E-learning – matematyka – poziom rozszerzony

Temat: Funkcje

Materiały merytoryczne do kursu

**************na każdym slajdzie smieszna myszka *******************
Slajd1

Matematyka jest produktem myśli ludzkiej, niezależnej od doświadczenia, jednak wspaniale pasuje do świata realnego i tak świetnie go tłumaczy.
(Albert Einstein)

W ramach tego kursu poznamy funkcje i ich własności: definicję funkcji oraz definicję wykresu funkcji liczbowej, a także między innymi takie pojęcia jak: dziedzina funkcji, miejsce zerowe, zbiór wartości, wartość najmniejsza i największa funkcji w danym przedziale, monotoniczność funkcji. Poznamy jak wykonać przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi x oraz osi y oraz definicję i własności funkcji różnowartościowej, definicję i własności funkcji parzystej, nieparzystej i okresowej. Omówimy także pewne szczególne funkcje jak liniowa i trygonometryczna, a także zapoznamy się z pojęciem złożenia funkcji, funkcji odwrotnej i równania funkcyjnego.

Zagadka

Zadanie Poissona. Podczas wycieczki jeden z jej uczestników kupił gąsior wina o pojemności 8 kwart. Kupione wino trzeba było podzielić na połowy. Jak należało dokonać tego podziału, kiedy w zajeździe były tylko dwa naczynia - jedno o pojemności 5 kwart i drugie o pojemności 3 kwart? Ile razy trzeba było przelewać wino z naczynia do naczynia?

Odpowiedź:
Wino należało przelać 7 razy.

W każdej nauce jest tyle prawdy, ile jest w niej matematyki. (I. Kant)

Slajd

1 Pojęcie funkcji

W matematyce oraz w życiu codziennym mamy do czynienia z różnymi przyporządkowaniami, np. każdej osobie mieszkającej na stałe w Polsce przyporządkowuje się numer PESEL, jak również każdej osobie przyporządkowuje się imię. Niektóre z tych przyporządkowań są funkcjami, a niektóre nie.

Prześledźmy pewną sytuację:
Nowi uczniowie klasy I b przychodzą do szkoły na swoją pierwszą lekcję. Na początku zajęć nauczyciel czyta listę obecności, mówiąc każdemu uczniowi, w której ławce ma usiąść. Takie przyporządkowanie będziemy nazywać funkcją. Zauważmy, że każdy z uczniów posiada swoje miejsce w ławce i każdy uczeń ma dokładnie jedno takie miejsce (nie może siedzieć jednocześnie w dwóch różnych miejscach).

**********(rysunek ucznia w ławce szkolnej)*******************

Inna sytuacja:
Nauczyciel WF-u przeprowadził wśród uczniów klasy Ia sprawdzian z biegu na 100 m. Wyniki sprawdzianu zapisał w postaci zbioru par liczb, gdzie pierwszy element pary oznaczał numer ucznia z dziennika, zaś drugi element pary oznaczał czas w sekundach, uzyskany przez ucznia. Notatki nauczyciela są następujące:
$\{(2;\ 15),\ (5;\ 17),\ (10;\ 13),\ (18;\ 12{,}5),\ (19;\ 14),\ (21;\ ),\ (26;\ 15{,}5),\ (28;\ 16{,}3)\}$.

Uczniowi z numerem 21 nie został przypisany czas biegu (być może uczeń nie ukończył biegu), zatem powyższe przyporządkowanie nie jest funkcją.

***************(rysunek bieżni i sportowców)****************

Spróbujmy uogólnić definicję funkcji na język matematyki:

Definicja
Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y (przy czym zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze zbioru Y, co zapisujemy $f : X \to Y$.

Funkcje zazwyczaj oznaczamy literami f, g, F, G, itp.

Aby dobrze zrozumieć pojęcie funkcji rozważmy przyporządkowanie zilustrowane grafem:

*************plik1 ***********************

Każdemu elementowi ze zbioru $X = \{A, B, C\}$ przyporządkowaliśmy tylko jeden element zbioru $Y = \{1, 2, 3\}$. W zbiorze Y został jeden element 3, który nie odpowiada żadnemu elementowi zbioru X.

Ćwiczenie:

Rozstrzygniemy, czy następujący warunek określa pewną funkcję.
a) Każdemu państwu przyporządkowujemy jego stolicę (jest to funkcja).
b) Każdemu wielokątowi przyporządkowujemy jego pole (jest to funkcja).
c) Każdemu czworokątowi przyporządkowujemy jego oś symetrii (nie jest to funkcja, bo czworokąt może mieć więcej osi symetrii i nie mamy jednoznacznego przyporządkowania czworokątowi osi symetrii).

2 Sposoby opisywania funkcji

W przypadky, gdy X i Y są zbiorami liczb funkcję ze zbioru X w zbiór Y nazywamy funkcją liczbową, którą możemy przedstawiać na różne sposoby:
- przepisem słownym,
- tabelką,
- grafem,
- jako zbiór par uporządkowanych, gdzie poprzednik jest elementem z X, a następnik z Y,
- wzorem,
- wykresem (graficznie).

