



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

**Program zajęć rozszerzających z matematyki  
w ramach projektu  
„Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”  
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r  
w I Liceum Ogólnokształcącym im. Wł. Jagielly  
w Krasnymstawie.**



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

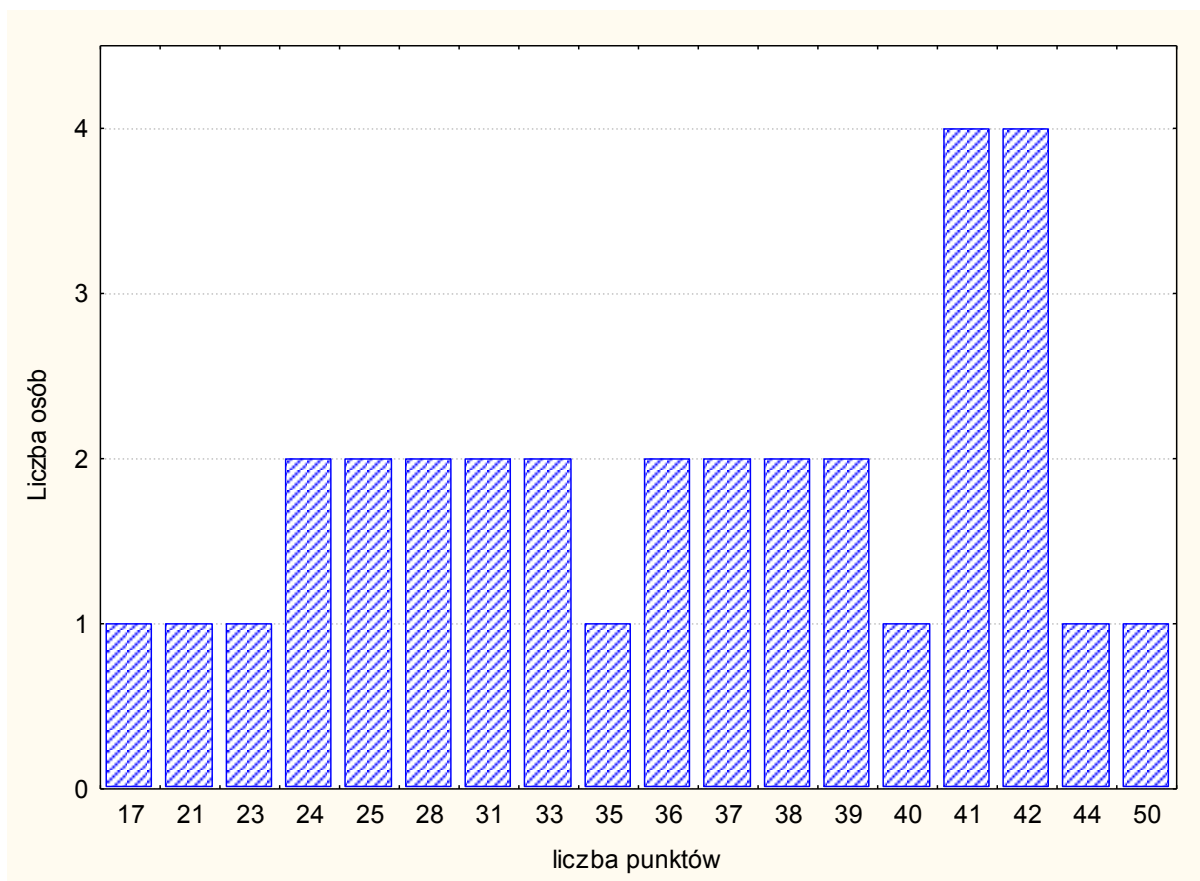
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie wzięło udział 33 osoby. 25 z nich stanowili chłopcy (76%) a 8 osoby to dziewczyny (24%). Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 34,66 punktu, co stanowi 69,32% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 37 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 17 punktów, a najwyższy to 50 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		I Liceum Ogólnokształcące w Krasnymstawie	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>34,66</b>	<b>69,32</b>
Mediana	23	46	37	74
Wynik najniższy	1	2	17	34
Wynik najwyższy	50	100	50	100
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	7,84	15,68

