



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Program zajęć rozszerzających z matematyki  
w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”  
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r.  
w II Liceum Ogólnokształcącym im. C. K. Norwida  
w Krasnymstawie



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

Ważnym celem nauczania matematyki w liceum jest wyposażenie przyszłego absolwenta w umiejętności matematyczne niezbędne do sprostania wymogom egzaminu maturalnego z matematyki na wybranym poziomie. Dodatkowo program powinien dać zbudować solidny fundament do kontynuowania nauki na wyższych studiach.

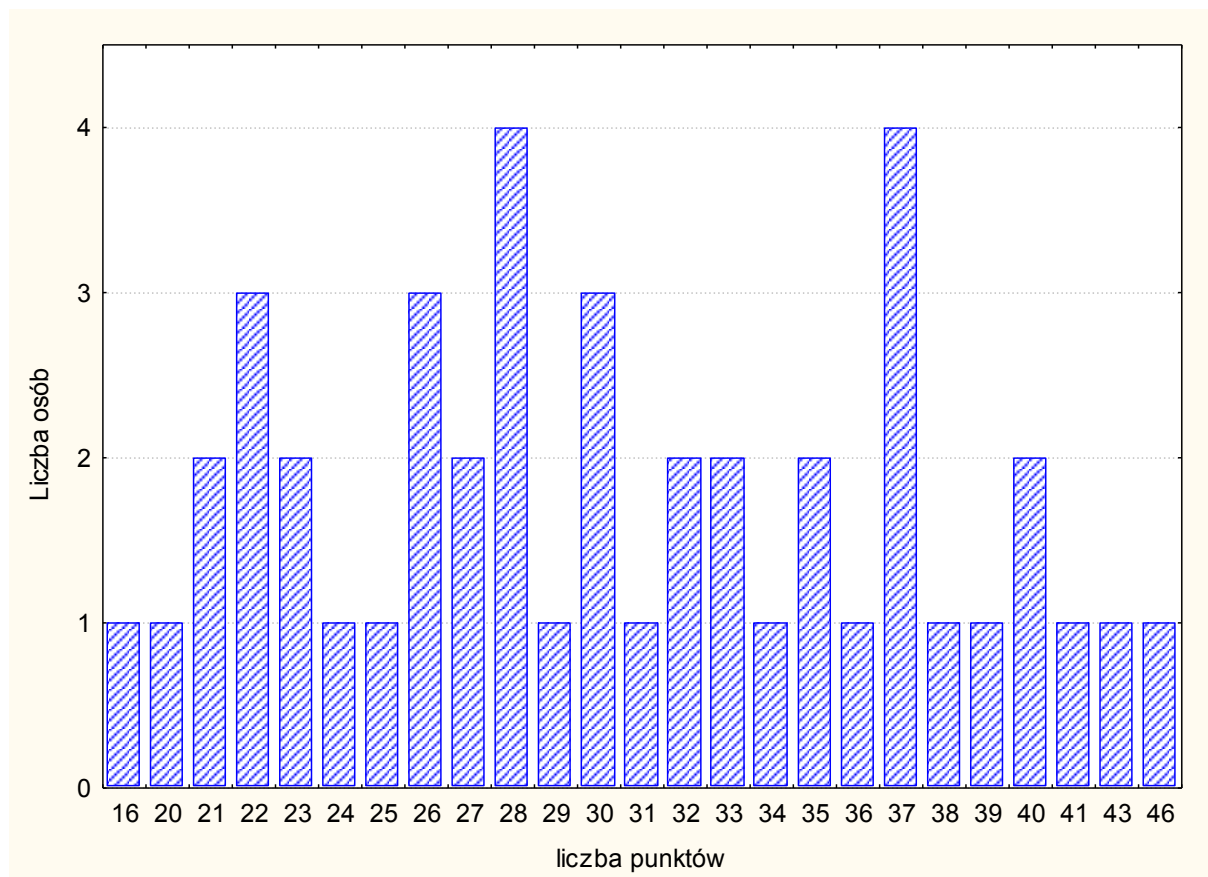
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w II Liceum Ogólnokształcącym im. C. K. Norwida w Krasnymstawie wzięło udział 44 osoby. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 30,41 punktu, co stanowi 60,82% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik nieznacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 30 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 28 i 37 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 16 punktów, a najwyższy to 46 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		II Liceum Ogólnokształcące w Krasnymstawie	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>30,41</b>	<b>60,82</b>
Mediana	23	46	30	60
Wynik najniższy	1	2	16	32
Wynik najwyższy	50	100	46	92
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	6,99	13,98

