



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Program zajęć rozszerzających z matematyki
w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r
w I Liceum Ogólnokształcącym im. Ks. A. J. Czartoryskiego
w Puławach



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

I. WSTĘP

Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

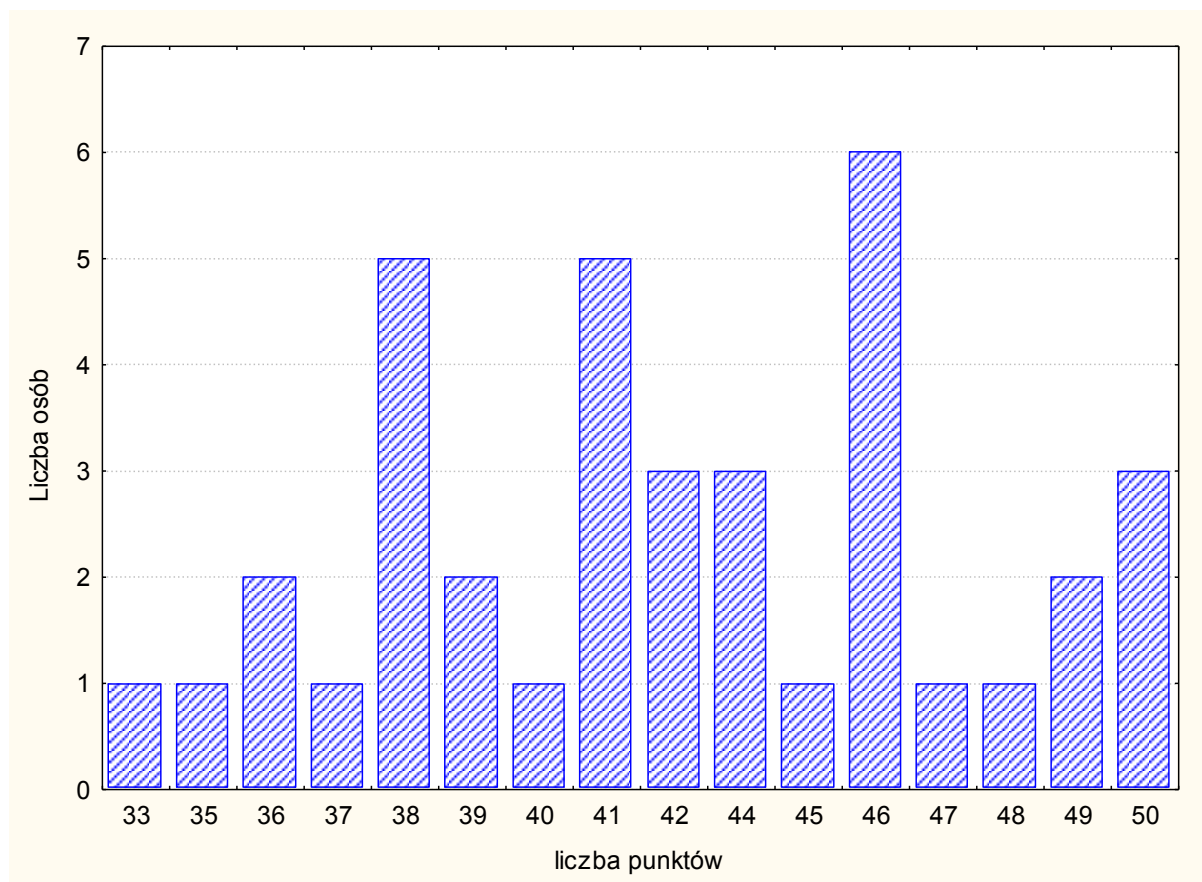
W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach wzięło udział 38 osób. 26 z nich stanowili chłopcy (68,42%) a 12 osób to dziewczyny (31,58%). Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 42,42 punktu, co stanowi 84,84% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 42 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 33 punktów, a najwyższy to 50 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		I Liceum Ogólnokształcące w Puławach	
	punkty	procent	punkty	procent
Średni wynik	23,85	47,70	42,42	84,84
Mediana	23	46	42	84
Wynik najniższy	1	2	33	66
Wynik najwyższy	50	100	50	100
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	4,63	9,26

Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów I Liceum Ogólnokształcącego im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach, którzy uzyskali na egzaminie

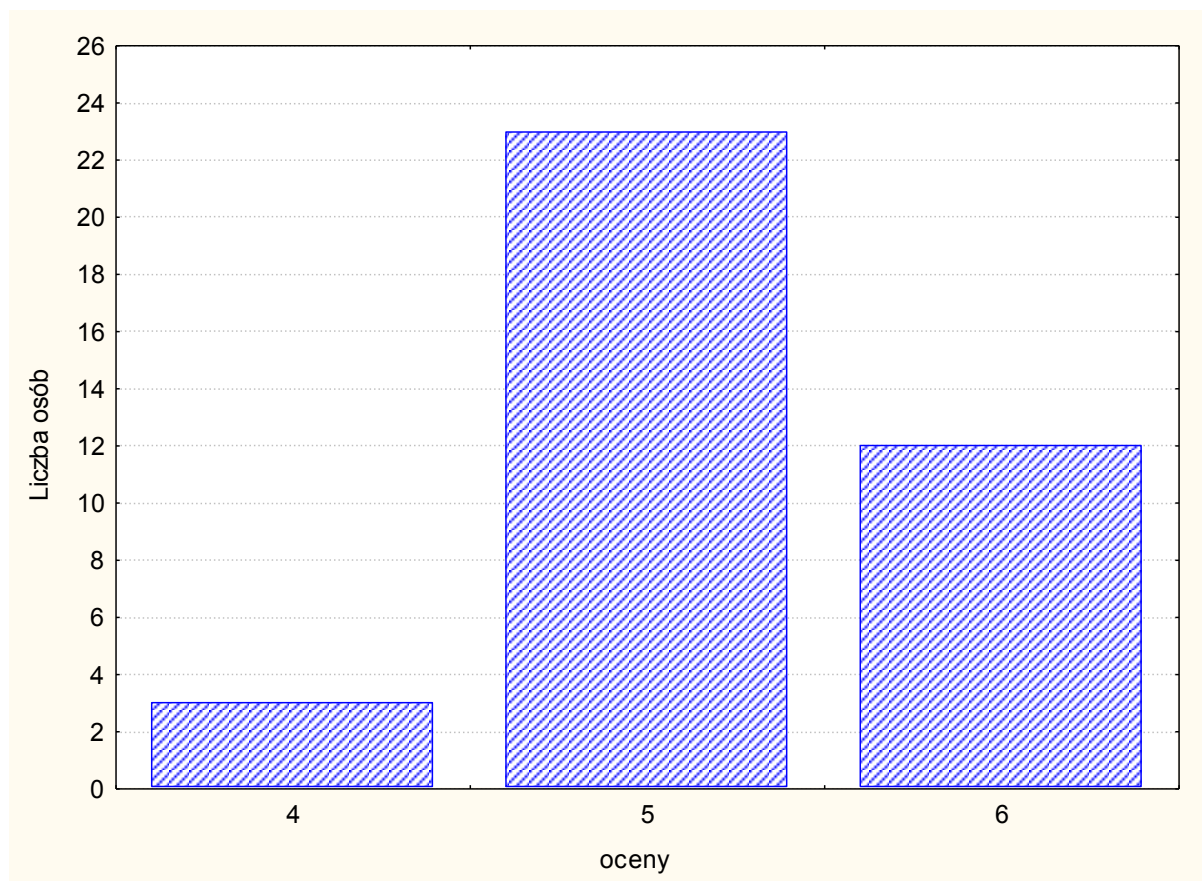
gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 33 do 50.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów I Liceum Ogólnokształcącym im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Rozkład wyników uczniów z I Liceum Ogólnokształcącym im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach jest asymetryczny, lekko przesunięty w stronę niższych wyników, z modalną wynoszącą 46 punktów.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 5,23. Nie było uczniów, którzy otrzymali ocenę dopuszczającą oraz ocenę dostateczną. 28 uczniów uzyskało ocenę dobrą (37,34%), 30 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą (40%) i 3 uczniów otrzymało ocenę celującą (3,99%).