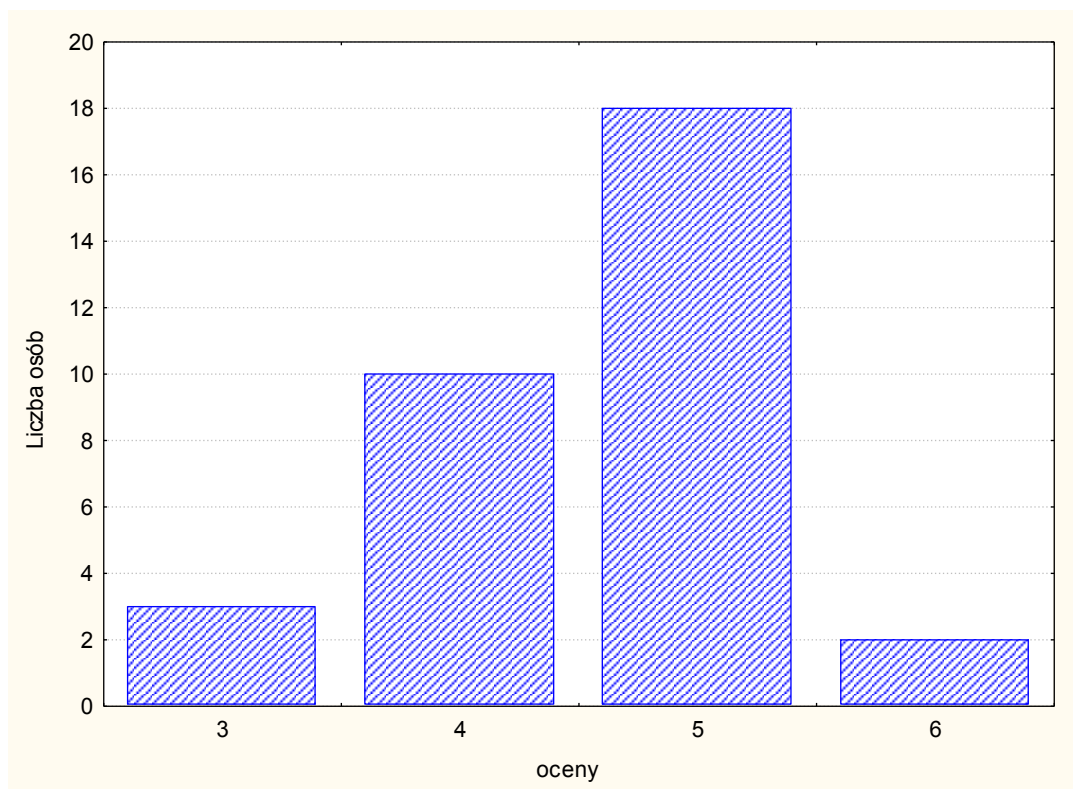
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 17 do 50.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Rozkład wyników uczniów z I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie jest prawo skośny, lekko przesunięty w stronę niższych wyników, z modalną wynoszącą 41,5 punkta.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 4,57. Nie było uczniów z oceną dopuszczającą. 3 uczniów uzyskało ocenę dostateczną (9,10%), 10 uczniów uzyskało ocenę dobrą (30,3%), 18 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą (54,55%) i 2 uczniów otrzymało ocenę celującą (6,05%).



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów I Liceum Ogólnokształcącego im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie.

Rozkład końcowych ocen gimnazjalnych uczniów z I Liceum Ogólnokształcącym im. Władysława Jagiełły w Krasnymstawie jest lekko przesunięty w stronę wyższych ocen, z modalną wynoszącą 5 (Rysunek 2).

Analiza wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników zajęć i wynikające stąd założenia wstępne zrodziły potrzebę napisania programu zajęć rozszerzających z matematyki. Treści programu będą skorelowane z treściami, które będą wprowadzane na lekcjach matematyki. Program zawiera również treści wykraczające poza standardy wymagań egzaminacyjnych na egzamin maturalny z matematyki.