Wykresem funkcji liczbowej $f : X \to Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y), w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie $x \in X$, a $y \in Y$.

Przykład

Dana jest funkcja określona przepisem słownym:
"Niech $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 1, 4, 9, 16\}$. Każdej liczbie ze zbioru X przyporządkowujemy kwadrat tej liczby".
Przedstawimy tę funkcję na pozostałe sposoby:

- Tabelka:

*******plik 2******************

- Graf:

**************plik 3**************

- Zbiór par uporządkowanych:

{(-4,16),(-3,9),(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)}

- Wzór:

$y = x^2$ lub $f(x) = x^2$ lub $f : x \to x^2$,
gdzie $x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

- Wykres

**************plik 4******************

**************plik 5******************

Hasło: Odcięta

3 Przekształcanie wykresu funkcji

3.1 Symetria względem osi OX

Mamy dany wykres funkcji $y = f(x)$. Utworzymy wykres funkcji $y = -f(x)$: dla kilku obranych wartości x wyznaczamy $-f(x)$ i obserwujemy figurę powstałą po połączeniu punktów $(x, -f(x))$,
czyli dla $x1$ i $x2$ szukamy wartości $f(x1)$ i $f(x2)$, następnie $-f(x1)$ i $-f(x2)$ oraz rysujemy wykres przechodzący przez punkty $(x1, -f(x1))$, $(x2, -f(x2))$:

*****************plik symOX1'**************

*****************plik symOX2'**************

Zauważamy:
Uwaga
Wykres funkcji $-f(x)$ powstaje z wykresu funkcji $f(x)$ przez odbicie względem osi OX.

3.2 Symetria względem osi OY

Mamy dany wykres funkcji $y = f(x)$. Utworzymy wykres funkcji $y = f(-x)$: dla kilku obranych wartości x wyznaczamy $f(-x)$ i obserwujemy figurę powstałą po połączeniu punktów $(-x, f(-x))$.

******************plik symOY1**************

******************plik symOY2************

Zauważamy, że dla obranego x otrzymujemy te same wartości $f(x)$ i $f(-x)$. Zatem:
Uwaga
Wykres funkcji $f(-x)$ powstaje z wykresu funkcji $f(x)$ przez odbicie względem osi OY.

Z symetrii względem osi OX i OY możemy zaobserwować:

Ćwiczenie

Stwórzcie wykres funkcji $y = -f(-x)$ wykorzystując informacje o symetrii względem osi OX i OY. Powstanie wykres w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem początku układu współrzędnych.

3.3 Translacja (przesunięcie) o wektor

Mamy dany wykres funkcji $y = f(x)$.
• Narysujemy wykres funkcji $y = f(x) + b$;
Jeśli punkt (x, y) należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, to:

*****************plik tran1'**************

*****************plik tran2'*************

Uwaga
Wykres funkcji $y = f(x) + b$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[0, b]$ (wzdłuż osi OY).

Przykład

1. Rysujemy wykres funkcji $y = x^2$.

2. Przesuwamy każdy punkt wykresu o wektor $[0, 2]$.

3. W rezultacie otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = x^2 + 2$.

***************plik 9***************

- Narysujemy wykres funkcji $f(x-a)$.

Omówimy teraz tworzenie wykresu funkcji $f(x-a)$.

Jeśli punkt (x, y) należy do wykresu funkcji $y = f(x)$, to

***************plik tran3*****************

**************plik tran4***************

Skąd możemy wywnioskować:
Uwaga
Wykres funkcji $y = f(x-a)$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, 0]$ (wzdłuż osi OX).

Przykład

1. Rysujemy wykres funkcji $y = x^2$.

2. Przesuwamy każdy punkt wykresu o wektor $[2, 0]$.

3. W rezultacie otrzymujemy wykres funkcji $f(x) = (x - 2)^2$.

*****************plik 10***************

Z powyższych uwag widzimy, że:

Wniosek
Chcąc utworzyć wykres funkcji $y = f(x-a)+b$ przesuwamy punkty wykresu funkcji $f(x)$ o wektor $[a, b]$.

***********plik 8****************

3.4 Nałożenie wartości bezwzględnej

Mamy dany wykres funkcji $y = f(x)$. Utworzymy wykres funkcji $y = |f(x)|$. Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że dla $f(x) \geqslant 0$ wykres $y = |f(x)|$ przyjmuje postać funkcji liniowej $y = f(x)$, a dla $f(x) < 0$ mamy wykres funkcji $y = -f(x)$ Zatem przykładowy wykres funkcji $y = |f(x)|$ będzie wyglądał następująco:

******************plik bez1 ***************
******************plik bez2 ***************
******************plik bez3 **************
******************plik bez4 **************

Uwaga
Wykres funkcji $|f(x)|$ powstaje z wykresu funkcji $f(x)$ przez odbicie symetrycznie względem osi OX dla $f(x) < 0$.

