



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

**Program zajęć rozszerzających z matematyki
w ramach projektu
„Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r
w *I LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCYM im. TADEUSZA
KOŚCIUSZKI W ŁUKOWIE***



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

I. WSTĘP

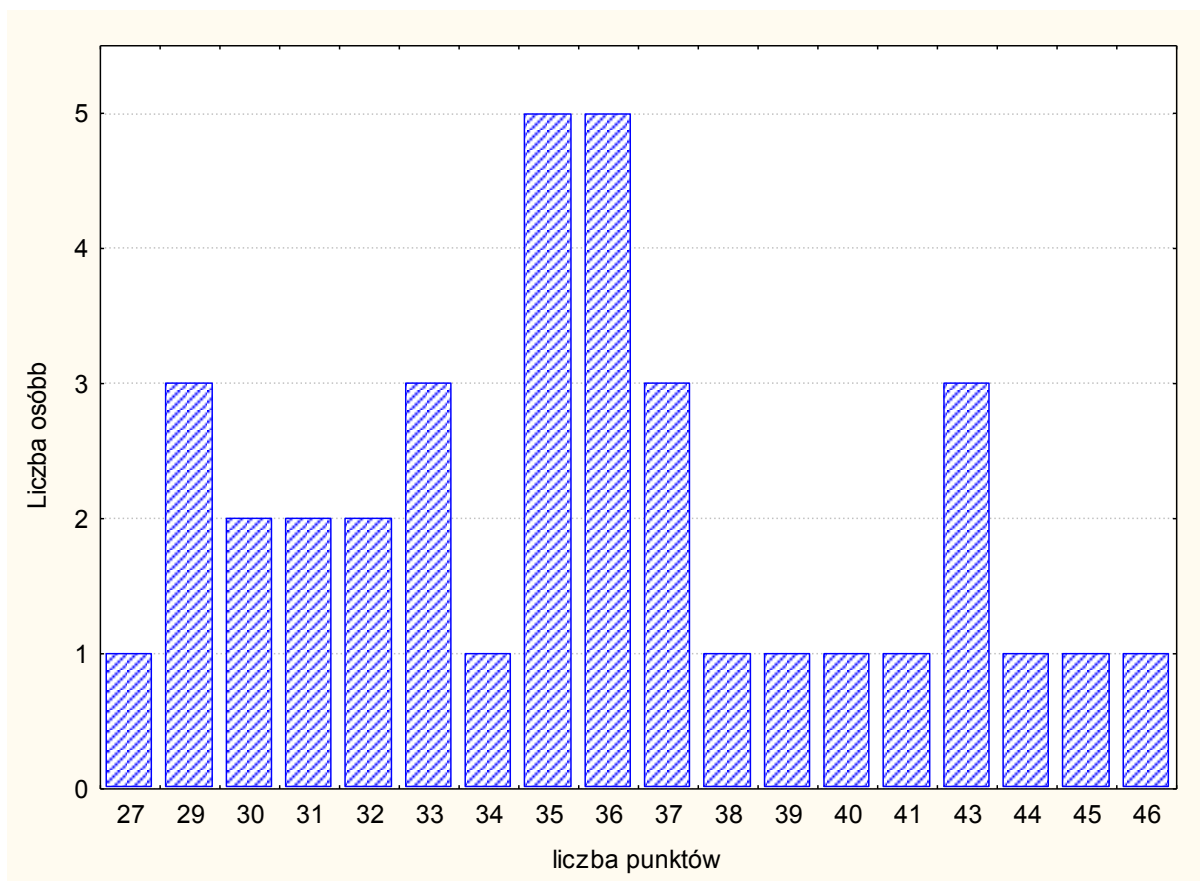
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie wzięło udział 37 osób. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 35,7 punktu, co stanowi 71,4% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 35 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 27 punktów, a najwyższy to 46 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		I Liceum Ogólnokształcące w Łukowie	
	punkty	procent	punkty	procent
Średni wynik	23,85	47,70	35,7	71,4
Mediana	23	46	35	70
Wynik najniższy	1	2	27	54
Wynik najwyższy	50	100	46	92
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	4,9	9,8

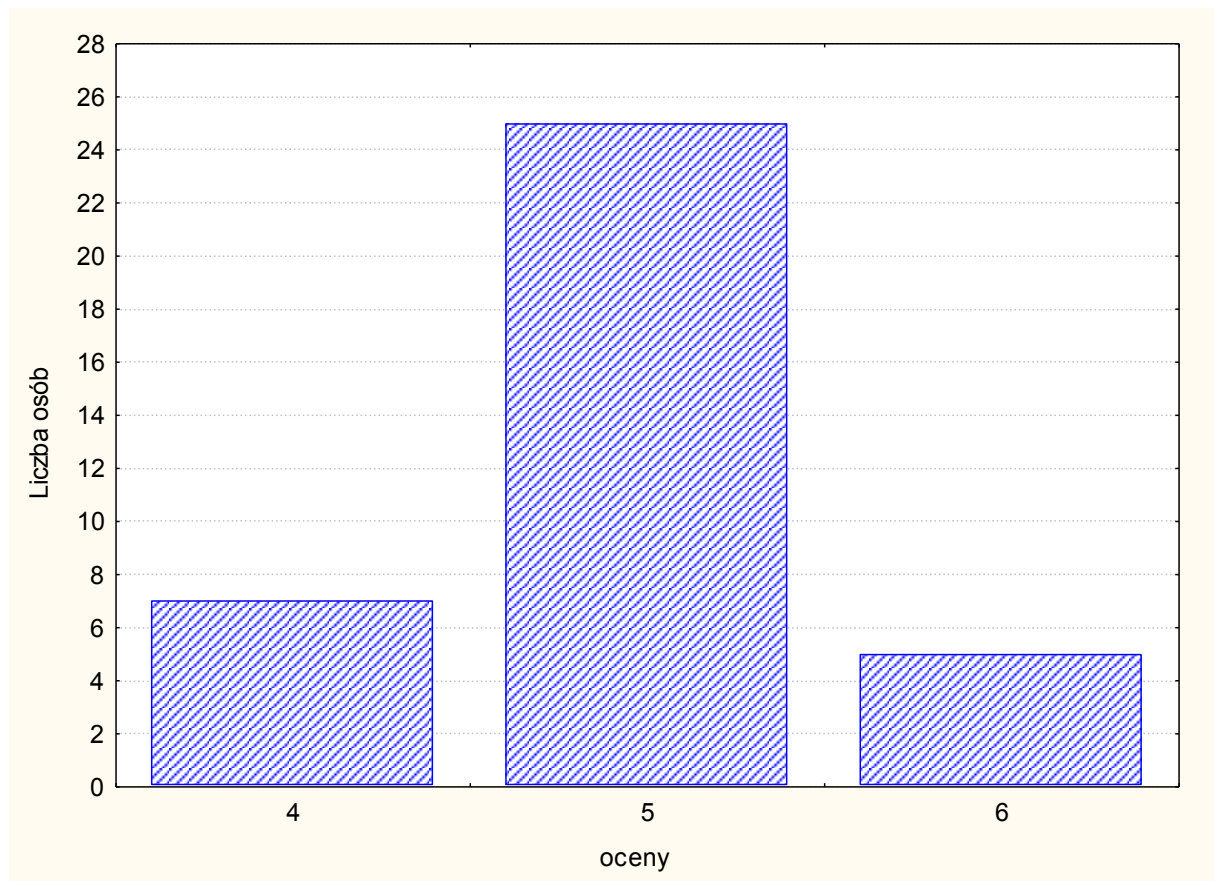
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów I Liceum Ogólnokształcącym im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 27 do 46.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów I Liceum Ogólnokształcącym im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Rozkład wyników uczniów z I Liceum Ogólnokształcącym im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie jest dwumodalny, z modalną wynoszącą 35 i 36 punktów.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 4,95. Nie było uczniów, którzy otrzymali ocenę dopuszczającą oraz ocenę dostateczną. 9 uczniów uzyskało ocenę dobrą, 25 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 5 uczniów otrzymało ocenę celującą.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów I Liceum Ogólnokształcącego im. Tadeusza Kościuszki w Łukowie.

Powyższa analiza wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników zajęć, a także ocena końcoworoczna w trzeciej klasie gimnazjum spowodowała, iż zakwalifikowali się oni na zajęcia rozszerzające, ze względu na dużą ilość zdobytych punktów na egzaminie gimnazjalnym i przy wysokich ocenach z matematyki.

Na podstawie wyników egzaminów wstępnych ustalono, że uczniowie zakwalifikowani do udziału w zajęciach rozszerzających są uzdolnieni matematycznie, wykazują ponadprzeciętne zdolności. Grupa ta jest chętna do pracy, dlatego też ustalono, że materiał realizowany na zajęciach będzie wykraczał poza ramy podstawy programowej dla cyku rozszerzonego. Elementy zawarte w podstawie programowej będą realizowane na lekcjach matematyki, a na zajęciach z projektu tylko dodatkowe elementy, które umożliwią uczniom pełniejszy rozwój przygotowując ich jednocześnie do dalszych kierunków kształcenia.

II. CELE EDUKACYJNE

1. Cele ogólne:

Zajęcia roszszerzające z matematyki mają za zadanie:

- rozwijać aktywność umysłową uczniów
- kształcić logiczne i twórcze myślenie
- kształcić umiejętności i wnioskowanie
- kształcić umiejętności rozwiązywania problemów
- uczyć ścisłego wyrażania myśli i poglądów

Opracowany program zajęć roszszerzających ma na celu :

- a) Poznanie elementów matematyki jako składnika kultury ogólnej.
- b) Poznanie pewnych treści matematycznych jako narzędzia stosowanego w wielu naukach.
- c) Poznanie elementów teorii wybranych twierdzeń i metod matematycznych.
- d) Poznanie niektórych zastosowań matematyki w działalności człowieka.
- e) Rozwijanie uzdolnień i zainteresowań uczniów.

