) jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej o tej samej podstawie. Wykorzystamy następującą własność wykresów funkcji, które są wzajemnie odwrotne.

Lemat 8. *Niech* $X, Y \subset \mathbb{R}$ *będą niepustymi zbiorami i niech* $f : X \to Y$ *oraz* $g : Y \to X$ *będą funkcjami wzajemnie odwrotnymi. Wówczas wykresy tych funkcji są do siebie symetryczne względem prostej* $y = x$.

Dowód. Zauważmy, że na podstawie definicji funkcji odwrotnej mamy następującą własność:

> jeśli punkt $(x, f(x))$ należy do wykresu funkcji f, to punkt $(f(x), x)$ należy do wykresu funkcji g.

Istotnie, jeśli $f(x) = y$, to $g(y) = x$, a wtedy

$$(f(x), x) = (y, g(y)),$$

co oznacza, że punkt $(f(x), x)$ należy do wykresu funkcji g. □

Z następnym:

Możemy więc teraz przystąpić do wykreślenia wykresów funkcji logarytmicznej.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

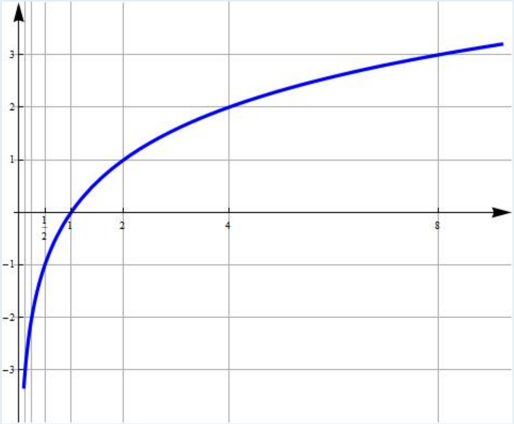
Ćwiczenie 2. Narysować wykres funkcji $\log_2$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Na końcu poprzedniego:

Spróbuj na początek sporządzić tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3



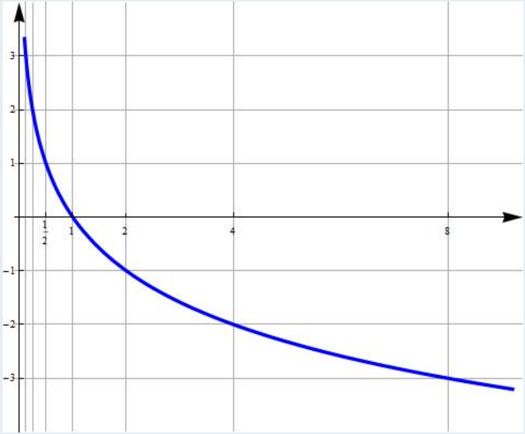
Ćwiczenie 3. Narysować wykres funkcji $\log_{\frac{1}{2}}$.

Na końcu poprzedniego:

Jak poprzednio, wykonaj tabelkę wartości tej funkcji dla wybranych argumentów, a następnie wyrysuj wykres.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\log_{\frac{1}{2}} x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