4 Dziedzina funkcji liczbowej

Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji. Dziedzinę funkcji f oznaczamy również D_f. Elementy zbioru X nazywamy argumentami funkcji.

Najczęściej będziemy zapisywać funkcję podając jej wzór, ale pamiętajmy, że funkcji nie wolno utożsamiać ze wzorem, np.
$f(x) = 4x$, $D_f = \{0, 1, 3, 5\}$;
$f(x) = 4x$, $D_f = C$;
$f(x) = 4x$, $D_f = [-20, \infty)$.

W przykładach tych mamy trzy różne funkcje, mimo, że w każdym przypadku wzór jest ten sam, ale dziedziny są różne. Jeżeli natomiast mamy podany tylko wzór, to jako dziedzinę przyjmujemy zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których działania we wzorze funkcji są wykonalne. Wówczas mówimy, że została określona dziedzina naturalna funkcji.

Przykład

Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2}$. We wzorze funkcji występują dwa działania, które nie są określone w całym zbiorze liczb rzeczywistych, tzn. pierwiastkowanie i dzielenie. Pierwiastkowanie jest określone w zbiorze liczb nieujemnych, a dzielenie w zbiorze $R \setminus \{0\}$. Zatem
$x + 3 \geqslant 0 \wedge x \in R \setminus \{0\}$,
czyli
$x \geqslant -3 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0) \cup (0, \infty) = D_f$.

5 Zbiór wartości funkcji

Zbiór Y nazywamy przeciwdziedziną funkcji. Przeciwdziedzinę funkcji f oznaczamy również D_f^{-1}.
Zbiór tych elementów ze zbioru Y, które zostały przypisane elementom ze zbioru X, nazywamy zbiorem wartości funkcji. Zbiór wartości funkcji f oznaczamy symbolem ZW_f. Symbolicznie:

$$ZW_f = \{y : y \in D_f^{-1} \wedge \bigvee_{x \in D_f} y = f(x)\}.$$

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem wartości funkcji danej wzorem.

Przykład

Wyznaczyć zbiór wartości funkcji

$$f(x) = -x^2.$$

W wyniku podnoszenia do potęgi drugiej będziemy otrzymywać liczby nieujemne. Ponieważ przed x^2 występuje znak minus, zatem wartości funkcji będą liczbami niedodatnimi, więc $ZW_f = (-\infty, 0]$.

6 Miejsce zerowe funkcji

Poniżej podana jest funkcja opisana za pomocą tabeli. ”Poszukajmy” argumentu, dla którego funkcja przyjmuje wartość zero

x	-3	0	1	10
$F(x)$	3	2	5	0

Odczytujemy argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0. Jest to miejsce zerowe funkcji.
Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

Przykład

Dana jest funkcja $f(x) = 4x-8$, gdzie $x \in \{-3, 1, 2, 5\}$. Wyznaczymy miejsca zerowe tej funkcji. Aby obliczyć miejsce zerowe funkcji $y = f(x)$, wystarczy rozwiązać równanie $f(x) = 0$, czyli

$$4x - 8 = 0.$$

Dodając obustronnie 8 oraz dzieląc obie strony powyższego równania przez 4 mamy:

$$x = 2.$$

Następnie sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązanie równania należy do dziedziny funkcji. Liczba 2 jest elementem dziedziny i jest miejscem zerowym tej funkcji.

7 Pewne własności funkcji

7.1 Funkcja różnowartościowa

Funkcja różnowartościowa (iniekcja, funkcja 1-1) - funkcja, której każdy element przeciwdziedziny przyjmowany jest co najwyżej raz.

*****************plik 11 **************

Definicja
Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową, gdy dla dowolnych dwóch elementów $a, b \in X$ spełniony jest warunek

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Ćwiczenie
Zastosujcie do implikacji w powyższej definicji prawo kontrapozycji, czyli $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \ q \Rightarrow \ p$.
Otrzymacie równoważną postać warunku z powyższej definicji różnowartościowości:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \quad a, b \in X.$$

Zatem dla funkcji różnowartościowej nie istnieje prosta równoległa do osi OX, która przecięłaby wykres funkcji więcej niż w jednym punkcie.

Przykłady

- Tożsamość $f(x) = x$ na dowolnym zbiorze X,
- funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in R \setminus \{0\}$,
- funkcja $f(x) = ax + b$, gdzie $x \in R, a \neq 0$.

Ćwiczenie

Zbadamy różnowartościowość funkcji $f(x) = 3x + 2$.

Przyjmijmy, że $f(x_1) = f(x_2)$, czyli $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$. Wtedy dodając stronami -2 oraz dzieląc przez 3 mamy

$$x_1 = x_2.$$

Zatem badana funkcja jest różnowartościowa.

7.2 Funkcja monotoniczna

Niech $f : A \to B$, a_1, a_2 będą dowolnymi elementami A. Wówczas funkcję f nazywa się
- rosnącą, gdy
$$a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2),$$
- malejącą, gdy
$$a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_2) < f(a_1).$$

Funkcją monotoniczną nazywa się każdą z powyższych rodzajów funkcji. Potocznie, funkcja jest monotoniczną, gdy wraz ze wzrostem argumentów rośnie lub maleje wartość funkcji.