2. Cele szczegółowe:

Uczeń posiada umiejętności w zakresie:

- Wykorzystywania i tworzenia informacji
- Wykorzystania i interpretowania reprezentacji
- Modelowania matematycznego
- Użycia i tworzenia strategii
- Rozumowania i argumentacji

Liczby i ich zbiory

UCZEŃ ZNA:

• pojęcia: liczba naturalna, całkowita, wymierna, niewymierna i rzeczywista • definicję wartości bezwzględnej • pojęcie koniunkcji i alternatywy zdań oraz negacji zdania • pojęcie kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego • pojęcie implikacji i implikacji odwrotnej • pojęcie równoważności • budowę twierdzenia • pojęcie dowodu wprost oraz dowodu nie wprost • pojęcie podzbioru • pojęcie zbioru pustego • pojęcia: iloczyn, suma i różnica zbiorów • pojęcie zbiorów rozłącznych • symboliczny zapis zawierania się zbiorów i działań na zbiorach • pojęcie przedziału otwartego i domkniętego • zasadę indukcji matematycznej • pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej • interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną i metody ich rozwiązywania

UCZEN ROZUMIE:

• jak buduje się zdania za pomocą koniunkcji, alternatywy i negacji • jak buduje się zaprzeczenia zdań z kwantyfikatorami • pojęcia: implikacja, implikacja odwrotna oraz równoważność • dowód wprost oraz dowód nie wprost • pojęcie podzbioru • pojęcia: iloczyn, suma i różnica zbiorów • pojęcie przedziału otwartego i domkniętego • zasadę indukcji matematycznej • pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej • związek między nierównością typu $|x| < a$ i $|x| > a$ i jej interpretacją na osi liczbowej

UCZEŃ POTRAFI:

• rozwiązywać równania i nierówności z zastosowaniem wartości bezwzględnej • oceniać wartość logiczną zdań złożonych • wskazywać założenia oraz tezę twierdzenia • formułować twierdzenia w postaci implikacji • dowodzić twierdzenia metodą wprost oraz metodą nie wprost • oceniać wartość logiczną koniunkcji i alternatywy zdań • tworzyć negację podanego zdania • tworzyć implikacje, implikacje odwrotne oraz równoważności zdań • oceniać wartość logiczną implikacji i równoważności • graficznie przedstawiać zawieranie się zbiorów oraz sumę, różnicę i iloczyn zbiorów • wyznaczać podzbiory, sumy, różnice i iloczyny podanych zbiorów • zapisywać przedziały liczbowe za pomocą nierówności z zastosowaniem wartości bezwzględnej • wykonywać działania na przedziałach liczbowych • dowodzić własności liczb naturalnych, korzystając z zasady indukcji matematycznej, różnymi metodami rozwiązywać równania z wartością bezwzględną

Funkcje i ich własności

UCZEŃ ZNA:

• pojęcie funkcji • pojęcia: dziedziną funkcji, argument, wartość funkcji, zmienna niezależna, zmienna zależna • pojęcie miejsca zerowego • pojęcia: funkcja rosnąca, malejąca, stała • różne sposoby zapisu tej samej funkcji, pojęcie różnowartościowości funkcji • pojęcia: funkcja parzysta, funkcja nieparzysta • pojęcia: funkcja okresowa, okres zasadniczy funkcji • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x + p)$, $y = f(x + p) + q$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcie funkcji • pojęcie różnowartościowości funkcji • pojęcia: funkcja parzysta, nieparzysta, okresowa • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x + p)$, $y = f(x + p) + q$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$

UCZEŃ POTRAFI:

• podać argumenty, dla których wartości funkcji spełniają określone warunki • analizować funkcje przedstawione w różnej postaci i wyciągać wnioski • przedstawiać funkcje za pomocą wzoru • sporządzać wykres funkcji określonej wzorem • ustalać dziedzinę funkcji określonej wzorem • analizować zależności między dwiema wielkościami opisane za pomocą wzoru lub wykresu funkcji •

sporządzać wykres funkcji określonej wzorem • sporządzać wykresy funkcji spełniających określone warunki • odczytywać własności funkcji na podstawie danego jej wykresu • określać własności funkcji na podstawie jej wzoru (*również na podstawie definicji*) • analizować funkcje przedstawione w różnej postaci i wyciągać wnioski • sporządzać wykresy funkcji: $y = f(x) + q$, $y = f(x + p)$, $y = f(x + p) + q$, mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ • zapisywać wzory funkcji powstałych w wyniku przesunięcia wykresu danej funkcji • określać sposób przesunięcia wykresu jednej funkcji tak, aby otrzymać wykres drugiej funkcji • sporządzać wykresy funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$ (K), $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ • zapisywać wzory funkcji powstałych przez symetrię wykresu danej funkcji względem obu osi i początku układu współrzędnych, określać związek między przekształceniem wykresu funkcji a wzorem funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia.

Funkcja liniowa

UCZEŃ ZNA:

- pojęcie funkcji liniowej • położenie wykresu funkcji liniowej w zależności od współczynnika kierunkowego

UCZEN POTRAFI:

- sporządzać wykres funkcji liniowej • sprawdzać algebraicznie i graficznie, czy punkt należy do wykresu • wyznaczać argument dla danej wartości funkcji i odwrotnie • obliczać i odczytywać z wykresu miejsca zerowe funkcji • obliczać i odczytywać z wykresu argumenty, dla których wartości spełniają określone warunki • korzystając ze wzoru funkcji liniowej określać jej monotoniczność i znajdować współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu • podawać wzór funkcji liniowej, której wykres:

— przechodzi przez dane dwa punkty

— przechodzi przez dany punkt i jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej, której wzór jest dany

— przechodzi przez dany punkt i jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej, której wzór jest dany • obliczać współrzędne punktu przecięcia wykresów dwóch funkcji liniowych, obliczać pole figury ograniczonej wykresami funkcji oraz osiami układu współrzędnych, rozwiązywać nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi, układy nierówności, rozwiązuje równania i układy równań liniowych z parametrem, rozwiązuje układy równań metodą wyznaczników, rozwiązuje układy równań z wartością bezwzględną, posługuje się zależnościami funkcyjnymi w otaczającym nas świecie

Funkcja kwadratowa

UCZEŃ ZNA:

- pojęcie paraboli • położenie wykresu funkcji $y = ax^2$ w zależności od wartości współczynnika a • położenia parabol: $y = ax^2 + q$, $y = a(x + p)^2$, $y = a(x + p)^2 + q$ • pojęcie funkcji kwadratowej • wzory określające współrzędne wierzchołka paraboli • postać ogólną, postać kanoniczną oraz iloczynową funkcji kwadratowej • pojęcie nierówności kwadratowej • wzory Viete'a • pojęcie średniej

arytmetycznej, sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem, graficzne rozwiązania równań typu: $f(x)=m$, $|f(x)|=m$, $f(x)=m^2$, zależności funkcyjne w otaczającym nas świecie

UCZEN ROZUMIE:

- związek między wzorami określającymi współrzędne wierzchołka paraboli i postacią kanoniczną wzoru odpowiedniej funkcji kwadratowej
- rolę parametru w równaniu i nierówności
- jak wyznaczono wzory Viete'a, sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem, graficzne rozwiązania równań typu: $f(x)=m$, $|f(x)|=m$, $f(x)=m^2$, zależności funkcyjne w otaczającym nas świecie

UCZEN POTRAFI:

- sporządzać wykresy funkcji $y = a(x + p)^2 + q$ i określać ich własności
- podawać wzór paraboli o danym wierzchołku i przechodzącej przez dany punkt
- podawać wzór funkcji, której wykresem jest dana parabola
- zapisywać wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- rysować wykres funkcji kwadratowej i określać jej własności
- zapisywać wzór funkcji kwadratowej spełniającej dane warunki
- obliczać współrzędne punktów przecięcia paraboli z osiami układu współrzędnych oraz współrzędne jej wierzchołka
- obliczać miejsca zerowe funkcji kwadratowej
- określać liczbę miejsc zerowych funkcji kwadratowej w zależności od wartości wyróżnika trójmianu kwadratowego
- obliczać, dla jakich argumentów funkcja spełnia określone warunki
- obliczać współrzędne punktów przecięcia wykresów danych funkcji
- obliczać pola figur spełniających określone warunki
- rozwiązywać nierówności kwadratowe
- określać argumenty, dla których wartości jednej funkcji są większe od wartości drugiej funkcji
- znajdować liczby spełniające koniunkcję pewnych nierówności
- opisywać zależności między wielkościami za pomocą funkcji kwadratowej
- rozwiązywać zadania tekstowe stosując funkcji kwadratowej
- rozwiązywać równania i nierówności z parametrem
- rozwiązywać zadania, wykorzystując własności funkcji kwadratowej
- stosować wzory Viete'a
- stosować wzory Viete'a do obliczania zadań, w których występują średnie: arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna
- rozwiązywać proste równania i nierówności kwadratowe z parametrem, graficznie rozwiązywać równania typu: $f(x)=m$, $|f(x)|=m$, $f(x)=m^2$, wykorzystuje w zadaniach zależności funkcyjne w otaczającym nas świecie

Wielomiany

UCZEŃ ZNA:

- pojęcie jednomianu
- pojęcie wielomianu stopnia n
- pojęcie wielomianu zerowego
- pojęcie wielomianów równych
- pojęcia: dwumian, trójmian, trójmian kwadratowy
- pojęcie rozkładu wielomianu na czynniki
- wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy, kwadrat różnicy, różnica kwadratów dwóch wyrażeń, suma sześciątów, różnica sześciątów dwóch wyrażeń
- własność rozkładu wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego
- pojęcie równania wielomianowego stopnia n
- pojęcie pierwiastka wielomianu
- pojęcie k -krotnego pierwiastka wielomianu
- pojęcie postaci iloczynowej wielomianu drugiego stopnia
- określenie podzielności wielomianu przez wielomian
- metodę dzielenia wielomianu przez jednomian
- metodę dzielenia wielomianu przez wielomian
- pojęcie reszty z dzielenia wielomianu przez wielomian
- twierdzenie Bézout
- własność wielomianu dotyczącą reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x - a)$
- zastosowanie twierdzenia Bézout do rozwiązywania równań wielomianowych
- twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych równania
- twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych równania wielomianowego
- pojęcie

nierówności wielomianowej • pojęcie funkcji wielomianowej • własności funkcji wielomianowych • sposób szkicowania wykresu przedstawiającego zmianę znaku wartości funkcji wielomianowej

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcie jednomianu • pojęcie wielomianu stopnia n • pojęcie wielomianu zerowego • pojęcie wielomianów równych • pojęcia: dwumian, trójmian, trójmian kwadratowy • pojęcie rozkładu wielomianu na czynniki • wzory skróconego mnożenia: kwadrat sumy, kwadrat różnicy, różnica kwadratów dwóch wyrażeń, suma sześciątów, różnica sześciątów dwóch wyrażeń • własność rozkładu wielomianu na czynniki stopnia co najwyżej drugiego • pojęcie równania wielomianowego stopnia n • pojęcie pierwiastka wielomianu • pojęcie k -krotnego pierwiastka wielomianu • pojęcie postaci iloczynowej wielomianu drugiego stopnia • określenie podzielności wielomianu przez wielomian • metodę dzielenia wielomianu przez jednomian • metodę dzielenia wielomianu przez wielomian • pojęcie reszty z dzielenia wielomianu przez wielomian • twierdzenie Bézout • własność wielomianu dotyczącą reszty z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ • potrzebę stosowania twierdzenia Bézout do rozwiązywania równań wielomianowych • twierdzenie o rozwiązaniach całkowitych równania wielomianowego • twierdzenie o rozwiązaniach wymiernych równania wielomianowego • pojęcie nierówności wielomianowej • pojęcie funkcji wielomianowej • własności funkcji wielomianowych • sposób szkicowania wykresu przedstawiającego zmianę znaku wartości funkcji wielomianowej, rozwiązywanie zadań z parametrem dotyczących wielomianów