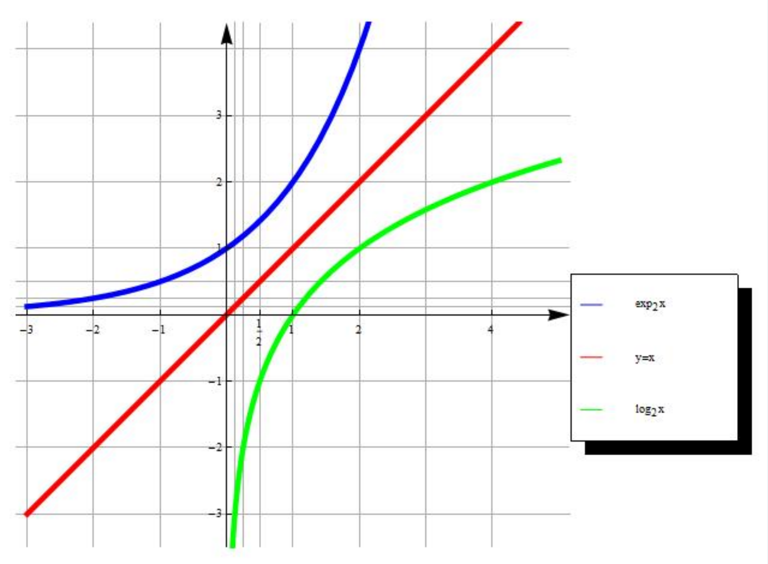


Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 4. Narysować wykresy funkcji $\log_2$ oraz $\log_{\frac{1}{2}}$ wykorzystując w tym celu Lemat ??.

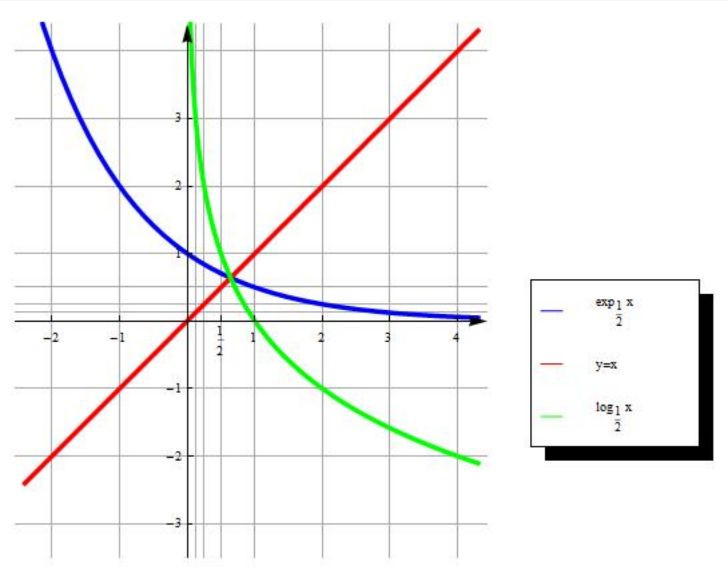
Z następnym:

Wykorzystując wykres funkcji $\exp_2$ oraz jego symetrię względem prostej $y = x$ do wykresu funkcji $\log_2$ otrzymamy:


−3
−2
−1
$\frac{1}{2}$
1
2
4
3
2
1
−1
−2
−3
$\exp_2 x$
y=x
$\log_2 x$

Z następnym:

W drugiem przypadku wykres funkcji $\log_{\frac{1}{2}}$ otrzymamy z wykresu funkcji $\exp_{\frac{1}{2}}$ przez symetrię względem prostej $y = x$.


3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1/2
1
2
3
4
$\exp_{\frac{1}{2}} x$
y=x
$\log_{\frac{1}{2}} x$

Definicja 11. **Krzywą logarytmiczną** nazywamy wykres dowolnej funkcji logarytmicznej.

Zadanie 4. Opisać zależność pomiędzy wykresami funkcji wykładniczych z ćwiczeń ?? oraz ??.

Na końcu poprzedniego:

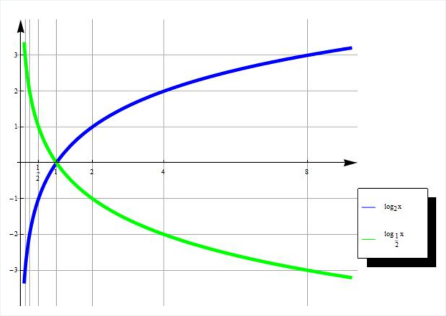
Spróbuj narysować wykresy obu funkcji w jednym układzie współrzędnych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Porównanie tabel wartości funkcji $\log_2$ oraz $\log_{\frac{1}{2}}$ oraz ich wykresów sugeruje, że krzywe logarytmiczne o równaniach $y = \log_2 x$ oraz $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ są symetryczne względem osi OX.