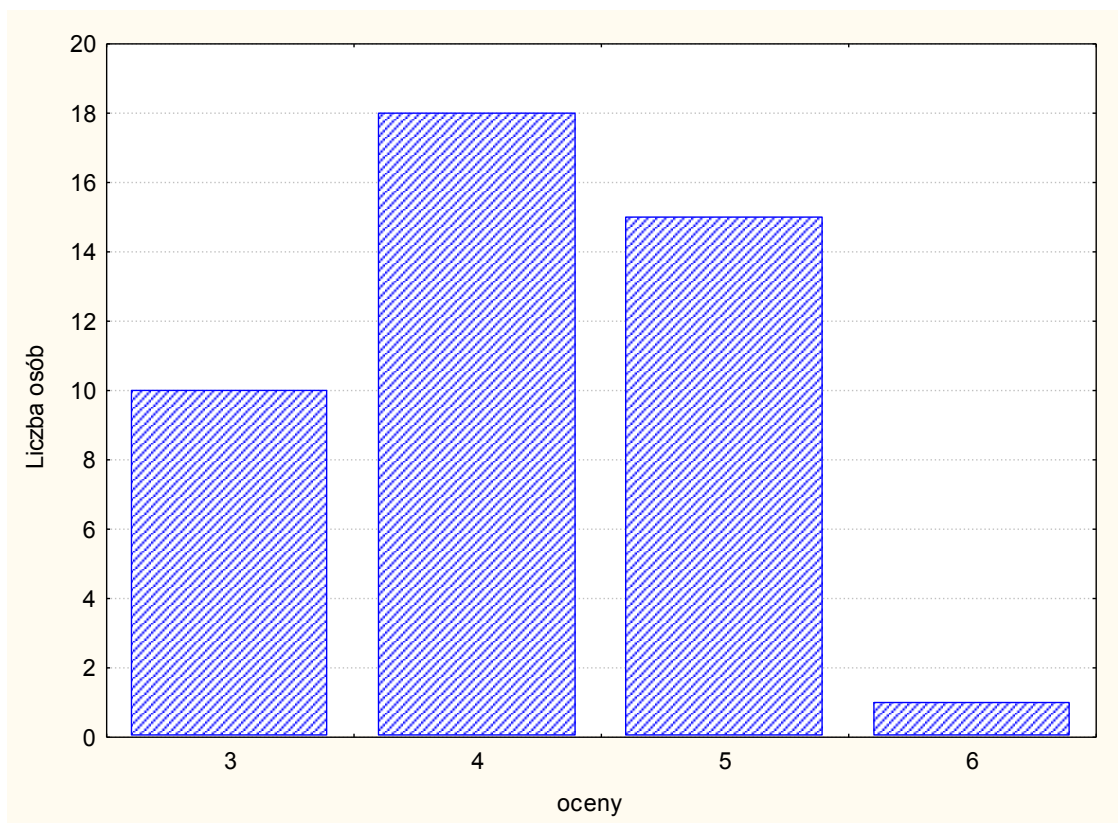
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów II Liceum Ogólnokształcącego im. C. K. Norwida w Krasnymstawie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 16 do 46.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów II Liceum Ogólnokształcącego im. C. K. Norwida w Krasnymstawie rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w II Liceum Ogólnokształcącym im. C. K. Norwida w Krasnymstawie byli rekrutowani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 4,16. Nie było uczniów z oceną dopuszczającą. 10

uczniów uzyskało ocenę dostateczną, 18 uczniów uzyskało ocenę dobrą, 15 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 1 uczeń otrzymał ocenę celującą.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów II Liceum Ogólnokształcącego im. C. K. Norwida w Krasnymstawie.