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów I Liceum Ogólnokształcącego im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach.

Rozkład końcowych ocen gimnazjalnych uczniów z I Liceum Ogólnokształcącym im. ks. A. J. Czartoryskiego w Puławach jest symetryczny, lekko przesunięty w stronę wyższych ocen, z modalną wynoszącą 5 (Rysunek 2).

Na zajęcia rozszerzające zakwalifikowali się uczniowie, którzy osiągnęli w Gimnazjum bardzo dobre wyniki końcoworoczne, oraz bardzo wysokie wyniki w części matematyczno – przyrodniczej testu gimnazjalnego. Program ten ma na celu przede wszystkim rozwijać umiejętności i predyspozycje tych uczniów.

II. CELE EDUKACYJNE

1. Cele ogólne:

Zajęcia rozszerzające mają na celu:

- wykształceniu umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowaniu metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych,
- rozwinięciu wyobraźni przestrzennej,
- nabyciu umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej,
- rozwijaniu zdolności i zainteresowań matematycznych,
- rozwijaniu logicznego myślenia,
- wykształceniu umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi,
- precyzyjnemu formułowaniu wypowiedzi,
- pobudzeniu aktywności umysłowej uczniów,
- nabyciu umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania,
- kształtowaniu odpowiedzialności za powierzone zadania,
- kształtowaniu postawy dialogu i kultury dyskusji (komunikacja),
- kształtowaniu wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych,
- wyrabianiu systematyczności w pracy,
- nabyciu umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki,
- rozwijaniu umiejętności pracy w zespole,
- kształtowaniu postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych,
- dbaniu o estetykę (czytelny rysunek, jasne i przejrzyste rozwiązanie zadań).

2. Cele szczegółowe:

Tematyka zajęć	Założone osiągnięcia ucznia
Elementy logiki matematycznej	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi sprawnie posługiwać się funktorami logicznymi; - potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne; - potrafi wnioskować o wartości zdania złożonego, na podstawie informacji o wartościach logicznych innych wyrażen rachunku zdań; - rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę; - potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego; - zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować; - potrafi negować zdania złożone z wykorzystaniem poznanych praw logicznych; - potrafi udowodnić poznane prawa logiczne; - potrafi sprawdzić, czy dane wyrażenie rachunku zdań jest tautologią; - potrafi określić dziedzinę bardziej złożonej formy zdaniowej jednej zmiennej; - potrafi wskazać wszystkie elementy z dziedziny formy zdaniowej jednej zmiennej, które spełniają tę formę zdaniową; - potrafi wskazać formę zdaniową sprzeczną i tożsamościową; - potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających koniunkcję lub alternatywę form zdaniowych; - potrafi posługiwać się symbolami kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego; - potrafi ocenić wartość logiczną zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym; - potrafi podać negację zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym oraz określić jej wartość logiczną. - potrafi przeprowadzić dowód twierdzenia; - potrafi dowodzić nie wprost; - potrafi zanegować równoważność zdań; - potrafi wyznaczyć zbiór wszystkich elementów spełniających podaną implikację form zdaniowych.
Zbiory	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów; - potrafi dowodzić własności działań na zbiorach w oparciu o poznane definicje (np. prawa De Morgana dla zbiorów, prawo rozdzielności dodawania zbiorów względem mnożenia itp.) oraz innymi metodami; - potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami; - potrafi wyznaczyć dopełnienie zbioru (w tym przedziału liczbowego); - potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, w których jest mowa o własnościach liczb całkowitych; - potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb całkowitych (np. dzielenie z resztą, podzielność liczb całkowitych itp.); - potrafi stosować wzory skróconego mnożenia takie jak: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$

