



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Program zajęć rozszerzających z matematyki w ramach projektu**

#### **„Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”**

na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r

w II Liceum Ogólnokształcącym

im. Marii Konopnickiej w Zamościu



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

Reforma programowa nastawiona jest na powszechność kształcenia – w tym także, od kilku lat, na powszechność kształcenia matematycznego. Powszechność kształcenia odbija się negatywnie na pracy z uczniami zdolnymi, czy też wybitnymi. Tematyka zadań konkursowych jest bardzo trudna i nierutynowa, dlatego nauczyciel nie może realizować tych treści w ramach godzin lekcyjnych, przy tak małej liczbie godzin matematyki w siatkach godzin. Postanowiliśmy więc napisać taki program, który pomoże poznać uczniowi uzdolnionemu te obszary matematyczne, które dotyczą tematyki zadaniowej konkursów matematycznych.

Bezpośrednim impulsem do stworzenia programu była obserwacja uczniów, analiza wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników zajęć, u których rozpoznaliśmy zdolności matematyczne i postanowiliśmy z nimi indywidualnie popracować.

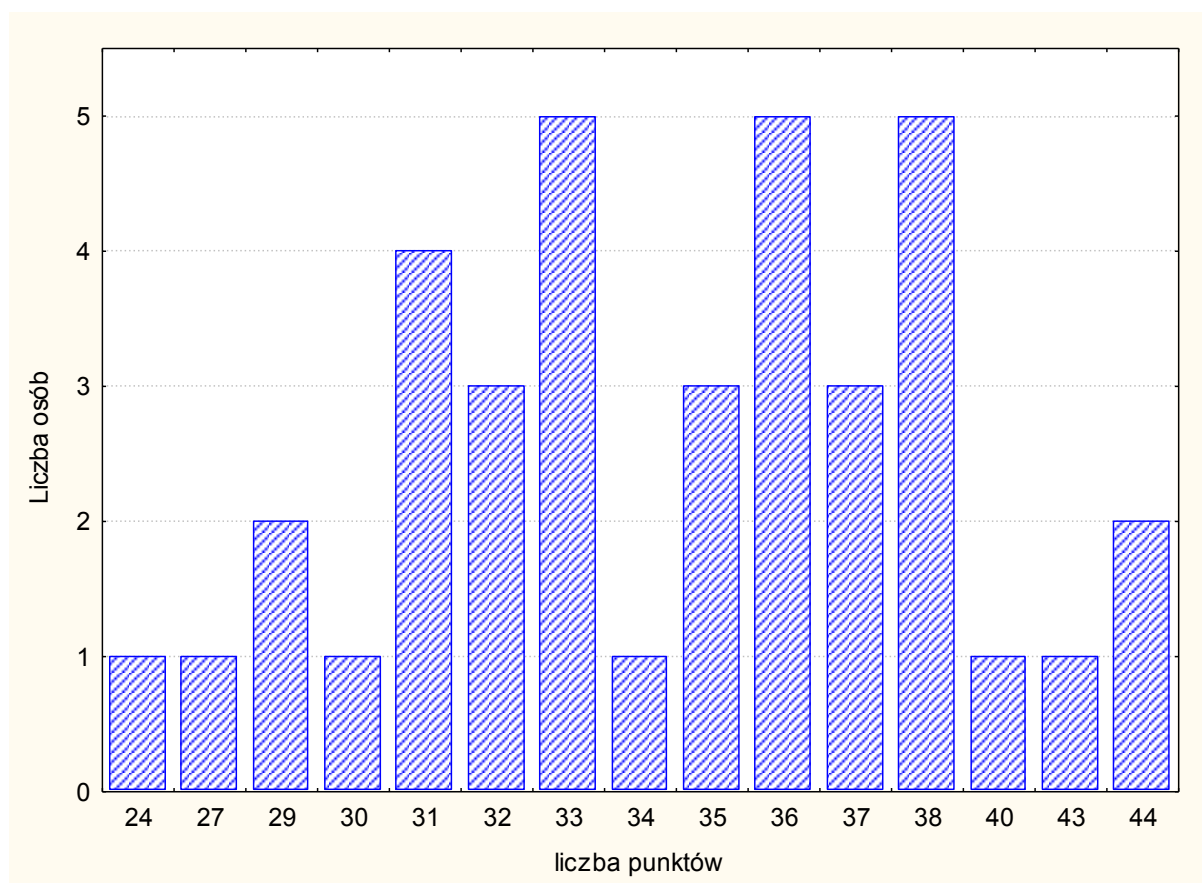
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w II Liceum Ogólnokształcącym im. Marii Konopnickiej w Zamościu wzięło udział 38 osób. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 34,6 punktu, co stanowi 69,2% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 35 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 24 punktów, a najwyższy to 44 punktów.

Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów II Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Konopnickiej w Zamościu, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 24 do 44.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		II Liceum Ogólnokształcące w Zamościu	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>34,6</b>	<b>69,2</b>
Mediana	23	46	35	70
Wynik najniższy	1	2	24	48
Wynik najwyższy	50	100	44	88
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	4,35	8,7



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów II Liceum Ogólnokształcącego im. Marii Konopnickiej w Zamościu rozwiązujących arkusz GM-1-102.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **I. Cele ogólne:**

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- przygotowanie uczniów do udziału w konkursach matematycznych, a także do egzaminów na studia matematyczne oraz przyrodnicze, zarówno uniwersyteckie, jak i politechniczne.
- umożliwienie uczniom poszerzenia i pogłębienia wiedzy z matematyki wykraczającej poza treści podstawy programowej.

Opracowany program zajęć rozszerzających ma na celu:

- Zdobyć przez ucznia wiadomości wykraczających poza program podstawy programowej.
- Nabycie przez ucznia umiejętności zauważenia zależności matematycznych.
- Nabycie przez ucznia umiejętności tworzenia matematycznego modelu.
- Nabycie przez ucznia umiejętności dostrzegania problemów.
- Nabycie przez ucznia przeprowadzania wnioskowań.
- Nabycie przez ucznia analizowania zjawisk i faktów.
- Nabycie przez ucznia umiejętności dostrzegania sprzeczności.
- Nabycie przez ucznia umiejętności przewidywania skutków wykonywanej czynności.
- Nabycie przez ucznia umiejętności przechodzenia od myślenia konkretnego na rzecz myślenia abstrakcyjnego (za pomocą symboli).
- Nabycie przez ucznia umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej (studiowanie literatury, sporządzanie notatek, korzystanie z biblioteki, Internetu itp.).
- doskonalenie posługiwania się kalkulatorem graficznym i komputerem.

### **2. Cele szczegółowe:**

Uczeń:

- potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów;
- potrafi dowodzić własności działań na zbiorach w oparciu o poznane definicje;
- potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami;

- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, w których jest mowa o własnościach liczb całkowitych;
- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb całkowitych;
- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną;
- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb rzeczywistych;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów;
- potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przykładach o podwyższonym stopniu trudności;
- posługuje się takimi własnościami wartości bezwzględnej jak:  $|x+y| \leq |x|+|y|$  oraz  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  w rozwiązywaniu zadań i dowodzeniu twierdzeń;
- zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o podwyższonym stopniu trudności;
- stosuje własności działań na wektorach w zadaniach na dowodzenie;
- potrafi sprawnie posługiwać się wektorami w dowodzeniu różnych twierdzeń;
- potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków;
- potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (nie tylko w prostych przypadkach);
- potrafi określić zbiór wartości funkcji liczbowej (nie tylko wtedy, gdy dziedzina jest zbiorem skończonym);
- potrafi badać monotoniczność funkcji liczbowej na podstawie definicji;
- potrafi badać różnowartościowość funkcji na podstawie definicji;
- potrafi badać parzystość, nieparzystość oraz okresowość funkcji na podstawie definicji;
- potrafi na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  sporządzić wykresy funkcji:  $y = |f(x)|$  oraz wykres funkcji  $y = f(|x|)$  oraz zapisać wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku tych przekształceń. potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji i ich własności;