Analizując wyniki egzaminu gimnazjalnego kandydatów do naszej szkoły w roku szkolnym 2010/2011 zauważyliśmy, że przyszli uczniowie osiągnęli dobre wyniki, dające wiele możliwości dalszego rozwoju. Nasz program zajęć przewiduje, że w czasie spotkań uczniowie będą poszerzali i pogłębiali wiedzę oraz umiejętności nabyte w czasie lekcji matematyki. Realizowane będzie to poprzez poznawanie nowych (wykraczających poza podstawę programową) treści oraz poprzez rozwiązywanie trudniejszych problemów związanych z tematami omawianymi w ramach lekcji. Matematyka jako jeden z głównych przedmiotów nauczania w szkole musi nie tylko dawać uczniowi umiejętności dotyczące treści matematycznych, ale również rozwijać myślenie i osobowość. Zorganizowanie dodatkowych, pozalekcyjnych zajęć dla uczniów interesujących się matematyką ma służyć

tym właśnie celom. Na zajęcia te uczęszcza młodzież utalentowana, pragnąca rozwijać swoje zainteresowania i poszerzać swoją wiedzę, dlatego zajęcia powinny być ciekawe, urozmaicone, uczeń powinien czuć się swobodnie.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **1. Cele ogólne:**

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- Rozwijanie zainteresowań matematycznych
- Uczenie się z wykorzystaniem różnych źródeł informacji
- Logiczne argumentowanie i matematyzowanie rzeczywistości z użyciem pojęć i języka matematyki
- Przeprowadzanie analizy i syntezy nietypowych zadań i sprawne ich rozwiązywanie
- Formułowanie twierdzeń, logiczne ich przekształcanie oraz sprawdzanie na przykładzie
- Zapoznanie z zagadnieniami wykraczającymi poza program nauczania
- Zapewnienie optymalnych warunków przygotowania się do konkursów
- Uczenie wytrwałości w wysiłku umysłowym, dociekliwości w stawianiu pytań i szukaniu odpowiedzi
- Uczenie właściwego planowania, organizacji i samodzielności pracy oraz odpowiedzialności za jej wyniki

Opracowany program zajęć rozszerzających ma na celu :

w zakresie rozwoju intelektualnego ucznia (cele związane z kształceniem):

- rozwijanie umiejętności czytania tekstu ze zrozumieniem,
- rozwijaniu umiejętności zdobywania, porządkowania, analizowania, przetwarzania informacji,
- opanowaniu umiejętności potrzebnych do oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia,
- wykształceniu umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowaniu metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych,
- rozwinięciu wyobraźni przestrzennej,
- nabyciu umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej,
- rozwijaniu zdolności i zainteresowań matematycznych,

- rozwijaniu pamięci,
- rozwijaniu logicznego myślenia,
- wykształceniu umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi,
- precyzyjnemu formułowaniu wypowiedzi,
- pobudzeniu aktywności umysłowej uczniów,
- nabyciu umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania,

w zakresie kształtowania postaw (cele związane z wychowaniem):

- kształtowaniu odpowiedzialności za powierzone zadania,
- kształtowaniu postawy dialogu i kultury dyskusji (komunikacja),
- kształtowaniu wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych,
- wyrabianiu systematyczności w pracy,
- kształtowaniu pozytywnych postaw etycznych (piętnowanie nieuczciwości wyrażającej się w tzw. ściąganiu, podpowiadaniu itp.),
- nabyciu umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki,
- rozwijaniu umiejętności pracy w zespole,
- kształtowaniu postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych,
- dbaniu o estetykę (czytelny rysunek, jasne i przejrzyste rozwiązanie zadań itp.)

**2. Cele szczegółowe:**

- ELEMENTY LOGIKI I NAUKI O ZBIORACH, RELACJE.

Uczeń potrafi:

- odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi i ocenić jego wartość logiczną;
- posługiwać się funktorami logicznymi;
- negować zdanie; negować zdanie z kwantyfikatorem;
- budować zdania złożone i oceniać ich wartość logiczną;
- dowodzić prawa logiczne;
- stosować poznane prawa logiczne;
- odróżniać zdanie od formy zdaniowej;

- odróżniać definicję od twierdzenia;
- przeprowadzić prosty dowód nie wprost;
- wykorzystać język matematyki w komunikowaniu się.

- ZBIÓR LICZB RZECZYWISTYCH I JEGO PODZBIORY. DZIAŁANIA W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH I ICH WŁASNOŚCI.