	<p>do usuwania niewymierności z mianownika ułamka;</p> <p>- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej takie jak:</p> $ -x = x , x \geq 0, xy = x y , \frac{ x }{ y } = \frac{ x }{ y }$ <p>w rozwiązywaniu zadań;</p> <p>- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną,</p> <p>- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb rzeczywistych;</p> <p>- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów;</p> <p>- potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przykładach o podwyższonym stopniu trudności; posługuje się takimi własnościami wartości bezwzględnej jak:</p> $ x+y \leq x + y \text{ oraz } x - y \leq x+y $ <p>w rozwiązywaniu zadań i dowodzeniu twierdzeń.</p>
Przekształcenia geometryczne	<p>Uczeń:</p> <p>- potrafi stosować własności przekształceń geometrycznych w rozwiązywaniu zadań,</p> <p>- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące przekształceń geometrycznych, w których stosuje oryginalne metody rozwiązań i które wymagają niestandardowych pomysłów.</p>
Funkcje i ich własności	<p>Uczeń:</p> <p>- potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków;</p> <p>- potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (nie tylko w prostych przypadkach);</p> <p>- potrafi określić zbiór wartości funkcji liczbowej (nie tylko wtedy, gdy dziedzina jest zbiorem skończonym);</p> <p>- potrafi badać monotoniczność funkcji liczbowej na podstawie definicji;</p> <p>- potrafi badać różnowartościowość funkcji na podstawie definicji;</p> <p>- potrafi badać parzystość, nieparzystość oraz okresowość funkcji na podstawie definicji;</p> <p>- potrafi na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ sporządzić wykresy funkcji: $y = f(x)$ oraz wykres funkcji $y = f(x)$ oraz zapisać wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku tych przekształceń,</p> <p>- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji i ich własności.</p>
Funkcja liniowa	<p>Uczeń:</p> <p>- potrafi rozwiązać równanie liniowe z parametrem;</p> <p>- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego</p>

	<p>z parametrem;</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi rozwiązać równanie linowe oraz nierówność liniową z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem; - potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem; - potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie; - potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub nierówności z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. <p>- potrafi rozwiązać nietypowe zadania dotyczące funkcji liniowej, o podwyższonym stopniu trudności.</p>
<p>Funkcja kwadratowa</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi wyprowadzić wzór na współrzędne wierzchołka paraboli; - potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe trójmianu kwadratowego; - potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną i na jego podstawie omówić własności funkcji; - potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych; - potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; - potrafi udowodnić wzory Viete'a; - potrafi stosować wzory Viete'a do rozwiązywania równań i nierówności z parametrem; - potrafi rozwiązywać różne zadania, w których występuje parametr, dotyczące własności funkcji kwadratowej; - potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną; - potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności pierwiastkowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych; - potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych; - potrafi przeprowadzić dyskusję nad liczbą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem i wartością bezwzględną na podstawie interpretacji graficznej rozważanego problemu; - potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności stopnia drugiego z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego; - potrafi badać własności funkcji kwadratowej w oparciu o odpowiednie definicje; - potrafi dowodzić własności funkcji kwadratowej, <p>- potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz</p>

	niekonwencjonalnych pomysłów.
Wielomiany	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach; - potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; - zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; - potrafi udowodnić twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; - potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki (w tym stosując "metodę prób"); - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem; - potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych; - potrafi udowodnić wzory Viete'a dla równania trzeciego stopnia, <p>- potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące wielomianów, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.</p>
Funkcja wymierna	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na wyrażeniach wymiernych; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z wartością bezwzględną); - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem; - potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z parametrem); - potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji wymiernej (w tym z parametrem); - potrafi dowodzić własności funkcji wymiernej; - potrafi narysować wykres funkcji homograficznej z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać jej własności; - potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych. <p>- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem;</p> <p>- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji wymiernych wymagające zastosowania niekonwencjonalnych metod.</p>
Ciągi	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym; - potrafi podać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;