Funkcję f nazywa się stałą, gdy
$$f(a_1) = f(a_2)$$
dla dowolnych $a_1, a_2 \in A$.

*****************plik 12 *********************

Hasło: Funkcja malejąca.

Przykłady

• Funkcja $f(x) = ax + b$ jest malejąca, gdy $a < 0$;
rosnąca, gdy $a > 0$;
stała, gdy $a = 0$.

• Funkcja $f(x) = a^x$ jest rosnąca, gdy $a > 1$;
malejąca, gdy $a < 1$ i stała dla $a = 1$.

• Funkcja $f(x) = x^a$ rośnie na przedziale $[0, \infty)$, gdy $a > 0$ i maleje, gdy $a < 0$.

Ćwiczenie

Przeanalizujemy przykładowo monotoniczność funkcji $f(x) = -2x+5$. Przyjmiemy, że $x_1 < x_2$ wtedy $-2x_1 > -2x_2$ oraz $-2x+5 > -2x+5$. Zatem $f(x_1) > f(x_2)$ czyli badana funkcja jest malejąca.

Problem

Jaka jest zależność pomiędzy różnowartościowością, a monotonicznością?

Z powyższych przykładów obserwujemy, że funkcja monotoniczna jest także różnowartościowa (bezpośredni wniosek z definicji funkcji rosnącej, malejącej i różnowartościowej), ale rozważmy przykładową funkcję różnowartościową: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Funkcja ta jest malejąca w przedziałach $(-\infty, 0), (0, \infty)$, ale dla $-x$ oraz x, $x > 0$ mamy: $-x < x$, ale $f(-x) \ngtr f(x)$. Zatem funkcja różnowartościowa nie musi być monotoniczna.

7.3 Funkcje parzyste i nieparzyste

Funkcje parzyste i nieparzyste, to funkcje cechujące się pewną symetrią przy zmianie znaku argumentu. Prowadzi to również do symetrii ich wykresów. Funkcja f jest:

- parzysta, jeżeli spełnia:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f,$$

$$\bigwedge_{x \in D_f} f(-x) = f(x).$$

- nieparzysta, jeżeli spełnia:

$$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f,$$

$$\bigwedge_{x \in D_f} f(-x) = -f(x).$$

Przykłady

Funkcje parzyste

• wartość bezwzględna $f(x) = |x|$,

• funkcja potęgowa o parzystym wykładniku, $f(x) = x^{2k}$, gdzie $k \in N$,

• wielomiany zawierające niezerowe współczynniki tylko przy parzystych potęgach zmiennej, np.:
$f(x) = x^{10} + 2x^6 - x^2 + 4$.

**************plik13*************

Funkcje nieparzyste

• funkcja liniowa $f(x) = ax$ (proporcjonalność prosta),

• funkcja potęgowa o nieparzystym wykładniku: $f(x) = x^{2k+1}$, gdzie $k \in N$,

• wielomiany o niezerowych współczynnikach tylko przy nieparzystych potęgach zmiennej, np.:
$f(x) = x^7 + 2x^5 - x^3 + 4x$.

**************plik14*************

Zauważmy z powyższych przykładów oraz definicji funkcji parzystej i nieparzystej, że dziedzina tych funkcji musi być zbiorem symetrycznym względem punktu $(0, 0)$ na osi OX (ponieważ tylko wtedy dla każdej liczby $x \in D_f$, liczba $-x \in D_f$).

Problem

1. Obserwując wykresy funkcji parzystych i nieparzystych czy zauważacie pewne symetrie wykresów?

Ponieważ funkcja parzysta przyjmuje te same wartości funkcji dla przeciwnych argumantów: x i -x, więc wykres funkcji jest symetryczny względem osi OY, a dla funkcji nieparzystej mając wartość przeciwną dla argumentu x niż dla -x otrzymujemy wykres symetryczny względem $(0,0)$.

Zatem funkcje parzyste (poza szczególnymi przypadkami funkcji pustej oraz funkcji określonej jedynie w zerze) nigdy nie są różnowartościowe.

2. Czy istnieją funkcje, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste oraz czy istnieją funkcje równocześnie parzyste i nieparzyste?

Funkcją, która nie jest ani parzysta, ani nieparzysta, to niestała funkcja wykładnicza a^x.

Rozważmy funkcje będące jednocześnie parzystymi i nieparzystymi, czyli:

$$\bigwedge_x f(-x) = f(x) \;\text{ i }\; f(-x) = -f(x)$$

skąd $f(x) = -f(x)$, a zatem $f(x) = 0$. Są to funkcje stałe równe zeru w każdym punkcie swojej dziedziny, ponadto co łatwo zauważyć o symetrycznej dziedzinie.