Uczeń potrafi:

- posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów;
- wyznaczać część wspólną, sumę, różnicę i dopełnienie zbiorów;
- planować i wykonywać obliczenia;
- porównywać liczby wymierne; przedstawiać liczby wymierne w różnych postaciach (ułamek zwykły, liczba dziesiętna);
- wyznaczać przybliżenia danej liczby z zadaną dokładnością;
- szacować wyniki z daną dokładnością;
- sprawnie posługiwać się wzorami skróconego mnożenia;
- wykonywać działania na wyrażeniach algebraicznych;
- usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- stosować w praktyce prawa działań;
- posługiwać się procentem w zadaniach tekstowych;
- wykonywać działania na potęgach i pierwiastkach;
- odczytywać dane z tabel i diagramów statystycznych;
- przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów, wykresów;
- przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
- posługiwać się pojęciem wartości bezwzględnej;
- interpretować wartość bezwzględną na osi liczbowej;
- rozwiązywać proste równania i nierówności z wartością bezwzględną;
- korzystać z własności wartości bezwzględnej w rozwiązywaniu zadań;
- obliczać średnie.

- WEKTORY.

Uczeń potrafi:

- obliczyć współrzędne wektora i jego długość;

- dodać i odjąć wektory, pomnożyć wektor przez liczbę (syntetycznie i analitycznie);
- obliczyć współrzędne środka odcinka;
- sprawnie operować wektorami w rozwiązywaniu prostych zadań z geometrii analitycznej.

- FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI.

Uczeń potrafi:

- odróżniać dowolne przyporządkowanie od przyporządkowania, które jest funkcją;
- opisywać funkcje na różne sposoby (wzorem, tabelką, wykresem, grafem, opisem słownym);
- wskazać wykres funkcji liczbowej;
- wyznaczyć dziedziną funkcji liczbowej;
- określić zbiór wartości funkcji (proste przykłady);
- obliczyć miejsca zerowe funkcji;
- określać z wykresu (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, różnowartościowość, znak funkcji, wartość najmniejszą i największą, parzystość, nieparzystość i okresowość);
- zbadać na podstawie definicji niektóre własności funkcji (monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, nieparzystość funkcji);
- podać opis matematyczny w postaci funkcji;
- interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji (np. dotyczące różnych zjawisk przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych itd.);
- przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru funkcji lub wykresu funkcji.

- FUNKCJA LINIOWA

Uczeń potrafi

- sporządzać wykres funkcji liniowej i odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu;



- sporządzić wykres proporcjonalności prostej oraz opisać i zastosować proporcjonalność prostą w rozwiązywaniu zadań;
- znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach;
- wyznaczyć wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy (prostopadły) do danej prostej;
- udowodnić na podstawie definicji niektóre własności funkcji liniowej (monotoniczność, różnowartościowość, parzystość, nieparzystość itp.);
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą oraz układów równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- układać zadania tekstowe do podanych równań i nierówności liniowych i układów równań;
- stosować funkcję liniową do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu (wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć);

- FUNKCJA KWADRATOWA

Uczeń potrafi:

- odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzorów innych funkcji;
- narysować wykres funkcji kwadratowej i zbadać jej własności na podstawie wykresu;
- napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach;
- sprawnie zamieniać jedną postać funkcji kwadratowej na drugą (postać kanoniczna, iloczynowa i ogólna);
- stosować wzory Viete'a oraz przekształcać wyrażenia tak, by wykorzystać wzory Viete'a;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- znaleźć największą oraz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;

- rozwiązywać zadania optymalizujące z wykorzystaniem własności funkcji kwadratowej;
- przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- przeanalizować zjawisko z życia codziennego opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej;
- opisać dane zjawisko za pomocą funkcji kwadratowej;
- dowodzić niektóre własności funkcji kwadratowej z wykorzystaniem definicji (parzystość, monotoniczność);

- WIELOMIANY

Uczeń potrafi:

- odróżnić wielomian od innej funkcji opisanej wzorem;
- sprawnie wykonywać działania na wielomianach;
- sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki;
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe (w tym z wartością bezwzględną);
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych;
- rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, w których potrafi zastosować poznane definicje i twierdzenia;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności wielomianów;

- ELEMENTY RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH.

Uczeń potrafi:

- rozwiązywać równania i nierówności z jedną niewiadomą oraz interpretować je graficznie;
- przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem;
- stosować poznane metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- stosować metodę wyznaczników do rozwiązywania układów równań liniowych z parametrem;

- graficznie przedstawiać równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi
- oraz opisywać podane zbiory za pomocą układów równań i nierówności z dwiema niewiadomymi;
- rozwiązywać algebraicznie i interpretować graficznie równania, nierówności oraz układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną;
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe oraz interpretować je graficznie;
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie;
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem;
- przeprowadzić dyskusję nad liczbą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem i wartością bezwzględną (na podstawie interpretacji graficznej danego zadania);
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe, również z parametrem i/lub wartością bezwzględną;

- GEOMETRIA PŁASZCZYZNY.