UCZEN POTRAFI:

• określać stopień wielomianu • dodawać, odejmować, mnożyć wielomiany • przekształcać wielomiany do najprostszej postaci • przedstawiać wyrażenia algebraiczne w postaci jednomianów • obliczać wartości liczbowe wielomianów dla podanej wartości zmiennej • wykonywać działania na wielomianach i przedstawiać otrzymane wielomiany w najprostszej postaci • obliczać wartości współczynników wielomianu, gdy dane są wartości wielomianu dla określonych wartości zmiennych • podawać przykłady wielomianów spełniających określone warunki • obliczać, dla jakich wartości współczynników wielomiany są równe • rozkładać wielomiany czynniki, stosując:

– wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias

– wzory skróconego mnożenia

– metodę grupowania wyrazów

• określać, dla jakich wartości zmiennej wielomian przyjmuje wartości dodatnie, ujemne • uzasadniać, że dane wielomiany spełniają określone warunki • rozwiązywać równania wielomianowe • znajdować pierwiastki danych wielomianów i ustalać ich krotności • podawać przykłady wielomianów spełniających określone warunki • ustalać liczbę rozwiązań równania wielomianowego • ustalać wartości parametrów, dla których dany wielomian ma określoną liczbę pierwiastków • dzielić wielomiany przez jednomiany i przez wielomiany • podawać przykłady wielomianów podzielnych przez dane wielomiany • obliczać resztę z dzielenia wielomianu • znajdować wielomiany spełniające określone warunki • wykonywać dzielenie wielomianu przez wielomian, korzystając ze schematu Hornera • znajdować wielomiany spełniające określone warunki • znajdować wielomiany spełniające określone warunki, korzystając ze schematu Hornera • rozwiązywać równania wielomianowe, korzystając z twierdzenia Bézout • sprawdzać, że dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu • znajdować resztę z dzielenia wielomianu przez wielomian • rozwiązywać zadania, korzystając z twierdzenia Bézout • rozwiązywać równania wielomianowe, stosując twierdzenie o rozwiązaniach

całkowitych • rozwiązywać zadania, korzystając z twierdzenia o rozwiązaniach całkowitych równania wielomianowego • sprawdzać, czy dana liczba wymierna jest rozwiązaniem równania wielomianowego • znajdować wszystkie rozwiązania wymierne danych równań wielomianowych • uzasadniać niewymierność liczb, korzystając z twierdzenia o rozwiązaniach wymiernych • uzasadniać, że dane równanie wielomianowe nie ma pierwiastków wymiernych • określać, dla jakich wartości parametru dane równanie wielomianowe ma pierwiastek wymierny • rozwiązywać nierówności wielomianowe, wykorzystując wiedzę o znaku iloczynu dwóch liczb oraz wykresy funkcji liniowej i kwadratowej • rozwiązywać nierówności wielomianowe, korzystając z twierdzenia Bézout • określać dziedzinę funkcji • określać, dla jakich wartości parametru zbiorem rozwiązań nierówności wielomianowej jest dany zbiór • rozwiązywać zadania z zastosowaniem nierówności • badać własności funkcji wielomianowych • podawać przykłady funkcji wielomianowych spełniających określone warunki • szkicować wykresy funkcji wielomianowych • rozwiązywać nierówności wielomianowe • znajdować argumenty, dla których dane funkcje wielomianowe spełniają określone warunki, rozwiązywać zadania z parametrem dotyczącę wielomianów

Funkcje wymierne

UCZEŃ ZNA:

- pojęcie wyrażenia wymiernego • pojęcie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego • pojęcie dziedziny wyrażenia wymiernego • pojęcie równości wyrażeń wymiernych • pojęcie równania wymiernego • sposoby rozwiązywania równań wymiernych • pojęcie nierówności wymiernej • pojęcie hiperboli • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a) + b$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • pojęcie osi symetrii hiperboli • pojęcie wierzchołków hiperboli • pojęcie funkcji homograficznej • postać ogólną i postać kanoniczną funkcji homograficznej • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • definicję funkcji wymiernej

UCZEN ROZUMIE:

- pojęcie wyrażenia wymiernego • pojęcie wartości liczbowej wyrażenia wymiernego • pojęcie dziedziny wyrażenia wymiernego • pojęcie równości wyrażeń wymiernych • pojęcie równania wymiernego • sposoby rozwiązywania równań wymiernych • pojęcie nierówności wymiernej • pojęcie hiperboli • pojęcie asymptot poziomej i pionowej wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ • położenie gałęzi hiperboli w zależności od znaku a • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a) + b$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • pojęcie osi symetrii hiperboli • pojęcie wierzchołków hiperboli • pojęcie funkcji homograficznej • postać ogólną i postać kanoniczną funkcji homograficznej • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • definicję funkcji wymiernej • pojęcie asymptoty poziomej i pionowej wykresu funkcji wymiernej • zastosowanie funkcji wymiernej do zadań z kontekstem realistycznym

UCZEN POTRAFI:

- obliczać wartości liczbowe wyrażeń wymiernych dla podanych wartości zmiennej • określać dziedzinę wyrażenia wymiernego • podawać przykłady wyrażeń wymiernych spełniających dane warunki • upraszczać wyrażenia wymierne • dodawać, odejmować, mnożyć wyrażenia wymierne • określać, dla jakich wartości parametrów wyrażenia wymierne spełniają określone warunki • rozwiązywać zadania z zastosowaniem wyrażeń wymiernych • rozwiązywać równania wymierne • określać założenia, przy których dane równanie wymierne ma sens • dzielić wyrażenia wymierne •

przekształcać wzory tak, aby wyznaczyć wskazaną wielkość • rozwiązywać zadania z zastosowaniem równań wymiernych • rozwiązywać nierówności wymierne • określać założenia, przy których dana nierówność wymierna ma sens • określać dziedzinę funkcji • sprawdzać, czy dane funkcje są równe • rozwiązywać zadania z zastosowaniem nierówności wymiernych • określać dziedzinę i sporządzać wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$ • określać położenie gałęzi hiperboli w zależności od znaku a •

określać przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$ • dopasowywać wzór do wykresu

funkcji $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$ i odwrotnie • określać wzór funkcji, która powstanie, gdy wykres funkcji

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0:$$

– odbijemy symetrycznie względem osi układu współrzędnych

– odbijemy symetrycznie względem początku układu współrzędnych

– przesuniemy równoległe o a jednostek w prawo lub w lewo i o b jednostek do góry lub w dół

• określać dziedzinę i sporządzać wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0$ • określać równania

asymptot i współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0$ z osiami układu

współrzędnych

• określać przedziały monotoniczności i argumenty, dla których funkcja $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0$

przyjmuje wartości dodatnie, ujemne • określać współrzędne wierzchołków hiperboli • określać

wartość parametru, dla którego funkcja $f(x) = \frac{a}{x-p} + q, a \neq 0$ spełnia określone warunki • określać

wzory funkcji, których wykresami są hiperbole spełniające określone warunki • podawać przykłady funkcji homograficznych • określać dziedzinę funkcji homograficznej • przekształcać wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej • sporządzać wykresy funkcji homograficznych • określać równania asymptot i osi symetrii wykresów funkcji homograficznych • określać współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji homograficznych z osiami układu współrzędnych • dopasować wzory funkcji homograficznych do ich wykresów • określać, dla jakiej wartości parametru funkcja homograficzna spełnia określone warunki • podawać przykłady wzorów funkcji homograficznych spełniających określone warunki • określać własności funkcji homograficznych • sporządzać wykres funkcji homograficznej $y = f(x)$, a następnie, korzystając z jej wykresu, szkicować wykresy funkcji: $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ • podawać przykłady funkcji wymiernych • określać dziedzinę i sporządzać wykres funkcji wymiernej • określać równania asymptot i współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji wymiernej z osiami układu współrzędnych • określać przedziały monotoniczności funkcji wymiernej • określać argumenty, dla których funkcja wymierna przyjmuje wartości dodatnie, ujemne • podawać wzór funkcji wymiernej na podstawie jej wykresu • określać, dla jakiej wartości parametru funkcja wymierna spełnia określone warunki • podawać przykłady wzorów funkcji wymiernych spełniających określone warunki • określać własności funkcji wymiernych, rozwiązuje zadania z parametrem, zastosować funkcję wymierną do zadań z kontekstem realistycznym

Funkcje trygonometryczne

UCZEŃ ZNA:

• pojęcia: funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym • wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30° , 45° , 60° • pojęcia: kąt o mierze dodatniej, kąt o mierze ujemnej • pojęcie kąta umieszczonego w układzie współrzędnych • definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta • znaki wartości funkcji trygonometrycznych kątów z poszczególnych ćwiartek układu współrzędnych • zależności: $\sin(a+k\cdot 360^{\circ})=\sin a$, $\cos(a+k\cdot 360^{\circ})=\cos a$, $\operatorname{tg}(a+k\cdot 180^{\circ})=\operatorname{tga}$, $\operatorname{ctg}(a+k\cdot 180^{\circ})=\operatorname{ctga}$ dla $k \in \mathbb{C}$ • podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta (tożsamości trygonometryczne) • sposób sporządzania wykresu funkcji $y = \sin a$ • własności funkcji $y = \sin a$ • wzór na pole trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków i sinus kąta zawartego między nimi • wzory: $\sin a = \sin(a + k\cdot 360^{\circ})$ dla $k \in \mathbb{C}$, $\sin a = \sin(180^{\circ} - a)$, $\sin(-a) = -\sin a$ • związek $\cos a = \sin(a + 90^{\circ})$ • sposoby sporządzania wykresu funkcji $y = \cos a$ • własności funkcji $y = \cos a$ • wzory: $\cos a = \cos(a + k\cdot 360^{\circ})$ dla $k \in \mathbb{C}$ $\cos a = -\cos(180^{\circ} - a)$, $\cos(-a) = \cos a$ • wykres funkcji $y = \operatorname{tga}$ • pojęcie asymptoty wykresu • własności funkcji $y = \operatorname{tga}$ i $y = \operatorname{ctga}$ • związki: $\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(a + 180^{\circ})$, $\operatorname{ctga} = -\operatorname{tg}(a + 90^{\circ})$ • zasadę sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • wzory redukcyjne • wzory na sinus (cosinus) sumy oraz różnicy dwóch kątów • wzór na długość łuku • definicję miary łukowej kąta środkowego • zależność między miarą łukową a stopniową kąta • własności funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej • własności funkcji: okresowość, parzystość, nieparzystość • zasady sporządzania wykresów funkcji typu $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . . • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a) + b$, $y = |f(x)|$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • sposoby rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych • sposoby zapisywania rozwiązań • niektóre wzory trygonometryczne