	<ul style="list-style-type: none"> - potrafi, stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać równoważność wzoru ogólnego i rekurencyjnego danego ciągu; - potrafi badać własności ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (np. monotoniczność ciągu, zbieżność ciągu); - zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; - potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu; - potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych; - potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności; - potrafi udowodnić wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego; - potrafi udowodnić wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego; - potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; - potrafi udowodnić wzór na sumę n kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; - potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego; - potrafi rozwiązywać różne zadania z zastosowaniem wiadomości o szeregu geometrycznym zbieżnym, - zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu; - potrafi udowodnić twierdzenia dotyczące własności ciągów (np. twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz inne twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych); - potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach; - wie co to jest liczba e oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą e
<p>Funkcja wykładnicza i logarytmiczna</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; - potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; - potrafi rozwiązywać równania wykładniczo – potęgowo – logarytmiczne; - potrafi narysować zbiór punktów płaszczyzny spełniający dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi w których występują logarytmy; - potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość funkcji); - potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. z zastosowaniem wiadomości o ciągach, szeregu geometrycznym itp.), - potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z

	<p>parametrem;</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem - potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej; - potrafi dowodzić własności logarytmów.
<p>Indukcja matematyczna, dwumian Newtona</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi rozwiązywać równania w których występuje symbol Newtona; - potrafi obliczać wartości wyrażeń w których występuje symbol Newtona (trudniejsze przykłady); - potrafi udowodnić i stosować własności symbolu Newtona; - potrafi stosować wzór dwumianowy Newtona w rozwiązywaniu zadań; - potrafi wyznaczyć dowolny wyraz w rozwinięciu dwumianu Newtona; - potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu podzielności liczb naturalnych, <p>- potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń (np. dowodzenie prawdziwości nierówności, w których jest mowa o własnościach liczb naturalnych) □</p>
<p>Trygonometria</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta; - potrafi określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych; - potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych; - potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich; - potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne; - potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych; - potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych; - potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu O(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu, <ul style="list-style-type: none"> - potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych; - potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta; - potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z

	<p>wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów;</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej; - potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej; - potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem; - potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii, <p>- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.</p>
<p>Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zna i rozumie aksjomatyczną definicję odległości; - zna twierdzenia o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; - zna pojęcie kąta zewnętrznego wielokąta, umie uzasadnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała; - potrafi udowodnić twierdzenie o części wspólnej figur wypukłych; - potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych; - potrafi udowodnić twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie; - potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie; - potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka; - potrafi udowodnić twierdzenie o sumie kątów w trójkącie (wielokącie); - potrafi udowodnić twierdzenia o symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie; - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, z zastosowaniem poznanych twierdzeń, <ul style="list-style-type: none"> - zna dowód twierdzenia o odcinkach stycznych; - zna dowody twierdzeń o kątach środkowych i wpisanych; - wie, co to jest kąt dopisany do okręgu; - zna twierdzenie o kątach dopisanym do okręgu i wpisanym w okrąg <ul style="list-style-type: none"> - opartych na tym samym łuku; - zna i potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki przekątnych trapezu; - wie, że odcinki łączące środek okręgu wpisanego w trapez z końcami jednego ramienia tworzą kąt prosty; - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń; - zna dowód twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion trapezu; - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; - potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i opisanych na trójkącie; - potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności; - potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i