Uczeń potrafi:

- posługiwać się własnościami poznanych figur geometrycznych (symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, środkowych boków trójkąta itp.) w rozwiązywaniu zadań;
- określać własności podstawowych figur geometrycznych (odcinek, półprosta, kąt, wielokąt) i posługiwać się nimi;
- wyznaczać odległość: dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych);
- konstruować proste prostopadłe, równoległe, symetralną odcinka, dwusieczną kąta;
- stosować definicje i twierdzenia w rozwiązywaniu zadań;
- znajdować obraz figury w symetrii środkowej, osiowej, przesunięciu równoległym i obrocie;

- odróżnić figury środkowo i osiowo-symetryczne od innych figur;
- stosować własności poznanych przekształceń izometrycznych w zadaniach;
- określać wzajemne położenie prostej i okręgu oraz dwóch okręgów;
- posługiwać się własnościami kątów w kole;
- konstruować styczną do okręgu, okrąg wpisany i opisany na trójkącie (czworokącie);
- posługiwać się własnościami wielokątów; stosować poznane twierdzenia o wielokątach w rozwiązywaniu zadań;
- przeprowadzić pełny dowód twierdzenia;
- odróżnić równanie okręgu od innych równań;
- przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytywać współrzędne środka i promień okręgu;
- wyznaczać równanie okręgu o zadanych własnościach;
- znaleźć współrzędne punktów wspólnych dla prostej i okręgu;
- wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;
- określić wzajemne położenie dwóch okręgów opisanych równaniami;
- opisać koło o danym środku i promieniu za pomocą nierówności oraz, mając daną nierówność, narysować koło, które ta nierówność opisuje;
- wyznaczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów.

- FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE.

Uczeń potrafi:

- zamieniać miarę łukową kąta na miarę stopniową i odwrotnie;
- wyznaczać funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych;
- obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;

- obliczyć pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeżeli jest znana jedna z nich;
- stosować wzory redukcyjne;
- dowodzić tożsamości trygonometryczne;
- rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności tych funkcji;
- przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych;
- rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne.
- stosować funkcje trygonometryczne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych.

- WYRAŻENIA WYMIERNE. FUNKCJA WYMIERNA.

Uczeń potrafi:

- odróżnić na podstawie wzoru funkcję wymierną od innej funkcji;
- sprawnie wykonywać działania na wyrażeniach wymiernych;
- wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;
- podać przykład funkcji wymiernej o danej dziedzinie;
- \_ rysować wykresy funkcji homograficznych (w tym z wartością bezwzględną) i na ich podstawie opisywać własności funkcji;
- \_ rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji homograficznej;
- \_ sprawnie rozwiązywać równania i nierówności wymierne;
- \_ rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych;
- \_ rozwiązywać zadania dotyczące różnych własności funkcji wymiernych.

- CIĄGI.

Uczeń potrafi:

- określać ciąg wzorem ogólnym lub rekurencyjnym;
- wyznaczyć dowolny wyraz ciągu określonego wzorem ogólnym lub rekurencyjnym;
- narysować wykres ciągu i podać własności tego ciągu na podstawie wykresu;

- zbadać monotoniczność ciągu na podstawie definicji;
- badać na podstawie definicji, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym;
- wyznaczyć ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego;
- badać na podstawie definicji, czy dany ciąg jest ciągiem geometrycznym;
- wyznaczać ciąg geometryczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczać sumę  $n$  kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- odróżniać ciąg geometryczny od szeregu geometrycznego;
- badać warunek istnienia sumy szeregu geometrycznego;
- obliczać sumę szeregu geometrycznego;
- zamienić ułamek okresowy na zwykły;
- stosować wzór na sumę szeregu geometrycznego w zadaniach (rozwiązywanie równań, nierówności, zadań geometrycznych itp.);
- stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.

- INDUKCJA MATEMATYCZNA.