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcia: funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym • pojęcia: kąt o mierze dodatniej, kąt o mierze ujemnej • pojęcie kąta umieszczonego w układzie współrzędnych • definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta • podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta • własności funkcji $y = \sin a$ • wzór na pole trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków i sinus kąta zawartego między nimi • wzory: $\sin a = \sin(a+k\cdot 360^{\circ})$ dla $k \in \mathbb{C}$ $\sin a = \sin(180^{\circ} - a)$, $\sin(-a) = -\sin a$ • związek $\cos a = \sin(a + 90^{\circ})$ • sposoby sporządzania wykresu funkcji $y = \cos a$ • własności funkcji $y = \cos a$ • pojęcie asymptoty wykresu • własności funkcji $y = \operatorname{tga}$ i $y = \operatorname{ctga}$ • związki: $\operatorname{tga} = \operatorname{tg}(a + 180^{\circ})$ $\operatorname{ctga} = -\operatorname{tg}(a + 90^{\circ})$ • zasadę sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a)$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • wzory redukcyjne • wzór na długość łuku • definicję miary łukowej kąta środkowego • jednostkę miary łukowej kąta • zależność między miarą łukową a stopniową kąta • własności funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej • zasady sporządzania wykresów funkcji: $y = -f(x)$, $y = f(x + a) + b$, $y = |f(x)|$, gdy dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ • sposoby wykorzystania wykresów funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania równań i nierówności • sposoby rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych • własności funkcji: okresowość, parzystość, nieparzystość • zasady sporządzania wykresów funkcji typu $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . .

UCZEN POTRAFI:

• rozwiązywać zadania stosując wiadomości o funkcjach trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym • porządkować kąty ostre, znając wartości ich funkcji trygonometrycznych i odwrotnie •

podawać przykłady kątów spełniających określone warunki • konstruować kąty ostre, mając dane wartości funkcji trygonometrycznych tych kątów • korzystać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych • rysować kąty dodatnie i ujemne o danych miarach • zaznaczać w układzie współrzędnych kąty o podanych miarach • ustalać, w której ćwiartce układu współrzędnych leży drugie ramię kąta o podanej mierze • obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dane są współrzędne punktu leżącego na drugim ramieniu kąta • ustalać znaki wartości funkcji trygonometrycznych kątów z poszczególnych ćwiartek układu współrzędnych • określać, w której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta, mając dane wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta • obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów, których końcowe ramię leży na prostej o równaniu $y = ax$ • rysować w układzie współrzędnych kąt, mając dane wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta • obliczać wartości funkcji trygonometrycznych danych kątów dodatnich i ujemnych, wykorzystując definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym oraz wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach 30° , 45° , 60° • podawać wszystkie kąty spełniające określone warunki, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych • obliczać wartości wyrażeń, w których występują funkcje trygonometryczne dowolnych kątów • obliczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich • sprawdzać tożsamości trygonometryczne • upraszczać wyrażenia zawierające funkcje trygonometryczne • ustalać najmniejszą i największą wartość wyrażenia zawierającego funkcje trygonometryczne • rozwiązywać zadania, wykorzystując podstawowe tożsamości trygonometryczne • narysować wykres funkcji $y = \sin \alpha$, wykorzystując koło trygonometryczne • odczytywać z wykresu własności funkcji $y = \sin \alpha$ • ustalać znak i porównywać wartości funkcji sinus dla podanego kąta, korzystając z sinusoidy • obliczać i porównywać wartości funkcji sinus dla podanych kątów, posługując się sinusoidą • obliczać pole trójkąta, gdy dane są długości dwóch jego boków i sinus kąta zawartego między nimi • rozwiązywać zadania z zastosowaniem • ustalać wartości funkcji sinus dowolnego kąta, wykorzystując tablice wartości funkcji trygonometrycznych oraz: $\sin \alpha = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ dla $k \in \mathbb{C}$ $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ • znajdować argumenty, dla których funkcja sinus spełnia określone warunki • narysować wykres funkcji $y = \cos \alpha$, wykorzystując koło trygonometryczne lub związek $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$ • odczytywać z wykresu własności funkcji $y = \cos \alpha$ • ustalać znak funkcji cosinus dla podanego kąta, korzystając z cosinusoidy • obliczać wartości funkcji cosinus dla podanych kątów, wykorzystując cosinusoidę • porównywać wartości i własności funkcji $y = \sin \alpha$ i $y = \cos \alpha$ • ustalać wartości funkcji cosinus dowolnego kąta, wykorzystując tablice wartości funkcji trygonometrycznych oraz wzory: $\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$ dla $k \in \mathbb{C}$ $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ • znajdować argumenty, dla których wartości funkcji cosinus spełniają określone warunki • ustalać argumenty, dla których wartości funkcji sinus i cosinus spełniają określone warunki • narysować wykres funkcji $y = \tan \alpha$, wykorzystując koło trygonometryczne • odczytywać własności funkcji $y = \tan \alpha$ z wykresu • narysować wykres funkcji $y = \cot \alpha$ • odczytywać własności funkcji $y = \cot \alpha$ z wykresu • stosować wzory redukcyjne do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych dowolnych kątów • ustalać argumenty, dla których wartości funkcji trygonometrycznych spełniają określone warunki • ustalać wartości funkcji tangens i cotangens dowolnego kąta, wykorzystując tablice wartości funkcji trygonometrycznych oraz związki: $\tan \alpha = \tan(\alpha + k \cdot 180^\circ)$, $\cot \alpha = \cot(\alpha + k \cdot 180^\circ)$ dla $k \in \mathbb{C}$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ • znajdować argumenty, dla których wartości funkcji tangens oraz cotangens spełniają określone warunki • uzasadniać tożsamości trygonometryczne, upraszczać wyrażenia i obliczać ich wartości, wykorzystując wzory redukcyjne • rozwiązywać zadania z zastosowaniem wzorów na sinus oraz cosinus sumy i różnicy dwóch kątów • obliczać miarę łukową kąta środkowego • rozwiązywać zadania, stosując wzór na miarę łukową kąta środkowego

• zamieniać miarę łukową kąta na miarę stopniową i odwrotnie • rozwiązywać zadania z zastosowaniem miary łukowej i stopniowej • rysować wykresy funkcji trygonometrycznych

zmiennej rzeczywistej i określać ich własności • wyznaczać argumenty, dla których funkcje przyjmują określone wartości • określać własności funkcji trygonometrycznych (okresowość, parzystość, nieparzystość) • wyznaczać argumenty, dla których wartości funkcji spełniają dane warunki • rysować wykresy funkcji $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . . • odczytywać własności funkcji typu $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . . , korzystając z wykresów • określać wzory funkcji $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . . spełniających określone warunki • rysować wykresy funkcji $y = \sin ax$, $y = a \sin x$. . . , określać ich własności • sporządzać wykresy przekształconych funkcji, mając dany wykres funkcji $y = f(x)$ • odczytywać własności funkcji z wykresów • przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych • rozwiązywać równania trygonometryczne postaci $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ • rozwiązywać proste nierówności trygonometryczne, np. $\sin x \geq a$ • rozwiązywać trudniejsze równania i nierówności trygonometryczne, zastosować trygonometrię w geometrii

Ciągi liczbowe

UCZEŃ ZNA:

- pojęcia: ciąg, wyrazy ciągu • pojęcia: ciąg skończony, ciąg nieskończony • pojęcie ciągu liczbowego
- pojęcia: wzór ogólny ciągu, wzór rekurencyjny ciągu • pojęcia: monotoniczność ciągu, ciąg malejący, ciąg rosnący, ciąg stały • pojęcia: ciąg arytmetyczny, różnica ciągu arytmetycznego • wzór ogólny ciągu arytmetycznego • wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego • pojęcia: ciąg geometryczny, iloraz ciągu geometrycznego • wzór ogólny ciągu geometrycznego • wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego • pojęcie średniej geometrycznej dwóch liczb nieujemnych • pojęcia: procent prosty, procent składany • definicję granicy ciągu • pojęcia: ciąg zbieżny, ciąg rozbieżny, ciąg rozbieżny do $+\infty$, ciąg rozbieżny do $-\infty$ • warunek zbieżności i rozbieżności ciągu geometrycznego • pojęcie liczby e • własności granic ciągów • własności granic ciągów rozbieżnych • symbole nieoznaczone • pojęcie szeregu geometrycznego • wzór na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $|g| < 1$

UCZEŃ ROZUMIE:

- pojęcia: ciąg, wyrazy ciągu • pojęcia: ciąg skończony, ciąg nieskończony • pojęcie ciągu liczbowego • sposób określania ciągu za pomocą wzoru ogólnego • sposób określania ciągu za pomocą wzoru rekurencyjnego • pojęcia: ciąg malejący, ciąg rosnący, ciąg stały • pojęcia: ciąg arytmetyczny, różnica ciągu arytmetycznego • wzór ogólny ciągu arytmetycznego • wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego • pojęcia: ciąg geometryczny, iloraz ciągu geometrycznego • wzór ogólny ciągu geometrycznego • wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego • pojęcie średniej geometrycznej dwóch liczb nieujemnych • pojęcia: procent prosty, procent składany • definicję granicy ciągu • pojęcia: ciąg zbieżny, ciąg rozbieżny, ciąg rozbieżny do $+\infty$, ciąg rozbieżny do $-\infty$ • warunek zbieżności i rozbieżności ciągu geometrycznego • pojęcie liczby e • własności granic ciągów • własności granic ciągów rozbieżnych • pojęcie szeregu geometrycznego • wzór na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $|g| < 1$

UCZEŃ POTRAFI:

- zapisywać dowolne wyrazy ciągów na podstawie ich wzorów ogólnych • zapisywać dowolne wyrazy ciągów na podstawie ich wzorów rekurencyjnych • podawać przykłady ciągów • określać monotoniczność ciągu na podstawie wzoru ogólnego • określać monotoniczność ciągu na podstawie wzoru rekurencyjnego • określać ciąg za pomocą wzoru ogólnego • określać ciąg za pomocą wzoru rekurencyjnego • obliczać sumę k początkowych wyrazów ciągu na podstawie jego wzoru ogólnego • obliczać kolejne wyrazy ciągu oraz określać ogólny wzór ciągu na podstawie danego wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu • znajdować wzór ogólny ciągu określonego rekurencyjnie • obliczać

różnicę i kolejne wyrazy danego ciągu arytmetycznego • obliczać dowolne wyrazy ciągu arytmetycznego, gdy dane są jeden wyraz i różnica ciągu lub dwa dowolne wyrazy tego ciągu • podawać przykłady ciągów arytmetycznych spełniających określone warunki • zapisywać wzory ogólne i rekurencyjne ciągów arytmetycznych • zapisywać wzory ogólne ciągów arytmetycznych określonych rekurencyjnie i odwrotnie • obliczać sumę dowolnej liczby kolejnych wyrazów • sprawdzać, czy dana liczba jest wyrazem danego ciągu arytmetycznego • określać wartości parametru, dla którego podane wyrażenia są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego • rozwiązywać zadania dotyczące ciągu arytmetycznego • rozwiązywać równania, których jedna strona jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego • ustalać, ile wyrazów ma podany ciąg arytmetyczny • obliczać ilorazy oraz kolejne wyrazy danych ciągów geometrycznych • sprawdzać, czy podany ciąg jest ciągiem geometrycznym • zapisywać dowolne wyrazy ciągu geometrycznego, gdy dany jest:

– iloraz i dowolny wyraz tego ciągu

– dwa dowolne wyrazy ciągu geometrycznego

• sprawdzać, czy dana liczba jest wyrazem danego ciągu geometrycznego • określać monotoniczność ciągów geometrycznych • zapisywać wzory ogólne ciągów geometrycznych określonych rekurencyjnie i odwrotnie • obliczać sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego • obliczać wartości zmiennych, które wraz z danymi liczbami tworzą ciąg geometryczny • rozwiązywać zadania dotyczące ciągów geometrycznych • rozwiązywać zadania z zastosowaniem procentu prostego oraz procentu składanego • obliczać granice niektórych ciągów • podawać przykłady ciągów zbieżnych oraz rozbieżnych • określać zbieżność oraz rozbieżność ciągu na podstawie jego wykresu • na podstawie wzoru ogólnego określać zbieżność oraz rozbieżność ciągu • określać wartość parametru, dla którego granica danego ciągu spełnia określone warunki • obliczać granice ciągów z wykorzystaniem własności granic • obliczać granice ciągów z wykorzystaniem własności granic, obliczać sumy szeregów geometrycznych • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania sum szeregów geometrycznych

Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

UCZEŃ ZNA:

• pojęcia potęg o wykładnikach: całkowitym, wymiernym, rzeczywistym • prawa działań na potęgach • pojęcie logarytmu • pojęcia: logarytm dziesiętny oraz logarytm naturalny • własności logarytmów • twierdzenia o logarytmie iloczynu, logarytmie ilorazu, logarytmie potęgi, zmianie podstawy logarytmu • definicję funkcji wykładniczej • własności funkcji wykładniczych • definicję funkcji logarytmicznej • własności funkcji logarytmicznych • własność różnowartościowości funkcji wykładniczej • sposoby rozwiązywania równań wykładniczych • sposoby rozwiązywania nierówności wykładniczych • własność różnowartościowości funkcji logarytmicznej • sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych • sposoby rozwiązywania nierówności logarytmicznych

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcia potęg o wykładnikach: całkowitym, wymiernym, rzeczywistym • prawa działań na potęgach • pojęcie logarytmu • pojęcia: logarytm dziesiętny oraz logarytm naturalny • własności logarytmów • twierdzenia o: logarytmie iloczynu, logarytmie ilorazu, logarytmie potęgi, zmianie podstawy logarytmu • definicję funkcji wykładniczej • własności funkcji wykładniczych • definicję funkcji logarytmicznej • własności funkcji logarytmicznych • własność różnowartościowości funkcji wykładniczej • sposoby rozwiązywania równań wykładniczych • sposoby rozwiązywania nierówności

wykładniczych • własność różnowartościowości funkcji logarytmicznej • sposoby rozwiązywania równań logarytmicznych • sposoby rozwiązywania nierówności logarytmicznych • potrzebę stosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych do opisu zjawisk z różnych dziedzin

UCZEŃ POTRAFI:

- sporządzać wykresy i określać własności funkcji wykładniczych • dopasowywać wzory do wykresów funkcji wykładniczych • określać wzory funkcji wykładniczych spełniających określone warunki • przekształcać wykresy funkcji wykładniczych • rozwiązywać zadania z zastosowaniem funkcji wykładniczych i ich własności • sporządzać wykresy i określać własności funkcji logarytmicznych • dopasowywać wzory do wykresów funkcji logarytmicznych • określać wzory funkcji logarytmicznych spełniających dane warunki • przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych • rozwiązywać zadania z zastosowaniem funkcji logarytmicznych i ich własności • rozwiązywać równania wykładnicze • rozwiązywać nierówności wykładnicze • rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze • rozwiązywać równania logarytmiczne • rozwiązywać nierówności logarytmiczne • rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne • określać własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych opisujących zjawiska z różnych dziedzin • stosować model wykładniczy do opisu wielkości, które zmieniają się w stałym tempie

Ciągłość i pochodna funkcji

UCZEŃ ZNA:

- zapis granicy funkcji w nieskończoności i w punkcie • zapis jednostronnej granicy funkcji • pojęcie granicy właściwej funkcji • pojęcie granicy niewłaściwej funkcji • pojęcie granicy właściwej w plus oraz minus nieskończoności • pojęcie granicy niewłaściwej w plus oraz minus nieskończoności • definicję granicy funkcji w punkcie • definicję granicy niewłaściwej funkcji punkcie • definicje granicy lewo i prawostronnej funkcji w punkcie • definicje granicy niewłaściwej lewo- i prawostronnej funkcji w punkcie • związek między granicami jednostronnymi a granicą funkcji • pojęcie funkcji ciągłej w punkcie • własności funkcji ciągłych • własności granic właściwych funkcji w nieskończoności • własności granic niewłaściwych funkcji w nieskończoności • symbole nieoznaczone • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) poziomej wykresu funkcji • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) pionowej wykresu funkcji • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) ukośnej wykresu funkcji • twierdzenie dotyczące asymptoty ukośnej wykresu funkcji • pojęcie siecznej wykresu funkcji • pojęcie stycznej do wykresu funkcji • definicję pochodnej funkcji w punkcie • związek między pochodną funkcji w punkcie i współczynnikiem kierunkowym stycznej • definicję pochodnej funkcji • twierdzenia dotyczące własności pochodnej funkcji • dowody twierdzeń o własnościach pochodnej funkcji • twierdzenia dotyczące związku znaku pochodnej funkcji z monotonicznością tej funkcji • pojęcie punktu przegięcia • definicję minimum lokalnego właściwego • definicję maksimum lokalnego właściwego • pojęcie ekstremum • warunek konieczny istnienia ekstremum • warunek dostateczny istnienia ekstremum • pojęcie wartości największej funkcji • pojęcie wartości najmniejszej funkcji • etapy badania własności funkcji

UCZEN ROZUMIE:

- zapis granicy funkcji w nieskończoności i w punkcie • zapis jednostronnej granicy funkcji • pojęcie granicy właściwej funkcji • pojęcie granicy niewłaściwej funkcji • pojęcie granicy właściwej w plus oraz minus nieskończoności • pojęcie granicy niewłaściwej w plus oraz minus nieskończoności • definicję granicy funkcji w punkcie • definicję granicy niewłaściwej funkcji punkcie • definicje

granicy lewo i prawostronnej funkcji w punkcie • definicje granicy niewłaściwej lewo- i prawostronnej funkcji w punkcie • związek między granicami jednostronnymi a granicą funkcji • pojęcie funkcji ciągłej w punkcie • własności funkcji ciągłych • własności granic właściwych funkcji w nieskończoności • własności granic niewłaściwych funkcji w nieskończoności • symbole nieoznaczone • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) poziomej wykresu funkcji • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) pionowej wykresu funkcji • pojęcie asymptoty (prawostronnej, lewostronnej, obustronnej) ukośnej wykresu funkcji • twierdzenie dotyczące asymptoty ukośnej wykresu funkcji • pojęcie siecznej wykresu funkcji • pojęcie stycznej do wykresu funkcji • definicję pochodnej funkcji w punkcie • związek między pochodną funkcji w punkcie i współczynnikiem kierunkowym stycznej • definicję pochodnej funkcji • twierdzenia dotyczące własności pochodnej funkcji • dowody twierdzeń o własnościach pochodnej funkcji • twierdzenia dotyczące związku znaku pochodnej funkcji z monotonicznością tej funkcji • pojęcie punktu przegięcia • definicję minimum lokalnego właściwego • definicję maksimum lokalnego właściwego • pojęcie ekstremum • warunek konieczny istnienia ekstremum • warunek dostateczny istnienia ekstremum • pojęcie wartości największej funkcji • pojęcie wartości najmniejszej funkcji • etapy badania własności funkcji, zastosowanie rachunku pochodnych (zadania optymalizacyjne)

UCZEŃ POTRAFI:

- określać granice funkcji na podstawie jej wykresu • określać granice jednostronne funkcji na podstawie jej wykresu • szkicować wykres funkcji, mając daną jej dziedzinę i granice tej funkcji • szkicować wykres funkcji zadanej wzorem i na podstawie wykresu określać granice tej funkcji • określić wzór funkcji spełniającej określone warunki, a następnie podawać granice tej funkcji • określać granice funkcji w plus oraz minus nieskończoności, korzystając z definicji • korzystając z definicji, określać granice funkcji w punkcie • korzystając z definicji, wykazać, że dana funkcja nie ma granicy • korzystając z definicji, określać granice funkcji w plus oraz minus nieskończoności • korzystając z definicji, określać granice funkcji w punkcie • korzystając z definicji, wykazać, że dana funkcja nie ma granicy • wskazywać punkty, w których funkcja nie jest ciągła • sprawdzać ciągłość funkcji w punkcie • sprawdzać ciągłość w całej dziedzinie • obliczać granice funkcji • określać, dla jakiej wartości parametrów funkcja jest ciągła w danym punkcie • znajdować punkty, w których funkcja nie jest ciągła • obliczać granice funkcji w nieskończoności, wykorzystując własności granic właściwych i niewłaściwych • obliczać granice funkcji, gdy ma do czynienia z symbolami nieoznaczonymi • obliczać granice funkcji w nieskończoności, wykorzystując własności granic właściwych i niewłaściwych • obliczać granice funkcji, gdy ma do czynienia z symbolami nieoznaczonymi • określać równania asymptot poziomych i pionowych wykresu danej funkcji • sprawdzać, czy dana prosta jest asymptotą ukośną funkcji • określać równania asymptot ukośnych wykresu danej funkcji • obliczać przybliżoną wartość funkcji dla danego argumentu z wykorzystaniem równania asymptoty ukośnej tej funkcji • sprawdzić, czy narysowana prosta jest asymptotą danej funkcji • określać równania asymptot poziomych, pionowych oraz ukośnych wykresu danej funkcji • obliczać pochodne funkcji w punkcie, korzystając z definicji • sprawdzać, czy funkcja ma pochodną w danym punkcie • określać równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie • wykazać, że funkcja nie ma pochodnej w danym punkcie • korzystając z wykresu funkcji, wskazywać argumenty, dla których pochodna spełnia określone warunki • obliczać pochodne funkcji, korzystając z twierdzeń o własnościach pochodnej funkcji • określać równanie stycznej do wykresu funkcji w danym punkcie • obliczać przybliżoną wartość funkcji dla danego argumentu • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania pochodnej funkcji • rozwiązywać zadania z zastosowaniem pochodnej funkcji w punkcie i jej związku z kątem nachylenia stycznej do wykresu funkcji w tym punkcie • rozwiązywać zadania z fizyki z wykorzystaniem obliczania pochodnej • na podstawie wykresu funkcji określać przedziały,