	<p>opisanych na okręgu,</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi wskazać metryki nieeuklidesowe i narysować niektóre figury w tych metrykach; - potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie; - potrafi udowodnić twierdzenia mówiące o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie; - potrafi udowodnić twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą; - potrafi udowodnić twierdzenie o wysokościach w trójkącie; - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń, <p>- zna dowody twierdzeń o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń.
<p>Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zna dowód twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów; potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów, - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów lub twierdzenia cosinusów.
<p>Pola figur</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi wyprowadzić wzory na pole trójkąta; - potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; - potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu; - potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; - potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej twierdzeń (m. in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i cosinusów), - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń (w tym twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów).
<p>Jednokładność i podobieństwo</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi udowodnić wybrane własności jednokładności; - potrafi, na płaszczyźnie z układem współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku $O(a, b)$ i skali $s \neq 0$; - umie udowodnić twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym

	<p>poprowadzonej na przeciwprostokątną, wykorzystując podobieństwo trójkątów;</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu, wykorzystując cechy przystawiania trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i inne, poznane wcześniej twierdzenia, - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem własności jednokładności i podobieństwa oraz innych twierdzeń (w tym twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów).
Stereometria	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - umie udowodnić wybrane twierdzenia charakteryzujące położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni; - zna określenie i własności rzutu równoległego na płaszczyznę; - potrafi wykorzystać własności rzutu równoległego na płaszczyznę w rysowaniu figur płaskich; - zna określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę i potrafi go stosować np. w określaniu odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi lub w określeniu kąta między prostą a płaszczyzną; - zna i rozumie określenie kąta trójściennego (wielościennego); - rozumie określenie „przekrój wielościanu” (przekrój bryły obrotowej); potrafi je stosować w rozwiązaniach zadań o średnim stopniu trudności; - umie zaznaczać kąty w bryłach (np. kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa); - umie udowodnić twierdzenie o przekątnych równoległościanu; - potrafi udowodnić twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy; - rozumie co to znaczy, że graniastosłup jest wpisany w walec lub opisany na walcu; - rozumie co to znaczy, że kula jest wpisana w wielościan (walec, stożek) lub opisana na wielościanie (walcu, stożku); - zna określenie jednokładności i podobieństwa w przestrzeni; - potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań; - potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, dotyczące brył, o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń, - potrafi udowodnić twierdzenie o trzech prostopadłych; - zna określenia niektórych izometrii w przestrzeni (przesunięcie równoległe, symetria środkowa, symetria osiowa, symetria płaszczyznowa, obrót); - potrafi podać przykłady brył: środkowosymetrycznych, osiowosymetrycznych, płaszczyznowosymetrycznych; - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne, dotyczące brył, o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.
Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; - umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa;

	<ul style="list-style-type: none"> - umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań "teoretycznych"; - umie udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki z definicji prawdopodobieństwa; - umie udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; - wie i rozumie na czym polega niezależność n ($n \geq 2$) zdarzeń; - umie wyprowadzić wzór na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego; - umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń, - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.
<p>Elementy analizy matematycznej</p>	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> - potrafi uzasadnić (powołując się na definicję Heinego), że nie istnieje granica funkcji w punkcie; - umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności) z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów; - potrafi wyznaczać asymptoty ukośne wykresów funkcji; - potrafi obliczać granice jednostronne funkcji innych niż wielomianowe i wymierne; - potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic; - potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest ciągła; - potrafi wykorzystać własności funkcji ciągłych do przybliżonego rozwiązywania równań; - potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika ciągłość funkcji w tym punkcie; - potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest różniczkowalna; - potrafi udowodnić własności pochodnej funkcji w punkcie; - zna twierdzenie $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i potrafi je stosować do obliczania pochodnych funkcji takich jak np. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^{\frac{2}{5}}$; - zna twierdzenie Lagrange'a; potrafi je zastosować do dowodu własności wiążących znak funkcji pochodnej z monotonicznością funkcji; - potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że jeśli funkcja f jest różniczkowalna i rosnąca (malejąca), to pochodna f' jest nieujemna (nieujemna); - potrafi udowodnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji; - potrafi udowodnić warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji; - potrafi zbadać istnienie ekstremów globalnych funkcji ciągłej w przedziale otwartym (lub w sumie przedziałów otwartych); - potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji wielomianowej (wymiernej) z wartością bezwzględną; - potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic, badania ciągłości, stosowania pochodnych funkcji,