7.4 Funkcja okresowa

Funkcja okresowa, to intuicyjnie, funkcja, której wartości "powtarzają się" cyklicznie w stałych odstępach (ścisła definicja poniżej). Funkcje okresowe mogą służyć do modelowania zjawisk okresowych w fizyce - np. ruchu wahadła czy planety - a także w biologii, medycynie, ekonomii i innych dziedzinach nauki. Funkcję liczbową f nazywamy okresową, gdy istnieje liczba T różną od zera (niekiedy zakłada się, że $T > 0$) o następujących własnościach:
1. dla dowolnej liczby $x \in D_f$, również liczby $x + T$, $x - T \in D_f$ (niekiedy opuszcza się warunek $x - T \in D_f$) oraz
2. dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x + T) = f(x)$.
Liczbę T nazywamy okresem funkcji f.

Jeśli jakaś funkcja ma okres, nazywamy ją funkcją okresową; funkcję o okresie T nazywa się czasem skrótowo funkcją T-okresową. Jeśli wśród dodatnich okresów funkcji f istnieje najmniejszy, nazywamy go okresem podstawowym (lub zasadniczym). Funkcja okresowa nie musi mieć okresu podstawowego, na przykład dla funkcji stałej $f(x) = a, a \in \mathbb{R}$, a inne będą przedstawione w następnych punktach tej prezentacji.

7.5 Ograniczoność z góry i z dołu

Funkcję nazywamy ograniczoną z góry, gdy wszystkie jej wartości są mniejsze od pewnej ustalonej liczby, czyli istnieje liczba M taka, że dla każdego $x \in D_f$ jest spełniony warunek $f(x) \leqslant M$. Podobnie funkcja jest ograniczona z dołu, gdy wszystkie jej wartości są mniejsze od pewnej ustalonej liczby, czyli istnieje liczba m taka, że dla każdego $x \in D_f$ jest spełniony warunek $f(x) \geqslant m$. Funkcję nazywamy ograniczoną, gdy jest jednocześnie ograniczona z góry i z dołu.

Przykłady

• Funkcje $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ są nieograniczone. Funkcja kwadratowa $g(x) = x^2$ jest tylko ograniczona z dołu. Ogólnie, wszystkie wielomiany stopnia niezerowego i różne od wielomianu zerowego są nieograniczone.
• Ciąg $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ jest ograniczony, gdyż wszystkie jego wyrazy należą do przedziału $(0, 1]$.
• Ciąg $1, 2, 3, 4, ...$ choć ograniczony z dołu, nie jest ograniczony z góry, zatem jest nieograniczony.
• Ciąg $-1, -3, -5, -7, ...$ nie jest ograniczony z dołu, natomiast posiada ograniczenie górne.

7.6 Największa i najmniejsza wartość funkcji

Funkcja liczbowa przyjmuje największą (najmniejszą) wartość $y_0 \in Y$ dla $x_0 \in X$, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) \leqslant f(x_0)$ $(f(x) \geqslant f(x_0))$.

Uwaga

Funkcja liczbowa, która przyjmuje największą (najmniejszą) wartość, jest ograniczona z góry (z dołu) przez tą wartość.

************plik 15**********************

Hasło: Maksimum funkcji

8 Pewne szczególne funkcje

8.1 Funkcja liniowa

Jedną z podstawowych funkcji jest funkcja liniowa.
Definicja
Funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy funkcją liniową. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

************plik 16******************

Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej.

Definicja

Równanie postaci $y = ax + b$ nazywamy równaniem kierunkowym prostej. Równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie $A \neq 0$ lub $B \neq 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej.

Twierdzenie

Proste $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe (równoległe) wtedy i tylko wtedy, gdy $aa_1 = -1$ $(a = a_1)$.

Własności

Funkcja liniowa jest
- różnowartościowa dla $a \neq 0$,
- nieokresowa dla $a \neq 0$,
- monotoniczna:
  - rosnąca dla $a > 0$,
  - malejąca dla $a < 0$,
  - stała dla $a = 0$,
- parzysta dla $a = 0$,
- nieparzysta dla $b = 0$.

Gdy $a = 1, b = 0$, mamy do czynienia ze szczególnym przypadkiem funkcji liniowej - mianowicie funkcją tożsamościową określoną wzorem $f(x) = x$.

8.2 Funkcje trygonometryczne

Definicja
Funkcje trygonometryczne dla miar kątów ostrych można zdefiniować jako stosunki długości odpowiednich dwóch boków trójkąta prostokątnego przy kącie wewnętrznym danej miary (niżej zastosowano typowe oznaczenia, przedstawione na rysunku obok i funkcje trygonometryczne miary kąta skierowanego α określono wzorami):

************plik 18**********************************

Wykresy funkcji trygonometrycznych:

************plik 19*********************************

Sinusoida: wykres funkcji $y = sinx$.

************plik 20*********************************

Cosinusoida: wykres funkcji $y = cosx$.

************plik 21*********************************

Tangensoida: wykres funkcji $y = tgx$.

************plik 22*********************************

Cotangensoida: wykres funkcji $y = ctgx$.