w których pochodna funkcji przyjmuje wartości dodatnie, ujemne • określać przedziały monotoniczności funkcji na podstawie wykresu pochodnej tej funkcji • określać przedziały monotoniczności funkcji • określać przedziały monotoniczności funkcji • dopasowywać do wykresu pochodnej funkcji wykres tej funkcji i odwrotnie • określać wartość parametru, dla którego dana funkcja jest rosnąca lub malejąca • określać ekstrema lokalne na podstawie wykresu funkcji • obliczać ekstrema lokalne funkcji • obliczać ekstrema lokalne funkcji • dopasować do wykresu pochodnej wykres funkcji i odwrotnie • uzasadniać, że dla parametrów spełniających określone warunki funkcja ma ekstrema • obliczać największą i najmniejszą wartość funkcji w danym przedziale • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania największej i najmniejszej wartości funkcji • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania największej i najmniejszej wartości funkcji • badać własności funkcji • sporządzać tabele zawierające informacje o funkcji i jej pochodnej • szkicować wykresy funkcji mających określone własności, zastosować rachunek pochodnych (zadania optymalizacyjne)

Planimetria

UCZEŃ ZNA:

- pojęcia kątów: wierzchołkowych, przyległych, odpowiadających, naprzemianległych oraz własności tych kątów • twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta • twierdzenia dotyczące własności kątów w trapezach i równoległobokach • pojęcie dwusiecznej kąta • nierówność trójkąta • rodzaje trójkątów • pojęcie wysokości trójkąta • wzór na pole trójkąta • twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie do niego odwrotne • rodzaje czworokątów • własności czworokątów • wzory na obliczanie pól i obwodów czworokątów • pojęcie wielokąta wypukłego i niewypukłego • wzory na liczbę przekątnych i sumę miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego • pojęcie wielokąta foremnego • pojęcia koła i okręgu • pojęcia kąta wpisanego i środkowego • twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych, twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych • wzory na obliczanie obwodu i pola koła • wszystkie możliwe wzajemne położenia prostej i okręgu na płaszczyźnie • wszystkie możliwe wzajemne położenia dwóch okręgów na płaszczyźnie podstawowe konstrukcje geometryczne, przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie, definicję i własności jednokładności, twierdzenie sinusów i cosinusów, pojęcie iloczynu skalarnego

UCZEN ROZUMIE:

- pojęcie kąta • sposoby obliczania pól trójkątów • sens twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia do niego odwrotnego • zasadę klasyfikacji czworokątów • wyprowadzanie wzorów na liczbę przekątnych i sumę miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego • sposób wyznaczania miary kąta wewnętrznego n -kąta foremnego • pojęcie kąta wpisanego i środkowego opartego na danym łuku, przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie, definicję i własności jednokładności, twierdzenie sinusów i cosinusów, pojęcie iloczynu skalarnego, twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych

UCZEŃ POTRAFI:

- wskazywać kąty wierzchołkowe, przyległe, odpowiadające i naprzemianległe • stosować własności kątów w zadaniach • obliczać pola trójkątów • rozwiązywać zadania z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia do niego odwrotnego • stosować własności czworokątów w zadaniach • rozwiązywać zadania na obliczanie pól i obwodów czworokątów • stosować wzory na liczbę przekątnych i sumę miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego • rozwiązywać zadania na obliczanie pól i obwodów wielokątów • obliczać miarę kąta wewnętrznego n -kąta foremnego • obliczać pola wielokątów foremnych • stosować twierdzenia dotyczące kątów wpisanych i środkowych • obliczać

pole i obwód koła • obliczać długość łuku i pole wycinka koła • rozwiązywać zadania na obliczanie pól i obwodów kół oraz długości łuków i pól wycinków kół, zastosować twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych, wykonać przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie, stosuje definicję i własności jednokładności, stosuje twierdzenie sinusów i cosinusów do rozwiązywania zadań, zadania na dowodzenie, pojęcie iloczynu skalarnego, stosuje w geometrii związki miarowe w figurach płaskich

Stereometria

UCZEŃ ZNA:

- pojęcie figury wypukłej • pojęcia: graniastosłup, ostrosłup • pojęcia: podstawa, ściana boczna, wierzchołek, krawędź boczna, krawędź podstawy graniastosłupa i ostrosłupa • pojęcia: prostopadłościan, graniastosłup prosty, graniastosłup pochyły • pojęcia: graniastosłup prawidłowy, ostrosłup prawidłowy • pojęcie czworościanu • pojęcia: wysokość graniastosłupa, wysokość ostrosłupa, spodek wysokości • twierdzenia dotyczące ostrosłupów prawidłowych • reguły rysowania rzutów brył • pojęcia: czworościan foremny, sześciąt • pojęcia: ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny • pojęcia: proste równoległe w przestrzeni, proste prostopadłe w przestrzeni, proste skośne • pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny • pojęcia: kąt dwuścienny, kąt między prostą a płaszczyzną • wzór na obliczanie pola powierzchni graniastosłupa • wzór na obliczanie objętości graniastosłupa • wzór na obliczanie pola powierzchni ostrosłupa • wzór na obliczanie objętości ostrosłupa • wzory na obliczanie pól figur płaskich • pojęcie przekroju bryły • pojęcia: pole powierzchni i objętość wielościanu • pojęcie walca • pojęcia: tworząca walca, podstawy, promień podstawy, wysokość walca • pojęcia: oś obrotu, przekrój osiowy walca • wzór na obliczanie pola powierzchni walca • wzór na obliczanie objętości walca • pojęcie stożka • pojęcia: podstawa, promień podstawy, tworząca, wysokość stożka • pojęcia: oś obrotu, przekrój osiowy stożka, spodek wysokości, kąt rozwarcia stożka • wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka • pojęcia: kula, sfera • pojęcia: środek, promień, średnica, koło wielkie • wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości kuli • pojęcie brył podobnych • własności brył podobnych • zależność między polami powierzchni brył podobnych • zależność między objętościami brył podobnych

UCZEN ROZUMIE:

- pojęcie figury wypukłej • pojęcia: graniastosłup, ostrosłup • pojęcia: podstawa, ściana boczna, wierzchołek, krawędź boczna, krawędź podstawy graniastosłupa i ostrosłupa • pojęcia: prostopadłościan, graniastosłup prosty, graniastosłup pochyły • pojęcia: graniastosłup prawidłowy, ostrosłup prawidłowy • pojęcie czworościanu • pojęcia: wysokość graniastosłupa, wysokość ostrosłupa, spodek wysokości • twierdzenia dotyczące ostrosłupów prawidłowych • reguły rysowania rzutów brył • pojęcia: czworościan foremny, sześciąt • pojęcia: ośmiościan foremny, dwunastościan foremny, dwudziestościan foremny • pojęcia: proste równoległe w przestrzeni, proste prostopadłe w przestrzeni, proste skośne • pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny • pojęcia: kąt dwuścienny, kąt między prostą a płaszczyzną • wzór na obliczanie pola powierzchni graniastosłupa • wzór na obliczanie objętości graniastosłupa • wzór na obliczanie pola powierzchni ostrosłupa • wzór na obliczanie objętości ostrosłupa • wzory na obliczanie pól figur płaskich • pojęcie przekroju bryły • pojęcia: pole powierzchni i objętość wielościanu • pojęcie walca • pojęcia: tworząca walca, podstawy, promień podstawy, wysokość walca • pojęcia: oś obrotu, przekrój osiowy walca • wzór na obliczanie pola powierzchni walca • wzór na obliczanie objętości walca • pojęcie stożka • pojęcia: podstawa, promień podstawy, tworząca, wysokość stożka • pojęcia: oś obrotu, przekrój osiowy stożka, spodek wysokości, kąt rozwarcia stożka • wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości stożka • pojęcia:

kula, sfera • pojęcia: środek, promień, średnica, koło wielkie • wzory na obliczanie pola powierzchni i objętości kuli • pojęcie brył podobnych • własności brył podobnych • zależność między polami powierzchni brył podobnych • zależność między objętościami brył podobnych

UCZEŃ POTRAFI:

• wskazywać graniastosłupy pochyłe, graniastosłupy proste • wskazywać wierzchołki, podstawy, ściany boczne,

krawędzie podstawy i krawędzie boczne graniastosłupów i ostrosłupów • rysować rzuty graniastosłupów i ostrosłupów • rysować siatki graniastosłupów i ostrosłupów • rozpoznawać siatki graniastosłupów i ostrosłupów • obliczać liczbę wierzchołków, krawędzi, ścian bocznych graniastosłupów i ostrosłupów • wyznaczać długości odcinków w graniastosłupach i ostrosłupach, korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz funkcji trygonometrycznych kąta w trójkącie prostokątnym • wyznaczać długości odcinków w graniastosłupach i ostrosłupach, korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym • rysować siatki oraz rzuty czworościanu foremego i sześcianu • rozpoznawać siatki oraz rzuty ośmiościanu foremego, dwunastościanu foremego i dwudziestościanu foremego • wyznaczać długości odcinków w czworościanach foremnych i sześcianach • wyznaczać długości odcinków w wielościanach foremnych • wskazywać kąty między ścianami graniastosłupów i ostrosłupów • wyznaczać miary kątów między odcinkami, miary kątów między odcinkami i ścianami oraz między ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach • rozwiązywać zadania z wykorzystaniem obliczania miar kątów między odcinkami, miar kątów między odcinkami i ścianami oraz między ścianami w graniastosłupach i ostrosłupach • obliczać pola powierzchni i objętości graniastosłupów • obliczać pola powierzchni i objętości ostrosłupów • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów • zaznaczać przekroje • określać rzeczywiste kształty przekrojów • obliczać pola i obwody danych przekrojów • obliczać pola i obwody danych przekrojów • rysować rzuty wielościanów • obliczać pola powierzchni i objętości wielościanów • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania pól powierzchni i objętości wielościanów, rozwiązuje zadania dla brył wpisanych w bryłę oraz zadania optymalizacyjne