	<ul style="list-style-type: none"> - zna definicję Cauchy'ego funkcji w punkcie; - potrafi udowodnić, że dla $a > 0$ mamy $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$; - umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności) z zastosowaniem twierdzenia o trzech funkcjach; - potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące granic, ciągłości funkcji i rachunku pochodnych o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń, - potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres, - potrafi obliczać całki nieoznaczone, - potrafi obliczać całki oznaczone, - potrafi stosować całki do obliczania pól i objętości figur płaskich i przestrzennych, potrafi obliczyć długość łuku.
--	--

III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU

1. Rozwijanie umiejętności i zdolności matematycznych uczniów.
2. Przygotowywanie uczniów do udziału w konkursach matematycznych.
3. Przygotowywanie uczniów do części podstawowej i rozszerzonej egzaminu maturalnego z matematyki.

IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH

1. Organizacja zajęć

Zajęcia będą prowadzone przez trzy lata. W każdym roku odbędzie się 48 godzin zajęć dydaktycznych oraz konsultacje. W roku szkolnym 2010/11 odbędzie się 6 godzin konsultacji, w następnych dwóch latach po 7 godzin w każdym roku szkolnym oddzielnie.

Na zajęciach nauczyciel będzie pracować z uczniami następującymi metodami:

- prezentacja materiału przez nauczyciela,
- wykonywanie ćwiczeń i rozwiązywanie zadań, które pobudzają ciekawość i aktywność umysłową uczniów,
- praca z wykorzystaniem różnych środków multimedialnych,
- samodzielne rozwiązywanie problemów i zadań.

2. Pomoce naukowe

Prowadzący będzie korzystał w czasie prowadzenia zajęć z różnych podręczników i zbiorów zadań dostępnych na rynku. Podręcznikiem i zbiorem wyjściowym będzie ten, który zostanie w danym roku szkolnym przyjęty do realizacji przez I Liceum Ogólnokształcące w Puławach. W czasie prowadzenia zajęć będą wykorzystywane dostępne techniki komputerowe oraz wszelkie pomoce dydaktyczne dostępne w Liceum.

V. SZCZEGÓŁOWA REALIZACJA PROGRAMU

Klasa	Temat zajęć	Liczba godzin
1.	Zajęcia organizacyjne	1
1.	Liczby i ich własności	3
1.	Wyrażenia algebraiczne	3
1.	Podzielność liczb	3
1.	Równania w liczbach całkowitych	3
1.	Równania i nierówności	3
1.	Część całkowita liczby. Równania i nierówności	3
1.	Układy równań	3
1.	Procenty	3
1.	Wartość bezwzględna	3
1.	Trójkąty i ich własności	3
1.	Wielokąty i ich własności	3
1.	Geometria kół	3
1.	Pola i obwody figur	3
1.	Trygonometria	3
1.	Równania i nierówności trygonometryczne	3
1.	Funkcja liniowa z parametrem i wartością bezwzględną	2
2.	Wzory Viete'a. Równania kwadratowe z parametrem	2