Tabele znaków i wartości funkcji trygonometrycznych
************plik 23**********************************

Wzory podstawowe

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Wzory redukcyjne

************plik 24**********************************

Na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych i wzorów redukcyjnych zauważamy następujące własności funkcji trygonometrycznych

Własności

• dziedzina i przeciwdziedzina

funkcje sinus i cosinus: $D_f = \mathbb{R}, ZW_f = [-1, 1]$ (funkcje ograniczone),
tangens: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{C}\}$, $ZW_f = \mathbb{R}$,
cotangens: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{C}\}$, $ZW_f = \mathbb{R}$;

• parzystość

funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste, a cosinus jest parzystą funkcją

• okresowość

funkcje sinus i cosinus mają okres podstawowy 2π, a tangens i cotangens π

• monotoniczność

funkcje trygonometryczne są tylko przedziałami monotoniczne, np. sinusoida: rośnie w przedziale $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, a maleje $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ dla $k \in \mathbb{C}$,
tangensoida rośnie w przedziałach określoności,
natomiast cotangensoida maleje w przedziałach swojej określoności.

Problem

Czy zatem funkcje tangens i kotangens są odpowiednio rosnąca i malejąca?

Zbadajcie wartości funkcji tangens dla $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, a dla funkcji kotangens $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ćwiczenie

Rozwiążemy równanie $ctgx\, sinx + cosx = 2$.
Dziedziną naszej funkcji jest: $D_f = \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{C}\}$.
Korzystając z zależności: $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$
otrzymujemy $cosx = 1$, skąd $x = 2k\pi, k \in \mathbb{C}$,
ale znalezione wartości nie należą do dziedziny, zatem równanie jest sprzeczne.

9 Składanie funkcji

Niech $f : X \to Y$, a $g : Y \to Z$. Niech $y = f(x)$ i $z = g(y)$, gdzie $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

************plik 25***********************************

Funkcję określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Z określoną wzorem $z = g(f(x))$ nazywamy złożeniem, lub superpozycją funkcji f i g i oznaczamy je symbolem $g \circ f$.
Można powiedzieć, że superpozycja jest działaniem przyporządkowującym funkcjom f i g taką funkcję $g \circ f : X \to Z$, że $z = g(f(x))$.

Ćwiczenie
Zbuduj $f \circ g$ i $g \circ f$ dla $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = 3x - 3$. Otrzymujemy $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-3) = \frac{1}{3x-3+2} = \frac{1}{3x-1},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ i $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1}{x+2}) = 3\frac{1}{x+2} - 3,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

10 Funkcja odwrotna

Załóżmy, że funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa i spełniony jest warunek $f(X) = Y$, czyli funkcja f odwzorowuje zbiór X na Y, wtedy możemy określić funkcję $g : Y \to X$ określona w taki sposób, że dla dowolnego wartością $g(y)$ jest jedyny element x taki, że $f(x) = y$. Funkcja g nazywa się funkcją odwrotną do f i jest oznaczana symbolem f^{-1}.

************plik 26**********************************

Jeśli funkcja f posiada funkcję odwrotną $g = f^{-1}$, to mówimy, że jest ona funkcją odwracalną. Wtedy także g jest funkcją odwracalną i $g^{-1} = f$. Złożenie funkcji wzajemnie odwrotnych jest przekształceniem tożsamościowym, czyli takim, że obrazem dowolnego elementu jest ten sam element (przekształcenie f jest tożsamością jeśli $f : X \to X$ oraz $\bigwedge_{x \in X} f(x) = x$), czyli $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Ćwiczenie
Wyznaczyć $f^{-1}(x)$ dla $f(x) = \frac{1}{x-3}, x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
Z wzoru $y = \frac{1}{x-3}$ liczymy x i otrzymujemy:
$y(x-3) = 1$, skąd $x = \frac{1}{y} + 3$.
Następnie zamieniamy x na y i otrzymujemy

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3, x \neq 0.$$

Z powyższej zamiany zmiennych możemy wywnioskować:

Uwaga

Wykres funkcji odwrotnej otrzymujemy poprzez odbicie symetryczne danej funkcji względem prostej $y = x$.

11 Dwumian Newtona

Symbol Newtona $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ jest to funkcja dwóch argumentów całkowitych nieujemnych, zdefiniowana jako:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gdzie $k \leqslant n$, a wykrzyknik oznacza silnię. Wartość symbolu Newtona można wyrazić wzorem rekurencyjnym:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \begin{cases} 1, & gdy\ k = 0\ lub\ k = n, \\ \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right), & gdy\ 0 < k < n. \end{cases}$$

Trójkąt Pascala

Wartości kolejnych symboli Newtona można zapisać w postaci trójkąta Pascala:

************plik 27*********************************

Symbol Newtona pojawia się również we wzorze dwumiennym Newtona jako współczynnik w k-tym wyrazie rozwinięcia n-tej potęgi sumy dwu składników - stąd jego druga nazwa: współczynnik dwumienny Newtona.