## II. CELE EDUKACYJNE

### 1. Cele ogólne:

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem,
- rozwijanie umiejętności zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji,
- opanowanie umiejętności potrzebnych do oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia,
- wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowania metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych,
- rozwinięcie wyobraźni przestrzennej,
- nabycie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej,
- rozwijanie zdolności i zainteresowań matematycznych,
- rozwijanie pamięci, logicznego myślenia,
- wykształcenie umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi,
- wykształcenie umiejętności precyzyjnego formułowania wypowiedzi,
- nabycie umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania,
- pobudzanie aktywności umysłowej uczniów,
- kształtowanie odpowiedzialności za powierzone zadanie,
- kształtowanie postawy dialogu i kultury dyskusji,
- kształtowanie wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych,
- wyrabianie systematyczności w pracy,
- nabycie umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki, pracy w zespole, dbania o estetykę,
- kształtowanie postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych,
- kształtowanie pozytywnych podstaw etycznych.

Opracowany program zajęć rozszerzających ma na celu:

- a) Wyróżnić wiadomości i umiejętności uczniów z różnych gimnazjów.
- b) Utrwalić wiadomości i umiejętności zdobyte na lekcjach.
- c) Poszerzyć wiedzę zdobywaną w trakcie edukacji szkolnej.
- d) Dobrze przygotować do konkursów matematycznych, egzaminu maturalnego oraz przyszłego studiowania.

### 2. Cele szczegółowe:

1. Elementy logiki. Zbiory. Zbiory liczbowe.

Uczeń:

- potrafi negować zdania złożone z koniunkcji i/lub alternatyw zdań;

- potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego;
- potrafi stosować działania na zbiorach do wnioskowania na temat własności tych zbiorów;
- potrafi określić dziedzinę i zbiór elementów spełniających formę zdaniową, zawierającą wyrażenia wymierne lub pierwiastek stopnia drugiego;
- zna prawa De Morgana dla zdań z kwantyfikatorem;
- potrafi podać negację zdania z kwantyfikatorem i ocenić jej wartość logiczną;
- potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne;
- potrafi wnioskować o wartościach zdań składowych wybranych zdań złożonych na podstawie informacji o wartościach logicznych zdań złożonych;
- rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę;
- potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego;
- potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów;
- potrafi podać przykłady zbiorów  $A$  i  $B$ , jeśli dana jest suma, iloczyn, albo różnica;
- zna pojęcie dopełnienia zbioru i potrafi zastosować je w działaniach na zbiorach;
- potrafi wyznaczyć dopełnienie przedziału lub dopełnienie zbioru liczbowego skończonego w przestrzeni  $\mathbf{R}$ ;
- potrafi przeprowadzić proste dowody, w tym dowody „nie wprost”, dotyczące własności liczb rzeczywistych;
- potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy podzbiórami zbioru  $\mathbf{R}$ ;
- potrafi wyznaczyć dziedzinę formy zdaniowej, w przypadku, gdy trzeba rozwiązać koniunkcję warunków;
- potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających formę zdaniową, która jest koniunkcją albo alternatywą dwóch form zdaniowych prostych.

## 2. Działania w zbiorach liczbowych.

Uczeń:

- zna i stosuje w obliczeniach zależność dotyczącą liczb naturalnych różnych od zera:  $NWD(a,b)$   $NWW(a,b) = ab$
- potrafi podać zapis symboliczny wybranych liczb: np. liczby parzystej, liczby nieparzystej, liczby podzielnej przez daną liczbę całkowitą, wielokrotności danej liczby; zapis liczby, która w wyniku dzielenia przez daną liczbę naturalną daje daną resztę;
- potrafi zapisać symbolicznie zbiór na podstawie informacji o jego elementach;