Jest to konsekwencją równości

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{2^{-1}} x = \frac{1}{-1} \log_2 x = -\log_2 x \quad \text{dla} \quad x \in (0, \infty).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Zaobserwowana własność sugeruje następujący wniosek, którego dowód pozostawiamy czytelnikowi.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 8. *Niech* $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ *oraz* $a \neq 1$. *Krzywe logarytmiczne* $y = \log_a x$ *oraz* $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ *są symetryczne względem osi* OX.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Dla utrwalenia sugerujemy wykonanie następującego ćwiczenia.

Zadanie 5. Naszkicować wykresy następujących funkcji:

1. $f_1(x) = \log_3 x$,
2. $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$,
3. $f_3(x) = \log_2 2x$,
4. $f_4(x) = \log_3 \frac{1}{x}$,
5. $f_5(x) = \log_2 \frac{x}{4}$,
6. $f_6(x) = \log_2(x+1)$.

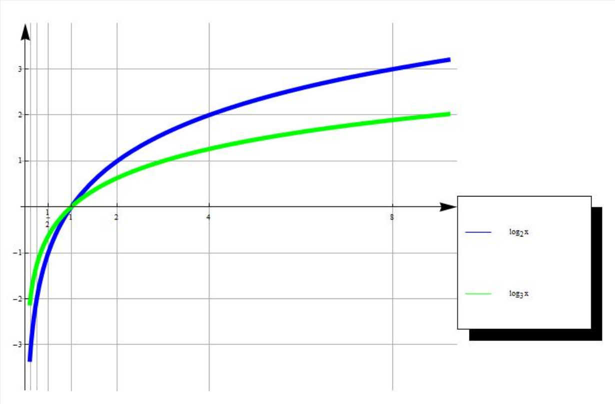
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Zastanówmy się jeszcze nad wzajemnym położeniem wykresów funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw a oraz b.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

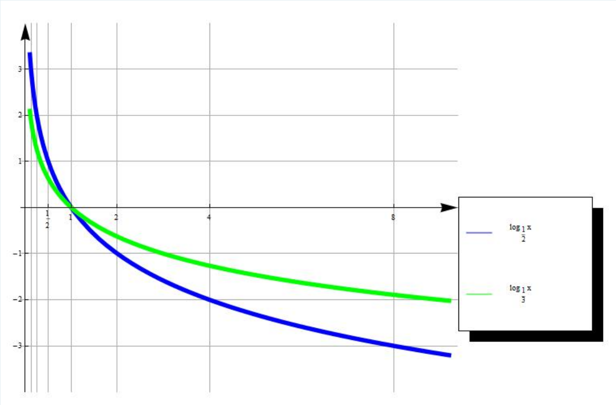
Ćwiczenie 5. Narysować krzywe logarytmiczne $y = \log_2 x$ oraz $y = \log_3 x$ w jednym układzie współrzędnych. Jaką prawidłowość można zaobserwować?



Można zauważyć, że

$$\log_2 x < \log_3 x \text{ dla } x \in (0,1) \text{ oraz } \log_2 x > \log_3 x \text{ dla } x > 1.$$

Ćwiczenie 6. Narysować krzywe logarytmiczne $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ oraz $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ w jednym układzie współrzędnych. Jaką prawidłowość można zaobserwować?



Można teraz zauważyć, że

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$ dla $x \in (0,1)$ oraz $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{3}} x$ dla $x > 1$.

Ćwiczenie 7. Dla ustalonych liczb rzeczywistych $b > a > 1$ narysować krzywe wykładnicze $y = \log_a x$ oraz $y = \log_b x$ i sformułować zaobserwowaną prawidłowość.

Z następnym:

Analizując możliwe przypadki można sformułować następującą własność funkcji logarytmicznych o różnych podstawach.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 9.