- potrafi rozwiązać równanie linowe oraz nierówność liniową z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie;
- potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub nierówności z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi;
- potrafi rozwiązać nietypowe zadania dotyczące funkcji liniowej, o podwyższonym stopniu trudności;
- potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów;
- potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych;
- potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące wielomianów, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji wymiernych wymagające zastosowania niekonwencjonalnych metod;
- potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym;
- potrafi podać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
- potrafi, stosując zasadę indukcji matematycznej, wykazać równoważność wzoru ogólnego i rekurencyjnego danego ciągu;
- potrafi badać własności ciągu określonego wzorem rekurencyjnym (np. monotoniczność ciągu, zbieżność ciągu);

- zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego;
- potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu;
- potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych;
- potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności;
- potrafi udowodnić wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego;
- potrafi udowodnić wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego;
- potrafi udowodnić wzór na sumę  $n$  kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- potrafi udowodnić wzór na sumę  $n$  kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągów arytmetycznego i geometrycznego;
- zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu;
- potrafi udowodnić twierdzenia dotyczące własności ciągów (np. twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o zbieżności ciągu monotonicznego i ograniczonego oraz inne twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych);
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach;
- wie co to jest liczba  $e$  oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą  $e$ .
- potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną;
- potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych;
- potrafi rozwiązywać równania wykładniczo – potęgowo – logarytmiczne;

- potrafi narysować zbiór punktów płaszczyzny spełniający dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi w których występują logarytmy;
- potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość funkcji);
- potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. z zastosowaniem wiadomości o ciągach, szeregu geometrycznym itp.);
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem;
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej;
- potrafi dowodzić własności logarytmów;
- potrafi stosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń (np. dowodzenie prawdziwości nierówności, w których jest mowa o własnościach liczb naturalnych);
- zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich;
- potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych;
- potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych;
- potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów;



- potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej;
- potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się w zna dowody twierdzeń o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- zna dowód twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem poznanych wcześniej twierdzeń (m. in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i cosinusów);
- potrafi udowodnić wybrane własności jednokładności;
- umie udowodnić twierdzenie o wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną, wykorzystując podobieństwo trójkątów;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o podwyższonym stopniu, wykorzystując cechy przystawania trójkątów, twierdzenie o polach figur podobnych i inne, poznane wcześniej twierdzenia;
- umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o podwyższonym stopniu trudności;
- umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa;
- umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań “teoretycznych”;
- umie udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki z definicji prawdopodobieństwa;
- umie udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite;
- wie i rozumie na czym polega niezależność  $n$  ( $n \geq 2$ ) zdarzeń;

- umie wyprowadzić wzór na liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego;
- umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń;
- zna definicję Heinego granicy (właściwej) funkcji w punkcie; potrafi zastosować tę definicję do obliczenia granicy funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (wielomianowych i wymiernych) w punkcie, z zastosowaniem odpowiednich twierdzeń;
- zna pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i potrafi obliczać takie granice w przypadku funkcji wymiernych;
- zna pojęcie granicy funkcji w nieskończoności i potrafi obliczać tego typu granice (właściwe i niewłaściwe) w przypadku funkcji wielomianowych i wymiernych;
- zna pojęcie granic jednostronnych funkcji w punkcie i potrafi obliczać takie granice w przypadku funkcji wielomianowych i wymiernych;
- potrafi wyznaczać asymptoty pionowe i poziome wykresów funkcji wymiernych;
- zna pojęcie ciągłości funkcji (ciągłości jednostronnej) w punkcie oraz ciągłości funkcji w zbiorze;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto wzorów funkcji wymiernych (wielomianowych) jest ciągła;
- zna własności funkcji ciągłych;
- zna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji; potrafi wyznaczyć iloraz różnicowy w danym punkcie odpowiadający danemu przyrostowi argumentu;
- zna określenie pochodnej funkcji w punkcie (pochodnej jednostronnej funkcji w punkcie); potrafi – korzystając z definicji – obliczyć pochodną funkcji w punkcie;
- potrafi uzasadnić (powołując się na definicję Heinego), że nie istnieje granica funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności) z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów;
- potrafi wyznaczać asymptoty ukośne wykresów funkcji;
- potrafi obliczać granice jednostronne funkcji innych niż wielomianowe i wymierne;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic;

- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest ciągła;
- potrafi wykorzystać własności funkcji ciągłych do przybliżonego rozwiązywania równań;
- potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika ciągłość funkcji w tym punkcie;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest różniczkowalna;
- potrafi udowodnić własności pochodnej funkcji w punkcie;
- zna twierdzenie  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  i potrafi je stosować do obliczania pochodnych funkcji takich jak np.  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = x^{\frac{2}{5}}$ ;
- zna twierdzenie Lagrange’a; potrafi je zastosować do dowodu własności wiążących znak funkcji pochodnej z monotonicznością funkcji;
- zna definicję Cauchy’ego funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności) z zastosowaniem twierdzenia o trzech funkcjach;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące granic, ciągłości funkcji i rachunku pochodnych o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń;

### III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU

#### Założenia ogólne

Program jest przewidziany dla ucznia uzdolnionego matematycznie, który posiada umiejętność uogólniania, krytycyzmu, umie powiązać z sobą różne działy wiedzy matematycznej i ogólnej.

Głównym celem jest przygotowanie uczniów do udziału w konkursach i olimpiadach matematycznych, a także do ubiegania się o przyjęcie na studia matematyczne oraz przyrodnicze. Jednocześnie program zakłada umożliwienie uczniom poszerzenia i pogłębienia wiedzy z matematyki wykraczającej poza treści podstawy programowej.

## **IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH**

### **1. Organizacja zajęć**

Zajęcia odbywają się w 3 godzinnych sesjach według harmonogramu.

### **2. Pomoce naukowe:**

Kalkulator, komputer, tablica interaktywna, zasoby sieci Internet, zbiory i podręczniki do nauki matematyki.

### **3. Procedury osiągnięcia celów**

Do realizacji założeń tego programu najbardziej przydatne będą metody aktywizujące, pobudzające uczniów do samodzielnej pracy, samodoskonalenia, przygotowujące do wysiłku niezbędnego w kontynuowaniu nauki. Wśród tych metod na szczególną uwagę zasługują:

- wykład
- pokaz
- obserwacja
- algorytmizacja
- praca z lekturą matematyczną
- praca z wykorzystaniem encyklopedii, czasopism popularnonaukowych, roczników statystycznych, Internetu
- metody heurystyczne

## V. TREŚCI NAUCZANIA

Dział programowy	Forma kształcenia	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów; b) podstawowe prawa rachunku zdań; c) zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistej; d) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych; e) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym; f) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie; g) definicja przedziału liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów, h) definicja wartości bezwzględnej; i) zasada indukcji matematycznej; j) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną; k) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;	18
2. Wielomiany i funkcje wymierne	konwersatoria	a) definicja i własności funkcji liniowej; b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe; c) wzory Viéte'a; d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem; e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie; d) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki; e) twierdzenie Bézouta; f) definicja funkcji homograficznej i jej własności;	18

		<p>g) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;</p> <p>h) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;</p> <p>i) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;</p> <p>j) dwumian Newtona</p>	
3. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	<p>a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;</p> <p>b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;</p> <p>c) tożsamości trygonometryczne;</p> <p>d) wzory redukcyjne;</p> <p>e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.</p>	18
4. Ciągi liczbowe	konwersatoria	<p>a) definicję ciągu liczbowego;</p> <p>b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na <math>n</math>-ty wyraz, wzór na sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;</p> <p>c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów;</p> <p>d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;</p> <p>e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów;</p> <p>f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.</p>	18
5. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	<p>a) pojęcie funkcji ciągłej;</p> <p>b) pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i fizyczną;</p> <p>c) wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;</p> <p>d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.</p>	24