Geometria analityczna

UCZEŃ ZNA:

• pojęcie przekształcenia

geometrycznego • pojęcie izometrii • pojęcie obrazu punktu (figury) w przekształceniu geometrycznym • pojęcia: symetria osiowa i środkowa • pojęcia: figura osiowosymetryczna oraz oś symetrii figury • pojęcia: figura środkowosymetryczna oraz środek symetrii figury • pojęcia: wektor, wektor zerowy, wektory równe, wektory przeciwne • pojęcie przesunięcia równoległego o wektor • pojęcie obrotu wokół punktu o dany kąt • pojęcia: suma wektorów, różnica wektorów, iloczyn wektora przez liczbę • własności działań na wektorach • zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi układu współrzędnych • zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych • wzór na współrzędne środka odcinka • pojęcia: współrzędne wektora, długość wektora • wzór określający współrzędne obrazu punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor • wzory na współrzędne sumy, różnicy wektorów oraz współrzędne iloczynu danego wektora przez liczbę • warunek równoległości wektorów • pojęcia: ogólne równanie prostej, kierunkowe równanie prostej • pojęcie współczynnika kierunkowego prostej • związek między tangensem kąta nachylenia prostej $y = ax + b$ do osi x a jej współczynnikiem kierunkowym • warunek

równoległości prostych • warunek prostopadłości prostych • interpretację geometryczną zbioru punktów, których współrzędne spełniają określone warunki • równanie okręgu • sposoby wzajemnego położenia prostej i okręgu na płaszczyźnie • wzór określający odległość punktu od prostej

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcie przekształcenia geometrycznego • pojęcie izometrii • pojęcie obrazu punktu (figury) w przekształceniu geometrycznym • pojęcia: symetria osiowa i środkowa • pojęcia: figura osiowosymetryczna oraz oś symetrii figury • pojęcia: figura środkowosymetryczna oraz środek symetrii figury • pojęcia: wektor, wektor zerowy, wektory równe, wektory przeciwne • pojęcie przesunięcia równoległego o wektor • pojęcie obrotu wokół punktu o dany kąt • pojęcia: suma wektorów, różnica wektorów, iloczyn wektora przez liczbę • własności działań na wektorach • zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi układu współrzędnych • zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem początku układu współrzędnych • wzór na współrzędne środka odcinka • pojęcia: współrzędne wektora, długość wektora • wzór określający współrzędne obrazu punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor • wzory na współrzędne sumy, różnicy wektorów oraz współrzędne iloczynu danego wektora przez liczbę • warunek równoległości wektorów • pojęcia: ogólne równanie prostej, kierunkowe równanie prostej • pojęcie współczynnika kierunkowego prostej • związek między tangensem kąta nachylenia prostej $y = ax + b$ do osi x a jej współczynnikiem kierunkowym • interpretację geometryczną układu dwóch równań liniowych • interpretację geometryczną zbioru punktów, których współrzędne spełniają określone warunki • równanie okręgu • sposoby wzajemnego położenia prostej i okręgu na płaszczyźnie • wzór określający odległość punktu od prostej, jednokładność i podobieństwo – ujęcie analityczne

UCZEŃ POTRAFI:

• wyznaczać punkty (figury) symetryczne do danych punktów (figur) względem danej prostej oraz proste, względem których dane punkty (figury) są symetryczne • wskazywać figury osiowo i środkowosymetryczne • wskazywać osie i środki symetrii danych figur • wyznaczać punkty (figury) symetryczne do danych względem danego punktu • rozwiązywać zadania z zastosowaniem symetrii osiowej i środkowej • wskazywać wektory równe i wektory przeciwne • wskazywać obrazy punktów w przesunięciu o dany wektor • rysować obrazy figur w przesunięciu równoległym o dany wektor • wskazywać obrazy punktów w obrocie wokół danego punktu o dany kąt • znajdować miarę kąta obrotu • rysować obrazy figur w obrocie wokół punktu o dany kąt • wykonywać działania na wektorach • rozwiązywać zadania z zastosowaniem działań na wektorach • uzasadniać twierdzenia, korzystając z własności wektorów i własności działań na wektorach • wyznaczać współrzędne punktów symetrycznych do danych punktów względem osi lub początku układu współrzędnych • wyznaczać współrzędne obrazów danych punktów w symetrii względem prostej równoległej do osi x oraz osi y • wyznaczać równanie prostej, względem której dane punkty są symetryczne • wyznaczać środek symetrii figury złożonej z dwóch punktów • rozwiązywać zadania, korzystając z zależności między współrzędnymi punktów symetrycznych względem osi lub początku układu współrzędnych • rozwiązywać zadania z zastosowaniem przekształceń w układzie współrzędnych • obliczać współrzędne i długości wektorów • obliczać współrzędne obrazów punktów w przesunięciu równoległym • wyznaczać wartości parametrów, dla których wektor spełnia określone warunki • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania współrzędnych i długości wektorów oraz współrzędnych obrazów punktów w przesunięciach równoległych o dane wektory • obliczać

współrzędne sumy oraz różnicy danych wektorów • obliczać współrzędne iloczynu danego wektora przez liczbę • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania współrzędnych sumy, różnicy danych wektorów oraz iloczynu danego wektora przez liczbę • rozwiązywać zadania z zastosowaniem warunku równoległości wektorów • przekształcać ogólne równanie prostej na równanie kierunkowe i odwrotnie • obliczać współrzędne punktów przecięcia danej prostej z osiami układu współrzędnych • znajdować równanie prostej: przechodzącej przez dwa dane punkty, przechodzącej przez dany punkt i równoległej do danej prostej, przechodzącej przez dany punkt i prostopadłej do danej prostej • określać liczbę rozwiązań układu równań liniowych, korzystając z jego interpretacji geometrycznej • sprawdzać, czy dane trzy punkty są współliniowe • obliczać, dla jakich wartości parametrów dany układ dwóch równań liniowych ma określoną liczbę rozwiązań • obliczać miarę kąta, pod jakim przecinają się proste o danych równaniach • rozwiązywać zadania dotyczące równania prostej • zaznaczać w układzie współrzędnych zbiory punktów, których współrzędne spełniają określone warunki i opisywać zaznaczone zbiory punktów • rozwiązywać zadania z zastosowaniem równania okręgu • wyznaczać współrzędne punktów wspólnych: prostych i okręgów, dwóch okręgów, okręgu i paraboli • obliczać:

– odległość punktu od prostej,

– odległość między dwoma prostymi

• wyznaczać równania okręgów spełniających określone warunki • wyznaczać równania stycznych do danych okręgów spełniających określone warunki • rozwiązywać zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu oraz obliczania odległości punktu od prostej, wykonuje przekształcenia izometryczne, stosuje pojęcie jednokładności i podobieństwa- ujęcie analityczne

Rachunek prawdopodobieństwa

UCZEŃ ZNA:

• pojęcia: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie losowe • klasyczną definicję prawdopodobieństwa • metodę drzewek • pojęcia: suma, iloczyn, różnica zdarzeń, zdarzenia wykluczające się • pojęcie zdarzenia przeciwnego • pojęcia: zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe • własności prawdopodobieństwa • twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń • pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego • twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym • wzór Bayesa • zasadę mnożenia • pojęcie silni • pojęcie permutacji • pojęcia: wariacja bez powtórzeń, wariacja z powtórzeniami • symbol Newtona • własności symbolu Newtona • pojęcie kombinacji • pojęcie niezależności dwóch zdarzeń • własności zdarzeń niezależnych • pojęcie niezależności trzech zdarzeń • wzór określający w schemacie Bernoulli'ego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach • wzór Newtona

UCZEN ROZUMIE:

• pojęcia: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie losowe • klasyczną definicję prawdopodobieństwa • metodę drzewek • pojęcia: suma, iloczyn, różnica zdarzeń, zdarzenia wykluczające się • pojęcie zdarzenia przeciwnego • pojęcia: zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe • własności prawdopodobieństwa • twierdzenie o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń • pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego • twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym • wzór Bayesa • zasadę mnożenia • pojęcie silni • pojęcie permutacji • pojęcia: wariacja bez powtórzeń, wariacja z powtórzeniami • symbol Newtona • własności symbolu Newtona • pojęcie

kombinacji • pojęcie niezależności dwóch zdarzeń • własności zdarzeń niezależnych • twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym • schemat Bernoulli'ego • wzór określający w schemacie Bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach • wzór Newtona, najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów

UCZEŃ POTRAFI:

- określać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego • określać zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu • obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa • obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń, korzystając z metody drzewek • ustalać zdarzenia przeciwne do danych • rozpoznawać zdarzenia wykluczające się • określać sumę, iloczyn, różnicę zdarzeń • obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń, korzystając z własności prawdopodobieństwa • obliczać prawdopodobieństwo warunkowe • rozwiązywać zadania z zastosowaniem obliczania prawdopodobieństwa warunkowego • obliczać prawdopodobieństwo całkowite • korzystać ze wzoru Bayesa • rozwiązywać zadania z zastosowaniem twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym • rozwiązywać zadania, korzystając ze wzoru Bayesa • stosować zasadę mnożenia • ustalać liczbę permutacji • ustalać liczby wariacji z powtórzeniami i wariacji bez powtórzeń • ustalać liczby permutacji, wariacji z powtórzeniami oraz wariacji bez powtórzeń • obliczać symbol Newtona • ustalać liczbę kombinacji • rozwiązywać równania z zastosowaniem symbolu Newtona • stosować kombinatorykę w rachunku prawdopodobieństwa • badać niezależność dwóch zdarzeń • stosować własności zdarzeń niezależnych • badać niezależność trzech zdarzeń • rozwiązywać zadania z zastosowaniem badania niezależności zdarzeń oraz własności zdarzeń niezależnych • rozwiązywać zadania, korzystając ze schematu Bernoulliego • rozwiązywać zadania, korzystając ze wzoru Newtona

Liczby zespolone

UCZEŃ ZNA:

- pojęcia: liczby zespolonej, ciała liczb zespolonych, interpretację geometryczną liczb zespolonych, postać geometryczną liczb zespolonych, postaci trygonometrycznej liczby zespolonej (moduł, argument), • wzór Moivre'a, • działania na liczbach zespolonych

UCZEN ROZUMIE:

- pojęcia: liczby zespolonej, ciała liczb zespolonych, interpretację geometryczną liczb zespolonych, postać geometryczną liczb zespolonych, postaci trygonometrycznej liczby zespolonej (moduł, argument), • wzór Moivre'a, • działania na liczbach zespolonych