(i) *Dla ustalonych liczb rzeczywistych* $1 < a < b$ *zachodzi*

$$\log_a x < \log_b x \quad \textit{dla} \;\; x \in (0,1),$$

$$\log_a x > \log_b x \quad \textit{dla} \;\; x > 1.$$

(ii) *Dla ustalonych liczb rzeczywistych* $0 < a < b < 1$ *zachodzi*

$$\log_a x > \log_b x \quad \textit{dla} \;\; x \in (0,1),$$

$$\log_a x < \log_b x \quad \textit{dla} \;\; x > 1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Z następnym:

Pokażemy teraz praktyczne zastosowania logarytmów w fizyce, chemii, akustyce, geologii.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 9. Szybkość samorzutnego rozpadu jąder atomowych zależy od liczby jąder w próbce w danej chwili. Proces ten opisuje się równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie jest następujące:

Twierdzenie 8. *Jeśli w chwili* $t_0 = 0$ *próbka pierwiaska promieniotwórczego zawiera* N_0 *jąder atomowych, to po czasie* t *liczbę jąder, które nie uległy rozpadowi opisujemy wzorem*

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad dla\ t > 0, \tag{5}$$

gdzie λ *to charakterystyczna dla pierwiastka* ***stała rozpadu****.*

Miarą prędkości rozpadu promieniotwórczego jest **okres połowicznego rozpadu** określający czas, po którym rozpadowi ulega połowa początkowej ilości jąder.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 8. Czas połowicznego rozpadu izotopu cezu $^{137}\mathrm{Cs}$ wynosi $30,25$ roku. Wyznaczyć stałą promieniotwórczego rozpadu i obliczyć, jaki procent pierwotnej próbki pozostanie po 100 latach?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykorzystując wzór (??) wyznaczymy stałą rozpadu. Oczywiście po $30,25$ roku pozostanie $\frac{1}{2}N_0$ pierwotnej liczby jąder izotopu cezu, więc mamy

$$\tfrac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 30{,}25},$$

skąd otrzymamy

$$-\ln 2 = \ln 2^{-1} = \ln \tfrac{1}{2} = \ln e^{-\lambda \cdot 30{,}25} = -30,25 \cdot \lambda,$$

więc $\lambda = \frac{\ln 2}{30{,}25} \approx 0,0229$. Zatem po 100 latach pozostanie

$$N(100) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30{,}25} \cdot 100} \approx 0,1011 \cdot N_0$$

czyli około $10,11\%$ pierwotnej liczby jąder atomowych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Stała połowicznego rozpadu cezu $^{137}\mathrm{Cs}$ wynosi w przybliżeniu $0,0229$. Po 100 latach pozostanie około $10,11\%$ masy pierwotnej próbki tego izotopu.

Zadanie 6. Czas połowicznego rozpadu izotopu kobaltu $^{60}\mathrm{Co}$ wynosi 5 lat, zaś czas połowicznego rozpadu izotopu fosforu $^{32}\mathrm{P}$ – 14 dni. Ile razy stała rozpadu izotopu fosforu jest większa od stałej rozpadu izotopu kobaltu?

Na końcu poprzedniego:

Podamy tu jedynie odpowiedź.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Mamy (por. szczegółowe rozwiązanie Ćwiczenia ??) $\lambda_{^{60}\mathrm{Co}} = \frac{\ln 2}{5} \approx 0,1386$, zaś $\lambda_{^{32}\mathrm{P}} = \frac{\ln 2}{\frac{14}{365}} \approx 18,0713$ (przyjmiemy, że rok ma 365 dni), więc $\frac{\lambda_{^{32}\mathrm{P}}}{\lambda_{^{60}\mathrm{Co}}} = \frac{365 \cdot 5}{14} = 130,3571$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 10. Każdy żywy organizm absorbuje z otoczenia węgiel w postaci dwu izotopów ^{12}C oraz ^{14}C, z których drugi jest pierwiastkiem promieniotwórczym o okresie połowicznego rozpadu 5715 lat. Jak długo organizm żyje, tak długo proporcje obu izotopów są stałe. Po śmierci organizmu jedynie izotop ^{14}C ulega rozpadowi. Im więcej czasu upłynie od śmierci organizmu, tym bardziej zmieniają się proporcje obu izotopów. Amerykański fizyk W. F. Libby opracował w 1946 roku metodę pozwalającą wykorzystać tą obserwację do wyznaczania wieku znaleziska organicznego (**radioizotopowa metoda datowania skamieniałości**).