Twierdzenie
Jeśli x, y są dowolnymi liczbami, to każdą naturalną potęgę dwumianu $x + y$ można rozłożyć na sumę postaci

$$(x+y)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) x^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) x^{n-1}y + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) x^{n-2}y^2 + ... + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) y^n,$$

gdzie $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ oznacza odpowiedni współczynnik dwumianowy.

Przykłady
$(x+y)^1 = x+y$,
$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$,
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

Z powyższych przykładów i twierdzenia możemy zauważyć, że:

Uwaga
Współczynniki dwumianowe są elementami n + 1 wiersza w trójkącie Pascala.

12 Równanie funkcyjne

Równanie funkcyjne, to równanie, w którym niewiadomą jest funkcja.

Przykłady

• Równanie $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
• Równania $f(x) = f(-x)$ oraz $f(x) = -f(-x)$
(spełniają je odpowiednio funkcje funkcje parzyste i nieparzyste).

Ćwiczenie

Znajdźmy wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla których $f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$.
Podstawiając $x = y = 0$ otrzymujemy $f(0)^2 = 2f(0)^2$, czyli $f(0) = 0$.
Niech $y = -x$, wówczas $0 = f(0)^2 = f(x - x)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2$.
Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, a suma liczb nieujemnych jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są równe zeru, więc równość $f(x) = 0$ jest spełniona dla każdego x. Zatem jedyną funkcją spełniającą dane równanie funkcyjne jest $f(x) = 0$.

Zadanie
Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad dla x, y \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie
Załóżmy, że funkcja f spełnia dane równanie funkcyjne. Podstawiając $x = y = 0$ dostajemy równość $f(0) = 0$. Podstawiając następnie w równaniu $x = 0$ (i wiedząc, że $f(0) = 0$) dostajemy zależność dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y) - f(-y) = 0.$$

To znaczy, że f jest funkcją parzystą. Weźmy dowolną liczbę $y \in \mathbb{R}$ i podstawmy w danym równaniu kolejno $x = y$ oraz $x = -y$. Otrzymujemy związki

$$f(2y) = f^2(y) \quad oraz \quad -f(-2y) = f(-y)f(y).$$

Wobec parzystości funkcji f, prawe strony tych związków są liczbami równymi, a lewe ich strony są liczbami przeciwnymi. Wszystkie te liczby muszą więc być zerami. Z dowolności wyboru liczby y wynika, że f jest funkcją równą tożsamościowo zeru.

Zagadka

Niefortunna wycieczka Dwóch członków klubu kolarskiego, panowie A i B, wybrało się na wycieczkę tą samą trasą do pewnej miejscowości, odległej o 672 km. Pan B wybrał się na wycieczkę na zwykłem rowerze i jechał 40 km dziennie, pan A na motorowerze i jechał 56 km dziennie. Któregoś dnia klub wysłał jednocześnie do obu wycieczkowiczów wiadomość, wzywając ich do natychmiastowego powrotu. Obaj zastosowali się do polecenia klubu. Okazało się, że do zamierzonego celu wycieczki panu B pozostała do przebycia droga trzy razy dłuższa niż panu A. Ile dni panowie A i B jechali oraz ile kilometrów każdemu z nich pozostało do miejscowości, do której mieli dojechać? Zadanie można rozwiązać nie układając równań.

Odpowiedź: W ciągu 10 1/2 dnia pan A przejechał 588 km, a do mety pozostało mu 84 km, natomiast pan B w tym czasie przejechał 420 km, a do mety pozostało mu 252 km, czyli 3 razy więcej niż panu A.

Matematyka jest delikatnym kwiatem, który rośnie nie na każdej glebie i zakwita nie wiadomo kiedy i jak. (Jean Fabre)

Zadania:

Zad.1. Rozstrzygnij czy następujący warunek określa pewną funkcję.
Każdemu morzu przyporządkowujemy rzekę, która do niego wpada.
a) jest funkcją b) nie jest funkcją
odp. b

Zad.2. Dana jest funkcja określona wzorem $y = -\frac{1}{2}x+2,\ x \in \{-6,-4,-2,0,2,4,6\}$.
- Wyznacz zbiór wartości funkcji.
a) $ZW_f = R$ b) $ZW_f = \{5,4,3,2,1,0,-1\}$ c) $ZW_f = R \backslash \{5,4,3,2,1,0,-1\}$
odp. b)
- Znajdź miejsca zerowe.
a) 4 b) 2 c) -2
odp. a)
- Czy funkcja jest różnowartościowa?
a) tak b) nie
odp. a)
- Czy funkcja jest rosnąca czy malejąca?
a) rosnąca b) malejąca c) nie monotoniczna
odp. b)

Zad.3. Czy funkcja $g(x) = \frac{3-x^2}{5+|x|}$ jest parzysta?
a) tak   b) nie
odp. a)

Zad.4. Napisz wzór funkcji liniowej wiedząc, że wykres jest prostopadły do wykresy funkcji $y = 2x + 3$ i przechodzi przez punkt $A(2, 5)$.
a) $1/2x + 6$ b) $-1/2x + 6$ c) $-1/2 - 6$
odp. b)