Uczeń potrafi:

- stosować zasadę indukcji matematycznej przy dowodzeniu twierdzeń dotyczących liczb naturalnych, takich jak wzory na sumę, podzielność itp.

- GRANICA CIĄGU.

Uczeń potrafi:

- wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu;
- obliczać granice ciągów zbieżnych;
- obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności.

- FUNKCJA WYKŁADNICZA I FUNKCJA LOGARYTMICZNA.

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach;
- odróżniać funkcję wykładniczą od innych funkcji;
- rysować i przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;
- opisywać własności funkcji wykładniczych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz interpretować je graficznie;
- obliczyć logarytm liczby dodatniej;
- stosować własności logarytmów w zadaniach;
- odróżniać funkcję logarytmiczną od innych funkcji;
- określać dziedzinę funkcji logarytmicznej;
- rysować i przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych;
- opisywać własności funkcji logarytmicznych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne oraz interpretować je graficznie;
- dostrzegać zastosowanie funkcji wykładniczej i logarytmicznej do opisywania zjawisk z życia;
- dowodzić własności funkcji logarytmicznych i wykładniczych (np.: parzystość czy nieparzystość funkcji).

- GEOMETRIA PŁASZCZYZNY II.

Uczeń potrafi:

- stosować twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów (twierdzenie Pitagorasa proste i odwrotne) do rozwiązywania trójkątów oraz w innych zadaniach geometrycznych;
- stosować poznane wzory do obliczania pól figur płaskich;
- obliczać pole koła, wycinka koła, długość okręgu i długość łuku okręgu;
- rozwiązywać zadania z zastosowaniem pól figur płaskich (w tym na dowodzenie);
- stosować twierdzenie Talesa proste i odwrotne;

- stosować twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta;
- rozwiązywać zadania (w tym na dowodzenie) z zastosowaniem twierdzenia Talesa;
- znaleźć obraz figury w jednokładności;
- stosować własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań;
- stosować cechy podobieństwa w zadaniach geometrycznych;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie z wykorzystaniem podobieństwa figur.

- GRANICA FUNKCJI.

Uczeń potrafi:

- obliczyć granicę właściwą oraz niewłaściwą w punkcie i nieskończoności;
- obliczyć granice funkcji na krańcach przedziałów określoności.

- CIĄGŁOŚĆ I POCHODNA FUNKCJI

Uczeń potrafi:

- zbadać ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze;
- wykorzystać własności funkcji ciągłych w zadaniach;
- obliczyć pochodną funkcji w punkcie;
- sprawnie wyznaczać funkcje pochodne danych funkcji na podstawie poznanych wzorów;
- napisać równanie stycznej do wykresu funkcji oraz rozwiązywać różne zadania z wykorzystaniem wiadomości o stycznej;
- zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej;
- wyznaczyć ekstrema funkcji różniczkowalnej;
- zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować jej wykres;
- zastosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk z życia codziennego opisanych wzorami funkcji wymiernych (w tym zadania optymalizacyjne).



- FIGURY GEOMETRYCZNE W PRZESTRZENI.

Uczeń potrafi:

- badać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- stosować w rozwiązywaniu zadań takie pojęcia jak kąt prostej z płaszczyzną, kąt dwuścienny;
- podać własności figur przestrzennych takich jak graniastosłupy, ostrosłupy czy bryły obrotowe;
- rysować siatki figur przestrzennych;
- wyznaczać przekroje płaskie wielościanów i brył obrotowych;
- wyznaczać pola i objętości brył obrotowych i wielościanów.

- RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ.

Uczeń potrafi:

- stosować wzory na liczbę permutacji, wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń oraz kombinacji;
- rozwiązywać zadania tekstowe z zastosowaniem kombinatoryki;
- określić zbiór (skończony) zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i obliczyć jego moc;
- wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa;
- stosować własności prawdopodobieństwa w zadaniach;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych za pomocą drzewa;
- obliczać prawdopodobieństwo warunkowe;
- stosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo całkowite;
- badać niezależność zdarzeń;
- stosować w zadaniach schemat Bernoullie'go;
- stosować w zadaniach takie pojęcia, jak: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, odchylenie standardowe;
- odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów;
- przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;

- przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
- porównywać i określać zależności między odczytanymi danymi;
- przetwarzać informacje.