- potrafi wymienić elementy zbioru zapisanego symbolicznie;
- potrafi wykazać podzielność liczb całkowitych, zapisanych symbolicznie;
- umie podać część całkowitą każdej liczby rzeczywistej i część ułamkowa liczby wymiernej
- wie, kiedy dwa równania (dwie nierówności) są równoważne i potrafi wskazać równania (nierówności) równoważne;
- zna pojęcie równania tożsamościowego i równania sprzecznego;
- zna pojęcie nierówności tożsamościowej i nierówności sprzeczej;
- potrafi rozwiązać proste równania wymierne typu  $\frac{2}{x+7} = \frac{1}{4}$ ;  $\frac{x-5}{x-2} = 0$
- rozumie zmiany bankowych stóp procentowych i umie wyrażać je w punktach procentowych;
- potrafi zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu:  $|x-a|=b$ ,  $|x-a|<b$ ,  $|x-a|\leq b$ ,  $|x-a|>b$ ,  $|x-a|\geq b$
- potrafi na podstawie zbioru rozwiązań nierówności z wartością bezwzględną zapisać tę nierówność;
- potrafi oszacować wartość liczby niewymiernej;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, dotyczące własności liczb rzeczywistych;
- potrafi wykonać dzielenie z resztą w zbiorze liczb całkowitych ujemnych;
- potrafi rozwiązać równania z wartością bezwzględną typu:  $|x|+|y|=0$ ,
- sprawnie przekształca wyrażenia algebraiczne zawierające potęgi i pierwiastki;
- sprawnie zamienia pierwiastki arytmetyczne na potęgi o wykładniku wymiernym i odwrotnie;
- potrafi wyłączać wspólną potęgę poza nawias;
- potrafi stosować wzory skróconego mnożenia, w działaniach na wyrażeniach algebraicznych, oraz podczas usuwania niewymierności z mianownika ułamka;
- potrafi rozłożyć wyrażenia na czynniki metodą grupowania wyrazów lub za pomocą wzorów skróconego mnożenia;
- potrafi oszacować wartość potęgi o wykładniku rzeczywistym;

### 3. Funkcja i jej własności.

Uczeń:

- potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków;
- potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji opisanej wzorem;
- potrafi stosować wiadomości o funkcji do opisywania zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym;
- potrafi podać opis matematyczny prostej sytuacji w postaci wzoru funkcji;
- potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami ciągłej na podstawie

wzoru tej funkcji;

- potrafi na podstawie wykresu funkcji kawałkami ciągłej omówić takie jej własności jak: dziedzina, zbiór wartości, różnowartościowość oraz monotoniczność;
- potrafi naszkicować wykres funkcji o zadanych własnościach;
- potrafi narysować wykresy takich funkcji jak:  
 $y = \text{reszta z dzielenia } x \text{ przez } 3, y = \text{sgn}x, y = [x], y = x - [x], y = \frac{x^2}{x}, y = \sqrt{x^2}$  itp. i omówić ich własności;
- umie na podstawie definicji udowodnić, że funkcja jest rosnąca (malejąca) w danym przedziale;
- zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  sporządzić wykres funkcji:  $y = f(x - a) + b$ ;
- potrafi zapisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku przekształcenia wykresu funkcji  $f$  o dany wektor;
- potrafi na podstawie wykresu funkcji  $f$  sporządzić wykresy funkcji:  $y = |f(x)|, y = f(|x|), y = f(-x), y = -f(-x)$ ;
- potrafi wykorzystać działania na wektorach do dowodzenia różnych twierdzeń geometrycznych;
- potrafi naszkicować wykres funkcji, której sporządzenie wymaga kilku poznanych przekształceń;
- potrafi przeprowadzić dyskusję rozwiązań równania z parametrem  $f(x) = m$ , w oparciu o wykres funkcji  $f$ ;
- potrafi rozwiązać nietypowe zadania, dotyczące przekształceń wykresów funkcji o podwyższonym stopniu trudności.

#### 4. Trygonometria.

Uczeń:

- zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- potrafi określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych;
- potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych;
- potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich;
- potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych;
- potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych;
- potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych;



- potrafi rozwiązywać równania nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów;
- potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej;
- potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej;
- potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.
- potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi  $OX$ , symetria względem osi  $OY$ , symetria względem punktu  $O(0,0)$ , przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności, wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod.

## 5. Geometria płaszczyzny.

Uczeń:

- zna twierdzenia o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie;
- zna pojęcie kąta zewnętrznego wielokąta, umie uzasadnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała;
- zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną;
- potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych;
- potrafi udowodnić twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie;
- potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie;
- potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka;
- potrafi udowodnić twierdzenie o sumie kątów w trójkącie (wielokącie);
- potrafi udowodnić twierdzenia o symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych;
- wie co to jest kąt dopisany do okręgu, wie, że miara tego kąta jest równa mierze kąta wpisanego w okrąg opartego na tym samym łuku;
- umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt;

- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i opisanych na trójkącie;
- potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności;
- umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych;
- umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu;
- umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z zastosowaniem twierdzenia Talesa, twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, oraz innych twierdzeń;
- zna i rozumie definicję jednokładności;
- potrafi znaleźć obraz punktu, odcinka, prostej, kąta, wielokąta, koła w jednokładności o danym środku i danej skali;
- wie, jakim przekształceniem jest jednokładność o skali  $s=1$  i skali  $s=-1$ ;
- potrafi scharakteryzować jednokładność w zależności od skali  $s$ ;
- potrafi, na płaszczyźnie z układem współrzędnych, znaleźć obraz figury w jednokładności o środku  $O(0, 0)$  i skali  $s \neq 0$ ;
- potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące jednokładności;
- wie, jaki jest związek między jednokładnością a podobieństwem;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim i podwyższonym stopniu trudności wykorzystując cechy podobieństwa trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i inne, poznane wcześniej twierdzenia;
- zna dowód twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.
- zna pojęcie przekształcenia geometrycznego i potrafi podać przykłady przekształceń geometrycznych;
- zna i rozumie pojęcie przekształcenia izometrycznego;
- zna pojęcie przesunięcia równoległego o wektor i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w przesunięciu równoległym o wektor;
- zna pojęcie symetrii osiowej względem prostej i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w symetrii osiowej względem prostej;

- zna pojęcie symetrii środkowej względem punktu i potrafi wyznaczyć obraz figury geometrycznej w symetrii środkowej względem punktu;
- potrafi wskazać punkty stałe poznanych przekształceń geometrycznych;
- potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii osiowej względem osi  $OX$  oraz osi  $OY$ ;
- potrafi podać współrzędne punktu, który jest obrazem danego punktu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych;
- zna i rozumie pojęcie środka symetrii figury;
- zna i rozumie pojęcie osi symetrii figury;
- potrafi wyznaczyć osie symetrii i środek symetrii danej figury, a także wskazać figury środkowo i osiowo symetryczne;
- zna pojęcie kąta skierowanego;
- potrafi wyznaczyć obraz figury w obrocie dookoła punktu o dany kąt;
- potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.

## 6. Wielomiany.

Uczeń:

- potrafi rozwiązać równanie liniowe z parametrem;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem;
- potrafi rozwiązać równanie liniowe oraz nierówność liniową z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie;
- potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub nierówności z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi;
- potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną i na jego podstawie omówić własności funkcji;
- potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą;
- potrafi stosować wzory Viete'a do rozwiązywania równań i nierówności z parametrem;

- potrafi rozwiązywać różne zadania, w których występuje parametr, dotyczące własności funkcji kwadratowej;
- potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną;
- potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności pierwiastkowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- potrafi przeprowadzić dyskusję nad liczbą rozwiązań równania
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności stopnia drugiego z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego;
- potrafi badać własności funkcji kwadratowej w oparciu o odpowiednie definicje;
- potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach;
- potrafi udowodnić twierdzenie Bézout'a;
- zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- potrafi udowodnić twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki (w tym stosując "metodę prób");
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych.

## 7. Funkcje wymierne.

Uczeń:

- potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na wyrażeniach wymiernych;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z wartością bezwzględną);
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z parametrem);

- potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji wymiernej (w tym z parametrem);
- potrafi narysować wykres funkcji homograficznej z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać jej własności;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem;

## 8. Indukcja matematyczna, ciągi.

Uczeń:

- potrafi rozwiązywać równania w których występuje symbol Newtona;
- potrafi obliczać wartości wyrażeń w których występuje symbol Newtona;
- potrafi udowodnić i stosować własności symbolu Newtona;
- potrafi stosować wzór dwumianowy Newtona w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi wyznaczyć dowolny wyraz w rozwinięciu dwumianu Newtona;
- potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu;
- potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym;
- potrafi podać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
- potrafi, stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać równoważność wzoru ogólnego i rekurencyjnego danego ciągu;
- potrafi badać własności ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (np. monotoniczność ciągu, zbieżność ciągu);
- zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego;
- potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu;
- potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych;
- potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego;
- potrafi rozwiązywać różne zadania z zastosowaniem wiadomości o szeregu geometrycznym zbieżnym;
- zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu;
- potrafi udowodnić twierdzenia dotyczące własności ciągów (np. twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz inne twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych);
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach;
- wie co to jest liczba  $e$  oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą  $e$ .