Ćwiczenie 9. Oszacować wiek skamieniałości, w której masa izotopu ^{14}C stanowi jedynie 37% izotopu, którą zawierałby organizm żywy.

Na początku wyznaczymy stałą rozpadu dla izotopu $^{14}\mathrm{C}$. Mamy więc (por. rozwiązanie Ćwiczenia ??)

$$\lambda_{^{14}\mathrm{C}} = \frac{\ln 2}{5715} \approx 0,00012129.$$

Wtedy

$$0,37N_0 = N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5715}\cdot t},$$

czyli

$$\ln 0,37 = -\frac{\ln 2}{5715} \cdot t.$$

Zatem $t = -\frac{5715 \cdot \ln 0,37}{\ln 2} \approx 8198$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Wiek skamieniałości to około 8198 lat.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 11. **Odczyn roztworu**, to jego charakterystyka związana ze stężeniem jonów wodorowych $[H^+]$ oraz stężeniem jonów wodorotlenowych $[OH^-]$. W każdym roztworze wodnym iloczyn stężeń jonów wodorowych i stężeń jonów wodorotlenowych jest stały i wynosi $10^{-14}\mathrm{mol}/\mathrm{dm}^3$. Określanie **odczynu roztworu** poprzez podanie stężeń jest niewygodne (duża rozpiętość stężeń). Chemicy posługują się **stopniami kwasowości** określonymi wzorem

$$[\mathrm{Ph}] = -\log[H^+].$$

Dla chemicznie czystej wody $[H^+] = [OH^-] = 10^{-7}\mathrm{mol}/\mathrm{dm}^3$, więc jej $[\mathrm{Ph}]$ wynosi 7 (**odczyn obojętny**). Roztwory **kwaśne** mają **odczyn** $[\mathrm{Ph}]$ mniejszy od 7, zaś **zasadowe** – większy od 7.

Ćwiczenie 10. Stężenie jonów wodorowych w roztworze octu wynosi $[H^+] = 1,26 \cdot 10^{-3} \mathrm{mol}/\mathrm{dm}^3$. Wyznaczyć odczyn tego roztworu octu.

Odczyn roztworu octu obliczymy następująco:

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Ph}] &= -\log(1,26\cdot 10^{-3})\\
&= -\log 1,26 - \log 10^{-3} \approx -0,1-(-3) = 2,9.
\end{aligned}
$$

Odp. Odczyn roztworu octu jest równy około $2,9$.

Zadanie 7. Oblicz stężenie jonów wodorowych w wodzie morskiej przyjmując że jej odczyn jest równy $8,2$.

Na końcu poprzedniego:

Podamy tu jedynie odpowiedź.

Odp . Stężenie jonów wodorowych w wodzie morskiej wynosi $[H^+] \approx 6,31 \cdot 10^{-9} \mathrm{mol/dm}^3$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 12. Miarą "siły" dźwięku jest natężenie dźwięku. W zakresie słyszalności człowieka, dla dźwięku o częstotliwości 1000 Hz, natężenie dźwięku przyjmuje wartości od 10^{-12} W/cm^2 (granica słyszalności) do 10^2 W/cm^2 (próg bólu). Używanie tak szerokiej skali nie jest wygodne i wprowadzono pojęcie **poziomu natężenia**,

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0},$$

gdzie $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/cm^2}$ zaś I jest badanym natężeniem dźwięku. Jednostką **poziomu natężenia** dźwięku jest decybel (dB). Wtedy

- dla progu słyszalności $L_0 = 10 \log \frac{10^{-12}\mathrm{W/cm^2}}{10^{-12}\mathrm{W/cm^2}} = 0\ \mathrm{dB}$,