### **III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU**

Program przygotowuje ucznia do:

- Logicznego myślenia i poprawnego wnioskowania
- Zdobywania umiejętności i wiadomości wykraczających poza podstawy programowe
- Samodzielnego podejmowania decyzji i uzasadniania swojego stanowiska przy wyborze metody rozwiązania zadania
- Stosowania nabytych umiejętności matematycznych w rozwiązywaniu problemów z innych dziedzin życia

### **IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH**

#### **1. Organizacja zajęć**

Zajęcia będą tak zorganizowane, aby uczniowie mieli jak najwięcej okazji do „odkrywania” matematyki. Zwiększy to ich zainteresowanie i motywację, a także da im sporo satysfakcji z pracy.

Realizacja programu polegać będzie przede wszystkim na rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Taka metoda nauczania ma dużo zalet: wyrabia odpowiednie umiejętności i nawyki oraz dociekliwość, rozwija twórcze myślenie i pamięć, kształtuje matematyczną intuicję, zachęca do wytrwałości. Nie można jednak ograniczać się tylko do rozwiązywania zadań. Uczeń powinien umieć samodzielnie zdobywać wiedzę i ją prezentować. W trakcie realizacji całego programu wskazane są przede wszystkim metody nauczania wyzwalające aktywność uczniów. Należy do nich praca w grupie. Podczas zajęć zorganizowanych w ten sposób uczniowie nie tylko zdobywają umiejętności matematyczne, ale także uczą się współdziałania i komunikacji w grupie. Chcemy także korzystać z nowoczesnych technik informacji. Kierować się tu trzeba możliwościami technicznymi, warto jednak dążyć

do szerszego wykorzystania zwłaszcza komputerów i kalkulatorów graficznych, a także zwykłych kalkulatorów, które obecnie są już powszechnie dostępne.

## **2. Pomoce naukowe:**

W trakcie zajęć będziemy korzystać z podręcznika, który otrzyma każdy z uczestników projektu. Chcemy także samodzielnie przygotowywać pomoce dydaktyczne: zestawy zadań, prezentacje multimedialne, plansze, wykresy. Mamy możliwość wykorzystania różnych programów komputerowych i kalkulatorów graficznych. Będziemy zachęcać uczniów do korzystania z platformy internetowej przygotowanej specjalnie dla nich w ramach tego projektu.

## **3. Procedury osiągania celów**

Chcąc osiągnąć zakładane cele będziemy:

- stopniować trudności zadań;
- indywidualizować proces nauczania;
- motywować uczniów do różnego rodzaju działalności matematycznej;
- stwarzać sytuacje problemowe;
- wykorzystywać urządzenia techniczne typu: kalkulator, kalkulator graficzny, komputer;
- zachęcać do odczytywania i interpretacji informacji z tabel, diagramów i wykresów oraz samodzielnego sporządzania tabel, diagramów i wykresów;
- utrwalanie i powtarzanie nabytych wiadomości i umiejętności;
- organizowanie akcji sprawdzających (np. poprzez udział w konkursach).

## V. TREŚCI NAUCZANIA

<b>Dział programowy</b>	<b>Forma kształcenia</b>	<b>Zakres tematyczny</b>	<b>Liczba godzin</b>
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów; b) podstawowe prawa rachunku zdań; c) zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej; d) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych; e) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym; f) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie; g) definicja przedziału liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów, h) definicja wartości bezwzględnej; i) zasada indukcji matematycznej; j) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną; k) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;	10

<p style="text-align: center;">2. Wielomiany i funkcje wymierne</p>	<p style="text-align: center;">konwersatoria</p>	<p>a) definicja i własności funkcji liniowej;  b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe;  c) wzory Viéte'a;  d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem;  e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie;  d) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki;  e) twierdzenie Bézouta;  f) definicja funkcji homograficznej i jej własności;  g) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;  h) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;  i) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;  j) dwumian Newtona</p>	<p style="text-align: center;">60</p>
<p style="text-align: center;">3. Funkcje trygonometryczne</p>	<p style="text-align: center;">konwersatoria</p>	<p>a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;  b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;  c) tożsamości trygonometryczne;  d) wzory redukcyjne;  e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.</p>	<p style="text-align: center;">10</p>