2.	Dzielenie wielomianów. Twierdzenie o reszcie	2
2.	Wzory Viete'a dla wielomianów trzeciego i czwartego stopnia	2
2.	Wielomian pomocniczy i wielomian symetryczny	2
2.	Funkcja wymierna z parametrem	2
2.	Funkcja homograficzna	2
2.	Indukcja matematyczna	2
2.	Granice ciągów	2
2.	Granice ciągów	2
2.	Szereg geometryczny	2
2.	Granica funkcji w punkcie	2
2.	Granice jednostronne. Badanie ciągłości funkcji	2
2.	Pochodna funkcji. Obliczanie pochodnych funkcji złożonych	2
2.	Pochodna funkcji złożonej	2
2.	Reguła del'Hospitala. Obliczanie granic funkcji	2
2.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	2
2.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	2
2.	Badanie przebiegu zmienności funkcji	2
2.	Obliczanie całek nieoznaczonych	2
2.	Obliczanie całek nieoznaczonych	2
2.	Całka oznaczona	2
2.	Zastosowanie całki oznaczonej	2
2.	Zastosowanie całki oznaczonej	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – liczby i ich zbiory	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – liczby i ich zbiory	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – funkcje i ich własności	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – funkcje i ich własności	2

3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – wielomiany i funkcje wymierne	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – wielomiany i funkcje wymierne	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – funkcje trygonometryczne	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – funkcje trygonometryczne	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - ciągi	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - ciągi	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - planimetria	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - planimetria	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – geometria analityczna	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – geometria analityczna	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - stereometria	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych - stereometria	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki	2
3.	Rozwiązywanie zadań maturalnych – funkcja wykładnicza i logarytmiczna	3
3.	Rozwiązywanie zadań z arkuszy maturalnych	3
3.	Rozwiązywanie zadań z arkuszy maturalnych	3
3.	Rozwiązywanie zadań z arkuszy maturalnych	3

VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczniowie będą chętnie uczestniczyć we wszystkich dostępnych konkursach matematycznych tj.: Olimpiada Matematyczna, Internetowy Konkurs Politechniki Warszawskiej, Olimpiada Matematyczna o złoty indeks AGH, konkurs internetowy związany z realizacją projektu edukacyjnego „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”, Kangur matematyczny i inne.

Realizacja tego programu umożliwi uczniowi rozwiązywanie ciekawych problemów, z którymi w czasie typowych lekcji szkolnych nie zawsze się spotyka.

VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW

Na zajęciach nie będzie prowadzone ocenianie uczniów. Każdy uczeń, który osiągnie sukces w konkursie matematycznym, będzie oceniany na zajęciach lekcyjnych zgodnie z Przedmiotowym Systemem Oceniania z matematyki oraz zgodnie ze Statutem Liceum.

VIII. EWALUACJA PROGRAMU

Ewaluacja programu odbędzie się drogą internetową w poprzez wypełnienie stosownej ankiety.

IX. BIBLIOGRAFIA

1. Henryk Pawłowski – Podręcznik. Zakres rozszerzony 1, 2, 3.
2. Henryk Pawłowski – Zbiór zadań. Linia ponadstandardowa. Klasa 1, 2, 3.
3. Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda – Podręcznik. Klasa 1, 2, 3.
4. Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda – Zbiór zadań dla uczniów klasy 1, 2, 3.
5. Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda – Podręcznik. Klasa 1, 2, 3.
6. Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda – Analiza

matematyczna.

7. Włodzimierz Krywicki, Lech Włodarski – Analiza matematyczna w zadaniach część pierwsza.
8. Witold Bednarek – Konkurs matematyczny w szkole średniej.
9. Witold Bednarek – Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę.
10. Witold Stachnik – Zbiór zadań na ocenę celującą.
11. Henryk Pawłowski, Wojciech Tomalczyk – Zadania z matematyki dla olimpijczyków.
12. Henryk Pawłowski – Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata.
13. Henryk Pawłowski – Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Trygonometria i geometria.
14. Henryk Pawłowski – Zadania z olimpiad matematycznych całego świata. Planimetria i stereometria
15. Lev Kourliandtchik – Impresje liczbowe



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Młodzi Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tezy do programu przedstawili:

Monika Strawa

Rafał Cieśla

Korekta i opracowanie:

mgr Elżbieta Miterka

Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:

mgr Agnieszka Szumera

Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281