- dla granicy bólu $L = 10 \log \frac{10^{2}\mathrm{W/cm^2}}{10^{-12}\mathrm{W/cm^2}} = 140\ \mathrm{dB}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 11. Przy prędkości $50\ \mathrm{km/h}$ zmierzony poziom hałasu (we wnętrzu) samochodu osobowego wynosił $60\ \mathrm{dB}$. Po zwiększeniu prędkości do $140\ \mathrm{km/h}$ poziom hałasu wzrósł do $75\ \mathrm{dB}$. Ile razy głośniej zrobiło się w aucie?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Oznaczmy przez:

- I_0 – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności,
- I_1 – natężenie hałasu w aucie jadącym z prędkością $50 \text{ km}/\text{h}$,
- I_2 – natężenie hałasu w aucie jadącym z prędkością $140 \text{ km}/\text{h}$.

Z treści zadania wiadomo, że $60 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$ oraz $75 = 10 \log \frac{I_2}{I_0}$, więc

$$15 = 75 - 60 = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} - \log \frac{I_1}{I_2} \right) = \log \frac{I_2}{I_1}.$$

Zatem $\frac{I_2}{I_0} = (10)^{1,5} \approx 31,6228$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Po zwiększeniu prędkości poziom hałasu wzrósł ponad trzydziestokrotnie.

Przykład 13. Wzór na ilość energii E (w dżulach) uwolnioną przez trzęsienie ziemi jest postaci

$$E = 1,74 \cdot 10^{19+1,44M},$$

gdzie M jest **siłą** trzęsienia ziemi **w skali Richtera**.

Ćwiczenie 12. Trzęsienie ziemi w okolicach Polic w 2010 roku miało siłę $4,8$ w skali Richtera. Trzęsienie ziemi w Mesynie (Włochy) w 1908 roku wyzwoliło 7700-krotnie większą energię. Jaka była siła trzęsienia ziemi w Mesynie w skali Richtera?

Wykorzystując podany wzór wyznaczymy energię E_1 wyzwoloną w trzęsieniu ziemi w Policach. Mamy więc

$$E_1 = 1,74 \cdot 10^{19+1,44\cdot 4,8} \approx 1,42 \cdot 10^{26}.$$

Trzęsienie ziemi w Mesynie wyzwoliło zatem energię

$$E_2 = 7,7 \cdot 10^3 \cdot E_1 = 1,0934 \cdot 10^{30},$$

co oznacza siłę w skali Richtera równą (po nieskomplikowanych rachunkach)

$$M_2 = \frac{log\frac{E_2}{1,74} - 19}{1,44} \approx 7,5.$$

Odp. Trzęsienie ziemi w Mesynie miało siłę około $7,5$ w skali Richtera.

Zadanie 8. Ilu krotny wzrost energii uwolnionej w trakcie trzęsienia ziemi odpowiada wzrostowi o 2 siły trzęsienia ziemi w skali Richtera?

Na końcu poprzedniego:

Odpowiedź jest następująca:

Odp. Wzrost o 2 siły trzęsienia ziemi w skali Richtera odpowiada około 760-krotnemu wzrostowi energii uwolnionej w trakcie takiego trzęsienia ziemi.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Z następnym:

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 1. Funkcja logarytmiczna o podstawie $\frac{1}{\pi}$ jest funkcją:

(a) rosnącą,

(b) stałą,

(c) malejącą,

(d) ani rosnącą ani malejącą.

Pytanie 2. Funkcja logarytmiczna o podstawie $\sqrt[3]{4}$ jest funkcją:

(a) rosnącą,

(b) stałą,

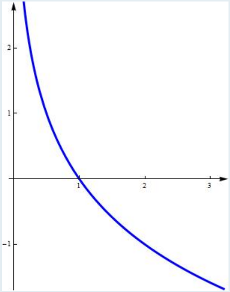
(c) malejącą,

(d) ani rosnącą ani malejącą.