## 9. Funkcje wykładnicze i logarytmiczne.

Uczeń:

- potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną;
- potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych;
- potrafi rozwiązywać równania wykładniczo – potęgowo – logarytmiczne;
- potrafi narysować zbiór punktów płaszczyzny spełniający dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi w których występują logarytmy;
- potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość funkcji);
- potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej;

## 10. Granica, ciągłość i pochodna funkcji.

Uczeń:

- potrafi uzasadnić (powołując się na definicję Heinego), że nie istnieje granica funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności);
- potrafi wyznaczać asymptoty ukośne wykresów funkcji;
- potrafi obliczać granice jednostronne funkcji innych niż wielomianowe i wymierne;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest ciągła;
- potrafi wykorzystać własności funkcji ciągłych do przybliżonego rozwiązywania równań;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest różniczkowalna;
- potrafi udowodnić własności pochodnej funkcji w punkcie;
- zna twierdzenie  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  i potrafi je stosować do obliczania pochodnych funkcji takich jak np.  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = x^{\frac{2}{5}}$ ;

- zna twierdzenie Lagrange'a; potrafi je zastosować do dowodu własności wiążących znak funkcji pochodnej z monotonicznością funkcji;
- potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna i rosnąca (malejąca), to pochodna  $f'$  jest nieujemna (niedodatnia);
- potrafi udowodnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji;
- potrafi udowodnić warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji;
- potrafi zbadać istnienie ekstremów globalnych funkcji ciągłej w przedziale otwartym (lub w sumie przedziałów otwartych);
- potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji wielomianowej (wymiernej) z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic, badania ciągłości, stosowania pochodnych funkcji.

## 11. Stereometria.

Uczeń:

- zna określenie i własności rzutu równoległego na płaszczyznę;
- potrafi wykorzystać własności rzutu równoległego na płaszczyznę w rysowaniu figur płaskich;
- zna określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę i potrafi go stosować np. w określaniu odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi lub w określeniu kąta między prostą a płaszczyzną;
- rozumie określenie „przekrój wielościanu” (przekrój bryły obrotowej), potrafi je stosować w rozwiązaniach zadań;
- umie zaznaczać kąty w bryłach (np. kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa);
- rozumie co to znaczy, że graniastosłup jest wpisany w walec lub opisany na walcu;
- rozumie co to znaczy, że kula jest wpisana w wielościan (walec, stożek) lub opisana na wielościanie (walcu, stożku);
- potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne, dotyczące brył, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń.

## 12. Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki.

Uczeń:

- umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne;
- umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa;
- umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań;

- umie udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki z definicji prawdopodobieństwa;
- umie udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite;
- wie i rozumie na czym polega niezależność  $n$  zdarzeń;
- zna i stosuje twierdzenie o liczbie sukcesów w schemacie Bernoulliego;
- umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa;
- potrafi przeprowadzić klasyfikacje danych i przedstawić je w postaci szeregu rozdzielczego;
- potrafi odczytywać dane przedstawione w postaci szeregu rozdzielczego;
- potrafi oszacować średnią, medianę i odchylenie standardowe danych.

### 13. Geometria analityczna w przestrzeni, krzywe stożkowe.

Uczeń:

- zna równania prostej i płaszczyzny w przestrzeni;
- potrafi napisać równania prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- umie badać położenie prostych, płaszczyzn, prostej i płaszczyzny w przestrzeni.
- potrafi rozpoznać i wykreślić krzywe stopnia drugiego: parabolę, hiperbolę, elipsę, okrąg.

## III. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH

### 1. Organizacja zajęć.

Zajęcia będą odbywały się zgodnie z harmonogramem dwa razy w tygodniu po godzinie dziennie w grupie 15 osób w formie konwersatorium.

### 2. Pomoce naukowe:

- zbiory zadań, tablica interaktywna, rzutnik multimedialny, modele brył.

### 3. Procedury osiągania celów

Wybierając sposoby osiągania celów edukacyjnych, powinniśmy uwzględniać przede wszystkim możliwości i zainteresowania uczniów, nie zapominając oczywiście o zasadzie stopniowania trudności. Omawiając treści matematyczne, należy się jak najczęściej posługiwać przykładami z życia codziennego. Dobieranie interesujących przykładów rozbudza naturalną ciekawość uczniów i rozwija ich zainteresowania.