UCZEŃ POTRAFI:

- dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić liczby zespolone • zamieniać postać ogólną liczby zespolonej na postać trygonometryczną • wyznaczać moduł i argument liczby zespolonej • wyznaczać sprzężenie do danej liczby zespolonej • potęgować liczby zespolone • obliczać pierwiastki stopnia n z liczby zespolonej

Rachunek całkowy

UCZEŃ ZNA:

- pojęcia: całki nieoznaczonej i całki oznaczonej • własności całek nieoznaczonych i oznaczonych • całkowanie przez części • całkowanie przez podstawienie • przykłady obliczania całek • zastosowania geometryczne całki: pole figury, objętość, długość łuku • proste przykłady równań różniczkowych

UCZEN ROZUMIE:

- pojęcia: całki nieoznaczonej i całki oznaczonej • własności całek nieoznaczonych i oznaczonych • całkowanie przez części • całkowanie przez podstawienie • przykłady obliczania całek • zastosowania geometryczne całki: pole figury, objętość, długość łuku • proste przykłady równań różniczkowych

UCZEŃ POTRAFI:

- obliczać całki nieoznaczone korzystając ze wzorów • obliczać całki stosując własności całek • obliczać całki nieoznaczone stosując całkowanie przez części lub podstawienie • obliczać całki oznaczone • obliczać: pole figury, objętość, długość łuku przy pomocy całki oznaczonej

III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU

1. Rozszerzenie wiedzy uczniów ponad program.
2. Rozwinięcie ich zdolności matematycznych.
3. Zainteresowanie uczniów matematyką - nietypowe zastosowania wiedzy.
4. Lepsze przygotowanie do matury.
5. Przygotowanie do studiów inżynierskich, matematycznych.

IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH

1. Organizacja zajęć

W osiągnięciu celów niemałą rolę odgrywają formy organizacyjne nauczania. Na zajęciach będą wykorzystywane następujące formy:

- Praca z całą grupą, pozwalająca na pracę wspólnie z całą grupą nad sformułowanym zadaniem - sprzyja to wytwarzaniu się wspólnych postaw i przekonań
- Praca w grupach - rozwiązywanie przez 2-3 osobowe zespoły problemu wspólnego dla wszystkich zespołów. Po rozwiązaniu problemu odbywa się wspólna dyskusja, której celem jest uzgodnienie i usystematyzowanie wyników uzyskanych przez zespoły. Odmianą tej formy może być praca w grupach nad różnymi problemami. Praca w grupach ma pozytywny wpływ na rozwój umysłowy słabszych uczniów, a uczniom dobrym daje satysfakcję- możliwość

współdziałania z rówieśnikami, zwiększa motywację do pracy i zaangażowanie uczniów. Kształci umiejętność pracy w zespole.

- Praca indywidualna- uczeń samodzielnie pracuje nad rozwiązaniem zadania, ma przy tym możliwość korzystania z pomocy nauczyciela. Praca indywidualna przyzwyczajają uczniów do samodzielnego poszukiwania odpowiedzi na pytania sformułowane przez nauczyciela, autorów podręcznika czy samego ucznia. Wyrabia nawyk dokładnego i starannego wykonywania powierzonego zadania.

2. Pomoce naukowe:

Podręczniki, przyrządy geometryczne, modele brył geometrycznych, karty do gry, kości do gry, monety, urny z kulami, tablice z układem współrzędnych, tablice matematyczne, komputery i ogólnodostępne programy komputerowe, kalkulatory, plansze dydaktyczne

3. Procedury osiągania celów

Formami wykorzystywanymi w procesie nauczania będą:

- dyskusje i rozmowy;
- praca wspólna całej grupy uczniów, w małych grupach lub indywidualna - pod kierunkiem nauczyciela;
- wykład i wyjaśnienia nauczyciela;
- samodzielna praca nad rozwiązaniem realistycznych problemów;
- samodzielna lub w małych grupach praca projektowa.

V. TREŚCI NAUCZANIA

Dział programowy	Forma kształcenia	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	- prawa rachunku zdań; - prawa rachunku zbiorów - dowodzenie twierdzeń, -zasada indukcji matematycznej; - definicja wartości bezwzględnej; - metody rozwiązywania i interpretacja geometryczna równań i nierówności z wartością bezwzględną;	12

2. Funkcje i ich własności	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - przekształcanie wykresów funkcji - wyznaczanie dziedziny funkcji (ze wzoru) - określanie własności funkcji z definicji; 	8
3. Funkcja liniowa	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi; układy nierówności - sposoby rozwiązywania równań z parametrem - sposoby rozwiązywania układów równań liniowych z parametrem - rozwiązywanie układów równań metodą wyznaczników (w tym trzech równań z trzema niewiadomymi) - układy równań z wartością bezwzględną - zależności funkcyjne w otaczającym nas świecie 	16
4. Funkcja kwadratowa	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - definicja i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe; - wzory Viète'a; - sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem; - graficzne rozwiązywanie równań typu: $f(x)=m$, $f(x) =m$, $f(x)=m^2$ - zależności funkcyjne w otaczającym nas świecie 	10
5. Wielomiany	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie; - sposoby rozkładu wielomianu na czynniki, twierdzenie Bézouta; - sposoby rozwiązywania równań i nierówności wielomianowych 	4

		- rozwiązywanie zadań z parametrem dotyczących wielomianów	
6. Funkcje wymierne	konwersatoria	- definicja funkcji homograficznej i jej własności, zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych; - definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych; - zadania z parametrem - zastosowanie funkcji wymiernej do zadań z kontekstem realistycznym	4
7. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	- definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym; - pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta; - tożsamości trygonometryczne; - wzory redukcyjne; - sposoby rozwiązywania równań i nierówności trygonometrycznych. - zastosowanie trygonometrii w geometrii	12
8. Ciągi liczbowe	konwersatoria	- definicja ciągu liczbowego; - definicja ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na n -ty wyraz, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego; - przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;	10

		<ul style="list-style-type: none"> - definicja granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów; - pojęcie sumy szeregu geometrycznego. 	
9. Funkcja i logarytmiczna	wykładnicza konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - funkcja wykładnicza: wykres, przekształcanie wykresu funkcji, własności funkcji - funkcja logarytmiczna: wykres, przekształcanie wykresu funkcji, własności funkcji - sposoby rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych 	6
10. Ciągłość i funkcji	poходna konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - pojęcie funkcji ciągłej; - pojęcie pochodnej, jej interpretacja geometryczna i fizyczna; - wzory do obliczania pochodnych; pochodna funkcji złożonej - związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji; - badanie przebiegu zmienności funkcji - zastosowanie rachunku pochodnych (zadania optymalizacyjne) 	8
11. Planimetria	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie i w układzie współrzędnych; definicje i własności jednokładności; - związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii; - zastosowanie twierdzenia sinusów i cosinusów do rozwiązywania zadań; - zadania na dowodzenie - pojęcie iloczynu skalarnego 	12

12.Stereometria	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule; - pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego; - przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów; - pojęcie wielościanu foremnego. - bryła wpisana w bryłę - zadania optymalizacyjne 	6
13.Geometria analityczna.	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - sposoby rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej dotyczących wektorów, prostych i okręgów - przekształcenia izometryczne - jednokładność i podobieństwo(ujęcie analityczne) 	10
14.Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> -prawdopodobieństwo całkowite - prawdopodobieństwo warunkowe - niezależność zdarzeń - Schemat Bernoulliego - najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów - Dwumian Newtona 	8
15. Liczby zespolone	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - pojęcie liczby zespolonej: ciało liczb zespolonych - interpretacja geometryczna liczb zespolonych - postać trygonometryczna liczby zespolonej; moduł i argument; wzór Moivre'a - działania na liczbach zespolonych - potęgowanie i pierwiastkowanie 	8
16. Rachunek całkowy	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> - pojęcie całki nieoznaczonej - całkowanie przez części, rozkład - całkowanie przez podstawienie 	10

		- pojęcie całki oznaczonej i jej zastosowania - przykłady obliczania całek	
Razem			144

VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń powinien umieć:

- Posługiwać się językiem zbiorów, przeprowadzać proste wnioskowanie logiczne.
- W odpowiednich sytuacjach posługiwać się pojęciem i własnościami ciągów.
- Posługiwać się pojęciem funkcji, wskazywać przykłady funkcji nieliniowych.
- Posługiwać się rachunkiem algebraicznym w zbiorze liczb rzeczywistych, stosować pojęcie przybliżenia i zaokrąglenia.
- Posługiwać się figurami płaskimi, dokonywać prostych przekształceń na płaszczyźnie.
- Planować zbieranie danych, a następnie opracować te dane w czytelny sposób.
- Dla niektórych sytuacji życiowych zbudować model liniowy i znaleźć jego rozwiązanie. Zinterpretować to rozwiązanie w odniesieniu do sytuacji realnej.
- W swoich działaniach świadomie stosować podejście algorytmiczne.
- Formułować wnioski w postaci twierdzeń.
- W swoich działaniach posługiwać się kalkulatorami lub komputerami.
- W niektórych sytuacjach zbudować model nieliniowy i zbadać go.
- Posługiwać się funkcjami liniowymi, kwadratowymi, prostymi wielomianami oraz funkcjami trygonometrycznymi.
- Rozumieć rolę i zastosowanie przykładów i kontrprzykładów w dowodzeniu twierdzeń.
- Formułować wnioski na podstawie analizy danych statystycznych i modelu zjawiska losowego.
- Przygotować i logicznie przedstawiać małą rozprawkę na wybrany temat.
- Budować modele liniowe i nieliniowe różnych zjawisk, podejmować próbę matematycznego opisu takiego modelu.
- Posługiwać się prawami logiki przy formułowaniu, przedstawianiu i uzasadnianiu hipotez.
- Znajdować dane i informacje potrzebne do wyjaśnienia tematu lub zjawiska.
- Zbadać i określić zależności między różnymi zjawiskami.

VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW

Organizowane będą testy wiedzy, konkursy dla uczniów.

VIII. EWALUACJA PROGRAMU

W miarę potrzeb uczniów program będzie ewaluowany. Dostosowywane będą treści jak również czas przeznaczony na dane zagadnienia.

IX. BIBLIOGRAFIA

- Program nauczania dla Liceum Ogólnokształcącego (WSiP 1986);
- Poradnik dla nauczyciela i program nauczania (AKADEMIA WSiP 2002);
- Program nauczania „Matematyka się liczy” (WSiP 2002);
- Program nauczania „Matematyka z plusem” (GWO);



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tezy do programu przedstawili:

Ewa Szczepańska-Malejka

Magdalena Czubaszek-Siuj

Korekta i opracowanie:

mgr Elżbieta Miterka

Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:

mgr Agnieszka Szumera

Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281