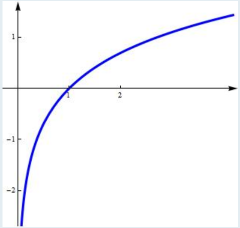
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 3. Wykres funkcji logarytmicznej $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ jest przedstawiony na rysunku

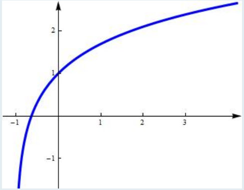
(a)



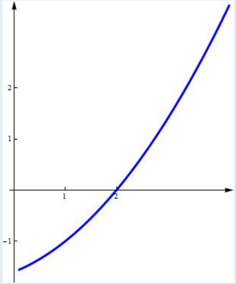
(b)



(c)



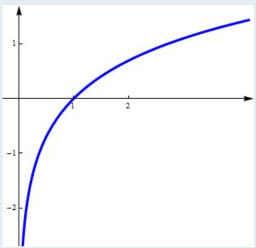
(d)



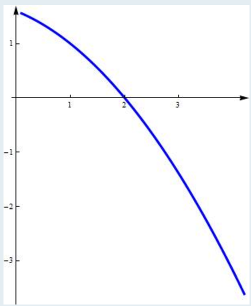
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 4. Wykres funkcji logarytmicznej $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dla pewnego $a \in (0, 1)$ jest przedstawiony na rysunku

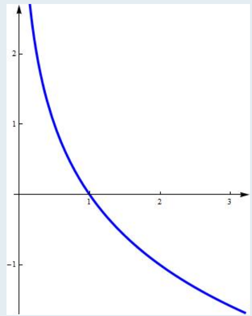
(a)



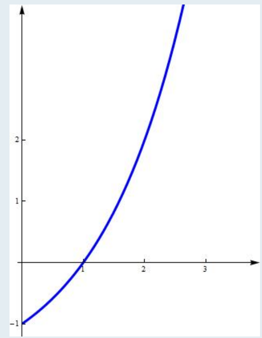
(b)



(c)



(d)



Pytanie 5. Spośród liczb $\log_2 5$, $\log_2 7$, $\log_7 2$, $\log_4 5$ największą jest

(a) pierwsza,

(b) druga,

(c) trzecia,

(d) czwarta.

Pytanie 6. Spośród liczb $\log_2 5, \log_2 7, \log_7 2, \log_4 5$ najmniejszą jest

(a) pierwsza,

(b) druga,

(c) trzecia,

(d) czwarta.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 7. Równanie $\log_4(1 - x^2) = 1$

(a) ma jedno rozwiązanie dodatnie,

(b) ma jedno rozwiązanie ujemne,

(c) ma dwa rozwiązania różnych znaków,

(d) nie ma rozwiązania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 8. Dziedziną funkcji $f(x) = \log(5 + 4x - x^2)$ jest zbiór

(a) $[-1, 5]$,

(b) $(-1, 5)$,

(c) $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$,

(d) $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$.

Pytanie 9. Przyjmując, że okres połowicznego rozpadu izotopu węgla ^{14}C wynosi ok. 5800 lat można stwierdzić, że wiek skamieniałości zawierającej 25% masy tego izotopu, którą zawierałby organizm żywy wynosi ok.

(a) 5800 lat ,

(b) 2900 lat,

(c) 1450 lat,

(d) $11\ 600$ lat.

Pytanie 10. Stężenie jonów wodorowych w roztworze o odczynie obojętnym wynosi

(a) $10^{-5}\mathrm{mol/dm^3}$,

(b) $10^{-6}\mathrm{mol/dm^3}$,

(c) $10^{-7}\mathrm{mol/dm^3}$,

(d) $10^{-8}\mathrm{mol/dm^3}$.

Klucz odpowiedzi:

1(c), 2(a), 3(b), 4(c), 5(b), 6(c), 7(d), 8(b), 9(d), 10(c).