Nauczyciel powinien stosować możliwie różnorodne metody nauczania. Najskuteczniejsze są takie, które wymagają aktywnej postawy uczniów.



Najlepszym środkiem do realizowania celów edukacyjnych na lekcjach matematyki jest rozwiązywanie problemów matematycznych i zadań. Stanowi ono znakomity trening umysłu, doskonali i rozwija myślenie, uczy rozumowania oraz pobudza wyobraźnię. Ważną rolę odgrywa dyskusowanie na temat sposobu rozwiązywania zadania, a także poszukiwanie innych metod rozwiązania zadania. Powinniśmy też poświęcać trochę czasu na pracę z podręcznikiem, która pomaga nauczać czytania tekstu za zrozumieniem i kształtuje umiejętność odróżniania treści ważnych od mniej istotnych.

Warto też na zajęciach stosować formę nauczania jaką jest praca w grupach. Podczas takiej aktywności uczniowie uczą się współdziałania, dobrej organizacji pracy, kształcą umiejętności komunikowania się i argumentowania.

#### IV. TREŚCI NAUCZANIA

<b>Dział programowy</b>	<b>Forma kształcenia</b>	<b>Zakres tematyczny</b>	<b>Liczba godzin</b>
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów; b) podstawowe prawa rachunku zdań; c) zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistej; d) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych; e) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym; f) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie; g) definicja przedziału liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów, h) definicja wartości bezwzględnej; i) zasada indukcji matematycznej; j) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną; k) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;	12
2. Wielomiany i funkcje wymierne	konwersatoria	a) definicja i własności funkcji liniowej; b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe; c) wzory Viète'a; d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem; e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie; d) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki;	12

		<p>e) twierdzenie Bézouta;  f) definicja funkcji homograficznej i jej własności;  g) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;  h) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;  i) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;  j) dwumian Newtona</p>	
3. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	<p>a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;  b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;  c) tożsamości trygonometryczne;  d) wzory redukcyjne;  e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.</p>	12
4. Ciągi liczbowe	konwersatoria	<p>a) definicję ciągu liczbowego;  b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na <math>n</math>-ty wyraz, wzór na sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;  c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów;  d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;  e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów;  f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.</p>	12
5. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	<p>a) pojęcie funkcji ciągłej;  b) pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i</p>	12

		<p>fizyczna;</p> <p>c) wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;</p> <p>d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.</p>	
6. Planimetria	konwersatoria	<p>a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <p>b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury;</p> <p>d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem;</p> <p>e) cechy podobieństwa trójkątów,</p> <p>f) twierdzenie sinusów i cosinusów;</p> <p>g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń;</p> <p>h) definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę;</p> <p>i) definicję i własności jednokładności.</p>	20
7. Stereometria	konwersatoria	<p>a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p>b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p>c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>a) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p>b) pojęcie wielościanu foremego.</p>	20
8. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<p>a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń;</p> <p>b) pojęcie</p>	20

		<p>prawdopodobieństwa i jego własności;</p> <p>c) elementy statystyki opisowej:  średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).</p>	
<p>9. Geometria analityczna w przestrzeni, krzywe stożkowe</p>	<p>konwersatoria</p>	<p>a) równanie prostej i płaszczyzny w przestrzeni,  b) położenie prostych, płaszczyzn, prostej i płaszczyzny w przestrzeni,  c) krzywe drugiego stopnia, definicje i własności, sporządzanie wykresów krzywych stożkowych.</p>	<p>24</p>
<p>RAZEM</p>			<p>144</p>

## **V. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW**

Przewidywane osiągnięcia zostały określone w celach edukacyjnych.

## **VI. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW**

Analiza wyników sprawdzianów wiadomości przeprowadzanych na lekcjach, próbnych egzaminów maturalnych, konkursów, bieżące ocenianie pracy na zajęciach.

## **VII. EWALUACJA PROGRAMU**

Wyniki egzaminu maturalnego w maju 2013 roku.

## **VIII. BIBLIOGRAFIA**

- K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda – zbiór zadań do liceum i technikum, klasa I, II, III.
- A. Kiełbasa – Matura z matematyki 2010-... poziom podstawowy i rozszerzony.
- M. Orlińska – Matura 2011, matematyka – zakres rozszerzony.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Andrzej Skiba

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