6. Planimetria	konwersatoria	<p>a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <p>b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury;</p> <p>d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem;</p> <p>e) cechy podobieństwa trójkątów,</p> <p>f) twierdzenie sinusów i cosinusów;</p> <p>g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń;</p> <p>h) definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę;</p> <p>i) definicję i własności jednokładności.</p>	15
7. Stereometria	konwersatoria	<p>a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p>b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p>c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>a) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p>b) pojęcie wielościanu foremnego.</p>	15
8. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<p>a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń;</p> <p>b) pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności;</p> <p>c) elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).</p>	18

## VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń:

- potrafi przeprowadzić dowód twierdzenia;
- potrafi dowodzić nie wprost;
- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb rzeczywistych;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów;
- potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przykładach o podwyższonym stopniu trudności;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji i ich własności
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.
- potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu;
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach;
- potrafi obliczać granice ciągów z liczbą  $e$ .
- potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej;
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności lub wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod rozwiązywania
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń (w tym twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów).
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.
- potrafi uzasadnić (powołując się na definicję Heinego), że nie istnieje granica funkcji w punkcie;



- umie obliczać granice funkcji
- potrafi wyznaczać asymptoty ukośne wykresów funkcji;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest ciągła;
- potrafi wykorzystać własności funkcji ciągłych do przybliżonego rozwiązywania równań;
- potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że z różniczkowalności funkcji w punkcie wynika ciągłość funkcji w tym punkcie;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest różniczkowalna;
- potrafi udowodnić własności pochodnej funkcji w punkcie;
- zna twierdzenie  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ,  $x > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  i potrafi je stosować do obliczania pochodnych funkcji takich jak np.  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = x^{\frac{2}{5}}$ ;
- zna twierdzenie Lagrange’a; potrafi je zastosować do dowodu własności wiążących znak funkcji pochodnej z monotonicznością funkcji;
- potrafi udowodnić twierdzenie mówiące, że jeśli funkcja  $f$  jest różniczkowalna i rosnąca (malejąca), to pochodna  $f'$  jest nieujemna (nieododatnia);
- potrafi zbadać istnienie ekstremów globalnych funkcji ciągłej w przedziale otwartym (lub w sumie przedziałów otwartych);
- potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji wielomianowej (wymiernej) z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic, badania ciągłości, stosowania pochodnych funkcji;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące granic, ciągłości funkcji i rachunku pochodnych o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

## **VIII. EWALUACJA PROGRAMU**

Wdrażanie programu wymaga ustawicznego monitorowania. Procesowi temu powinny podlegać m. in. następujące obszary: wiedza i umiejętności uczniów, trafność doboru procedur osiągania celów, środków dydaktycznych, metod oraz form pracy uczniów. Umożliwi to autorom programu doskonalenie metod osiągania celów, modyfikowanie treści.

Ewaluacja powinna mieć wymiar wieloaspektowy. Można to osiągnąć dzięki zastosowaniu metod ilościowych i jakościowych. Są wśród nich ankieta opracowana przez nauczyciela realizującego program, której adresatem są uczniowie, przeprowadzana po zakończeniu jego realizacji. Ankieta ta powinna badać przede wszystkim stopień przyswojenia treści i umiejętność ich stosowania w konkretnych sytuacjach.

Jedną z metod ewaluacji jest też udział uczniów w konkursach, zawodach matematycznych.

## **IX. BIBLIOGRAFIA**

- Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda "Matematyka- podręcznik do liceów i techników dla klas 1, 2, 3" - zakres rozszerzony,
- Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda "Matematyka- zbiór zadań do liceów i techników dla klas 1, 2, 3" - zakres rozszerzony,
- Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda "Matematyka- program nauczania w liceach i technikach",
- Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda „Analiza Matematyczna dla licealistów”.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Krystyna Misztal

Mirosław Hałasa

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