Zad.5. Sprawdzić czy funkcja jest różnowartościowa: $f(x) = 3^{2x}$.
a) różnowartościowa   b) nie jest różnowartościowa
odp. a)

Zad.6. Zbadać parzystość, bądź nieparzystość funkcji $g(x) = sin^2 x$.
a) parzysta b) nie parzysta c) ani a) ani b)
odp. a)

Zad.7. Podać wzór funkcji złożonej $f(g(x))$ dla $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.
a) $e^{\frac{1}{2}x+1}$ b)$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x+1}$ c) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}x + 1$
odp a)

Test wyjścia:

Zad.1. Rozstrzygnij czy następujący warunek określa pewną funkcję.
1.1. Każdemu odcinkowi przyporządkowujemy jego symetralną.
a) jest funkcją b) nie jest funkcją
odp. a

1.2. Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy jej dzielnik.
a) jest funkcją b) nie jest funkcją
odp. b

Zad.2. Dana jest funkcja określona wzorem $y = \frac{1}{x-2}$.
- Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji.
a) 2 b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
odp. c)
- Znajdź miejsca zerowe.
a) brak b) $\mathbb{R}$ c) 2
odp. a)
- Czy dana funkcja jest różnowartościowa?
a) tak b) nie
odp. a)
- Czy funkcja jest rosnąca czy malejąca?
a) rosnąca w przedziałach określoności b) malejąca w przedziałach określoności c) nie monotoniczna
odp. b)

Zad.3. Dana jest funkcja $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
Znaleźć $g(2)$.
a) 2 b) 0 c) 4
odp. b)
Czy istnieje $g(3)$.
a) tak b) nie
odp. b)

Zad.4. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki równania: $f(x) = f(0)$.

a) $\{-2, 2\}$ b) $\{0, 2\}$ c) $\{0, -2\}$
odp. c)

Zad.5. Wyznacz wzór funkcji g i naszkicuj jej wykres. $f(x) = |x|,\ g(x) = f(x-2)+3$.
a) $g(x) = |x+1|$ ************ plik 28*************
b) $g(x) = |x-2|+3$************ plik 29*************
c) $g(x) = |x|+1$************ plik 30*************
odp. b)

Zad.6. W tym samym układzie współrzędnych sporządzić wykresy funkcji $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 2$, $h(x) = 2(x - 1)$.
a)************ plik 31*************
b)************ plik 32*************
c) ************ plik 33*************
odp. a)

Zad.7. Czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ ma punkty wspólne z osiami współrzędnych?
a) tak   b) nie
odp. b)

Zad.8. Czy
8.1. funkcja $f(x) = 3x^2 - 5x$ nie jest różnowartościowa?
a) tak   b) nie
odp. a)
8.2. funkcja $h(x) = \frac{3}{x} - \frac{x^3}{x^2+1}$ jest nieparzysta?
a) tak   b) nie
odp. a)

Zad.9. Napisz wzór funkcji liniowej wiedząc, że wykres jest równoległy do wykresu funkcji $y = 2x + 1$ i przechodzi przez punkt $A(1, -2)$.
a) $2x - 4$ b) $2x + 4$ c) $-2x - 4$
odp. a)

Zad.10. Dana jest funkcja liniowa $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$ wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji nieujemne.
a) $x \leqslant \frac{1}{6}$ b) $x \geqslant \frac{1}{6}$ c) $x > \frac{1}{6}$
odp. b)

Zad.11. Zbadać monotoniczność funkcji: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$.
a) obie funkcje rosnące w przedziałach określoności
b) tylko jedna funkcja jest rosnąca w przedziale określoności
odp. a)

Zad.12. Sprawdzić, która z funkcji jest różnowartościowa:
15.1. $f(x) = 5x^2 + 3$,
a) różnowartościowa b) nie jest różnowartościowa
odp. b)
15.2. $f(x) = 14x + 2$.
a) różnowartościowa b) nie jest różnowartościowa
odp. a)

Zad.13. Zbadać parzystość, bądź nieparzystość funkcji $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$.
a) parzysta b) nie parzysta c) ani a) ani b)
odp. a)

Zad.14. Wyznaczyć, o ile to możliwe, funkcje odwrotną do funkcji $f(x) = 4x + 6$.
a) $1/4x + 3/2$ b) $1/4x - 3/2$ c) $-1/4x - 3/2$
odp. b)

Zad.15. Podać wzór funkcji złożonej $f(g(x))$ dla $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x-4}$.
a) $2\sqrt{x-4} + 3$ b) $4\sqrt{x-4} + 3$ c) $2\sqrt{x-4} - 3$
odp a)

Zad.16. Rozwiąż równanie $\frac{1-cos8x}{1+tgx}=0$.
a)$k\pi \vee \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{C}$ b) $\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{C}$
odp. a)

Zad.17. Niech Q oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : Q \to Q$ spełniające warunek
$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$ dla każdej pary liczb wymiernych x, y.
a) $f(x) = ax, a \in Q$ b) $f(x) = ax^2, a \in Q$ c) $f(x) = ax + 1, a \in Q$
odp. a)