4. Ciągi liczbowe	konwersatoria	a) definicję ciągu liczbowego; b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na n-ty wyraz, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego; c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów; d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie; e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów; f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.	10
5. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	a) pojęcie funkcji ciągłej; b) pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i fizyczną; c) wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych; d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.	8
6. Planimetria	konwersatoria	a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii; c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury; d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem; e) cechy podobieństwa trójkątów, f) twierdzenie sinusów i cosinusów; g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń; h) definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę; i) definicję i własności jednokładności.	30

7. Stereometria	konwersatoria	<p>a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p>b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p>c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>a) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p>b) pojęcie wielościanu foremnego.</p>	8
8. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<p>a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń;</p> <p>b) pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności;</p> <p>c) elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).</p>	8

## VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń powinien umieć:

- posługiwać się pojęciami, własnościami i algorytmami dotyczącymi: liczb rzeczywistych, zbiorów, funkcji, funkcji liniowej i kwadratowej, równań, nierówności liniowych i kwadratowych, układów równań i nierówności, wielomianów i funkcji wymiernych, funkcji trygonometrycznych, wykładniczych i logarytmicznych, ciągów, ciągłości i pochodnej funkcji, wektorów, przekształceń izometrycznych i jednokładności, rachunku prawdopodobieństwa, stereometrii;
- stosować posiadaną wiedzę do rozwiązywania zadań praktycznych, np.: wykorzystać ciąg arytmetyczny (geometryczny) jako matematyczny model sytuacji praktycznej i rozwiązać w tym model problem; korzystać z pochodnej w wielu dziedzinach nauki (fizyki,

biologii) oraz w życiu; dokonywać obliczeń miarowych – obwodów, pól, objętości;

- formułować zależności, wyciągać wnioski i uzasadniać ich prawdziwość;
- dobierać odpowiedni model matematyczny czy algorytm do sytuacji problemowej i weryfikować uzyskane wyniki;
- stosować definicje i twierdzenia w rozwiązywaniu problemów;
- argumentować i przeprowadzać pełne rozumowanie dedukcyjne;
- wykorzystywać urządzenia techniczne, jak kalkulator graficzny, komputer.

## **VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW**

Ocena nauczyciela powinna motywować uczniów do pracy oraz wykrywać braki wiadomości i proponować odpowiednie metody uzupełniania wiadomości dla poszczególnych uczniów. Ma sprawdzić postępy ucznia uświadomić mu braki, w porę wykrywać kłopoty i trudności w opanowaniu różnych umiejętności, ale także zachęcać go do dalszej pracy i pokonywania trudności. Regularność oceniania zachęca uczniów do systematycznej pracy. Aby wnikliwie ocenić edukacyjne osiągnięcia ucznia, należy posługiwać się różnorodnymi środkami i metodami oceniania, takimi jak:

- odpowiedzi ustne (prezentacja rozwiązania zadania, dyskusja nad rozwiązaniem problemu itp.)
- praca w grupach
- aktywność na zajęciach

Ocenić podlega wówczas zaangażowanie w realizację zadań, odpowiedzialność za pracę, a także umiejętność współpracy między uczniami.

Nasze oceny będą przede wszystkim słowną informacją zwrotną dla ucznia, powinien wiedzieć, jakie umiejętności już opanował i jakie wymagają



jeszcze dopracowania. Będziemy zachęcać uczniów do samooceny i oceny kolegów, a także poddawanie się testom zewnętrznym w postaci udziału w konkursach.

## **VIII. EWALUACJA PROGRAMU**

Realizując program zajęć rozszerzających w dwóch różnych grupach zamierzamy współpracować ze sobą, wymieniać poglądy, pokonywać trudności, dzielić się doświadczeniem, aby lepiej przygotować uczniów do konkursów i w przyszłości do egzaminu maturalnego. Ponadto program ten poddawać będziemy ciągłej ewaluacji w celu dostosowania do potrzeb indywidualnych ucznia i grupy zarówno ze względu na treści kształcenia, jak i metody i formy pracy.

## **IX. BIBLIOGRAFIA**

- „Matematyka” Program nauczania w liceach i technikach Zakres rozszerzony. Krzysztof Klaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda
- „Program nauczania matematyki dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym” Wojciech Babiański, Katarzyna Hall, Dorota Ponczek
- „Matematyka z plusem” Program nauczania matematyki. Marcin Braun, Marcin Karpiński, Jacek Lech



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzi Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Anna Cichosz

Dorota Mąka

Aneta Pitucha

Maria Pliszczyńska

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

